Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 13, núm. 1, 1998. Pàg. 27–37.

El transport paral·lel: de Levi-Civita als nostres dies*

Carlos Currás Bosch

1 Introducció

En aquesta conferència tractarem d'una de les idees fonamentals de la geometria diferencial moderna com és el transport paral·lel en una varietat diferenciable, però per raons tant de simplicitat com, sobretot, d'intentar transmetre les idees geomètriques d'aquest concepte, ens limitarem al transport paral·lel en superfícies.

La referència principal utilitzada és el llibre de Tullio Levi-Civita *Lezzioni di calcolo differenziale assoluto* de 1925. Sobre aquest llibre podem dir, seguint Levi-Civita, que els seus pilars bàsics són el concepte de mètrica segons Riemann i «una fórmula» de Christoffel. Bona part del que hi ha en aquest text correspon al treball desenvolupat per Ricci de 1887 a 1896, que fou aplicat a diferents qüestions d'anàlisi, geometria i física.

Del treball conjunt de Ricci i Levi-Civita resultà «Méthodes de calcul différentiel et leurs applications» publicat a *Mathematische Annalen*, vol. 54 (1901). Aquesta obra i d'altres portaren el càlcul diferencial a un grau de desenvolupament suficient com per que Einstein trobés el bagatge matemàtic que li permeté desenvolupar la teoria de la relativitat.

2 Superfícies. Geometria intrínseca

Una superfície és una porció de $\mathbb{R}^3$ que pot ser descrita localment per un parell de paràmetres. Això ho posarem de manifest, com quasi tot el que farem, per mitjà d'un exemple ben conegut, la superfície esfèrica S^2 (figura 1).

Utilitzant un aixecament vertical des del pla equatorial a l'hemisferi nord, descrit en la forma $(x, y) \longrightarrow (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, portem les coordenades cartesianes del pla a l'hemisferi superior.

* Resum de la lliçó inaugural del curs 1996–1997 a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

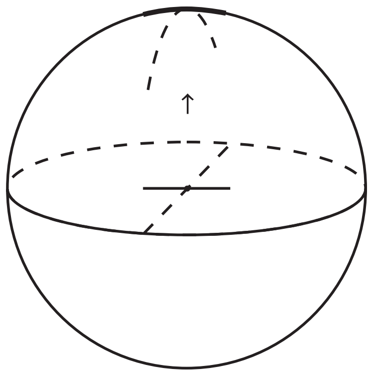

FIGURA 1

Aquest exemple ens fa comprendre la necessitat de parlar d'una descripció local (per coordenades) de la superfície, ja que la «naturalesa» d'aquesta superfície posa de manifest la impossibilitat d'una descripció global de la mateixa.

Però hem d'exigir més coses per tal de poder parlar d'una superfície. Demanarem que per aquesta assignació de coordenades la imatge de les corbes diferenciables (regulars) del pla siguin corbes diferenciables a $\mathbb{R}^3$ de la superfície. Així, per exemple, no mirarem com a superfície la regió dibuixada a la figura 2, ja que les «punxes» que poden presentar algunes corbes sobre la mateixa trenquen aquesta «regularitat».

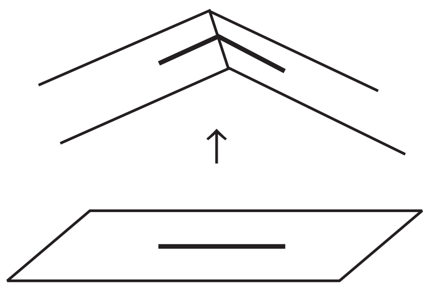

FIGURA 2

També demanarem que si prenem dues corbes, provinents de sengles direccions independents en el pla, les direccions corresponents a la superfície siguin independents, com ho eren les dibuixades abans sobre S^2.

A més, com que volem estudiar propietats invariants per transformacions que conserven la distància, pensarem que la superfície és feta d'un material flexible i inextensible.

Com treballar en una superfície

No oblidem que ens trobem a $\mathbb{R}^3$; per tant, referirem els punts de la superfície a les seves coordenades cartesianes (y^1, y^2, y^3) que seran expressades localment en funció de les dues coordenades (x^1, x^2) del pla.

Així doncs, els punts de la superfície vindran expressats per

$$y^1 = y^1(x^1, x^2), \quad y^2 = y^2(x^1, x^2), \quad y^3 = y^3(x^1, x^2).$$

Element de longitud

Siguin P i P' dos punts infinitament pròxims sobre la superfície S (figura 3).

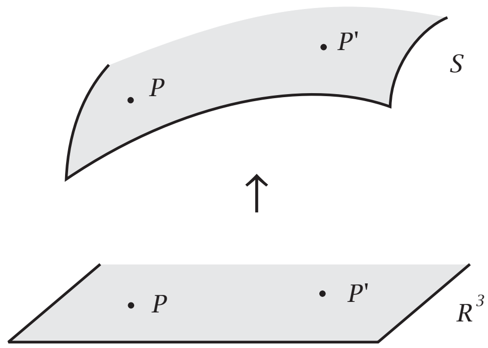

FIGURA 3

$P = (y^i) \sim (x^j)$ i $P' = (y^i + dy^i) \sim (x^j + dx^j)$.
Les lleis de derivació ens diuen:

$$dy^i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Calculant el quadrat de la distància entre P i P' tenim:

$$d^2(P, P') = ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (dy^i)^2 = \sum_{j,k=1}^{2} (\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^k}) dx^j dx^k.$$

Si fem $g_{jk} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^k}$, tenim

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{2} g_{jk} dx^j dx^k.$$

Aquesta és l'expressió general del quadrat de la distància entre dos punts infinitament pròxims. Podem pensar que al variar el punt P' variaran els valors dels dx^j. Per adonar-nos que no té res d'estrany l'expressió trobada, calculem-la en el cas que la superfície sigui el pla, i trobarem una expressió ben familiar:

Els punts del pla els podem parametritzar per

$$y^1 = x^1, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = 0$$

ara repetint el càlcul anterior trobem

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

que és l'expressió ja coneguda de la distància al quadrat en espais euclidians.

Direccions tangents en un punt d'una superfície

Siguin P i P' dos punts infinitament pròxims damunt d'una superfície S (figura 4). Com abans, $P = (y^i) \sim (x^j)$, $P' = (y^i + dy^i) \sim (x^j + dx^j)$. Si ara fem

$$\lambda^1 = \frac{dx^1}{ds}, \quad \lambda_2 = \frac{dx^2}{ds}$$

observem que si multipliquem dx^1 i dx^2 per una constant k, els valors de λ^1 i de λ^2 romanen invariants. (λ^1, λ^2) correspon doncs a un vector de longitud 1 en la direcció de la corba que uneix P amb P'. Aquests vectors ens els podem imaginar associats a totes les corbes per P, i així descrivim un pla que és el pla tangent a S en el punt P.

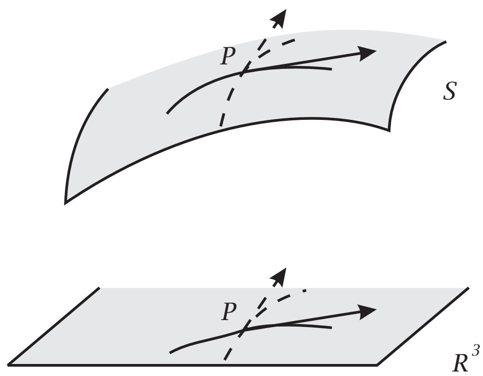

FIGURA 4

Es pot veure fàcilment que si tenim dues direccions tangents (λ^1, λ^2), (μ^1, μ^2), corresponents a dos punts infinitament pròxims a P, P' i P'', l'expressió

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \lambda^i \mu^j$$

és el cosinus de l'angle que formen aquestes direccions. Per tant, el terme ds^2 ens diu com funciona el producte escalar en cada punt de la superfície.

Propietats intrínseques

Anem ara a parlar breument del que s'entén per propietats intrínseques d'una superfície. S'anomena propietat intrínseca d'una superfície aquella que es conserva per moviments de la mateixa compatibles amb el fet de ser flexible i inextensible. Aquests moviments evitaran per tant trencaments en la superfície i també autointerseccions.

Així, per exemple, si considerem dues corbes sobre la superfície S que es tallen en el punt P i hi apliquem una deformació vàlida, és evident que se seguiran tallant.

Si entenem com a distància entre dos punts d'una superfície la més petita de les longituds dels arcs de corba que sobre la superfície uneixen aquests dos punts, com que les deformacions que apliquem són compatibles amb el fet de ser inextensible, aquestes conservaran les distàncies entre els punts i, en conservar-se les distàncies, també s'hauran de conservar els angles entre direccions tangents.

Si tenim en compte que els elements fonamentals per l'estudi de les propietats mètriques d'una figura són:

a) la distància entre punts infinitament pròxims i
b) l'angle entre dues direccions qualsevol

(ja que d'això podem deduir longituds per integració de l'element de longitud, àrees per integració d'àrees de petits rectangles, etc.), veiem, en definitiva, que el coneixement de ds^2 ens determinarà les propietats intrínseques de la superfície. Per tant «tot allò que puguem dir d'una superfície i que sigui expressable en termes de ds^2, serà intrínsec».

Superfícies desenvolupables

Per tal d'introduir la noció de transport paral·lel sobre una superfície, necessitem tractar un tipus particular de superfície que és el de les anomenades *desenvolupables*.

Aquestes són les que es poden fer coincidir, almenys localment, amb una regió d'un pla sense trencar-les ni autointersecar-les (figura 5).

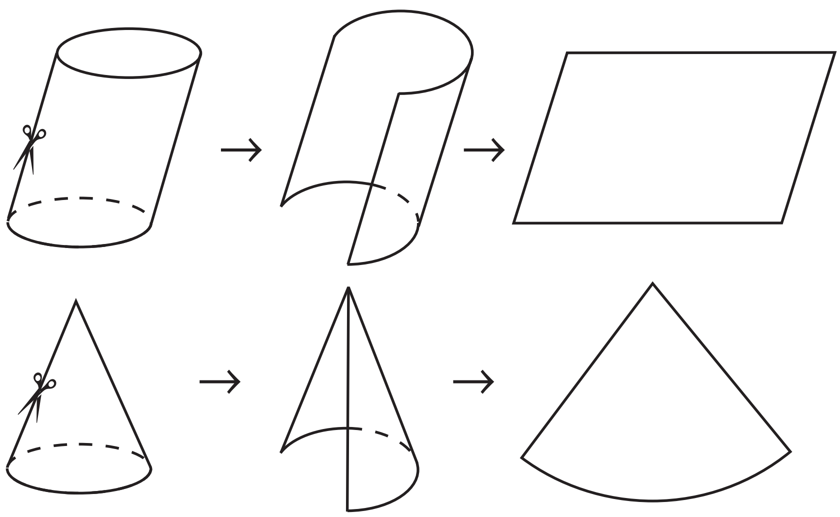

FIGURA 5

Per aquestes superfícies és evident que podem agafar coordenades locals de manera que el seu element de longitud es pot expressar com

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2.$$

Un altre exemple

Imaginem una família infinita de plans que depenen d'un paràmetre. Siguin $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots,$ plans successius d'aquesta família corresponents a increments infinitesimals del paràmetre i $g_1, g_2, g_3, \ldots$, les seves interseccions (figura 6).

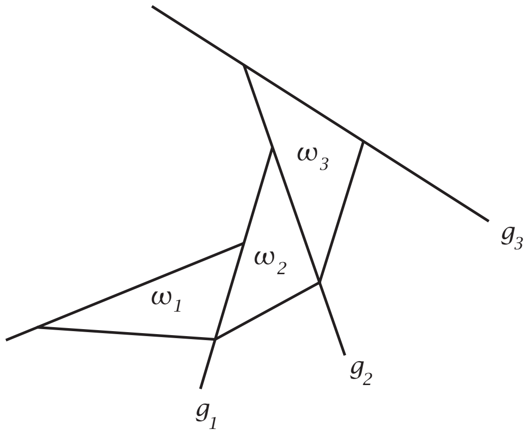

FIGURA 6

El lloc geomètric de totes aquestes línies $g_1, g_2, g_3, \ldots$, es veu que és una superfície que s'anomena superfície envolupant de la família de plans.

En una primera aproximació podem pensar la superfície com formada per infinites d'aquestes porcions planes i aplicant successives rotacions a aquestes porcions planes, primer respecte a g_1, després respecte a g_2, etc., aconseguim aplicar l'esmentada superfície en un pla, amb la qual cosa veiem que es tracta d'una superfície desenvolupable. Un bon exercici referent a aquesta qüestió pot ser trobar les superfícies generades per la família de plans tangents a la superfície esfèrica S^2 al llarg primer d'un cercle màxim (penseu en la circumferència equatorial), en aquest cas obtindrem el cilindre circumscrit a S^2, i després al llarg d'un paral·lel de S^2, cas en què obtindrem el con circumscrit a S^2 al llarg d'aquest paral·lel (figura 7).

Anem ara a parlar d'un concepte geomètric, que està implícit en tot allò fet fins ara, i que ens servirà per introduir més endavant la noció de transport paral·lel:

Superfície desenvolupable circumscrita al llarg d'una corba

Donada una corba γ en la superfície S, considerem la família de plans tangents a la superfície al llarg de γ, és a dir, que aquesta família de plans la podem pensar parametritzada amb el mateix paràmetre que γ. La superfície envolupant d'aquesta família de plans s'anomena *superfície circumscrita a S al llarg de γ* i pel que hem dit abans és una superfície *desenvolupable.* En els dos exemples abans descrits el cilindre i el con són les superfícies desenvolupables circumscrites al llarg de la circumferència equatorial i el paral·lel respectivament.

3 Transport paral·lel

Anem a introduir, seguint Levi-Civita, el transport paral·lel en una superfície de $\mathbb{R}^3$. Tot el que es pretén és estendre la noció ja coneguda de paral·lelisme en $\mathbb{R}^2$ a una superfície.

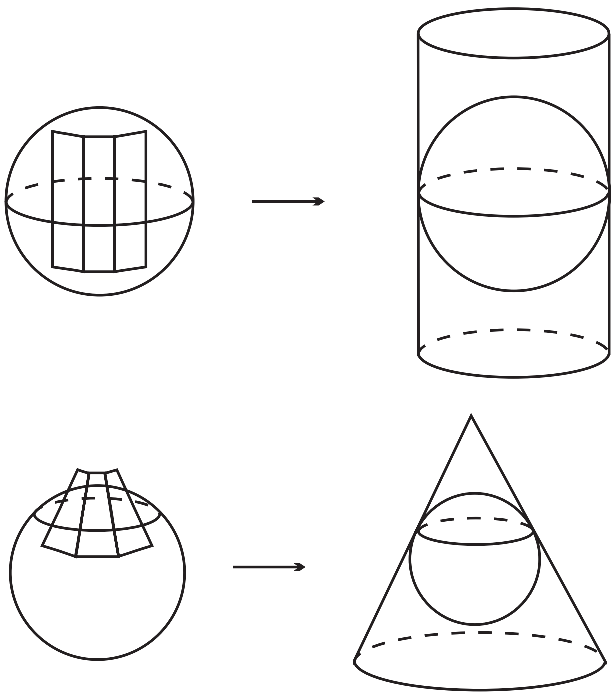

FIGURA 7

Comencem introduint aquesta noció per una superfície desenvolupable qualsevol S_d. Recordem que aquestes superfícies es poden fer coincidir, almenys localment, amb una regió de $\mathbb{R}^2$. Per tant, utilitzant aquesta transformació d'una porció de la superfície en una regió de $\mathbb{R}^2$, podrem parlar de paral·lelisme sobre la superfície.

Si intentem portar aquesta idea a una superfície qualsevol, la manera més natural sembla que sigui utilitzant la superfície desenvolupable circumscrita al llarg d'una corba, la qual cosa ens obliga, a partir d'ara, a parlar de transport *paral·lel al llarg d'una corba.* Veiem com fer-ho:

Sigui γ una corba sobre la superfície S que uneix dos punts P i P', sigui S_γ la desenvolupable circumscrita al llarg de γ. Aquesta superfície, com que ja té establerta la noció de paral·lelisme, ens permet establir vectors paral·lels a P' respecte de vectors a P. Tenim doncs definit el concepte de vector paral·lel a P' respecte d'un vector a P. El vector de P' es dirà transportat paral·lel *del vector de P al llarg de γ.*

Remarca

Com sigui que en el paral·lelisme habitual de $\mathbb{R}^2$ es conserven les normes dels vectors i també els angles que puguin formar entre ells, i en tot aquest procés el que fem és traslladar a la superfície el paral·lelisme de $\mathbb{R}^2$, veiem que en la definició que acabem de donar es conservaran també les normes i els angles.

Exemples

Considerem primer el transport paraŀlel al llarg de l'equador de S^2. Si desenvolupem el cilindre sobre el pla tal com hem fet abans, l'equador s'aplica en una línia recta. Per tant el vector tangent a l'equador serà paraŀlel al llarg de la corba i, donat que els angles es conserven, també ho serà el vector perpendicular, que sobre S^2 correspon al vector tangent al meridià. Es tracta doncs d'un transport paraŀlel que podem considerar trivial (figura 8).

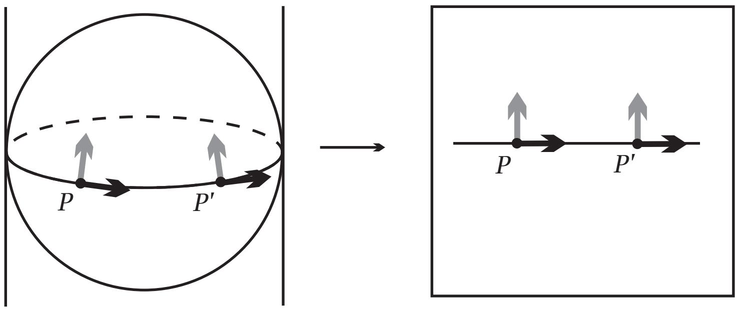

FIGURA 8

Si fem el mateix amb un paraŀlel sobre S^2, la porció de paraŀlel que considerem se'ns aplica en un arc de circumferència, tal con s'indica a la figura, i veiem que el transportat paraŀlel del vector tangent a P ja no és el vector tangent a l'arc de circumferència a P'. De fet ha experimentat una rotació, que es pot veure que depèn de l'obertura del con circumscrit i per tant de quina sigui la latitud del paraŀlel (figura 9).

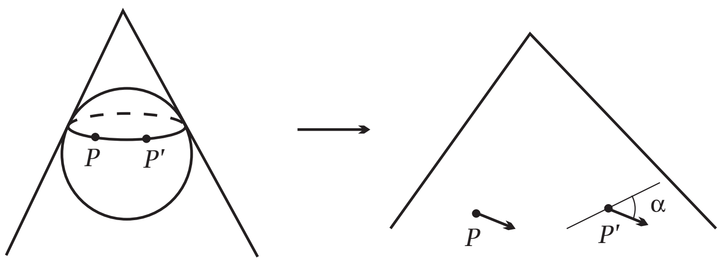

FIGURA 9

Un dels primers dubtes que tenim després de donar aquesta definició és el de l'estreta dependència del transport paraŀlel respecte del camí γ escollit. Més concretament, imaginem dos camins que uneixen P amb P' (figura 10): La «naturalesa» diferent d'aquests dos camins ens indica que possiblement el transport dependrà del camí escollit, intervenint en aquesta qüestió diferents consideracions de caire global sobre la superfície. Aquest fet no és nou; això ja és així per exemple per al concepte de treball en Física. En efecte, el treball s'obté integrant una expressió de la forma

$$X_1 dx^1 + X_2 dx^2;$$

aquesta integral entre dos punts depèn, en general, del camí escollit entre els punts. Amb el paral·lelisme succeeix quelcom semblant.

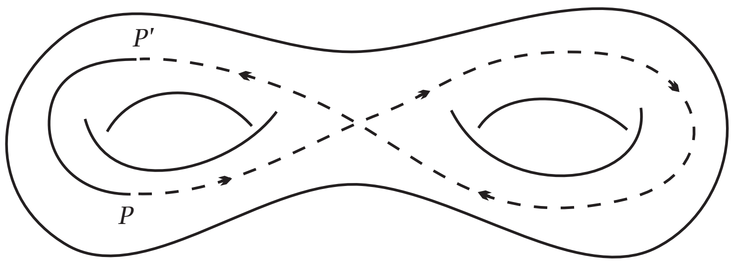

FIGURA 10

Ara bé, localment, és a dir sempre que no ens allunyem massa d'un punt donat, el transport paral·lel no depèn del camí escollit. L'enunciat clàssic d'aquest fet el podem expressar així:

El transport paral·lel entre punts infinitament pròxims només depèn de ds^2.

Anem a donar una idea de com provar-ho: S'anomena *geodèsica* a la corba tal que la longitud del seu arc entre dos punts suficientment pròxims és igual a la seva distància, és a dir, la geodèsica entre dos punts és la corba de longitud mínima entre aquests. La geodèsica es desenvoluparà sobre la superfície circumscrita en una línia recta (figura 11) i per tant la direcció tangent a una geodèsica és paral·lela al llarg de

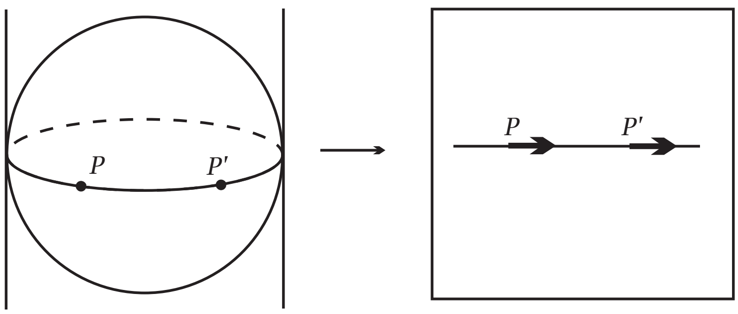

FIGURA 11

la geodèsica. Tenim doncs la següent

1 PROPIETAT *Les geodèsiques són corbes autoparal·leles i es pot veure que aquesta propietat les caracteritza.*

El fet anterior i la conservació dels angles pel transport paral·lel determina el transport paral·lel al llarg d'una geodèsica.

Siguin ara P i P' dos punts infinitament pròxims sobre S (figura 12).

La desenvolupable circumscrita a tota corba entre P i P' l'aplicarem en el pla per mitjà d'una rotació a ω' al voltant de g. Això no dependrà per tant de quina sigui

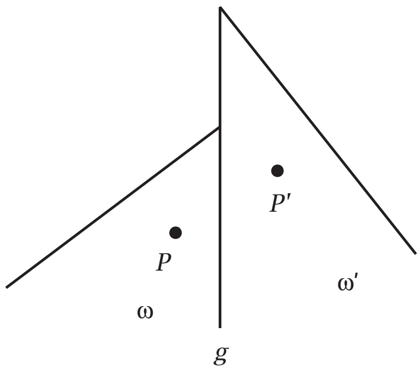

FIGURA 12

la corba entre P i P'; podem prendre doncs la geodèsica entre P i P' i el transport paral·lel al llarg d'aquesta només depèn de ds^2, ja que el fet que una corba sigui una geodèsica només depèn de ds^2.

El transport paral·lel pot servir-nos ja per adonar-nos de diferències geomètriques entre superfícies. Això és conseqüència del fet que el transport paral·lel depèn de ds^2.

Considerem primer el cilindre (recordem que és una superfície desenvolupable): si agafem la referència ortonormal $\{X, Y\}$, on Y és tangent a la recta generatriu del cilindre en el punt P, i fem el seu transport paral·lel de X al llarg del camí indicat (on t és el paràmetre lligat a la longitud de l'arc), veiem que torna a la mateixa posició, i això per petit que sigui el valor de t. Si diem $\tau_t(X)$ el transportat paral·lel observem, per exemple, que $\tau_t(X) \cdot Y = 0$, per qualsevol t (figura 13).

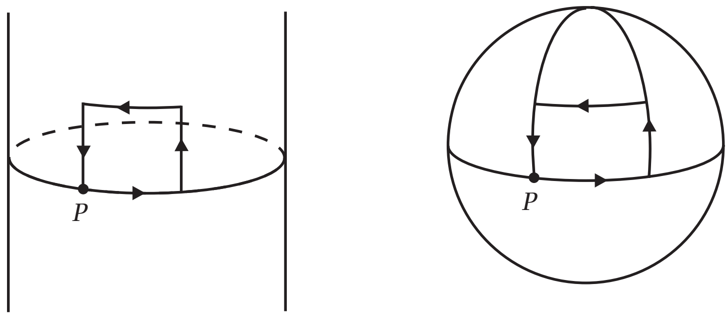

FIGURA 13

Ara bé, si fem una operació similar sobre la superfície esfèrica, només ens cal recordar la no-trivialitat del transport paral·lel al llarg dels paral·lels per comprendre que ara el producte escalar anterior $\tau_t(X) \cdot Y$ no serà zero i si ho calculem, ho dividim per t^2 i fem el límit quan $t \longrightarrow 0$, surt una quantitat constant, és a dir que no depèn del punt P que agafem.

Aquesta diferència local que hem establert entre ambdues superfícies i que és de naturalesa intrínseca, ja que com hem repetit diverses vegades el transport paral·lel entre punts pròxims només depèn de ds^2, és deguda als valors diferents de la curvatura de Gauss en ambdues superfícies. Si recordem la definició de la curvatura de Gauss, aquesta es fa emprant aspectes no intrínsecs. Això dit fins aquí es pot considerar com un apunt sobre un dels teoremes més importants de la teoría de superfícies, l'anomenat teorema *egregium* de Gauss.

Dit això, voldria comentar ràpidament com, una vegada tenim establerta la noció de transport paral·lel al llarg d'una corba, podem derivar camps vectorials respecte de vectors tangents simplement mesurant la variació del transportat paral·lel del camp al llarg de qualsevol corba integral del vector pel punt. Tenim així una llei de derivació anomenada *derivació covariant* que permet treballar sobre la superfície. S'observa llavors una dualitat entre el fet de tenir el transport paral·lel i el tenir aquesta llei de derivació.

Aquestes idees es replantegen sobre les varietats diferenciables, arribant-se al concepte de connexió lineal que permet l'estudi de les mateixes.

Departament d'Àlgebra i Geometria
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
curras@cerber.mat.ub.es