Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 15, núm. 1, 2000. Pàg. 71–80

Caràcters de grups finits*

Gabriel Navarro

1 Introducció

Siga G un grup finit i siga $\mathrm{cf}(G)$ l'espai complex de funcions «de classe» $G \to \mathbb{C}$. És a dir, $\mathrm{cf}(G) = \{\alpha\colon G \to \mathbb{C} \mid \alpha(x) = \alpha(x^g)$ per a qualsevol $x, g \in G\}$. És clar que el nostre espai $\mathrm{cf}(G)$ té per dimensió el número $|\mathrm{cl}(G)|$ de classes de conjugació de G.

Existeix una base canònica de $\mathrm{cf}(G)$, el conjunt $\mathrm{Irr}(G)$ de *caràcters irreductibles* de G, que conté gran part de l'estructura profunda de G. Tant és així, que hi ha molts teoremes sobre grups que mai no han estat provats sense caràcters. L'exemple més mencionat és el teorema de Feit-Thompson, que demostra que els grups simples no abelians són d'ordre parell. (Hi ha exemples menys famosos: un grup simple no abelià no pot tenir una classe de conjugació l'ordre de la qual siga potència d'un nombre primer.) Uns altres teoremes (com el de Burnside, que diu que l'ordre dels grups simples no abelians és divisible per, al menys, tres nombres primers diferents) han trigat més de 70 anys en ser provats utilitzant només teoria de grups. No hi ha esperança que passe el mateix amb el teorema de Feit-Thompson, en molts anys.

Suposem que $\mathcal{X}\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ és una *representació* de G, es a dir, un homomorfisme de grups de G en el grup general lineal $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ de les matrius complexes invertibles. Aleshores podem definir una aplicació $\chi \in \mathrm{cf}(G)$, així

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}(\mathcal{X}(g)),$$

on $\mathrm{Tr}(\mathcal{X}(g))$ és la traça de la matriu $\mathcal{X}(g)$. Observem que

$$\chi(g^h) = \chi(h^{-1}gh) = \mathrm{Tr}(\mathcal{X}(h^{-1}gh)) = \mathrm{Tr}(\mathcal{X}(h)^{-1}\mathcal{X}(g)\mathcal{X}(h)) = \mathrm{Tr}(\mathcal{X}(g)) = \chi(g),$$

és a dir, que χ és una funció de classe. A χ li direm el *caràcter* de la representació $\mathcal{X}$. Com que $\mathcal{X}(1)$ és la matriu identitat, tenim que $\chi(1) = n$. Aquest és el *grau* de

* Conferència pronunciada a la Segona Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans el març de 1999.

χ. Els caràcters més fàcils d'entendre són els caràcters lineals. Un caràcter és *lineal* si $\chi(1) = 1$; és a dir, els caràcters lineals són els homomorfismes de grups

$$\chi\colon G \to \mathbb{C}^*\,.$$

Suposem que $\mathcal{X}$ és una representació de G de caràcter χ, de grau n. Si l'ordre de l'element $g \in G$ es m, aleshores

$$\mathcal{X}(g)^m = \mathcal{X}(g^m) = \mathcal{X}(1) = I_n\,.$$

Per àlgebra lineal elemental, deduïm que $\mathcal{X}(g)$ és semblant a una matriu diagonal

$$\mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)\,,$$

on els ϵ_i són arrels m-èssimes de la unitat. Així, veiem que

$$\chi(g) = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n$$

és una suma d'arrels m-èssimes de la unitat. En particular, $\chi(g) \in \mathbf{R}$ (l'anell dels enters algebraics). Així mateix, es verifica

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}\,.$$

Què sap un caràcter χ de la representació $\mathcal{X}$ que l'origina? Si $\mathcal{X}$ té grau n i $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, aleshores la representació $\mathcal{Y}\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, definida per:

$$\mathcal{Y}(g) = P^{-1}\mathcal{X}(g)P\,,$$

és una altra representació de G que origina el mateix caràcter χ. Les representacions $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ es diuen *semblants*. És clar que no podem pensar que $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ siguen «molt distintes». El que és sorprenent, però, és que el caràcter continga tota la informació rellevant de la representació.

1 Teorema *Siguen $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ representacions de G de caràcters χ i ψ, respectivament. Aleshores, $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ són semblants si i només si $\chi = \psi$.*

Així, una representació de grau n, definida per $n^2|G|$ elements de $\mathbb{C}$, queda perfectament determinada per la seva traça: és a dir, per k nombres complexos (on k és el nombre de classes de conjugació de G).

Si χ i ψ són caràcters de G, és senzill demostrar que $\chi + \psi$ és un caràcter de G, prenent en consideració la representació

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X} & 0 \\ 0 & \mathcal{Y} \end{pmatrix},$$

on $\mathcal{X}$ origina χ i $\mathcal{Y}$ origina ψ. Direm, doncs, que un caràcter χ de G és *irreductible* si no és suma de dos caràcters de G. Denotem per $\mathrm{Irr}(G)$ el conjunt d'aquests caràcters irreductibles. De moment, es verifica que $\alpha \in \mathrm{cf}(G)$ és un caràcter de G si i només si α és una combinació lineal no negativa de $\mathrm{Irr}(G)$.

En $\mathrm{cf}(G)$ hi ha un producte hermitià natural que ve definit, per a $\alpha, \beta \in \mathrm{cf}(G)$, per

$$[\alpha, \beta] = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)}\,.$$

2 Teorema (Fonamental de la Teoria de Caràcters) *El conjunt* $\mathrm{Irr}(G)$ *és una base ortonormal de* $\mathrm{cf}(G)$.

Fa un moment, no sabíem ni que el conjunt $\mathrm{Irr}(G)$ fos finit. Ara, fins i tot sabem que:

$$|\mathrm{Irr}(G)| = \dim(\mathrm{cf}(G)) = |\mathrm{cl}(G)|\,.$$

Si elegim representants $x_K \in K$, per a cada classe K de conjugació de G, podem formar una matriu quadrada (invertible)

$$X(G) = (\chi(x_K))_{\chi\in\mathrm{Irr}(G),K\in\mathrm{cl}(G)}$$

que es diu *taula de caràcters* del grup G.

No és sobrer que parlem de quines són les claus per provar un teorema com el Teorema Fonamental. El més important és no treballar en grups si no en *àlgebres*. Donat un grup finit G, es construeix l'àlgebra de grup complexa $\mathbb{C}G$ com el conjunt de sumes formals

$$\mathbb{C}G = \{\sum_{g\in G} a_g g \quad | \quad a_g \in \mathbb{C}\}$$

amb la suma i multiplicació per escalars naturals i la multiplicació induïda per la multiplicació en G. És a dir,

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh\,.$$

El teorema fonamental és una conseqüència del teorema de Weddeburn sobre àlgebres semisimples.

3 Teorema (Weddeburn) *Si G és un grup finit, aleshores*

$$\mathbb{C}G \cong \mathrm{Mat}(n_1,\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}(n_k,\mathbb{C})\,.$$

De fet, $k = |\mathrm{cl}(G)|$ i els números misteriosos $n_1,\ldots,n_k$ són exactament els graus dels caràcters irreductibles de G. És aquí quan ens adonem que la teoria de caràcters requereix teoria d'anells. D'alguna manera, als especialistes en teoria de grups no ens agrada haver de provar que no hi ha grups simples no abelians d'ordre senar mitjançant la teoria d'anells!

A partir del fet que $\mathrm{Irr}(G)$ és una base ortonormal, tota funció de classe $\alpha \in \mathrm{cf}(G)$ admet una expressió de Fourier

$$\alpha = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} [\alpha,\chi]\chi\,.$$

Una conseqüència del teorema fonamental és la que es recull al següent corol·lari.

4 Corol·lari (Segona Relació d'Ortogonalitat) *Siguen $g,h \in G$. Aleshores*

$$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = 0\,,$$

si g i h no són conjugats en G. En cas contrari, la suma és $|\mathbf{C}_G(g)|$.

Observem, en particular, que

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|,$$

(la qual cosa ja la sabíem pel teorema de Weddeburn.) D'aquí deduïm que un grup G és abelià si i només si $\chi(1) = 1$ per a tot $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, és a dir, si tots els caràcters de G són lineals.

Un dels fets més importants en teoria de caràcters (que pot semblar una mica tècnic però que no ho és) és l'establert pel següent teorema.

5 Teorema *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ i K és la classe de conjugació de $g \in G$, aleshores*

$$\omega_\chi(g) = \frac{|K|\chi(g)}{\chi(1)} \in \mathbf{R}.$$

Vegem-ne una aplicació.

6 Corol·lari *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, aleshores $\chi(1)$ divideix $|G|$.*

Demostració: Per a cada classe de conjugació K de G fixem $x_K \in K$. Aleshores

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \frac{|G|}{\chi(1)}[\chi,\chi] = \frac{|G|}{\chi(1)}\frac{1}{|G|}\sum_{K \in \mathrm{cl}(G)} |K|\chi(x_K)\overline{\chi(x_K)}$$

$$= \sum_{K \in \mathrm{cl}(G)} \omega_\chi(x_K)\overline{\chi(x_K)} \in \mathbf{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z},$$

com volíem provar. □

Com podem construir caràcters? Sempre tenim un caràcter «de franc»: el *caràcter trivial* $1_G : G \to \mathbb{C}$, definit per $1_G(g) = 1$, per a tot $g \in G$. Per exemple, els caràcters irreductibles dels grups cíclics (i abelians) són molt fàcils de trobar: si $G = \langle g \rangle$ té ordre n, i ξ és una arrel primitiva n-èssima de la unitat, els caràcters de G són les aplicacions $\chi_i : G \to \mathbb{C}$ on $\chi_i(g) = \xi^i$ amb $1 \le i \le n$.

Una de les situacions més habituals en teoria de grups és quan un grup G permuta un conjunt Ω. Podem definir una aplicació

$$\chi_\Omega : G \to \mathbb{C}$$

molt senzilla. Per a cada $g \in G$, definim

$$\chi_\Omega(g) = |\{\omega \in \Omega \mid \omega g = \omega\}.$$

És elemental provar que χ_Ω és un caràcter de G. Aquests caràcters permutacionals no són irreductibles, però són importants per a trobar els irreductibles.

Una de les idees fonamentals de la teoria de grups, o de representacions de grups, és relacionar l'estructura d'un grup i la dels subgrups. Per exemple, si $\mathcal{X} : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ és una representació de G amb caràcter χ i $H \subseteq G$ és subgrup de G, la restricció

$$\mathcal{X}_H : H \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

és una representació de H amb caràcter χ_H (la *restricció* de χ a $H \subseteq G$). És menys trivial anar de H a G. Si $\alpha \in \mathrm{cf}(H)$, definim la funció de classe *inducció* $\alpha^G\colon G \to \mathbb{C}$ de manera natural:

$$\alpha^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ xgx^{-1} \in H}} \alpha(xgx^{-1})$$

per a $g \in G$. És molt senzill provar la reciprocitat de Frobenius.

7 Teorema (Reciprocitat de Frobenius) *Siguen $H \subseteq G$, $\alpha \in \mathrm{cf}(H)$ i $\beta \in \mathrm{cf}(G)$. Aleshores,*

$$[\alpha^G, \beta] = [\alpha, \beta_H]\,.$$

A partir d'aquí és immediat provar el corol·lari següent.

8 Corol·lari *Si α és un caràcter de H, aleshores α^G és un caràcter de G.*

M'agradaria concloure aquesta introducció amb un teorema més complex, encara que bàsic en qualsevol curs de teoria elemental de caràcters.

9 Teorema (R. Brauer) *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, aleshores*

$$\chi = \sum a_\psi \psi^G\,,$$

on $a_\psi \in \mathbb{Z}$ i ψ recorre els caràcters dels subgrups nilpotents de G.

Com a conseqüència d'aquest teorema, Brauer va provar una conjectura d'Artin sobre L-sèries. Aquesta és una aportació de la teoria de caràcters a la teoria de nombres.

2 Alguns problemes oberts (i tancats)

Graus de caràcters

Ja sabem que si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, aleshores $\chi(1)$ divideix $|G|$. Un problema que ha trigat uns quants anys en ser resolt és el següent. Si p és un nombre primer i G és un grup finit, en quins casos $\chi(1)$ no és divisible per p per a tot $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$? Es a dir, quins són els nombres primers que no divideixen cap nombre $\chi(1)$?

Hi ha un teorema bàsic de la teoria de caràcters, que generalitza el fet que $\chi(1)$ siga divisor de $|G|$ per a $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. El que també és cert és que $\chi(1)$ divideix $|G : A|$ per a tot subgrup normal abelià A de G. Aleshores, si tenim un grup amb un p-Sylow abelià $P \lhd G$, es verificarà que $\chi(1)$ no és divisible per p per a tot $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

El recíproc és cert i ha estat provat utilitzant la classificació dels grups simples.

10 Teorema (Ito-Michler) *Siga G un grup i siga $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Aleshores $\chi(1)$ no és divisible per p per a tot $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ si i només si $P \lhd G$ i P és abelià.*

Quan parlem de graus de caràcters és convenient donar-li un nom al conjunt

$$\{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\} = \mathrm{cd}(G)\,.$$

Ara que anem a parlar de grups resolubles cal recordar que un grup G és resoluble si G té una sèrie de subgrups

$$1 = G_1 \lhd G_2 \lhd \ldots \lhd G_n \lhd G_{n+1} = G$$

tals que els quocients G_{i+1}/G_i són abelians. La longitud de la sèrie més curta d'un grup resoluble G la denotem per $\mathrm{dl}(G)$. Per exemple, si $\mathrm{dl}(G) \leq 1$, G es abelià.

Ja hem vist que G és abelià si i només si $\chi(1) = 1$ per a tot $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. És a dir, G és abelià si i només si $|\,\mathrm{cd}(G)| = 1$. M. Isaacs i D. Passman provaren que si $|\,\mathrm{cd}(G)| = 2$, aleshores G és resoluble i $\mathrm{dl}(G) \leq 2$.

11 Conjectura (Isaacs-Seitz) *Si G és un grup resoluble, aleshores*

$$\mathrm{dl}(G) \leq |\,\mathrm{cd}(G)|\,.$$

La conjectura és certa per a grups d'ordre senar (T. Berger) i és conegut (D. Gluck) que

$$\mathrm{dl}(G) \leq 2|\,\mathrm{cd}(G)|\,.$$

El problema per a provar aquesta conjectura és que, de fet, $\mathrm{dl}(G)$ sembla molt més petit que $|\,\mathrm{cd}(G)|$.

Ja sabem que, donat un grup finit G, podem formar una àlgebra complexa $\mathbb{C}G$ de dimensió finita.

12 Qüestió (R. Brauer) *Quines àlgebres A sobre $\mathbb{C}$ són àlgebres de grup?*

B. Huppert va preguntar què coneix l'àlgebra complexa $\mathbb{C}G$ del grup G. (Pel Teorema de Weddeburn, notem que aquest és un problema sobre graus de caràcters.) M. Isaacs va provar que si $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}H$ i G és nilpotent, aleshores H és nilpotent. (Jo vaig provar el mateix fet per a àlgebres FG, on F és algebraicament tancat.)

13 Qüestió *Quines propietats de G sap $\mathbb{C}G$? Per exemple, sap $\mathbb{C}G$ si G és resoluble? Sap $\mathbb{C}G$ si G té un Sylow normal?*

B. Huppert ha conjecturat que si $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}H$ i G és simple, aleshores H és simple.

Grups monomials

Si pensem que la inducció de caràcters és un procés natural (i ho és), i pensem que els caràcters lineals són fàcils d'entendre, convindrem que els caràcters monomials també ho són. Un caràcter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ és *monomial* si $\chi = \lambda^G$ per a algún caràcter lineal d'algun subgrup H de G. El grup G és *monomial o M-grup* si tots els seus caràcters són monomials. No és veritat, però, que els grups monomials siguen senzills. De fet, són grups molt misteriosos.

El primer resultat sobre M-grups és el següent.

14 Teorema (Taketa, 1930) *Si G és M-grup, aleshores G és resoluble.*

No és cert que tots els grups resolubles siguen M-grups (SL(2,3) és el contraexemple més petit). Quins grups són M-grups? Per exemple, els grups nilpotents són M-grups. De fet, totes les classes de grups monomials que es coneixen són poc representatives. El motiu és que són classes tancades per subgrups. I aquesta condició no té res a veure amb els M-grups. E. C. Dade va provar que si H és qualsevol grup resoluble, aleshores H és subgrup d'un cert M-grup G. Així no es pot dir absolutament res sobre els subgrups dels M-grups, tret que són resolubles, amb probablement dues excepcions.

Durant un cert temps es va pensar que si G és M-grup i $N \lhd G$, aleshores N és també un M-grup. E. C. Dade i R. Van der Waall varen trobar un contraexemple en què $|G : N| = 2$. Com saben els especialistes en Teoria de Grups, el número 2 és un número molt especial.

15 CONJECTURA *Siga G un M-grup i siga $N \lhd G$, amb $|G : N|$ senar. Aleshores, N és un M-grup.*

16 CONJECTURA *Siga G un M-grup i siga H un subgrup, amb* $(|H|, |G : H|) = 1$. *Aleshores, H és un M-grup.*

Hem vist que la definició dels grups monomials és purament teoria de caràcters. Durant un cert temps es va buscar una definició de grups monomials per teoria de grups. A. Parks va trobar aquesta caracterització. Però açò no ha servit de res.

La taula de caràcters

Siga G un grup finit i siga $X(G)$ la taula de caràcters de G. Un dels problemes clàssics de la Teoria de Caràcters és esbrinar quines propietats de G determina $X(G)$. Per exemple, $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|$ està determinat per $X(G)$. O

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi(x)|^2 = |\mathbf{C}_G(x)|$$

també está determinat per $X(G)$. També recordem que els dos grups no abelians d'ordre 8 (Q_8 i D_8) tenen la mateixa taula de caràcters (per la qual cosa deduïm que els ordres dels elements de G no estan determinats per la taula de caràcters.)

17 QÜESTIÓ *Quines propietats de G sap $X(G)$?*

És molt fàcil provar que $X(G)$ determina $|\mathbf{Z}(G)|$ i $|\mathbf{F}(G)|$, si G es abelià, nilpotent, resoluble, o simple. Però hi ha moltes propietats naturals de Teoria de Grups que no estan gens clares.

R. Brauer va preguntar si $X(G)$ determina l'abelianitat dels seus p-subgrups de Sylow. Altre cop, la solució s'obté utilitzant la classificació dels grups simples.

18 TEOREMA (KIMMERLE-SANDLING, 1995) *Suposem que G i H tenen la mateixa taula de caràcters. Siguen P i Q dos p-subgrups de Sylow de G i H, respectivament. Si P és abelià, aleshores*

$$P \cong Q\,.$$

Una altra pregunta clàssica de Brauer ha estat contestada negativament:

19 EXEMPLE (S. MATTAREI, 1991) *Hi ha dos grups G i H amb la mateixa taula de caràcters de manera que* $\mathrm{dl}(G) = 2$ *i* $\mathrm{dl}(H) = 3$.

Accions coprimeres

Suposem que un grup A actua sobre un altre grup G per automorfismes, és a dir, per a cada $a \in A$, l'aplicació $g \mapsto g^a$ és un automorfisme de G amb $(g^a)^b = g^{ab}$ per a $a, b \in A$, $g \in G$. En tota acció hi ha un subgrup molt important: el subgrup de punts fixats

$$\mathbf{C}_G(A) = \{g \in G \mid g^a = g \; \forall a \in A\}\,.$$

És clar que A permuta els caràcters de G: si χ és un caràcter de G, la funció de classe

$$\chi^a(g) = \chi(g^{a^{-1}})$$

és un caràcter de G. També χ és irreductible si i només si χ^a és irreductible.

Siga

$$\operatorname*{Irr}_A(G) = \{\chi \in \operatorname{Irr}(G) \mid \chi^a = \chi \; \forall a \in A\}\,.$$

Si $(|A|, |G|) = 1$, G. Glauberman, M. Isaacs i T. Wolf, provaren que hi ha una bijecció natural

$$^*\colon \operatorname*{Irr}_A(G) \to \operatorname{Irr}(\mathbf{C}_G(A))\,.$$

La següent, és una qüestió molt profunda:

20 Conjectura *Si $\chi \in \operatorname{Irr}_A(G)$, aleshores $\chi^*(1)$ divideix $\chi(1)$.*

Els resultats més significants sobre aquesta conjectura han estat provats per B. Hartley i Alexandre Turull.

Global, local i representacions modulars

Fixem un nombre primer p. La següent és una de les idees fonamentals de la teoria de grups. Si G és un grup finit, un subgrup H de G és *local* si existeix un p-subgrup $Q > 1$ de G tal que

$$H = \mathbf{N}_G(Q) = \{g \in G \mid Q^g = Q\}\,.$$

La idea fonamental és relacionar les propietats de G (globals) amb les propietats dels subgrups locals de G.

Un exemple clàssic es el teorema de Frobenius. (Recordem que n_p es la major potència de p que divideix el nombre natural n.)

21 Teorema *Siga G un grup. Aleshores, G té un subgrup normal $N \lhd G$ amb $|N| = |G|/|G|_p$ si i només si $\mathbf{N}_G(Q)/\mathbf{C}_G(Q)$ és un p-grup per a tot p-subgrup Q de G.*

En aquesta última secció, voldria parlar de dues conjectures molt famoses. Aquestes conjectures s'estudien dintre de la teoria de *representacions modulars* (o de característica p) i les dues tenen versions més refinades, que utilitzen els p-blocs de Brauer.

Si G és un grup i p és un nombre primer, siga $\operatorname{Irr}_{p'}(G) = \{\chi \in \operatorname{Irr}(G) \mid p$ no divideix $\chi(1)\}$.

22 Conjectura (McKay) *Siga $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Aleshores,*

$$|\operatorname*{Irr}_{p'}(G)| = |\operatorname*{Irr}_{p'}(\mathbf{N}_G(P))|\,.$$

La conjectura de McKay ha estat provada per a grups resolubles, simètrics, alternats, esporàdics, etc. El gran problema de la conjectura de McKay és que no es redueix a grups simples.

Per exemple, com a conseqüència de la conjectura de McKay, podem obtenir un fet que pareix elemental: si un grup G té un p-subgrup de Sylow P abelià, aleshores

$$|\mathrm{cl}(\mathbf{N}_G(P))| \leq |\mathrm{cl}(G)|\,.$$

La teoria modular estudia representacions

$$\mathcal{X}\colon G \to \mathrm{GL}(n, F)\,,$$

on F és un cos de característica p. Habitualment, suposem que F és un cos algebraicament tancat.

23 Teorema (R. Brauer) *Siga G un grup finit. El nombre de representacions irreductibles de G és el nombre de classes de conjugació de G d'elements d'ordre no divisible per p.*

Una de les (moltes) idees importants de Brauer va ser pensar que les representacions modulars podien servir per a entendre millor les representacions complexes de G.

Fixem un ideal maximal M de $\mathbf{R}$ que continga $p\mathbf{R}$, i obtenim un cos algebraicament tancat $F = \mathbf{R}/M$ (de característica p). Siga

$$^* : \mathbf{R} \to F$$

l'aplicació natural. Recordem que si $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, tenim que

$$\omega_\chi(g) = \frac{|\mathrm{cl}_G(g)|\chi(g)}{\chi(1)} \in \mathbf{R}\,.$$

Dos caràcters $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ estan al mateix *p-bloc* de G si

$$\omega_\chi(g)^* = \omega_\psi(g)^*$$

per a tot $g \in G$.

Brauer va descobrir els caràcters anomenats de «p-defecte cero». Un caràcter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ té *p-defecte cero* si

$$\chi(1)_p = |G|_p\,.$$

24 Teorema (Brauer) *Siga $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Aleshores χ té p-defecte cero si i només si $\{\chi\}$ és un p-bloc.*

25 Conjectura (Alperin)) *Siga G un grup finit i siga p un primer. El nombre de classes de conjugació de G d'elements d'ordre no divisible per p, és el nombre de classes de conjugació de parelles*

$$(P, \gamma)\,,$$

on P és un p-subgrup de G i

$$\gamma \in \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_G(P)/P)$$

té p-defecte cero.

És a dir, informació important de G (per tant, global) és computable localment.

La conjectura d'Alperin és certa per a grups p-resolubles, simètrics, alternats, grups de tipus Lie, ó per als p-blocs nilpotents de M. Broué i Lluis Puig.

Avui es treballa en conjectures més generals d'E. C. Dade i G. R. Robinson les quals hom creu que són reductibles a grups simples.

Referències

[1] Isaacs, M. *Character Theory of Finite Groups*, Dover, New York, 1994.

[2] Navarro, G. *Characters and Blocks of Finite Groups*, Camdridge University Press, 1998.

Departament d'Àlgebra
Facultat de Matemàtiques
Universitat de València
46100 Burjassot, València
gabriel@uv.es