Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 15, núm. 1, 2000. Pàg. 7–27

Equacions en derivades parcials, geometria i control estocàstic*

Xavier Cabré

1 Introducció

Les equacions el·líptiques completament no lineals (*fully nonlinear elliptic equations* en anglès) són equacions en derivades parcials de la forma $F(D^2u, Du, u, x) = 0$ caracteritzades per ser altament no lineals —i alhora el·líptiques— en les segones derivades D^2u de la funció incògnita $u = u(x)$. L'equació de Monge-Ampère ($\det D^2u = f(x) > 0$) i les equacions de Bellman en són exemples importants. Apareixen en diferents camps de l'anàlisi, la geometria i la teoria de probabilitats: estudi de la curvatura de varietats, optimització del transport de masses (o de l'assignació de béns en matemàtica financera), control òptim de processos estocàstics, etc.

L'any 1979 Krylov i Safonov [22, 23] van demostrar la desigualtat de Harnack per a equacions el·líptiques lineals amb coeficients mesurables, i escrites en la forma $a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x)$ (*nondivergence form elliptic equations*, en anglès). Aquest resultat important, junt amb l'estimació d'Alexandroff-Bakelman-Pucci per al mateix tipus d'equacions lineals, va permetre desenvolupar una teoria de la regularitat per a les solucions d'equacions el·líptiques completament no lineals. Van ser Evans [14] i Krylov [20, 21] qui obtingueren, cap al 1982 i de manera independent, una estimació $C^{2,\alpha}$ a l'interior per a les solucions d'equacions convexes $F(D^2u) = 0$. Aquest resultat clau va anar seguit d'altres treballs sobre l'existència i la regularitat de solucions per a equacions més generals de la forma $F(D^2u, Du, u, x) = 0$. Citem, entre altres, les contribucions de Caffarelli, P. L. Lions, Nirenberg, Safonov, Spruck, Trudinger i Urbas. L'article [7] de Caffarelli estén la teoria de Schauder i la teoria L^p de Calderón-Zygmund al context completament no lineal.

També durant els anys vuitanta, Crandall i Lions [12] i Evans [13] van desenvolupar el concepte de solució feble per a equacions completament no lineals. Es tracta de les anomenades *solucions de viscositat*, que en la teoria completament no lineal juguen el paper que les solucions d'energia tenen en la teoria d'equacions variacionals. La unicitat de solució de viscositat per al problema de Dirichlet és un resultat delicat que va ser demostrat per Jensen l'any 1988.

* Conferència pronunciada a la Segona Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans el març de 1999.

En aquestes notes començarem presentant els principals tipus d'equacions el·líptiques no lineals, per situar millor les completament no lineals. A continuació, descriurem les idees i resultats principals de la teoria de la regularitat per a equacions el·líptiques completament no lineals. Per veure exposicions molt més detallades, el lector pot consultar els llibres [10] i [17]. Indicarem també que, per a equacions $F(D^2u) = 0$ no convexes, qüestions essencials sobre la regularitat de solucions resten encara obertes. Finalment, presentarem tres aplicacions recents de la teoria completament no lineal a l'estudi del transport òptim de masses, al problema isoperimètric clàssic i als principis del màxim.

2 Equacions el·líptiques completament no lineals

2.1 Equacions semilineals, quasilineals i completament no lineals

Existeixen tres tipus principals d'equacions el·líptiques no lineals de segon ordre, que es diferencien pel seu grau (successiu) de no linearitat:

- *Equacions semilineals*, com ara
$$\Delta u = g_u(x, u)\,. \tag{1}$$
- *Equacions quasilineals*, com ara
$$\partial_i(G_{p_i}(Du)) = g_u(x, u)\,. \tag{2}$$
- *Equacions completament no lineals*
$$F(D^2u, Du, u, x) = 0$$
com, per exemple, l'equació de Monge-Ampère
$$\det D^2u = f(x) > 0\,. \tag{3}$$

Aquí i al llarg d'aquestes notes, $u = u(x)$ és una funció real, definida en un domini (i. e., un obert connex) Ω de $\mathbb{R}^n$. Seguint la convenció habitual, no escrivim els sumatoris per a índexs repetits; per exemple, $\Sigma_{i=1}^n$ a (2). Denotem per

$$D^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = (\partial_{ij}u)$$

la matriu hessiana de u, i per $\Delta u = \partial_{11}u + \cdots + \partial_{nn}u$ el laplacià de u. Hem designat també per a g_u la derivada de g respecte la variable u, i per G_{p_i} les primeres derivades parcials de la funció $G = G(p)$, $p \in \mathbb{R}^n$.

El laplacià Δu, que apareix a (1), és lineal en la solució u. L'operador

$$\partial_i(G_{p_i}(Du)) = G_{p_i p_j}(Du)\,\partial_{ij}u$$

en l'equació (2), en canvi, no és lineal en u, però és lineal com a funció de les segones derivades de u. Finalment, l'operador de Monge-Ampère $\det D^2u$ no és lineal en les segones derivades de u.

Les equacions semilineals i quasilineals són sovint les equacions d'Euler-Lagrange d'un funcional del tipus

$$I(u) = \int_\Omega L(Du(x), u(x), x)\,dx\,,$$

on L s'anomena *lagrangià* (vegeu [15], [17] o [25] per a més detalls). Per exemple, l'equació de Poisson no lineal (1) és l'equació d'Euler-Lagrange de I, que correspon al lagrangià $L = (1/2)|Du|^2 + g(x, u)$. Això es comprova fàcilment si es fa la derivada de $I(u + \varepsilon v)$ respecte a ε, posant $\varepsilon = 0$ i finalment s'integra per parts. D'altra banda, l'equació quasilineal (2) correspon al lagrangià $L = G(Du) + g(x, u)$. Quan G és quadràtica s'obté, per tant, l'operador laplacià. A la secció 2.2 estudiarem l'el·lipticitat de (1), (2) i (3). A la secció 2.3 presentarem exemples concrets d'aquests tipus d'equacions.

En escriure les equacions d'Euler-Lagrange de I, usem la tècnica d'integració per parts i, per tant, els termes de segon ordre d'aquestes equacions sempre s'escriuen en forma de divergència. Per exemple, a (1) tenim $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \operatorname{div} Du$, mentre que el primer membre de (2) es reescriu $\operatorname{div} DG(Du)$. Aquestes equacions s'anomenen, per tant, *equacions el·líptiques en forma de divergència*, o també *equacions el·líptiques variacionals*, i ja disposaven als anys seixanta d'una teoria d'existència, unicitat i regularitat de solucions. Els resultats d'existència estan basats en els mètodes clàssics del càlcul de variacions; és a dir, la minimització del funcional I —sovint anomenat funcional d'energia en teoria d'equacions en derivades parcials. Les nocions de solució feble (solucions distribucionals i solucions d'energia) es basen essencialment en la tècnica d'integració per parts. Les qüestions sobre la regularitat de solucions tenen les desigualtats de Sobolev com a eina essencial, i han estat desenvolupades durant el segle XX per molts autors (vegeu [17] per a una exposició detallada). Citem els resultats desenvolupats als anys seixanta per De Giorgi, Nash i Moser, que constitueixen una forta teoria lineal subjacent a les equacions quasilineals i que tracta sobre equacions el·líptiques lineals amb coeficients mesurables i en forma de divergència

$$\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j v) = f(x)\,. \tag{4}$$

Aquestes tècniques variacionals no es poden aplicar, en canvi, a equacions completament no lineals, en primer lloc perquè es tracta d'equacions que en general no estan escrites en forma de divergència. Al mateix temps, la teoria variacional no és conseqüència de la teoria completament no lineal. Són doncs teories independents, i útils en situacions diferents.

2.2 Per què equacions lineals amb coeficients «mesurables»?

La manera de demostrar la regularitat de les solucions d'equacions el·líptiques no lineals es basa en la idea següent. Es pot considerar l'equació no lineal per a la funció u com una equació *lineal* (també per a u, o bé per a les derivades $\partial_k u$ de u) amb coeficients que depenen de la funció u. No es pot suposar llavors que aquests coeficients siguin regulars, ja que depenen de u i estem intentant, precisament, demostrar la regularitat de u. És per aquesta raó que és essencial estudiar equacions lineals amb coeficients «mesurables». Escrivim «mesurables» entre cometes perquè el que realment es porta a terme consisteix a suposar que els coeficients són prou regulars i llavors, sota aquesta hipòtesi, es pot demostrar estimacions (per a la solució u o $\partial_k u$ de l'equació lineal) independents dels mòduls de continuïtat o de regularitat dels coeficients.

Il·lustrem aquestes idees amb els exemples quasilineals i completament no lineals anteriors. Si derivem l'equació (2) respecte a la variable x_k obtenim

$$\partial_i\{G_{p_ip_j}(Du(x))\,\partial_j u_k\} = f(x) \quad \text{on} \quad u_k := \partial_k u\,,$$

$f(x) = \partial_k\{g_u(x, u(x))\}$, i $G_{p_ip_j}$ designen les segones derivades parcials de la funció G. Aquesta és una equació lineal per a u_k del tipus (4) —és a dir, en forma de divergència— amb coeficients $a_{ij}(x) := G_{p_ip_j}(Du(x))$, que depenen de les primeres derivades de u. L'equació és el·líptica si les matrius $(a_{ij}(x))$ són definides positives, la qual cosa serà sempre certa (independentment de la regularitat de u) si la funció G és estrictament convexa.

En el cas de l'equació de Monge-Ampère (3), fent la derivada ∂_k de l'equació, resulta

$$(D^2u(x))^{ij}\,\partial_{ij}u_k = \frac{\partial_k f(x)}{\det D^2u(x)} \quad \text{on} \quad u_k := \partial_k u$$

i $(D^2u)^{ij}$ denota l'element ij de la matriu inversa de D^2u (si existeix la inversa). Hem usat que $(\det D^2u)\,(D^2u)^{ij}$ és el menor o cofactor de $\partial_{ij}u$ en la matriu D^2u, per la regla de Cramer. Hem obtingut, doncs, una equació lineal per u_k però, a diferència del cas anterior, no està escrita en forma de divergència sinó en la forma

$$a_{ij}(x)\,\partial_{ij}v = \tilde{f}(x)\,, \tag{5}$$

on $v := u_k = \partial_k u$ i $a_{ij}(x) := (D^2u(x))^{ij}$. L'equació és el·líptica si, per a tot x, la matriu $(D^2u(x))^{-1}$, o equivalentment $(D^2u(x))$, és definida positiva. Això serà cert quan u sigui una funció estrictament convexa. És per aquesta raó que sempre considerarem l'equació de Monge-Ampère (3) amb $f > 0$ i cercarem solucions u estrictament convexes. No és coneix pràcticament res sobre l'equació (3) per a funcions f que canvien de signe.

Hem vist, per tant, l'interès que té considerar equacions lineals amb coeficients mesurables, i també hem vist que les teories lineals subjacents, a les equacions quasilineals i a les completament no lineals, estudien objectes (4) i (5) essencialment diferents. Notem que (4) es reescriu $a_{ij}(x)\,\partial_{ij}v + (\partial_i a_{ij}(x))\,\partial_j v = f(x)$, que és una equació del tipus (5) afegint-hi un terme de primer ordre. Això, però, no té sentit si a_{ij} són només mesurables o, millor dit, si volem estimacions independents del mòdul de continuïtat, i en particular de diferenciabilitat, dels coeficients a_{ij}.

2.3 Curvatura de varietats

L'estudi de la curvatura de varietats riemannianes condueix sovint a equacions el·líptiques no lineals. Considerem, per exemple, el problema d'establir condicions a satisfer per una funció $K \in C^\infty(\Omega)$, amb $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que garanteixin que K és la curvatura de Gauss per a alguna mètrica g a Ω. Aquest problema es pot resoldre cercant la mètrica g de manera que sigui conformament equivalent a la mètrica euclidiana estàndard g_0 a $\mathbb{R}^2$, escrivint $g = e^{2u}g_0$ amb $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Llavors K és la curvatura de Gauss per a la mètrica g si i només si existeix una solució $u = u(x)$ de

$$\Delta u = -K(x)e^{2u}\,, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

—una equació semilineal, del tipus (1). Aquest mètode també es pot aplicar per a cercar mètriques amb curvatura de Gauss K, prescrita sobre superfícies arbitràries; vegeu [18].

Un segon exemple ve donat per l'equació de superfícies o varietats mínimes. El gràfic d'una funció $y = u(x)$, on $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és una varietat mínima (és a dir, amb curvatura mitjana nul·la) si

$$\partial_i \left\{ \frac{\partial_i u}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \right\} = 0 \quad \text{a} \quad \Omega\,.$$

Aquesta és l'equació d'Euler-Lagrange del funcional d'àrea $I(u) = \int_\Omega (1+|Du|^2)^{1/2} dx$ (vegeu [17]). Es tracta d'una equació quasilineal, del tipus (2).

D'altra banda, el gràfic de u tindrà curvatura de Gauss $K(x)$ quan u sigui solució de l'equació

$$F(D^2u, Du, x) := \det D^2u - K(x)(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2} = 0 \quad \text{a} \quad \Omega\,, \tag{6}$$

que s'anomena *equació de curvatura de Gauss prescrita*. Aquesta és una equació completament no lineal de tipus Monge-Ampère.

2.4 Control òptim estocàstic

Les equacions de Bellman, també anomenades de *Hamilton-Jacobi-Bellman*, són equacions el·líptiques completament no lineals, que apareixen en problemes d'optimització estocàstica. Sense entrar en detalls tècnics, tenim que l'estat X_t d'un sistema ve donat per la solució d'una equació diferencial estocàstica, que depèn d'un cert control α, on $\alpha = \alpha_t \in \mathcal{A}$ és un procés estocàstic i $\mathcal{A}$ és un espai mètric compacte. Es vol restringir l'estat X_t del sistema a romandre dins un obert Ω de $\mathbb{R}^n$. S'atura doncs el procés X_t en el moment τ de sortida de $\overline{\Omega}$, i es considera una funció de cost

$$\mathcal{J}(x, \alpha) = E \int_0^\tau f_\alpha(X_t)\, dt\,,$$

on $x = X_0$ és l'estat inicial.

L'objectiu és minimitzar el cost $\mathcal{J}$ entre tots els controls α possibles i, per tant, es considera la funció de cost òptim

$$u(x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{J}(x, \alpha) \quad \text{per} \quad x \in \overline{\Omega}\,.$$

El principi de la programació dinàmica estableix que u és solució de l'*equació de Bellman*

$$F(D^2u, x) := \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \{L_\alpha u(x) + f_\alpha(x)\} = 0\,, \tag{7}$$

on, per a cada $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$L_\alpha u = a_{ij}^\alpha(x)\partial_{ij}u$$

és un operador lineal el·líptic. Els coeficients a_{ij}^α es calculen a partir dels coeficients de l'equació diferencial estocàstica (vegeu [19] per a més detalls).

D'altra banda, la teoria de jocs diferencials estocàstics condueix a les *equacions d'Isaacs*

$$F(D^2u, x) := \sup_{\beta\in\mathcal{B}} \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \{L_{\alpha\beta}\, u(x) + f_{\alpha\beta}(x)\} = 0 \tag{8}$$

(vegeu [24]).

2.5 El·lipticitat uniforme

Considerem equacions de la forma

$$F(D^2u(x), x) = 0 \quad \text{per a} \quad x \in \Omega\,, \tag{9}$$

on $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció definida en un domini (i. e., un obert connex) Ω de $\mathbb{R}^n$. Recordem que D^2u denota la matriu hessiana de segones derivades parcials de u.

L'operador $F = F(M, x)$ és una funció real definida a $S_n \times \Omega$, on S_n designa l'espai de matrius $n \times n$, reals i simètriques.

Una *solució clàssica* de (9) és una funció u de classe C^2 a Ω que satisfà (9).

Per tal de simplificar la presentació, hem considerat operadors F que només depenen de D^2u i de x, però les mateixes idees que descriurem s'apliquen a equacions de la forma $F(D^2u, Du, u, x) = 0$. Per poder desenvolupar una teoria de la regularitat és essencial suposar que l'equació (9) és *uniformement el·líptica*, és a dir:

1 DEFINICIÓ *Direm que F és* uniformement el·líptic *si existeixen dues constants positives $0 < \lambda \le \Lambda$ (anomenades constants d'el·lipticitat) tals que*

$$\lambda\|N\| \le F(M+N, x) - F(M, x) \le \Lambda\|N\| \quad \textit{per a tota} \quad N \ge 0\,, \tag{10}$$

per a tota matriu $M \in S_n$ i per a tot $x \in \Omega$. Aquí $N \ge 0$ vol dir que N es una matriu simètrica definida positiva o nul·la, i $\|N\|$ és el seu valor propi més gran.

La condició (10) implica que F és estrictament creixent com a funció de la variable $M \in S_n$; és a dir,

$$M_1 < M_2 \quad \Longrightarrow \quad F(M_1, x) < F(M_2, x) \quad \text{per a tot} \quad x \in \Omega\,, \tag{11}$$

on hem considerat l'ordre usual a S_n ($M_1 < M_2$ si $M_2 - M_1$ és definida positiva). Aquesta propietat és conseqüència de la primera desigualtat de (10), prenent $M = M_1$ i $N = M_2 - M_1$. També és fàcil comprovar que l'el·lipticitat uniforme (10) implica que F és una funció globalment Lipschitz en la variable M, uniformement en $x \in \Omega$; vegeu [10].

El primer exemple d'operador uniformement el·líptic és, evidentment, el laplacià: $F(D^2u) = \Delta u = \partial_{11}u + \cdots + \partial_{nn}u$. A trets més generals, sigui L un operador lineal de la forma

$$Lu = a_{ij}(x)\partial_{ij}u$$

on $(a_{ij}(x))$ és, per a cada $x \in \Omega$, una matriu simètrica, definida positiva, que té tots els valors propis a l'interval $[\lambda, \Lambda]$, en què $0 < \lambda \le \Lambda$ són constants. És a dir, suposem que

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{12}$$

És fàcil comprovar que, en aquest cas, L és uniformement el·líptic (en el sentit de la definició 1) amb constants d'el·lipticitat iguals a λ i $n\Lambda$. Notem que aquí l'operador F és donat per l'expressió

$$F(M, x) = a_{ij}(x)m_{ij} = \operatorname{tr}(A(x)M)\,,$$

on $A(x) = (a_{ij}(x))$, $M = (m_{ij})$ i tr denota la traça d'una matriu.

En les definicions dels operadors de Bellman (7) i d'Isaacs (8), sempre suposarem que $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són conjunts arbitraris, i que $L_\alpha = a_{ij}^{\alpha}(x)\partial_{ij}$ i $L_{\alpha\beta} = a_{ij}^{\alpha\beta}(x)\partial_{ij}$ satisfan (12) amb constants λ i Λ, independents de x, de α i de β. Tenim llavors que els operadors de Bellman i d'Isaacs són uniformement el·líptics, per què la condició (10) és estable en prendre ínfims i suprems.

Existeix, però, una difèrencia important entre aquestes dues famílies d'operadors. En ser l'ínfim d'operadors lineals, l'operador de Bellman és *còncau* en la variable M (és a dir, per cada $x \in \Omega$, $F(\cdot, x)$ és una funció còncava a S_n). En canvi, l'operador d'Isaacs no és, en general, ni còncau ni convex.

Hem vist, també, que la definició d'el·lipticitat permet que F no sigui diferenciable respecte a la variable M, ja que els operadors de Bellman i d'Isaacs no ho són en general (en ser ínfims i suprems d'operadors lineals). Ara bé, és útil tenir present la caracterització següent d'el·lipticitat per a operadors de classe C^1, basada en la noció d'operador linealitzat. Suposem que F és de classe C^1, i estenem F a tot l'espai de matrius reals $n \times n$; per exemple, per l'expressió $F(M, x) = F((M + M^t)/2, x)$. Llavors F és una funció de $n \times n$ variables reals m_{ij} i de $x \in \Omega$. Considerem la derivada parcial de F d'ordre 1 respecte a la variable m_{ij}, i denotem-la per

$$F_{ij}(M, x) = \frac{\partial F}{\partial m_{ij}}(M, x) .$$

Es pot comprovar que si F és uniformement el·líptic en el sentit de la definició 1 llavors

$$\lambda|\xi|^2 \le F_{ij}(M, x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2 \qquad \forall M \in S_n \ \ \forall x \in \Omega \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n . \tag{13}$$

I viceversa, si F satisfà (13) llavors F és uniformement el·líptic amb constants d'el·lipticitat λ i $n\Lambda$.

L'operador de Monge-Ampère $F(M) = \det M$ no satisfà, a diferència dels de Bellman i d'Isaacs, la hipòtesi d'el·lipticitat uniforme de la definició 1. En efecte, $F_{ij}(M)$ és el cofactor o menor de l'element ij de M. Per tant, $F_{ij}(M) = (\det M)\, m^{ij}$ per a la regla de Cramer, on (m^{ij}) designa la matriu inversa de M (si existeix). En conseqüència, l'operador de Monge-Ampère és el·líptic només en el con de les matrius definides positives —és a dir, és el·líptic quan actua sobre funcions u estrictament convexes. Notem que, per tal que l'equació $\det D^2 u = f(x)$ admeti una solució estrictament convexa, cal suposar $f > 0$. Tindrem l'el·lipticitat uniforme de l'operador, quan haguem afitat els valors propis de $D^2 u$ inferiorment i superiorment per constants positives.

Malgrat que l'operador de Monge-Ampère no és uniformement el·líptic en el sentit de la definició 1, els resultats de la teoria uniformement el·líptica, que descriurem a continuació, es poden adaptar a equacions de tipus Monge-Ampère amb $f > 0$. Assenyalem també, que escrivint l'equació de Monge-Ampère en la forma $\log\det D^2 u = \log f(x)$, el nou operador $G(M) = \log\det M$ és còncau en el con de matrius simètriques definides positives (vegeu [10]).

Una conseqüència de l'el·lipticitat és el *principi del màxim* —una eina essencial en la teoria d'equacions el·líptiques de segon ordre. Aquest principi s'enuncia de la manera següent:

2 Proposició *Suposem que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini acotat i que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Llavors*

$$F(D^2 u(x), x) \ge F(D^2 v(x), x) \ \ a \ \ \Omega \ \ \Longrightarrow \ \ \sup_{\Omega}(u - v) \le \sup_{\partial\Omega}(u - v) .$$

En particular, si suposem $F(0, x) = 0$ a Ω i $F(D^2 u(x), x) \ge 0$ a Ω llavors u assoleix el seu màxim a la vora $\partial\Omega$.

La demostració és la següent. Si tinguéssim que $(u - v)(x_0) > \sup_{\partial\Omega}(u - v)$ amb $x_0 \in \Omega$, llavors $w(x) := u(x) - v(x) + \varepsilon|x - x_0|^2/2$ també tindria un màxim interior $x_1 \in \Omega$ si ε és prou petit (doncs $w(x_0) > \sup_{\partial\Omega} w$ per ε petit). Tindríem llavors

$D^2w(x_1) \le 0$, és a dir, $D^2u(x_1) \le D^2v(x_1) - \varepsilon\mathrm{Id} < D^2v(x_1)$. La monotonia estricta (11) de F implica que $F(D^2u(x_1), x_1) < F(D^2v(x_1), x_1)$, que és una contradicció amb la hipòtesi $F(D^2u(x), x) \ge F(D^2v(x), x)$ per a tot $x \in \Omega$.

El principi del màxim té com a conseqüència immediata la unicitat de solució $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (en cas d'existir) per al *problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(D^2u, x) &= 0 \quad \text{a } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{a } \partial\Omega. \end{cases}$$

3 Teoria de la regularitat

Quan u és solució d'una equació el·líptica de segon ordre s'espera, en general, poder controlar les segones derivades de u per l'oscil·lació (o, diguem, la norma L^∞) de u. Comencem suposant que u és una solució feble (per exemple una solució en el sentit de les distribucions) de l'equació de Poisson

$$\Delta u = f(x) \quad \text{a} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

on B_1 designa la bola unitat oberta de $\mathbb{R}^n$. Si f és Hölder contínua amb exponent $\alpha \in (0,1)$, que denotarem per $f \in C^\alpha(B_1)$, llavors *totes* les derivades segones de u (no només la combinació de derivades $\Delta u = \partial_{11}u + \cdots + \partial_{nn}u$) són també C^α a B_1; és a dir, $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$. La condició $0 < \alpha < 1$ és essencial, perquè és un fet que aquesta propietat no és certa en els casos $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$. Aquest primer resultat de regularitat prové, de fet, de l'estimació següent a l'interior («interior» en el sentit que no arribem fins a la vora ∂B_1). Si u és solució de (14) llavors

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \le C\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(\overline{B}_1)}\}, \tag{15}$$

on C és una constant, que només depèn de la dimensió n i de α. Aquí $B_{1/2}$ denota la bola de radi $1/2$ amb el mateix centre que B_1. Aquesta desigualtat és conseqüència d'una estimació per al potencial newtonià v de la funció f i d'una estimació per a la funció hàrmonica $u - v$.

Tenim, a continuació, la teoria de la regularitat de *Schauder*, que estableix l'estimació (15) i la regularitat $u \in C^{2,\alpha}$ per a tota solució u d'una equació lineal uniformement el·líptica amb coeficients variables,

$$a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad \text{a} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

amb $f \in C^\alpha$, sota la hipòtesi que els coeficients $a_{ij} \in C^\alpha(B_1)$. La constant C a (15) depèn ara de n, de les constants d'el·lipticitat λ i Λ a (12), i també de les normes C^α dels coeficients a_{ij}. A causa d'aquesta hipòtesi de continuïtat hölderiana dels coeficients, la teoria de Schauder s'ha d'entendre com una teoria de regularitat per petites pertorbacions del laplacià. De fet, les estimacions de Schauder es demostren escrivint l'equació $a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x)$ com

$$a_{ij}(x_0)\partial_{ij}u = \tilde{f}(x) := \{a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)\}\,\partial_{ij}u + f(x),$$

tècnica anomenada *«freezing coefficients»* en anglès. S'apliquen llavors les estimacions anteriors per a l'operador amb coeficients constants $a_{ij}(x_0)\partial_{ij}$ —operador que coincideix amb el laplacià en certes coordenades— s'observa que el factor

$a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)$ és petit, a prop de x_0 i en una norma apropiada, per la hipòtesi de regularitat dels a_{ij}. Així doncs, el punt essencial és demostrar estimacions $C^{2,\alpha}$ per a l'equació de Poisson $\Delta u = f(x)$.

L'objectiu és estendre aquests resultats de regularitat al cas completament no lineal, que escriurem en la forma $F(D^2u, x) = f(x)$ per analogia amb (16). Veurem que això es pot aconseguir per a tot operador uniformement el·líptic $F(M, x)$ que sigui còncau o convex en la variable M.

Com en el cas lineal, hem de començar estudiant el cas de «coeficients» constants $F(D^2u) = 0$ (on, de fet, hem de pensar l'operador $F(\cdot)$ com $F(\cdot, x_0)$ per a un punt x_0 fixat). El primer pas consisteix a demostrar *estimacions a priori* —«a priori» en el sentit que treballem amb una solució u l'existència de la qual encara no l'hem demostrada. Com veurem més endavant, els resultats d'existència i de regularitat seran conseqüències d'aquestes estimacions. Diguem que, essencialment, les estimacions *a priori* donen la compacitat necessària per poder aplicar teoremes de punt fix o bé el teorema de la funció implícita i així obtenir existència. Aquest és un fet constant en la teoria d'equacions en derivades parcials.

El procediment per a obtenir estimacions comença de la manera següent. Suposem que $F \in C^1$ i que $u \in C^3(B_1)$ satisfà $F(D^2u) = 0$ a $B_1 \subset \mathbb{R}^n$. Derivem aquesta equació respecte a la variable x_k. Escrivint $u_k = \partial_k u$, obtenim

$$a_{ij}(x)\partial_{ij}u_k := F_{ij}(D^2u(x))\,\partial_{ij}u_k = 0 \quad \text{a} \quad B_1\,, \tag{17}$$

que és una equació lineal $Lu_k = 0$ per a la funció u_k, on $L = a_{ij}(x)\partial_{ij}$ i $a_{ij}(x) := F_{ij}(D^2u(x))$. Per (13), sabem que L és uniformement el·líptic (independentment de la regularitat de u). Observem, però, que fer una hipòtesi de regularitat per als coeficients $a_{ij}(x) = F_{ij}(D^2u(x))$ significa fer una hipòtesi de regularitat per a les segones derivades de u, que és precisament el que volem demostrar. No podem, doncs, utilitzar la teoria de Schauder. L'única manera coneguda de prosseguir consisteix a desenvolupar estimacions (per a equacions lineals uniformement el·líptiques), independents del mòdul de continuïtat dels coeficients. Aquesta és la teoria que descriurem a continuació.

3.1 Estimació ABP i teoria de Krylov-Safonov

Sigui L un operador de la forma

$$Lu = a_{ij}(x)\partial_{ij}u$$

uniformement el·líptic, és a dir, que satisfà (12):

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

on $0 < \lambda \le \Lambda$ són constants. El resultat següent, anomenat estimació ABP, va ser demostrat independentment per Alexandroff, Bakelman i Pucci als anys seixanta i és una eina essencial en tota la teoria que segueix a continuació.

3 Teorema *Suposem que Ω és un domini acotat de $\mathbb{R}^n$. Siguin $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ i $f \in L^n(\Omega)$ tals que $Lu \ge f$ a Ω. Llavors*

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u + C\,\mathrm{diam}(\Omega)\,\|f\|_{L^n(\Omega)}\,,$$

on $\mathrm{diam}(\Omega)$ *denota el diàmetre de Ω, i C és una constant positiva que només depèn de n i de λ.*

El punt essencial és que l'estimació és independent de qualsevol mòdul de regularitat dels coeficients a_{ij}. Notem també que la «força» f està mesurada en norma L^n, on n és la dimensió. Existeix també una versió més general de l'estimació per a operadors de la forma $a_{ij}(x)\partial_{ij} + b_i(x)\partial_i + c(x)$ amb $c \le 0$.

A la secció 4.2 sobre el problema isoperimètric descriurem en detall el mètode que s'utilitza en la demostració de l'estimació ABP.

L'any 1979 la teoria va experimentar un progrés substancial. Krylov i Safonov [22, 23] van demostrar el següent resultat profund —una desigualtat de Harnack per a l'operador L sense cap hipòtesi de regularitat dels coeficients.

4 Teorema ([22, 23]) *Siguin $u \in C^2(B_R)$ i $f \in L^n(B_R)$ tals que $u \ge 0$ a B_R i $Lu = f$ a B_R, on $B_R \subset \mathbb{R}^n$ és una bola de radi R. Llavors*

$$\sup_{B_{R/2}} u \le C \left\{ \inf_{B_{R/2}} u + R\, \|f\|_{L^n(B_R)} \right\} ,$$

on C és una constant que només depèn de n, de λ i de Λ. Aquí $B_{R/2}$ denota la bola de radi $R/2$ amb mateix centre que B_R.

Essencialment, la desigualtat del teorema enuncia que, per a solucions u positives o nul·les, el valor de u en un punt controla els valors de u en tot subconjunt compacte de Ω. La demostració del teorema 4 utilitza dos ingredients: l'estimació ABP (teorema 3) i la tècnica de descomposició de cubs de Calderón-Zygmund (el lector interessat pot consultar [10] i [17]).

Una conseqüència important de la desigualtat de Harnack és la continuïtat hölderiana de les solucions de $Lu = f$:

5 Corol·lari *Siguin $u \in C^2(B_1)$ i $f \in L^n(B_1)$ tals que $Lu = f$ a B_1. Llavors $u \in C^\alpha(\overline{B}_{1/2})$ i*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{B}_{1/2})} \le C \left\{ \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^n(B_1)} \right\} ,$$

on $0 < \alpha < 1$ i C són constants positives que només depenen de n, de λ i de Λ.

Veiem com es demostra aquesta estimació C^α a partir de la desigualtat de Harnack. Per a $r > 0$ definim

$$M_r = \sup_{B_r} u, \quad m_r = \inf_{B_r} u, \quad o_r = M_r - m_r .$$

La quantitat o_r s'anomena l'oscil·lació de u a B_r. Apliquem el teorema 4 a les funcions $u - m_R \ge 0$ i $M_R - u \ge 0$ a B_R. Obtenim

$$M_{R/2} - m_R \le C \left\{ m_{R/2} - m_R + R\, \|f\|_{L^n(B_R)} \right\}$$

i

$$M_R - m_{R/2} \le C \left\{ M_R - M_{R/2} + R\, \|f\|_{L^n(B_R)} \right\} .$$

Si sumem aquestes desigualtats deduïm

$$o_R + o_{R/2} \le C \left\{ o_R - o_{R/2} + 2R\, \|f\|_{L^n(B_R)} \right\}$$

i, per tant,

$$o_{R/2} \le \frac{C-1}{C+1}\, o_R + \frac{C}{C+1} 2R\, \|f\|_{L^n(B_R)} \le \tau \left\{ o_R + 2R\, \|f\|_{L^n(B_R)} \right\} , \tag{18}$$

amb $0 < \tau < 1$ depenent només de n, de λ i de Λ. Aplicant reiteradament aquesta desigualtat, en boles de radi $R = 1/2^i$, centrades en un punt x_0 donat, veiem que l'oscil·lació de u al voltant de x_0 decau com una potència del radi. Això és el mateix que dir que u es C^α en el punt x_0, per un cert α independent de x_0. Deduïm també la següent propietat important de les solucions d'equacions el·líptiques homogènies de segon ordre. Si $f \equiv 0$, (18) estableix que l'oscil·lació de u a la bola de radi $R/2$ es redueix amb un factor multiplicador menor que 1 respecte a l'oscil·lació a la bola concèntrica de radi R.

Assenyalem que la desigualtat de Harnack del teorema 4 i el seu corol·lari sobre la regularitat hölderiana de solucions tenen versions corresponents en la teoria de De Giorgi, Nash i Moser per a equacions lineals amb coeficients mesurables, escrites en forma de divergència (4). Aquests resultats s'enuncien de manera molt similar als anteriors, però les tècniques emprades són molt diferents (vegeu el capítol 8 de [17]).

Podem ara enunciar una primera conseqüència important de la teoria de Krylov-Safonov. Si $F \in C^1$ i $F(D^2u) = 0$ llavors cada derivada $u_k = \partial_k u$ és solució d'una equació lineal (17) uniformement el·líptica. Com el corol·lari 5 no fa cap hipòtesi sobre la regularitat dels coeficients de l'equació lineal, obtenim una estimació C^α per a $\partial_k u$ ($\|\partial_k u\|_{C^\alpha(\overline{B}_{1/2})} \leq C\|\partial_k u\|_{L^\infty(B_1)}$) i, per tant, una estimació $C^{1,\alpha}$ per u ($\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leq C\|u\|_{C^1(\overline{B}_1)}$). Aquesta estimació es pot millorar reemplaçant $\|u\|_{C^1(\overline{B}_1)}$ per $\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|$, com enunciem en el següent teorema (vegeu [10]). A més a més, hem fet la hipòtesi $F \in C^1$ per poder derivar l'equació $F(D^2u) = 0$ respecte a x_k, però la tècnica de quocients incrementals permet obtenir el mateix resultat per a tot F uniformement el·líptic (no necessàriament C^1).

6 Teorema *Sigui F uniformement el·líptic* (*vegeu la definició* 1) *i sigui $u \in C^2(B_1)$ una solució de $F(D^2u) = 0$ a B_1. Llavors*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \leq C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|\right\},$$

on $0 < \alpha < 1$ *i C són constants que només depenen de n, de λ i de Λ.*

Un resultat de Caffarelli [7] (vegeu també [10]) estén l'estimació $C^{1,\alpha}$ anterior a tota equació uniformement el·líptica de la forma $F(D^2u, x) = 0$ suposant que F depèn de la variable x prou regularment.

3.2 Estimació $C^{2,\alpha}$ per a equacions convexes

Fins ara hem derivat l'equació $F(D^2u) = 0$ un cop respecte a x_k i hem obtingut $F_{ij}(D^2u(x))\partial_{ij}u_k = 0$. Suposem ara que $F \in C^2$ és còncau, i derivem un altre cop respecte a x_k. Suposem que $u \in C^4$ i utilitzem la concavitat de F, deduïm

$$\begin{aligned} 0 &= F_{ij}(D^2u(x))\partial_{ij}u_{kk} + F_{ij,rs}(D^2u(x))(\partial_{ij}u_k)(\partial_{rs}u_k) \\ &\leq F_{ij}(D^2u(x))\partial_{ij}u_{kk} =: a_{ij}(x)\partial_{ij}u_{kk}, \end{aligned}$$

on $u_{kk} := \partial_{kk}u$. Totes les segones derivades pures u_{kk} de u són, doncs, *subsolucions* d'una equació lineal uniformement el·líptica. L'any 1982, Evans [14] i Krylov [20, 21] van usar aquest fet per a obtenir una estimació C^α per u_{kk}. És a dir, van obtenir la desitjada estimació $C^{2,\alpha}$ per a u. La demostració es basa en una delicada aplicació a les supersolucions $C - u_{kk}$ d'un resultat de la teoria lineal de Krylov-Safonov (anomenat desigualtat de Harnack feble) vàlid per a supersolucions.

La hipòtesi que F és còncau pot ser reemplaçada per F convex, escrivint l'equació en la forma $-F(-D^2(-u)) = 0$; és a dir, $G(D^2 v) = 0$ amb $v := -u$ i $G(M) := -F(-M)$. Notem que el nou operador G és uniformement el·líptic, i que G és convex si F és còncau. D'altra banda, les hipòtesis $F \in C^2$ i $u \in C^4$ poden ser suprimides. Tenim, doncs, l'estimació interior *a priori* (vegeu [10] per a més detalls).

7 Teorema ([14, 20, 21]) *Suposem que F és uniformement el·líptic i que F és còncau o convex. Si $u \in C^2(B_1)$ és solució de $F(D^2u) = 0$ a B_1, llavors $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$ i*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{1/2})} \le C\left\{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|\right\},$$

on $0 < \alpha < 1$ i C són constants que només depenen de n, de λ i de Λ.

Aquest resultat s'aplica doncs a les equacions de Bellman (que són còncaves), però no s'aplica a les equacions d'Isaacs. La validesa de l'estimació per a operadors que no són còncaus ni convexos és una qüestió oberta important. En aquesta direcció, Nadirashvili ha anunciat recentment l'existència d'un operador F, uniformement el·líptic (ni còncau ni convex), per al qual l'estimació no és certa en dimensions $n \ge 7$.

La teoria clàssica de Schauder permet obtenir regularitat d'ordre superior per a la solució u, un cop s'ha demostrat que $u \in C^{2,\alpha}$. Per exemple, si $u \in C^{2,\alpha}$ és solució de $F(D^2u) = 0$ i si $F \in C^\infty$, llavors $u \in C^\infty$. La idea és simple: es pot aplicar la teoria de Schauder a les equacions per a les derivades de u (com ara $F_{ij}(D^2u(x))\,\partial_{ij}u_k = 0$), ja que els coeficients $a_{ij}(x) := F_{ij}(D^2u(x))$ són C^α (ja sabem que $u \in C^{2,\alpha}$). En aquest cas obtenim $u_k \in C^{2,\alpha}$ per a tot índex k, és a dir, $u \in C^{3,\alpha}$.

L'any 1989, Caffarelli [7] va estendre les teories lineals de Calderón-Zygmund (o teoria d'estimacions L^p per D^2u) i de Schauder en el context d'equacions completament no lineals de la forma $F(D^2u, x) = f(x)$. Sota les hipòtesi de concavitat de F en la variable M i de dependència prou regular de F en la variable x, es tenen els següents resultats de regularitat (vegeu [10]). Si $f \in L^p$ i $n < p < \infty$, llavors $u \in W^{2,p}$ a l'interior i existeix una estimació $W^{2,p}$ per a u (és a dir, una estimació L^p per a les segones derivades de u). Si $f \in C^\alpha$, amb $0 < \alpha < 1$ depenent de les constants d'el·lipticitat, llavors $u \in C^{2,\alpha}$ a l'interior.

Existeix també una estimació $C^{2,\alpha}$ fins a la vora $\partial\Omega$ per a solucions d'equacions còncaves $F(D^2u) = 0$. Aquest resultat va ser demostrat independentment per Caffarelli, Nirenberg i Spruck i per Krylov l'any 1984, i permet obtenir el següent teorema d'existència de solucions clàssiques per al problema de Dirichlet (vegeu [10, 17]).

8 Teorema *Suposem que Ω es un domini acotat amb vora C^∞, que $F \in C^\infty$ és uniformement el·líptic i còncau (o convex), i sigui $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$. Llavors existeix una única solució $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ del problema*

$$\begin{cases} F(D^2u) &= 0 \quad a\,\Omega \\ \quad\;\; u &= \varphi \quad a\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{19}$$

A més,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C\left\{\|\varphi\|_{C^3(\partial\Omega)} + |F(0)|\right\}, \tag{20}$$

on $0 < \alpha < 1$ *només depèn de* n*, de* λ *i de* Λ*, mentre que* C *és una constant depenent d'aquestes tres quantitats i també de* Ω*.*

Hem enunciat aquest teorema per al cas d'operadors uniformement el·líptics; però, existeix també una versió per a equacions de tipus Monge-Ampère, com ara l'equació de curvatura de Gauss prescrita (6); vegeu [17].

El resultat d'existència del teorema 8 és una conseqüència (bastant estàndard en equacions en derivades parcials) de l'estimació *a priori* fins a la vora (20). La idea consisteix a utilitzar l'anomenat mètode de continuïtat, basat en el teorema de la funció implícita. Es connecta el problema (19) amb el corresponent problema pel laplacià, si es considera, per exemple,

$$\begin{cases} tF(D^2u) + (1-t)\Delta u &= 0 \quad \text{a } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{a } \partial\Omega, \end{cases} \tag{21}$$

per a $t \in [0,1]$. L'objectiu es trobar la solució u com a funció implícita de t i, per això, es considera el conjunt A de paràmetres t, per als quals el problema (21) admet solució $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Clarament $0 \in A$. El teorema de la funció implícita dóna que A és obert, ja que la linealització de (21) en una solució $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ serà un isomorfisme, en espais de Hölder adequats, per teoria lineal clàssica de Schauder. El punt clau és demostrar que A és tancat. Això s'obté gràcies a l'estimació global (20), que permet demostrar la compacitat d'una successió de solucions, corresponents a paràmetres $t_i \to t$, i així trobar una solució pel paràmetre límit t. En efecte, recordem que la inclusió $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^2(\overline{\Omega})$ és compacta, pel teorema d'Arzela-Ascoli.

3.3 Solucions de viscositat

Al començament dels anys vuitanta, Crandall i Lions [12] i Evans [13] van desenvolupar una teoria de solucions febles (anomenades *solucions de viscositat*) per a equacions completament no lineals. La idea consisteix a prendre el principi del màxim com a definició de solució:

9 Definició *Sigui* u *una funció contínua a* Ω*. Direm que* u *és una subsolució de viscositat de* $F(D^2u, x) = 0$ *a* Ω *(o que* u *satisfà* $F(D^2u, x) \geq 0$ *a* Ω *en el sentit de viscositat) quan la següent condició sigui certa. Si* $x_0 \in \Omega$*,* $\phi \in C^2(\Omega)$ *i* $u - \phi$ *té un màxim local a* x_0*, llavors*

$$F(D^2\phi(x_0), x_0) \geq 0\,. \tag{22}$$

La definició de supersolució de viscositat és la mateixa si es reemplaça «màxim local» per «mínim local» i si es canvia «≥» per «≤» a (22)*. Direm que* u *és una solució de viscositat quan sigui alhora subsolució i super-solució de viscositat.*

Les solucions de viscositat són de gran utilitat a causa de les bones propietats d'estabilitat i compacitat de les quals gaudeixen. Per exemple, el suprem de dues subsolucions de viscositat és també subsolució de viscositat, mentre que el límit uniforme sobre compactes de solucions de viscositat també és solució de viscositat. Notem que la definició 9 només requereix, pel que fa a la regularitat de u, que u sigui una funció contínua.

Tota solució clàssica $u \in C^2(\Omega)$ és també solució de viscositat, perquè si $u - \phi$ té un màxim local a x_0 llavors $D^2u(x_0) \leq D^2\phi(x_0)$ i, per tant, (22) es satisfà per la monotonia de F en la variable M. D'altra banda, es pot comprovar que si u és una solució de viscositat i si, a més a més, $u \in C^2(\Omega)$ llavors u és una solució clàssica.

Recordem que el principi del màxim, proposició 2, té com a conseqüència important la unicitat de solució clàssica per al problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rcll} F(D^2u) & = & 0 & \text{a } \Omega \\ u & = & \varphi & \text{a } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{23}$$

La unicitat de solució de viscositat per a aquest problema és, en canvi, una qüestió delicada que va ser demostrada l'any 1988 per Jensen (vegeu, per exemple, [10]). L'existència de solució de viscositat per al problema de Dirichlet va ser demostrada per Ishii, usant el mètode de Perron i el resultat de unicitat de Jensen. Es té, doncs, una teoria d'existència i de unicitat de solució de viscositat pel problema (23), fins i tot, en el cas d'operadors F que no són còncaus ni convexos. Això és de gran interés, ja que per aquests operadors no es disposa d'estimacions $C^{2,\alpha}$ i, per tant, no es pot portar a terme el mètode d'existència del teorema 8, basat en les estimacions a priori $C^{2,\alpha}$.

Les demostracions de les estimacions $C^{1,\alpha}$ i $C^{2,\alpha}$ per a solucions clàssiques (teoremes 6 i 7) es poden adaptar per obtenir la regularitat de solucions de viscositat. Més precisament, es té que tota solució de viscositat u de $F(D^2u) = 0$ és $C^{1,\alpha}$ (això és vàlid per a tot operador F uniformement el·líptic) i, a més a més, u és $C^{2,\alpha}$ si F és còncau o convex. Com abans, l'exponent $\alpha \in (0,1)$ depèn de n i de les constants d'el·lipticitat λ i Λ. Cabré i Caffarelli (vegeu [10]) han donat noves demostracions d'aquests resultats de regularitat per a solucions de viscositat. A diferència de les demostracions anteriors, aquestes no requereixen resultats previs d'existència de solució clàssica, ni tampoc estan basades en la derivació de l'equació (per la qual cosa s'apliquen directament a operadors no diferenciables com els de Bellman).

4 Tres aplicacions recents

4.1 Transport òptim de masses

El 1781 Monge va proposar el següent problema variacional o d'optimització. Quina és la millor manera de portar una pila de sorra o runa (*déblais* en francès) cap a una excavació o forat (*remblais*), per tal que el treball o cost realitzat sigui mínim? En termes mes precisos, ens són donades dues funcions integrables $f_1, f_2 \geq 0$ amb suports $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ i $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ respectivament, i amb la mateixa massa total $\int_{\Omega_1} f_1 = \int_{\Omega_2} f_2$. Fixem també una funció de cost $c\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$. El problema consisteix en trobar a aplicació $t\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ que minimitzi el cost total

$$C(s) := \int_{\Omega_1} c(x, s(x)) f_1(x)\, dx$$

en la classe $S(f_1, f_2)$ d'aplicacions mesurables $s\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, que preserven les mesures $f_1(x)dx$ i $f_2(x)dx$, és a dir, tals que

$$\int_{\Omega_1} h(s(x)) f_1(x)\, dx = \int_{\Omega_2} h(y) f_2(y)\, dy \tag{24}$$

per a tota funció contínua h amb suport a Ω_2.

Les funcions $c(x,y) = |x-y|^p$, amb $p > 0$, són exemples típics de funcions de cost. Monge va escollir com a cost la distància euclidiana, $p = 1$. Fins i tot en aquest cas particular $p = 1$, van haver de passar dos segles fins que Sudakov demostrés, el 1979, l'existència d'una aplicació $t \in S(f_1, f_2)$ que minimitza C. Aquesta aplicació t no és, en general, única quan $p = 1$.

L'any 1987 Brenier va demostrar que, per al cost quadràtic $c(x,y) = |x-y|^2$, existeix una única aplicació $t \in S(f_1, f_2)$ que minimitza C. A més, t és el gradient d'una funció convexa u (vegeu [16], per exemple, per a més detalls). La igualtat (24), reescrita per $s = t = \nabla u$, dóna

$$\int_{\Omega_1} h(\nabla u(x)) f_1(x)\, dx = \int_{\Omega_2} h(y) f_2(y)\, dy \quad \text{per a tota} \quad h \in C(\Omega_2)\,. \tag{25}$$

Direm llavors que $u\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$ és una solució feble de l'equació de Monge-Ampère

$$f_2(\nabla u(x))\, \det D^2 u(x) = f_1(x) \quad \text{a} \quad \Omega_1\,, \tag{26}$$

ja que (25) i (26) són equivalents, si ∇u és bijectiu i de classe C^1 (per a la fòrmula del canvi de variables). Ara per ara, però, només sabem que $\nabla u = t \in S(f_1, f_2)$ és mesurable. Recentment, Caffarelli i Urbas han usat tècniques d'equacions de Monge-Ampère per obtenir, independentment, els següents resultats sobre la regularitat de l'aplicació que minimitza C.

10 Teorema ([8, 9]) *Suposem que $c(x,y) = |x-y|^2$, $f_i \in L^\infty(\Omega_i)$ i $1/f_i \in L^\infty(\Omega_i)$ per $i = 1,2$, on Ω_i són dominis acotats amb vora de mesura nul·la. Sigui $t = \nabla u$ l'aplicació que minimitza C.*

- *(i) (Regularitat interior). Suposem que Ω_2 és convex. Si f_1 i f_2 són contínues llavors $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1)$ per a tot $p < \infty$. A més, si f_1 i f_2 són funcions C^β, llavors $u \in C^{2,\alpha}$ per a tot $\alpha < \beta$.*
- *(ii) (Regularitat a la vora). Suposem ara que Ω_1 i Ω_2 són estrictament convexos i de classe C^2. Si $f_1 \in C^\beta(\overline{\Omega}_1)$ i $f_2 \in C^\beta(\overline{\Omega}_2)$ llavors $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ per a tot $\alpha < \beta$.*

Com hem indicat anteriorment, aquest resultat —combinat amb teoria clàssica de Schauder— permet demostrar la regularitat de les derivades de u d'ordre superior (sempre que les funcions f_i siguin prou regulars).

Notem també que, quan $u \in C^{2,\alpha}$, llavors, l'aplicació òptima $t = \nabla u$ és de classe $C^1(\Omega_1)$, té derivades Hölder contínues i satisfà (24) en sentit fort, és a dir

$$f_2(t(x))\,(\mathrm{Jac}\, t)(x) = f_1(x) \quad \text{a} \quad \Omega_1\,,$$

una equació de Jacobià prescrit.

Gangbo i McCann [16] han demostrat resultats d'existència i de unicitat de l'aplicació t, que minimitza C per a tota funció de cost estrictament convexa (aquest cas té aplicacions en probabilitats i estadística), i també per a tota funció de cost estrictament còncava (cas d'interès en matemàtica financera).

4.2 El problema isoperimètric

Aquesta secció tracta sobre el mètode utilitzat per Alexandroff, Bakelman i Pucci —que anomenarem *mètode ABP*— per a demostrar l'estimació ABP del teorema 3.

El descriurem presentant una aplicació del mètode, desenvolupada recentment per l'autor [6], i que dóna una nova i simple demostració del problema isoperimètric clàssic.

Recordem que el problema isoperimètric enuncia que, entre totes les regions amb mateix perímetre, el cercle a $\mathbb{R}^2$ (o la bola a $\mathbb{R}^n$) deixa a l'interior sent la màxima àrea (o volum). Amb més precisió:

Sigui Ω *un domini acotat de* $\mathbb{R}^n$ *i amb vora* $\partial\Omega \in C^\infty$*. Llavors*

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{|\partial B_1|}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}}\,, \tag{27}$$

on B_1 *és la bola unitat de* $\mathbb{R}^n$*,* $|\Omega|$ *denota la mesura de* Ω *i* $|\partial\Omega|$ *el perímetre de* Ω*. A més a més,* (27) *és una igualtat si i només si* Ω *és una bola de* $\mathbb{R}^n$*.*

Per a més informació sobre el problema isoperimètric, el lector pot consultar [2]. Assenyalem que la desigualtat isoperimètrica és una eina molt útil en anàlisi. Per exemple, es poden demostrar molt fàcilment *desigualtats de Sobolev* per funcions a l'espai euclidià o, més generalment, per a funcions sobre varietats riemannianes, un cop es té una desigualtat isoperimètrica per als dominis de la varietat (vegeu [11], pàgina 269).

La nova demostració de (27) és la següent. Sigui v la solució del problema lineal de Neumann per al laplacià:

$$\begin{cases} \Delta v = |\partial\Omega|/|\Omega| & \text{a } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 1 & \text{a } \partial\Omega, \end{cases} \tag{28}$$

on $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ denota la derivada normal exterior de v a la frontera $\partial\Omega$. La constant $|\partial\Omega|/|\Omega|$ ha estat escollida per tal que el problema tingui una única solució v, mòdul una constant additiva. Això és conseqüència de la relació $\int_\Omega \Delta v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}$, vàlida per a tota funció v, que dóna una condició necessària (i alhora suficient) per l'existència de solució. Tenim, a més, que $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Considerem el conjunt de contacte inferior de v, definit per

$$\Gamma_v = \{x \in \Omega\ :\ v(y) \geq v(x) + \nabla v(x) \cdot (y - x) \ \text{ per a tot } y \in \overline{\Omega}\}\,. \tag{29}$$

És el conjunt de punts x tals que l'hiperplà tangent a la gràfica de v en x queda situat per sota de v a tot $\overline{\Omega}$. Afirmem que

$$B_1(0) \subset \nabla v(\Gamma_v)\,, \tag{30}$$

on $B_1(0) = B_1$ denota la bola unitat de $\mathbb{R}^n$ amb centre 0.

Per a demostrar (30), prenem qualsevol $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $|p| < 1$. Sigui $x \in \overline{\Omega}$ un punt que satisfà

$$\min_{y \in \overline{\Omega}} \{v(y) - p \cdot y\} = v(x) - p \cdot x \tag{31}$$

(notem que aquesta és, mòdul un signe, la *transformada de Legendre* de v). Si tinguéssim que $x \in \partial\Omega$ llavors la derivada normal exterior de $v(y) - p \cdot y$ a x seria negativa o nul·la, i per tant $(\partial v/\partial \nu)(x) \leq |p| < 1$, una contradicció amb (28). Per tant, $x \in \Omega$ i, en conseqüència, x és un mínim interior de la funció $v(y) - p \cdot y$. En particular, $p = \nabla v(x)$ i $x \in \Gamma_v$. Hem demostrat l'afirmació (30).

És interessant visualitzar geomètricament la demostració de (30), considerant les gràfiques de les funcions $p \cdot y + c$ on $c \in \mathbb{R}$. Es tracta d'hiperplans paral·lels que, si c és a prop de $-\infty$, es situen per sota de la gràfica de v. Deixem que c augmenti i considerem la primera constant c, per a la qual hi ha contacte amb v en algun punt x. Geomètricament, és clar que el punt de contacte $x \notin \partial\Omega$, ja que el «pendent» de l'hiperplà és menor que 1 (perquè $|p| < 1$), i en canvi, $\partial v/\partial \nu = 1$ a $\partial\Omega$.

De (30) deduïm que

$$|B_1| \le |\nabla v(\Gamma_v)| = \int_{\nabla v(\Gamma_v)} dp \le \int_{\Gamma_v} \det D^2 v(x)\ dx. \tag{32}$$

L'última desigualtat és conseqüència de la fòrmula de l'àrea, una generalització de la fòrmula del canvi de variables, vàlida per a transformacions Lipschitz no necessàriament bijectives. Hem aplicat aquesta fòrmula a l'aplicació $\nabla v\colon \Gamma_v \to \mathbb{R}^n$, i hem usat també que el seu jacobià, $\det D^2 v$, és positiu o nul a Γ_v per definició d'aquest conjunt.

La desigualtat entre les mitjanes geomètrica i aritmètica, aplicada als valors propis de $D^2 v(x)$ (que són nombres positius o nuls quan $x \in \Gamma_v$), dóna que

$$\det D^2 v \le \left(\frac{\Delta v}{n}\right)^n \quad \text{a } \Gamma_v\,. \tag{33}$$

Combinant aquesta desigualtat amb (32) i amb $\Delta v \equiv |\partial\Omega|/|\Omega|$, obtenim que

$$|B_1| \le \left(\frac{|\partial\Omega|}{n|\Omega|}\right)^n |\Gamma_v| \le \left(\frac{|\partial\Omega|}{n|\Omega|}\right)^n |\Omega|\,.$$

Com que $|\partial B_1| = n|B_1|$, concloem la desigualtat isoperimètrica (27):

$$\frac{|\partial B_1|}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}} = n|B_1|^{\frac{1}{n}} \le \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}}\,.$$

Notem que si $\Omega = B_1$ llavors $v(x) = |x|^2/2$ és la solució del problema (28) i, en particular, tots els valors propis de $D^2 v(x)$ són iguals. Per tant, (30) i (33) són igualtats quan $\Omega = B_1$. Això explica com és que la demostració dóna la desigualtat isoperimètrica amb constant òptima.

La demostració anterior també pot utilitzar-se per provar que les boles són els únics dominis regulars per als quals hi ha igualtat a la desigualtat isoperimètrica (27); vegeu [6].

L'estimació ABP (teorema 3) es demostra usant la mateixa tècnica que la que acabem de descriure. Indiquem-la breument. Reemplaçant u per $u - \sup_{\partial\Omega} u$ (que satisfà la mateixa equació que u), podem suposar que $u \le 0$ a $\partial\Omega$, i també que $\sup_\Omega u > 0$ (ja que en cas contrari no hi ha res a demostrar). Per tant, el màxim $M := \sup_\Omega u = u(x_0) > 0$ s'assoleix en un punt interior $x_0 \in \Omega$. Definim també $d = \mathrm{diam}(\Omega)$.

Treballarem amb la funció $v := -u$, de manera que tenim $-M = \inf_\Omega v = v(x_0)$, $v \ge 0$ a $\partial\Omega$, i $Lv \le -f$ a Ω. Considerem el conjunt de contacte inferior Γ_v de v, definit per (29). Ara l'afirmació que reemplaça la (30) és

$$B_{M/d}(0) \subset \nabla v(\Gamma_v)\,,$$

que es demostra, com abans, utilitzant la transformada de Legendre (31) de v i comprovant que el mínim s'assoleix en un punt interior $x \in \Omega$ i no a la frontera $\partial\Omega$. En efecte, posant $w(y) := v(y) - p \cdot y = v(y) - p \cdot (y - x_0) - p \cdot x_0$, tenim $w(y) > -M - p \cdot x_0 = w(x_0)$ per a tot $y \in \partial\Omega$ (hem utilitzat que $v \geq 0$ a $\partial\Omega$, $|p| < M/d$ i $|y - x_0| \leq d$). Per tant, w assoleix el seu mínim a Ω.

Per a la fòrmula de l'àrea deduïm que

$$c(n)(M/d)^n = |B_{M/d}| \leq |\nabla v(\Gamma_v)| \leq \int_{\Gamma_v} \det D^2 v(x)\, dx\,.$$

Ara, en lloc de (33), raonem de la manera següent. Per $x \in \Gamma_v$, denotant per $A_x = (a_{ij}(x))$ la matriu de coeficients, es té

$$\begin{aligned} \det D^2 v &= \frac{1}{\det A_x} \det(A_x D^2 v) \leq \lambda^{-n} \det(A_x D^2 v) \\ &\leq \lambda^{-n} \left\{ \frac{\operatorname{tr}(A_x D^2 v)}{n} \right\}^n = (n\lambda)^{-n} (Lv)^n \\ &\leq (n\lambda)^{-n} (-f)^n \leq C|f|^n. \end{aligned}$$

Deduïm doncs l'estimació ABP, $\sup_\Omega u = M \leq Cd\, \|f\|_{L^n(\Omega)}$.

Finalment, indiquem que l'estimació ABP i la teoria euclidiana de Krylov-Safonov han estat esteses per l'autor ([4]), en el cas d'equacions sobre varietats riemannianes amb tensor de curvatura positiu o nul. La innovació principal d'aquest treball consisteix en la utilització de substituts adequats de les funcions afins de l'espai euclidià ($p \cdot x + c$, $x \in \mathbb{R}^n$). Notem que no hi ha una noció, corresponent d'aquestes funcions quan $x \in M$ i M és una varietat. Aquest problema és resolt a [4], reemplaçant els hiperplans o funcions afins euclidianes per paraboloides, que tenen les funcions «distància a un punt al quadrat» com a noció corresponent sobre varietats. És a dir, a $\mathbb{R}^n$ considerem

$$\min_{y \in \overline{\Omega}} \{v(y) + |y - p|^2/2\} = v(x) + |x - p|^2/2 \tag{34}$$

en lloc de (31), i a la varietat $\Omega \subset M$, considerem llavors

$$\min_{y \in \overline{\Omega}} \{v(y) + d(y, p)^2/2\} = v(x) + d(x, p)^2/2\,, \tag{35}$$

on d és la distància riemanniana. La igualtat, satisfeta en un punt de mínim de (31), és $p = \nabla v(x)$, que no té un sentit clar quan $v : \Omega \subset M \to \mathbb{R}$ (ja que, en aquest cas els vectors $\nabla v(x)$ viuen, en variar x, en diferents espais tangents). En canvi, la igualtat en el cas (34) és

$$p = x + \nabla v(x)\,,$$

que en el cas (35) de varietats és

$$p = \exp_x \nabla v(x) \in M\,,$$

on $\exp_x$ denota l'aplicació exponencial amb base el punt $x \in M$. És per controlar el jacobià d'aquesta aplicació $p = p(x)$, on s'utilitza la hipòtesi sobre la curvatura de M.

4.3 Principis del màxim

A l'estimació ABP (teorema 3), apareix el factor $\operatorname{diam}(\Omega)$ i, com hem vist a la secció anterior, a la demostració s'utilitza de manera crucial que Ω és acotat. Al treball [3], l'autor va demostrar noves versions de l'estimació ABP que són vàlides en certs dominis Ω de $\mathbb{R}^n$ no acotats. Una de les noves estimacions reemplaça el factor $\operatorname{diam}(\Omega)$ per $|\Omega|^{1/n}$ a l'estimació ABP, i aquesta versió és vàlida en tot domini de mesura finita, no necessàriament acotat. De fet, es pot reemplaçar $\operatorname{diam}(\Omega)$ per a la següent constant geomètrica del domini, que és més precisa que $\operatorname{diam}(\Omega)$ i també que $|\Omega|^{1/n}$. Com al teorema 3, suposem que l'operador $L = a_{ij}(x)\partial_{ij}$ és uniformement el·líptic, és a dir, satisfà (12).

11 Teorema ([3]) *Sigui Ω un domini tal que existeixen dues constants $R > 0$ i $0 < \sigma < 1$, que cumpleixen*

$$|B_R(x)\setminus\Omega| \geq \sigma |B_R(x)| \qquad \forall x \in \Omega. \tag{36}$$

Si $u \in C^2(\Omega)$ i $f \in L^n(\Omega)$ satisfan $Lu \geq f$ a Ω i $\sup_\Omega u < \infty$, llavors

$$\sup_\Omega u \leq \limsup_{x\to\partial\Omega} u(x) + CR\,\|f\|_{L^n(\Omega)}, \tag{37}$$

on C és una constant que només depèn de n, de λ, de Λ i de σ.

L'existència (o no existència) d'una constant R complint (36) dependrà de cada domini Ω. Per exemple, si $|\Omega| < \infty$, llavors definint R per a la igualtat $|B_R| = 2|\Omega|$ (és a dir, $R = c(n)|\Omega|^{1/n}$), tenim (36) es satisfà amb $\sigma = 1/2$. Així, del teorema 11 es dedueix el resultat següent:

12 Corol·lari ([3]) *Suposem que $|\Omega| < \infty$, $Lu \geq f$ a Ω i $\sup_\Omega u < \infty$. Llavors*

$$\sup_\Omega u \leq \limsup_{x\to\partial\Omega} u(x) + C\,|\Omega|^{1/n}\,\|f\|_{L^n(\Omega)}, \tag{38}$$

on C és una constant que només depèn de n, de λ i de Λ.

L'estimació ABP millorada (37) es demostra emprant, com a eina essencial, una versió a la frontera de la desigualtat de Harnack feble en la teoria de Krylov-Safonov —una versió demostrada per Trudinger (vegeu [3, 5, 17]).

El teorema i corol·lari anteriors van estar motivats pel treball de Berestycki, Nirenberg i Varadhan [1] sobre el principi del màxim, on els autors havien trobat l'estimació

$$\sup_\Omega u \leq \limsup_{x\to\partial\Omega} u(x) + C\,|\Omega|^{2/n}\,\|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

que els va suggerir enunciar (38) com a problema obert. El seu treball estava motivat per l'estudi de propietats de simetria de solucions positives de problemes el·líptics semilineals. Les propietats de simetria de solucions positives és un ampli i intens camp de recerca en equacions en derivades parcials, que va ser iniciat als anys setanta pels treballs de Serrin i de Gidas-Ni-Nirenberg en dominis acotats (vegeu [5, 15]). Demostrar la simetria de solucions en dominis no acotats és, en general, una qüestió més delicada. La idea general és que si el domini té una simetria (per exemple, simetria radial, o bé simetria respecte a un hiperplà), llavors les solucions positives de problemes semilineals haurien de tenir també la mateixa simetria.

Berestycki i Nirenberg van mostrar que de l'estimació ABP es poden deduir principis del màxim (per a operadors de la forma $L_c u = a_{ij}(x)\partial_{ij}u + c(x)u$ en dominis «petits») que són molt útils quan s'apliquen a l'estudi de propietats de simetria (vegeu [1, 5]). L'estimació ABP millorada (37) es pot utilitzar per a obtenir aquest tipus de principis del màxim. Aquí, «dominis petits» significa que Ω és tal que existeixen constants R i σ que compleixin (36) i, a més, $R^2\|c\|_{L^\infty(\Omega)}$ és prou petit. Per exemple, Ω és un domini petit si està contingut entre dos hiperplans paral·lels prou a prop l'un de l'altre —ja que llavors podem prendre la constant R a (36) prou petita, de l'ordre de la distància entre els dos hiperplans. Un altre cas vé donat per dominis Ω inclosos dins $\mathbb{R}^n \setminus \cup_{p\in\mathbb{Z}^n} B_{1/10}(p)$ (per exemple), quan $\|c\|_{L^\infty(\Omega)}$ és suficientment petit. Veiem doncs, que aquests principis del màxim permeten una gran generalitat en la geometria del domini i, per aquesta raó, són resultats nous fins i tot, quan l'operador L és el laplacià.

Referències

[1] Berestycki, H., Nirenberg, L., Varadhan, S. R. S. «The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains», *Comm. Pure Appl. Math.* 47, (1994), 47–92.

[2] Berger, M. *Geometry* I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] Cabré, X. «On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations», *Comm. Pure Appl. Math.* 48 (1995), 539–570.

[4] Cabré, X. «Nondivergent elliptic equations on manifolds with nonnegative curvature», *Comm. Pure Appl. Math.* 50 (1997), 623–665.

[5] Cabré, X. *Topics in regularity and qualitative properties of solutions of nonlinear elliptic equations*, preprint.

[6] Cabré, X. *The isoperimetric problem and the principal eigenvalue via the ABP method*, preprint.

[7] Caffarelli, L. A. «Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations», *Ann. of Math.* 130 (1989), 189–213.

[8] Caffarelli, L. A. «The regularity of mappings with a convex potential», *J. Amer. Math. Soc.* 5 (1992), 99–104.

[9] Caffarelli, L. A. « Boundary regularity of maps with convex potentials II», *Ann. of Math.* 144, (1996), 453–496.

[10] Caffarelli, L. A., Cabré, X. *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Colloquium Publications 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[11] Chavel, I. *Riemannian Geometry, a Modern Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[12] Crandall, M. G., Lions, P. L. «Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations», *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1983), 1–42.

[13] Evans, L. C. «On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods», *Israel J. Math.* 36 (1980), 225–247.

[14] Evans, L. C. «Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations», *Comm. Pure Appl. Math.* 25 (1982), 333–363.

[15] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[16] Gangbo, W., McCann, R. J. «The geometry of optimal transportation», *Acta Math.* 177 (1996), 113–161.

[17] Gilbarg, D., Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1983.

[18] Kazdan, J. L. *Prescribing the Curvature of a Riemannian Manifold*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 1985.

[19] Krylov, N. V. *Controlled Diffusion Processes*, Applications of Mathematics 14, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[20] Krylov, N. V. «Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations», *Math. USSR Izv.* 20 (1983), 459–492.

[21] Krylov, N. V. «Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain», *Math. USSR Izv.* 22 (1984), 67–97.

[22] Krylov, N. V., Safonov, M. V. «An estimate of the probability that a diffusion process hits a set of positive measure», *Soviet Math. Dokl.* 20 (1979), 253–256.

[23] Krylov, N. V., Safonov, M. V. «Certain properties of solutions of parabolic equations with measurable coefficients» (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 44 (1980), 161–175.

[24] Nisio, M. *Stochastic differential games and viscosity solutions of Isaacs equations*, *Nagoya Math. J.* 110 (1988), 163–184.

[25] Taylor, M. E. *Partial Differential Equations* III, *Nonlinear Equations*, Applied Mathematical Sciences 117, Springer-Verlag, New York, 1997.

Departament de Matemàtica Aplicada 1
Universitat Politècnica de Catalunya
Av. Diagonal, 647
08028 Barcelona
cabre@ma1.upc.es