

BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Vol. 14, núm. 2, 1999. Pàg. 103-110

Representació de nombres reals mitjançant nombres de Fibonacci*

PAULO RIBENBOIM

L'objectiu d'aquesta nota és deduir una nova representació dels nombres reals positius com a suma de sèries que involucren nombres de Fibonacci. Això serà una aplicació fàcil d'un vell resultat de Kakeya [6]. L'article acaba amb un resultat de Landau [7] que relaciona la suma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$ amb valors de les sèries theta; ens sembla que val la pena desenterrar el resultat de Landau, que a hores d'ara és força inaccessible.

1. Sigui $(s_i)_{i \geq 1}$ una successió de nombres reals positius tal que $s_1 > s_2 > s_3 > \dots$ i $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = 0$. Sigui $S = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \leq \infty$.

Diem que $x > 0$ és representable per la successió $(s_i)_{i \geq 1}$ si $x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j}$ (amb $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$). Aleshores necessàriament $x \leq S$.

El primer resultat és degut a Kakeya; per completesa, en donem una demostració.

1 PROPOSICIÓ *Les condicions següents són equivalents:*

- 1) Tot x , $0 < x \leq S$, és representable per la successió $(s_i)_{i \geq 1}$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j}$, on i_1 és el menor índex tal que $s_{i_1} < x$.
- 2) Tot x , $0 < x < S$, és representable per la successió $(s_i)_{i \geq 1}$.
- 3) Per a tot $n \geq 1$, $s_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$.

DEMOSTRACIÓ: 1 \rightarrow 2. Això és trivial.

2 \rightarrow 3. Si existeix $n \geq 1$ tal que $s_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$, sigui x tal que $s_n > x > \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$. Per hipòtesi $x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j}$ amb $i_1 < i_2 < \dots$. Com que $s_n > x > s_{i_1}$, llavors $n < i_1$, i per tant $x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k$, la qual cosa és absurda.

3 \rightarrow 1. Essent $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = 0$, existeix el menor índex i_1 tal que $s_{i_1} < x$.

Anàlogament, existeix el menor índex i_2 tal que $i_1 < i_2$ i $s_{i_2} < x - s_{i_1}$.

Més generalment, per a tot $n \geq 1$ definim i_n com el menor índex tal que $i_{n-1} < i_n$ i $s_{i_n} < x - \sum_{j=1}^{n-1} s_{i_j}$.

Aleshores $x \geq \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j}$. Suposem que $x > \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j}$.

* Versió catalana, actualitzada per l'autor, d'un article aparegut a l'*Enseign. Math.* 31 (1985), 249-259. Traducció de XAVIER MASSANEDA.

Observem que existeix N tal que si $m \geq N$ aleshores $s_{i_m} < x - \sum_{j=1}^m s_{i_j}$. Altrament, existirien infinits índexs $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tals que $s_{i_{n_k}} \geq x - \sum_{j=1}^{n_k} s_{i_j}$. Al límit tindríem $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{i_{n_k}} \geq x - \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j} > 0$, i això és una contradicció.

Triem N minimal amb la propietat esmentada anteriorment.

Mostrem: per tot $m \geq N$, $i_m + 1 = i_{m+1}$. De fet

$$s_{i_{m+1}} < s_{i_m} < x - \sum_{j=1}^m s_{i_j},$$

de manera que, per definició de la successió d'índexs, $i_m + 1 = i_{m+1}$. Aleshores els conjunts següents coincideixen: $\{i_N + 1, i_N + 2, i_N + 3, \dots\} = \{i_N, i_{N+1}, i_{N+2}, \dots\}$.

Seguidament mostrem que $i_N = 1$. Si $i_N > 1$ considerem l'índex $i_N - 1$, i per la hipòtesi (3):

$$s_{i_N-1} \leq \sum_{k=i_N}^{\infty} s_k = \sum_{j=N}^{\infty} s_{i_j} < x - \sum_{j=1}^{N-1} s_{i_j}.$$

Tenim $i_{N-1} \leq i_N - 1 < i_N$. Si $i_{N-1} < i_N - 1$ això és impossible, ja que i_N ha estat definit com el menor índex tal que $i_{N-1} < i_N$ i $s_{i_N} < x - \sum_{j=1}^{N-1} s_{i_j}$. Així $i_{N-1} = i_N - 1$, és a dir, $s_{i_{N-1}} < x - \sum_{j=1}^{N-1} s_{i_j}$ i això va en contra de l'elecció de N com a minimal amb la propietat indicada.

Per tant $i_N = 1$ i $x > \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i = S$, en contra de la hipòtesi. \square

Fixem-nos que si les condicions anteriors se satisfan per a la successió $(s_i)_{i \geq 1}$, aleshores si $m \geq 0$ tot x , $0 < x < S' = \sum_{i=m+1}^{\infty} s_i$, és representable per la successió $(s_i)_{i \geq m+1}$ amb i_1 el menor índex tal que $m + 1 \leq i_1$ i $s_{i_1} < x$.

Efectivament, la condició (3) se satisfà per a $(s_i)_{i \geq 1}$, i aleshores també per a $(s_i)_{i \geq m+1}$. Com que $0 < x < S'$, l'observació se segueix de la proposició.

La proposició 1 ha estat generalitzada (vegeu, per exemple, Fridy [5]). Considerem ara la qüestió de representació única (això fou generalitzat per Brown a [3]).

2 PROPOSICIÓ *Amb les notacions anteriors, les condicions següents són equivalents:*

2') Tot x , $0 < x \leq S$, té una única representació $x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j}$.

3') Per a tot $n \geq 1$, $s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$.

4') Per a tot $n \geq 1$, $s_n = \frac{1}{2^{n-1}} s_1$ (i per tant $S = 2s_1$).

DEMOSTRACIÓ: 2' \rightarrow 3'. Suposem que existeix $n \geq 1$ tal que $s_n \neq \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$. Com que (2') implica (2), i per tant també (3), tenim $s_n < \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$. Sigui x tal que $s_n < x < \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$. Per l'observació que hem fet més amunt, x és representable per la successió $(s_i)_{i \geq n+1}$, és a dir $x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{k_j}$. Per altra part (2') implica (2), i per

tant també (1), i així x té una representació $x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j}$, on i_1 és el menor índex tal que $s_{i_1} < x$. De $s_n < x$ es dedueix que $i_n \leq n$, de manera que x tindria dues representacions, en contra de la hipòtesi.

3' \rightarrow 4'. Tenim $s_n = s_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{\infty} s_i = 2s_{n+1}$ per a tot $n \geq 1$, i per tant $s_n = \frac{1}{2^{n-1}} s_1$ per a tot $n \geq 1$.

4' → 2'. Suposem que existeix x , $0 < x < S$, amb dues representacions diferents

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} s_{i_j} = \sum_{j=1}^{\infty} s_{k_j}.$$

Sigui j_0 el menor índex tal que $i_{j_0} \neq k_{j_0}$; diguem $i_{j_0} < k_{j_0}$. Aleshores $\sum_{j=j_0}^{\infty} s_{i_j} = \sum_{j=j_0}^{\infty} s_{k_j} \leq \sum_{n=i_{j_0}+1}^{\infty} s_n$.

Per hipòtesi, després de dividir per s_1 , tenim:

$$\begin{aligned} \sum_{n=i_{j_0}}^{\infty} \frac{1}{2^n} &\geq \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{1-k_j} = \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{i-i_j} \\ &= 2^{1-i_{j_0}} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{i-i_j} = \sum_{n=i_{j_0}}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{1-i_j} \end{aligned}$$

i per tant $\sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{1-i_j} \leq 0$, la qual cosa és impossible. □

Per raons pràctiques, observem el següent: si $s_n \leq 2s_{n+1}$ per a tot $n \geq 1$, la condició (3) se satisfà. Efectivament

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} s_i \leq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} s_{i+1} = 2 \sum_{i=n+2}^{\infty} s_i,$$

i per tant $s_{n+1} \leq \sum_{i=n+2}^{\infty} s_i$ i $s_n \leq 2s_{n+1} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i$.

2. Donem ara diverses maneres de representar nombres reals.

En primer lloc, la representació diàdica, que, és clar, pot obtenir-se directament amb facilitat.

3 COROL·LARI *Tot nombre real x , $0 < x < 1$ es pot escriure de manera única de la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_j}}$ (amb $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$).*

DEMOSTRACIÓ: Això s'ha vist a la proposició 2, prenent $s_1 = 1/2$. □

4 COROL·LARI *Tot nombre real positiu x es pot escriure de la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$ (amb $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$).*

DEMOSTRACIÓ: Considerem la successió $(1/n)_{n \geq 1}$, que és decreixent i amb límit 0, i observem que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ i $1/n \leq 2/(n+1)$ per a tot $n \geq 1$. Així, pel teorema de Kayeka i l'observació feta anteriorment, tot $x > 0$ és representable de la manera indicada. □

5 COROL·LARI *Tot nombre real positiu x es pot escriure de la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_{i_j}}$ (on $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ és la successió creixent dels nombres primers).*

DEMOSTRACIÓ: Considerem la successió $(1/p_i)_{i \geq 1}$, que és decreixent i amb límit 0. Tal com va demostrar Euler, $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i = \infty$. Pel teorema de Txebixev (demostració del «postulat» de Bertrand) existeix un nombre primer a cada interval $(n, 2n)$; així $p_{i+1} < 2p_i$ i $1/p_i < 2/p_{i+1}$ per a tot $i \geq 1$. Pel teorema de Kayeka i l'observació feta més amunt, cada $x > 0$ és representable de la manera indicada. □

3. Tot seguit representarem nombres reals mitjançant nombres de Fibonacci. Comencem donant algunes propietats d'aquests nombres.

Els nombres de Fibonacci són: $F_1 = F_2 = 1$ i per a tot $n \geq 3$, F_n és definit per la relació de recurrència $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Així la successió de nombres de Fibonacci és

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

En la proposició següent donem una expressió en forma tancada per als nombres de Fibonacci; aquesta expressió és deguda a Binet (1843).

Siguin $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (el nombre d'or) i $\beta = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Aleshores $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$, i per tant α, β són les arrels de l'equació $X^2 - X - 1 = 0$ i $-1 < \beta < 0 < 1 < \alpha$. Tenim:

$$6 \text{ LEMA } \textit{Per a tot } n \geq 1, F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \text{ i } \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} < F_n < \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem la successió de nombres $G_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ per a $n \geq 1$. Aleshores $G_2 = G_1 = 1$; a més,

$$\begin{aligned} G_{n-1} + G_{n-2} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n-2}(\alpha + 1) - \beta^{n-2}(\beta + 1)}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = G_n, \end{aligned}$$

ja que $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\beta^2 = \beta + 1$. Aleshores la successió $(G_n)_{n \geq 1}$ coincideix amb la successió de Fibonacci. Establím ara les estimacions. Si $n \geq 1$ llavors $(-\beta)^n = 1/\alpha^n < \alpha^{n-1} = -\alpha^n \beta = \alpha^n(\alpha - 1) = \alpha^{n+1} - \alpha^n$, i

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \leq \frac{\alpha^n + (-\beta)^n}{\sqrt{5}} < \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Anàlogament, si $n \geq 2$, llavors $(-\beta)^n = 1/\alpha^n < \alpha^{n-2} = -\alpha^{n-1}\beta = \alpha^{n-1}(\alpha - 1) = \alpha^n - \alpha^{n-1}$ i $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \geq \frac{\alpha^n - (-\beta)^n}{\sqrt{5}} > \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}}$; això també és cert quan $n = 1$. \square

Per a tot $m \geq 1$ sigui $I_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{1/m}}$. Tenim:

7 LEMA *Per a tot* $m \geq 1$, $I_m < \infty$, $I_1 < I_2 < I_3 < \dots$, i $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = \infty$.

DEMOSTRACIÓ: Tenim

$$I_m < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{\alpha^{n-1}} \right)^{1/m} = (\sqrt{5})^{1/m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{1/m}} \right)^{n-1} = \frac{(\sqrt{5})^{1/m} \alpha^{1/m}}{\alpha^{1/m} - 1},$$

si observem que $1/\alpha^{1/m} < 1$. Seguidament, tenim

$$I_{m-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{1/m-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{1/m}} = I_m.$$

Finalment,

$$I_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{1/m}} > \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{\alpha^{n+1}} \right)^{1/m} = \frac{(\sqrt{5})^{1/m}}{\alpha^{1/m}} \times \frac{1}{\alpha^{1/m} - 1};$$

per tant, $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = \infty$. \square

8 PROPOSICIÓ Per a tot nombre real positiu x existeix un únic $m \geq 1$ tal que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{F_{i_j}^{1/m}}$, però x no és de la forma $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{F_{i_j}^{1/(m-1)}}$.

DEMOSTRACIÓ: Observem primer que cadascuna de les successions $(1/F_n^{1/m})_{n \geq 1}$ és decreixent amb límit 0. Pel lema anterior, existeix $m \geq 1$ tal que $I_{m-1} < x \leq I_m$ (amb $I_0 = 0$).

Observem que $1/F_n \leq 2/F_{n+1} \leq 2^m/F_{n+1}$ per a $m \geq 1$, ja que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2F_n$. Per la proposició 1 i una observació feta anteriorment, x és representable de la forma indicada, mentre que la darrera afirmació es dedueix de $x > I_{m-1} = \sum_{i=1}^{\infty} 1/F_i^{1/m-1}$. \square

El nombre $I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$ sembla ésser força misteriós. Tal com hem vist, $\sqrt{5} < I_1 < \sqrt{5} \frac{\alpha}{\alpha-1}$. La pregunta sobre la irracionalitat de I_1 va estar molt de temps sense resposta. André-Jeannin va demostrar el 1989 que I_1 és irracional, amb un mètode reminiscent del mètode d'Aspéry per demostrar la irracionalitat de $\xi(3) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$.

4. El 1899 Landau va donar una expressió de I_1 en termes de la sèrie de Lambert i les sèries theta de Jacobi. La sèrie de Lambert és $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$; és convergent per a $0 < x < 1$, com es pot verificar fàcilment pel criteri de la raó.

Les sèries theta de Jacobi, que són d'importància crucial, per exemple en la teoria de funcions el·líptiques, es defineixen de la manera següent, per a $0 < |q| < 1$ i $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \theta_1(z, q) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{(2n-1)\pi iz} \\ &= 2q^{1/4} \sin \pi z - 2q^{9/4} \sin 3\pi z + 2q^{25/4} \sin 5\pi z + \dots \\ \theta_2(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n-1)\pi iz} \\ &= 2q^{1/4} \cos \pi z + 2q^{9/4} \cos 3\pi z + 2q^{25/4} \cos 5\pi z + \dots \\ \theta_3(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi iz} \\ &= 1 + 2q \cos 2\pi z + 2q^4 \cos 4\pi z + 2q^9 \cos 6\pi z + \dots \\ \theta_4(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi iz} \\ &= 1 - 2q \cos 2\pi z + 2q^4 \cos 4\pi z - 2q^9 \cos 6\pi z + \dots \end{aligned}$$

En particular, tenim

$$\begin{aligned} \theta_1(0, q) &= 0 \\ \theta_2(0, q) &= 2q^{1/4} + 2q^{9/4} + 2q^{25/4} + \dots \\ \theta_3(0, q) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots \\ \theta_4(0, q) &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots \end{aligned}$$

Provem a continuació el resultat de Landau.

9 PROPOSICIÓ Tenim:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} &= \sqrt{5} \left[L\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - L\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \right]. \\ 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}} &= -\sqrt{5}(1 + 2\beta^4 + 2\beta^{16} + 2\beta^{36} + \dots)(\beta + \beta^9 + \beta^{25} + \dots) \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{2} [\theta_3(0, \beta) - \theta_2(0, \beta^4)] \theta_2(0, \beta^4). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ: 1) Tenim

$$\frac{1}{F_n} = \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n - \beta^n} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{(-1)^n}{\beta^n} - \beta^n} = \frac{\sqrt{5} \beta^n}{(-1)^n - \beta^{2n}},$$

i per tant

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{1 - \beta^{4n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{(4k+2)n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(4k+2)n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{4k+2}}{1 - \beta^{4k+2}} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} + \frac{\beta^6}{1 - \beta^6} + \frac{\beta^{10}}{1 - \beta^{10}} + \dots \end{aligned}$$

Com que $|\beta| < 1$, aleshores

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}} = \sqrt{5} [L(\beta^2) - L(\beta^4)] = \sqrt{5} \left[L\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - L\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \right].$$

2) Tenim ara

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{1 + \beta^{4n+2}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n+1} (1 - \beta^{4n+2} + \beta^{8n+4} - \dots) \\ &= (-\beta + \beta^3 - \beta^5 + \beta^7 - \beta^9 + \dots) + (-\beta^3 + \beta^9 - \beta^{15} + \beta^{21} - \dots) \\ &+ (-\beta^5 + \beta^{15} - \beta^{25} + \beta^{35} - \dots) + (-\beta^7 + \beta^{21} - \beta^{35} + \beta^{49} - \dots) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Ens cal ara determinar el coeficient de β^m (per m senar), observant que, com que la sèrie és absolutament convergent, es poden reordenar els seus termes.

Si m és senar i d divideix m , llavors β^m apareix al parèntesi que comença amb $-\beta^{\frac{m}{d}}$ amb signe

$$\begin{cases} + & \text{quan } d \equiv 3 \pmod{4} \\ - & \text{quan } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Aleshores el coeficient ε_m de β^m és $\varepsilon_m = \delta_3(m) - \delta_1(m)$, on

$$\begin{aligned} \delta_1(m) &= \#\{d \mid 1 \leq d \leq m, \quad d \mid m \text{ i } d \equiv 1 \pmod{4}\} \\ \delta_3(m) &= \#\{d \mid 1 \leq d \leq m, \quad d \mid m \text{ i } d \equiv 3 \pmod{4}\}. \end{aligned}$$

Un resultat ben conegut de Jacobi (vegeu el llibre de Hardy i Wright, pàgina 241) relaciona la diferència $\delta_1(m) - \delta_3(m)$ amb el nombre $r(m) = r_2(m)$ de representacions de m com a suma de dos quadrats. Més precisament, sigui $r(m)$ el nombre de parells (s, t) de nombres enters (inclosos el zero i els enters negatius) tals que $m = s^2 + t^2$. Jacobi mostrà que

$$r(m) = 4[\delta_1(m) - \delta_3(m)].$$

Se'n dedueix que el nombre $r'(m)$ de parells (s, t) d'enters amb $s > t \geq 0$ i $m = s^2 + t^2$ és

$$r'(m) = \begin{cases} \frac{r(m)}{8} & \text{quan } m \text{ no és un quadrat} \\ \frac{r(m)-4}{8} + 1 = \frac{r(m)+4}{8} & \text{quan } m \text{ és un quadrat} \end{cases}$$

(el primer sumand correspon a la representació de m com a suma de dos quadrats no nuls). Aleshores

$$\varepsilon_m = -\frac{r(m)}{4} = \begin{cases} -2r'(m) & \text{quan } m \text{ no és un quadrat} \\ -(2r'(m) - 1) & \text{quan } m \text{ és un quadrat.} \end{cases}$$

Essent m senar tenim $s \not\equiv t \pmod{2}$, i per tant

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}} &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ senar}}}^{\infty} \varepsilon_m \beta^m \\ &= -2(1 + \beta^4 + \beta^{16} + \beta^{36} + \dots)(\beta + \beta^9 + \beta^{25} + \dots) \\ &\quad + (\beta + \beta^9 + \beta^{25} + \dots) \\ &= -(1 + 2\beta^4 + 2\beta^{16} + 2\beta^{36} + \dots)(\beta + \beta^9 + \beta^{25} + \dots). \end{aligned}$$

Així

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}} = -\sqrt{5} (1 + 2\beta^4 + 2\beta^{16} + 2\beta^{36} + \dots)(\beta + \beta^9 + \beta^{25} + \dots).$$

Ara podem expressar aquesta fórmula en termes de les sèries de Jacobi. Concretament:

$$\begin{aligned} 1 + 2\beta^4 + 2\beta^{16} + 2\beta^{36} + \dots &= (1 + 2\beta + 2\beta^4 + 2\beta^9 + 2\beta^{16} + \dots) \\ &\quad - (2\beta + 2\beta^9 + 2\beta^{25} + \dots) \\ &= \theta_3(0, \beta) - \theta_2(0, \beta^4), \end{aligned}$$

i aleshores

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} [\theta_3(0, \beta) - \theta_2(0, \beta^4)] \theta_2(0, \beta^4). \quad \square$$

Una fórmula no publicada de Gert Almquist (1983) dóna una altra expressió de I_1 en termes de sèries theta de Jacobi:

$$I_1 = \frac{\sqrt{5}}{4} \left\{ \left[\theta_2 \left(0, \frac{-1}{\beta^2} \right) \right]^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \log \theta_4 \left(x, \frac{-1}{\beta^2} \right) \right) \cot \pi x \, dx \right\}.$$

Carlitz va considerar també el 1971 els nombres següents:

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+1} \cdots F_{n+k}},$$

de manera que $S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n = I_1$.

Clarament, totes les sèries anteriors són convergents. Carlitz mostrà que $S_3, S_7, S_{11}, \dots \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, mentre que $S_{4k} = r_k + r'_k S_0$ per a $k \geq 1$ i $r_k, r'_k \in \mathbb{Q}$.

Hom pot preguntar: quina mena de nombre és S_0 ? Els nombres S_0, S_1, S_2 , són algebàricament independents?

Referències

- [1] ANDRÉ-JEANNIN, R. «Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes», *C. R. Acad. Sci. Paris Sem. I. Math.*, 308 (1989) 19, 539-541.
- [2] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B. *Pi and the AGM*. Nova York: John Wiley & sons, 1987.
- [3] BROWN, J. L. «On generalized bases for real numbers», *Fibonacci Q.*, 9 (1971), 477-496.
- [4] CARLITZ, L. «Reduction formulas for Fibonacci summations», *Fibonacci Q.*, 9 (1971), 449-466 i 510.
- [5] FRIDY, J. A. «Generalized bases for the real numbers», *Fibonacci Q.* 4 (1966), 193-201.
- [6] KAKEYA, S. «On the partial sums of an infinite series», *Science Reports Tôhoku Imp. Univ.*, (1), 3 (1914), 159-163.
- [7] LANDAU, E. «Sur la série des inverses de nombres de Fibonacci», *Bull. Soc. Math. France*, 27 (1899), 298-300.
- [8] SANSONE, G., GERRETSEN, J. *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*. Groningen: P. Noordhoff, 1960. [Vol. I]

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
QUEEN'S UNIVERSITY
KINGSTON, ONTARIO K7L3N6
CANADÀ
mastdept@qucdn.queensu.ca