Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 13, núm. 2, 1998. Pàg. 35–84.

Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge*

Josep Pla i Carrera

1 Introducció

Al II Congrés d'Ontologia celebrat a Sant Sebastià i a Barcelona, entre els dies 24 i 31 de març, en commemoració del quatre-cents aniversari del naixement de René Descartes,[1] tot escoltant Javier Echevarría, se'm va acudir una idea:

> En l'àmbit matemàtic, un *mètode* comporta necessàriament un canvi de llenguatge?

És clar que, per tal de poder concloure de forma rigorosa la validesa o falsedat d'aquesta intuïció, caldria fer una anàlisi profunda i detallada de què cal entendre per *mètode*, de quins són els *mètodes* —o, en tot cas, els pretesos mètodes— matemàtics.

Així quan, a través de l'amic Pelegrí Viader, la Societat Catalana de Matemàtiques em va demanar si volia aprofitar l'avinentesa del quatre-cents aniversari del naixement de René Descartes per parlar de l'insigne pensador francès i de la seva obra matemàtica, em vaig sentir molt honorat per la invitació, però alhora em vaig sentir força preocupat pel fet d'haver de parlar de matemàtica, de Descartes i del mètode cartesià, d'una forma didàctica, original i atractiva, i que pogués ser d'alguna utilitat als matemàtics, socis de la societat. Va ser aleshores quan vaig pensar que podria encetar la idea que se m'havia acudit un mes abans, aplicant-la només a dos mètodes molt concrets: el mètode d'Arquimedes i el mètode de Descartes.

Quan vaig comentar el títol i el contingut de la xerrada amb l'actual president de la Societat, el col·lega i amic Sebastià Xambó, em va fer partícip d'una idea que, a voltes, el preocupava:

> Què és allò que fa que una *tècnica* o una *manera de fer matemàtiques* tingui el dret de ser anomenat, amb propietat, un mètode?

∗ Treball llegit a la Societat Catalana de Matemàtiques el 30 de maig de 1996.

1 Nazioarteko II. Ontologia Kongresua Descartes jaio zeneko IV. Mendeurrean. 24–31 de març de 1996. Sant Sebastià-Barcelona.

Aquesta pregunta és, sense cap mena de dubte, prèvia a qualsevol estudi aprofundit de la qüestió en tota la seva amplitud, però no canvia pas gaire el contingut inicial que havia pensat per a aquesta xerrada.

Tanmateix em va semblar que no fóra pas una pèrdua de temps mirar de dedicar-hi un xic d'atenció. El suggeriment fet per en Sebastià ens col·locava davant d'un estudi historicoepistemològic molt més pregon que no pas el que m'havia plantejat inicialment, si intentava donar-li una resposta prou acurada. Aquesta resposta només s'assoliria si se li dedicava una atenció molt particular i força dedicació. Obligava a *aclarir* i a *aïllar* les característiques més notables que fan que, dins la matemàtica, puguem afirmar que disposem d'un mètode. I d'antuvi calia esbrinar si era possible fer-ho. A més, lligant-ho amb la idea inicial, plantejava una qüestió nova:

> És suficient afirmar que allò que caracteritza un mètode és el fet que produeixi un *canvi de llenguatge*? O bé, hi ha quelcom més que també cal posar en relleu?

Ara bé, aquesta pregunta només la podrem respondre seriosament si analitzem els mètodes que s'han anat introduint en l'àmbit matemàtic, i procurant establir allò que tenen de comú i, alhora, allò que els fa ser diferents —quelcom que pot ser molt més aclaridor. Per fer-ho teníem dos camins possibles. El primer, ens portaria, inexcusablement, a buscar tants mètodes matemàtics com fossim capaços de reunir. Un cop ben delimitats, hauríem d'estudiar-los detingudament en tant que mètodes possibles. És a dir, no tant pel seu contingut matemàtic estricte —encara que també des d'aquest vessant—, com per la seva aportació epistemològica, com a eina que permet de conèixer amb claredat un cert àmbit de la matemàtica. Tot mètode està necessàriament vinculat, d'alguna manera, amb allò que estudia? Ho transcendeix? Aquest camí tanmateix se'ns presenta força espinós i difícil. Cal, sense cap mena de dubte, un treball en equip realitzat per especialistes d'àmbits diversos de la matemàtica i de la física, i també per filòsofs i psicòlegs assenyats. No podem, però, negar la importància que un estudi d'aquestes característiques tindria per al coneixement profund de l'epistemologia de la matemàtica.[2] No obstant això, penso que a ningú no se li escapa la utilitat que aquest estudi tindria en un desenvolupament acurat —gens superficial— de la filosofia de la matemàtica.

Un segon camí, possiblement força més planer, consistia a buscar aquelles obres, més o menys extenses, que els seus autors hagin volgut distingir amb el nom específic de *mètode* o que, per la raó que sigui, l'hagin adquirit posteriorment dins la comunitat científica. N'hi ha moltes? Són importants dins la història de la matemàtica? Són obres clau? Han aportat un llenguatge nou, una manera nova de llegir qüestions matemàtiques plantejades amb anterioritat a l'aparició del text en qüestió? Esdevenen una forma diferent de mirar, d'entendre? Permeten generalitzacions potents dels problemes que d'alguna manera els han motivat o suggerit? Proporcionen una nova epistemologia de la matemàtica o d'una part impotant d'ella? Ens doten d'un sistema d'eines més adequades que les anteriors per enfocar, plantejar

2 És força corrent trobar-se amb anàlisis epistemològiques de la matemàtica basades en parts elementals i força antigues, que no van gairebé mai més enllà de les innovacions del segle XVII. S'oblida que la vitalitat de la matemàtica actual és molt més gran que la de l'època clàssica grega i la dels segles XVII, XVIII i XIX. Aquest fet no deixa de sorprendre a un esperit matemàtic prou obert per interessar-se per aquesta mena de qüestions.

i resoldre un nombre important de problemes encara no resolts? Ofereixen una tècnica més simple, més idònia, més lligada a problemes ja resolts?

Ultra tot això, podríem mirar també si hi ha una coincidència entre els anomenats *mètodes matemàtics* i els textos retolats amb la paraula *mètode.* Això ens permetria fer una primera classificació d'aquests darrers: aquells que han proporcionat realment un mètode reconegut per la comunitat de matemàtics i aquells que, al contrari, no ho han fet. L'anàlisi d'uns i altres faria possible veure quines són les diferències epistemològiques, programàtiques i historiogràfiques.

Tot això és el que em va portar a elaborar una primera llista de textos matemàtics que incloguessin en el seu títol la paraula *mètode.* En fer-ho, però, em vaig trobar que n'hi havia d'altres que portaven també noms comuns com ara *art*, *elements*, *fonaments*, *principis*, etc. Aquest fet m'abocava a una nova situació: calia estudiar la diferència entre aquests conceptes, veure en quina llengua eren usats més normalment, si hi havia un període de la història en el qual estiguessin més de moda, etc. Novament la tasca esdevenia massa ambiciosa per ser desenvolupada en una xerrada —que volia ser un homenatge a Descartes—, encara que només fos de passada. Per aquesta raó, em limitaré a dos termes ben concrets: *mètode* i *art*.

Pel que fa a la paraula *mètode*, em vaig trobar amb:

- PITÀGORES–PAPPOS (VI a. C.) *Mètode d'anàlisi-síntesi.* Era el mètode que seguien els matemàtics grecs en la recerca intuïtiva dels resultats geomètrics i de la seva demostració.
- ÈUDOX (IV a. C.) *Mètode d'exhaustió.* Nom atribuït per Gregoire Saint Vincent, en el segle XVII, a la tècnica de càlcul de quadratures desenvolupada pels geòmetres grecs i continguda als llibres V, X i XII dels *Elements* d'Euclides.
- ARQUIMEDES (III a. C.) *El Mètode.* Carta adreçada a Eratòstenes, bibliotecari d'Alexandria, on l'insigne siracusà exposa la seva manera d'intuir els resultats relatius a les quadratures.
- DESCARTES (1637) *Discours de la Méthode* [...] És la introducció que René Descartes va elaborar per tal d'explicar el «seu mètode per dirigir la raó de forma adequada en la recerca de la veritat en les ciències», el qual havia de justificar els seus assajos: *les Météors, la Dioptrique, la Géométrie.*
- FERMAT (1637) *Methodus ad disquirendam Maximam et Minimam.* És un manuscrit de Pierre de Fermat, pensat l'any 1629, i que perfeccionaria en treballs posteriors per tal que fos útil per a les *corbes transcendents.* Conté una tècnica per a determinar els extrems de les corbes.
- FERMAT (1659) *El mètode del descens infinit.* En una carta adreçada a Christiaan Huygens a través de l'amic comú Pierre de Carcavi, exposa de forma breu una manera de trobar la demostració de certes proposicions relatives als nombres naturals.
- NEWTON (1671) *De Methodis Serierum et Fluxionum.* És un text que recull totes les troballes d'Isaac Newton relacionades amb el *càlcul de fluxions* i amb la manera de representar les corbes com a *sèries de potències.*
- LEIBNIZ (1684) *Nova methodus pro maximis et minimis, itaque tangentibus, quœnec irrationales quantitates moratur.* Gottfried Wilhelm Leibniz introdueix l'*operador diferencial d* i explicita el seu comportament davant els *algorismes aritmètics* i el seu vincle amb el *comportament d'una corba.*

- TAYLOR (1715) *Methodus Incrementorum directa et Inversa.* Un text de càlcul que obre la porta a qüestions força incipients com eren les *equacions diferencials* de tota mena. Hi trobem, per exemple, el primer estudi sobre la *corda vibrant*.
- STIRLING (1730) *Methodus differentialis.* Un text de càlcul diferencial.
- EULER (1744) *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Propietate Gaudentes.* S'ofereix una tècnica sistemàtica per estudiar les corbes que maximitzen o minimitzen una integral. Leonhard Euler aprofundeix les intuïcions genials dels germans Jakob i Johann Bernoulli.
- LEGENDRE (1805) *Nouvelle méthode pour la determination des orbites des comètes.* Una concepció del càlcul d'òrbites basat en les noves tècniques que proporciona el càlcul diferencial.
- POINCARÉ (1892–1899) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Henry Poincaré recull i sistematitza treballs anteriors relatius a les *solucions asimptòtiques*, que estan íntimament lligades a les *periòdiques*.

És curiós d'observar l'existència d'un vincle força constant entre el *càlcul diferencial* i *integral* i la paraula *mètode*. Tanmateix però, Pitàgores–Pappos, Descartes, i Fermat l'usen en d'altres contextos.

Pel que fa a la paraula *art*, he trobat:

- CASSIODOR (544) *De artibus ac disciplinis liberalium litterarium.* És un text típic de l'època fosca en el qual s'exposen les *set arts liberals* que componien el *trivi* i el *quadrivi*. Constituïen el programa dels estudis de les escoles monàstiques i també de les primeres universitats.
- LLULL (1235–1315) *Ars magna et ultima.* És, entre moltes altres obres que duen el títol d'*ars*, com ara l'*Ars demostrativa*, l'*Ars combinatoria*, un llibre en el qual intenta d'oferir un mètode molt primitiu, però mecànic, de producció d'idees noves, tot combinant-ne de ja existents. Seria un intent remot del concepte d'una ciència universal de la lògica, i influiria en Leibniz.
- SANTCLIMENT (1584) *L'art de Arismètica.* És una aritmètica típica de l'època. Conté els numerals indioaràbics i els algorismes de càlcul aritmètic, així com un bon nombre d'aplicacions. Editada a Barcelona, i escrita en català, és la primera aritmètica que s'editià a la Península Ibèrica. En aquest període trobem un grapat d'arts de l'aritmètica i alguns textos que contenen les quatre arts liberals del quadrivi.
- RECORDE (1541) *The Grounde of Artes.* Un text enciclopèdic que pretén d'oferir un panorama prou ampli d'allò que és fonamental per a la comprensió de les arts [liberals].
- CARDANO (1545) *Ars Magna sive de regulis algebraicis.* És el primer text d'àlgebra que conté la resolució de la *cúbica* i de la *quàrtica*. També és el primer text que considera la possilitat de les arrels quadrades dels nombres negatius.
- VIÈTE (1591) *In artem analyticam isagoge.* El podem considerar el primer text d'àlgebra, entesa com l'art de resoldre equacions polinòmiques, autènticament modern. Introdueix la notació literal.
- HARRIOT (1631) *Artis analyticæ praxis.* És un text d'àlgebra anglès que recull moltes de les aportacions de Viète i alhora n'anticipa algunes de Descartes.

- ARNAULD (1660) *Logique ou l'art à pénser.* És un text d'influència pascalina que recull el mètode del raonament científic de l'escola jansenista de Port Royal.
- LEIBNIZ (1666) *De Arte Combinatoria.* Conté, entre d'altres aspectes, un intent d'establir un sistema universal de raonament.
- BERNOULLI (1713) *Ars conjectandi.* Aquesta obra de Jakob Bernoulli es pot considerar el primer text de càlcul de probabilitat teòric. Conté la primera consideració de la *llei dels grans nombres*.

L'*art* és una paraula lligada fonamentalment a l'àlgebra, si bé, com podem veure, també s'usa en d'altres arts matemàtiques: la probabilitat i la lògica.

* * *

Em vaig preguntar si la paraula *ars* —un terme heretat del llatí i, en particular, de les *set arts liberals* del *trívium* i *quadrívium* i que, amb el pas del temps han desaparegut, deixant tanmateix la classificació de *ciències* i *humanitats* o *lletres*— es pot considerar un sinònim de la paraula *mètode*. Per tal d'esbrinar-ho em vaig limitar exclusivament a consultar dos diccionaris.[3]

> **Art:** «Manera de fer una cosa segons regles, habilitat, destresa».[4]
> **Mètode:** «Camí per arribar a un resultat».[5]
> La paraula *art* ve del llatí —*ars, artis*— «habilitat, professió, art».[6]
> A la paraula *mètode*, Coromines remet a *episodi*, un mot que ve de la paraula grega *ἐπεισόδιον* —«part del drama entre dues entrades del cor», *accessori*,— derivat de *εἴσοδοζ* —*entrada*. Prové de *ὁδοζ* —«camí»— amb el prefix *ειζ*, que vol dir «endins».[7]
> «Mètode [-do]», pres del llatí *methodus*, que s'ha pres del grec *μέθοδοζ*.

Ens adonem que etimològicament, el *mètode* «és el camí que cal seguir per arribar a un resultat», però d'antuvi almenys no suposa en absolut la participació de l'home. En canvi, un *art* és la «manera de fer una cosa segons regles» i suposa una certa habilitat o destresa. Hi ha, per tant, la intervenció individual o col·lectiva de l'home. Així és precisament com recull aquestes paraules el DLCIEC.

> **Art:** Habilitat, destresa, a fer coses adquirida amb l'estudi, l'experiència, l'observació; manera de fer alguna cosa segons regles.
> Sistema de preceptes i de regles per a fer bé alguna cosa; professió que requereix llur coneixença i aplicació.
> **Mètode:** Camí que se segueix, manera ordenada de procedir, per a arribar a un fi.[8]

3 El *Diccionari etimològic i complementari de la llengua catalana* d'en Joan Coromines [DEC] i el *Diccionari de la llengua catalana* de l'Institut d'Estudis Catalans [DLCIEC].
4 DEC, **1**, 435.
5 DEC, **3**, 495.
6 La paraula *art* la trobem ja a les *Homilies d'Organyà.* També apareix al *Llibre de Meravelles* de Ramon Llull.
7 Documentat per primera vegada l'any 1695, *episodo*, forma mal adoptada de la paraula francesa *episode.*
8 Una segona entrada és: «Obra elemental per a iniciar-se en l'aprenentatge d'una disciplina, d'una tècnica, etc.».

Malgrat aquestes accepcions més corrents és difícil, quan s'aplica a una ciència, separar el camí que s'ha de seguir, entenent-lo com una *manera ordenada de procedir per arribar a un fi*, de l'habilitat que hom té per establir l'ordenació adequada. Aquesta ordenació s'ha de fer precisament d'acord amb les regles del mètode que ens hàgim procurat. L'art és la manera de fer camí i només es pot fer camí, caminant, i per caminar adequadament cal un cert mètode.

* * *

És curiós d'observar que René Descartes, abans d'establir el seu *mètode* a la segona part del *Discours de la méthode*, ens ofereix una «faula» del seu propi procés:

> El meu propòsit aquí no és, doncs, ensenyar el mètode que cadascú ha de seguir per conduir bé la seva raó, sinó fer veure només de quina manera *he procurat conduir la meva*. Aquells qui es dediquen a impartir preceptes es deuen creure més hàbils que aquells a qui els imparteixen; i si s'equivoquen en la més petita cosa, en són blasmables. Però *proposant aquest escrit tan sols com una història* o, si ho preferiu més, *com una faula*, en què, d'entre alguns exemples que poden imitar-se, se n'hi trobaran possiblement molts d'altres que serà enraonat no seguir-los; espero que per a alguns serà útil, sense ser nociu per a ningú, i que tothom m'estarà agraït per la meva franquesa.[9]

Així doncs, Descartes ens mostra el camí que ell va seguir durant la seva joventut i de quina manera aquest camí el va portar al *Discours de la méthode pour bien conduir sa raison et chercher la verité dans les sciences, Plus la Dioptrique, les Météors et la Géométrie qui sont essays de cette Méthode.*[10] El camí de la vida és, doncs, el camí que li ha calgut recórrer per arribar al *mètode*. Però el mètode serveix per «conduir la raó». Constitueix el conjunt de regles o criteris que permeten a la raó seguir avançant en el camí de la recerca de la veritat —que, segons Descartes, «és la bellesa més preuada i més autèntica que un home ha de cercar»— en les ciències.

> I vaig creure fermament que d'aquesta manera reixiria a conduir la meva vida molt millor que si l'hagués bastida damunt d'antics fonaments i només em recolzés en els principis en què havia estat persuadit en la meva joventut, sense mai no haver examinat si eren o no veritables.[11]

El mètode és, doncs, per Descartes una manera de caminar, una manera de fer camí i, per tant, és una certa manera de fer un cert *art* perquè hi intervé l'habilitat

9 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 4. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 23; FONT 1996, 79. L'èmfasi és meu.

10 «Descartes, a les seves cartes i publicacions, s'havia vantat sovint de posseir un mètode capaç, no ja d'ordenar o transmetre les veritats adquirides, sinó àdhuc de descobrir-ne de noves i de permetre així l'avanç continuat de les ciències [carta a Villebressieu, estiu de 1631; AT, **I**, 213]. És més, quan l'any 1636 prepara el material per a la seva publicació, informa Mersenne del propòsit de comunicar part del seu mètode [carta a Mersenne, març de 1636, AT, **I**, 339]. Un any després, però, en entrar el text a la impremta, rectifica la seva intenció: "no poso pas [per títol] *Tractat del mètode* sinó *Discurs del mètode*, que és el mateix que *Prefaci o advertència sobre el mètode*, per tal de mostrar que no tinc pas el propòsit d'ensenyar-lo sinó solament de parlar-ne. Car, tal com pot veure's en allò que dic sobre el mètode, consisteix més en pràctica que no pas en teoria ..." [carta a Mersenne, març de 1637; AT, **I**, 349]. I, efectivament, quan a la segona part del *Discours* Descartes en dóna els quatre preceptes, són tan generals i tòpics que és fàcil concloure que o bé no hi ha pròpiament una doctrina cartesiana, o bé és objecte d'ocultació voluntària per l'autor» [TURRÓ 1998, 1–2].

11 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 14. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 33; FONT 1996, 93.

de cadascú, habilitat adquirida en el camí fet.

> Però com un home que camina solitari i enmig de tenebres, vaig decidir d'anar tan lentament i de ser *tan circumspecte* en tot que, encara que avancés ben a poc a poc, em guardava bé de no caure.[12]

I més endavant ens esmenta què és, d'entre tot allò que ha après, el que li serà útil per tal d'establir el seu mètode.

> Essent jove, havia estudiat una mica d'entre les arts les parts de la filosofia, la lògica; i d'entre les matemàtiques, l'anàlisi dels geòmetres i l'àlgebra, tres *arts* o *ciències* que semblaven haver contribuït d'alguna manera al meu propòsit.[13]

Descartes, per tal d'evitar la polèmica, parla d'*arts* o *ciències*, en la línia que els escolàstics empraven quan parlaven de la lògica.[14] Com a *art* és una *tècnica* amb la qual l'enteniment procedeix amb ordre i sense error. Com a *ciència* és l'estudi dels raonaments vàlids i formalment verdaders.[15] Descartes ofereix les limitacions que, segons ell, tenen aquestes arts. La *lògica*, amb el seus *sil·logismes* serveix més «per explicar als altres el que hom ja sabia o, fins i tot, com l'Ars de Llull, per parlar, sense judici, d'aquelles que s'ignoren, però no serveix per aprendre».[16] De l'*anàlisi dels antics* i de l'*àlgebra dels moderns* ens dirà que, «a més de no referir-se sinó a matèries molt abstractes i que semblen no servir per a res, la primera, sempre està sotmesa a la consideració de les figures de tal manera que no pot exercitar l'enteniment sense fatigar molt la imaginació; i la darrera, està tan subjecte a regles i a xifres que se n'ha fet un art confús i obscur, que embarassa l'esperit en comptes de ser una ciència que el cultiva».[17] I afegeix

> Tot plegat va fer-me pensar que era necessari cercar algun mètode que incorporant els avantatges d'aquests tres, n'evités llurs defectes.[18]

I aleshores ens ofereix no «un gran nombre de preceptes», sinó només els «quatre següents» els quals, si hom «pren la resolució ferma i constant de no deixar d'observar-los ni un sol cop»,[19] serien suficients «per a la recerca de la veritat».[20]

Les *regles* del mètode de Descartes —és a dir, el *mètode de Descartes*— són, com és ben conegut de tothom, els *principis* següents:

---

12 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 16–17. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 35; FONT 1996, 96. L'èmfasi és meu.

13 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 17. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 35; FONT 1996, 96. L'èmfasi és meu.

14 De fet, s'inspiraven en Aristòtil, *Analítics posteriors*, **I**, lliçó 1.

15 De fet, és la distinció entre *lògica* i *metalògica* actuals, però en la mentalitat i amb la terminologia de l'època.

16 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 17. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 36; FONT 1996, 96–97.

17 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 17–18. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 36; FONT 1996, 97–98.

18 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 18. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 36; FONT 1996, 98.

19 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 18. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 37; FONT 1996, 98.

20 Recordem tanmateix que Descartes, alguns anys abans, havia elaborat les *Regulæ ad directionem ingenii* [1627-1628], editades en 1701. És una obra inacabada i les regles del *Discours de la méthode* són, d'alguna manera, una síntesi de les regles. Vegeu l'excel·lent traducció catalana de Salvi Turró, a TURRÓ 1998.

> *Principi de l'evidència.* El primer era no acceptar mai cap cosa com a vertadera sense conèixer evidentment que ho fos; és a dir, evitar acuradament la precipitació i la prevenció, i no incloure en els meus judicis res més que allò que es presentés al meu esperit tan clarament i tan distintament que jo no tingués cap motiu per posar-ho en dubte.[21]
> *Principi de l'anàlisi.* El segon, dividir cadascuna de les dificultats que examinem en tantes parts com fos possible i com calgués per a resoldre-la millor.[22]
> *Principi de la síntesi.* El tercer, conduir per ordre els meus pensaments, començant pels objectes més simples i més fàcils de conèixer, per a ascendir a poc a poc, gradualment fins al coneixement dels més complexos, i suposant un ordre fins i tot entre aquells que no es precedeixen per naturalesa els uns dels altres.[23]
> *Principi de l'enumeració completa.* I el darrer, fer arreu recomptes tan complets i revisions tan generals que arribés a estar segur de no ometre res.[24]

Tot seguit posa de manifest dos fets notables: el seu mètode s'ha manllevat de la manera de fer dels geòmetres antics, però alhora li ha proporcionat una manera de conèixer els «mitjans, i fins a on era possible de resoldre aquelles [qüestions] que ignorava».[25] La utilitat del mètode en la resolució dels problemes geomètrics l'analitzarà Descartes més endavant i, usant-lo en una ciència tan particular com és la geometria, obtindrà un dels textos paradigmàtics de la història de la matemàtica, *la Géométrie* «que és, com diu Descartes en el títol del *Discours de la méthode*, un dels assajos d'aquest mètode».

Però el mètode surt fora de l'àmbit estricte de la geometria i per aquesta raó és apte per ser aplicat a d'altres ciències:

> Però el que més em plaïa d'aquest mètode era que a través seu estava segur de fer servir en tot la meva raó, si no de manera perfecta, almenys el millor que m'era possible. A més sentia, practicant-lo, que el meu esperit s'acostumava a poc a poc a concebre el més clarament i distintament possible els seus objectes, i que no havent-lo sotmès a cap matèria particular, em prometia d'aplicar-lo també de manera profitosa a les dificultats de les altres ciències tal com ho havia fet amb les de l'àlgebra. No per això vaig gosar emprendre l'examen de totes aquelles que se'm presentessin, ja que això mateix hauria estat contrari a l'ordre prescrit. Però, havent advertit que els seus principis havien de ser tots ells manllevats de la filosofia, en la qual no en trobava cap de cert, pensava que abans de tot calia procurar establir-los; i que, essent això la cosa més important del món, i

21 AT, **VI**, 18; Arnau-Gutiérrez 1988, edició de 1992, 37; Font 1996, 98. Descartes les enuncia en primera persona perquè parla del *seu* mètode que *no pretén imposar a ningú.* Vegeu Granada 1984, 16, nota 23. Correspon a les *regulæ* II, i III [AT, **X**, 362–366, i 366–370; Turró 1998, 44–47, i 47–50].

22 AT, **VI**, 18; Arnau-Gutiérrez 1988, edició de 1992, 37; Font 1996, 98–99. Les *dificultats* de les quals parla aquest text són les *qüestions* de les *regulæ* V, i XIII [AT, **X**, 379–380, i 430–438; Turró 1998, 56–57, i 96–102].

23 AT, **VI**, 18–19; Arnau-Gutiérrez 1988, edició de 1992, 38; Font 1996, 99. Vegeu les *regulæ* V, i XI [AT, **X**, 379–380, i 407–410; Turró 1998, 56–57, i 79–81], i Pla 1987, 832, nota 53.

24 AT, **VI**, 19; Arnau-Gutiérrez 1988, edició de 1992, 38; Font 1996, 100. És la *regula* VII: «Per completar la ciència cal recórrer per un moviment continu i completament ininterromput del pensament totes i cadascuna de les coses que corresponen al nostre pla, i aplegar-les en una enumeració suficient i ordenada» [Turró 1998, 63]. Vegeu també la *regula* XI [AT, **X**, 407–410; Turró 1998, 79–81]; Pla 1987, 832; i Beck 1952, 111–126 i, en paricular, la pàgina 150 en què ens ofereix una comparació entre les *Regulæ* i els *Principis* del *Discours de la méthode.*

Voldria indicar que, tot llegint *La Géométrie*, se m'acudí que el principi de l'*enumeració completa* prenia, al si d'aquest assaig, un significat molt més pregon del que se li dóna normalment. Ho trobareu exposat més detalladament a Pla 1997.

25 Descartes 1637, a AT, **VI**, 21. Vegeu Arnau-Gutiérrez 1988, edició de 1992, 40; Font 1996, 102.

> on la precipitació i la prevenció eren allò més a témer, de cap manera no calia que emprengués la tasca fins que no tingués una edat més madura que els vint-i-tres anys que llavors tenia; i fins que no hagués esmerçat molt de temps a preparar-m'hi, tant desarrelant del meu esperit totes les opinions dolentes abans rebudes, com recollint moltes experiències per ser, després, matèria dels meus raonaments, i exercitant-me sempre en el mètode que m'havia prescrit, per tal d'afermar-m'hi més i més.[26]

Em sembla que Descartes ens dóna unes quantes pautes per analitzar un mètode. És un fruit de maduresa que, a partir de problemes ja resolts, per anàlisi, permet d'arribar als *elements més simples, més íntimament vinculats amb la naturalesa del problemes o de les qüestions que s'estudien*. Aleshores s'ha d'efectuar una *lectura nova*, per síntesi. Aquesta lectura nova ens ha de permetre concloure que, de les intuïcions primeres, dels fets indiscutibles, clars i distints, de les idees simples, és possible elaborar, per deducció i raonament, el resultat o resultats desitjats. Ara bé, el mètode no pot quedar reduït a la resolució del problema inicial —que és concret i particular—, moltes vegades ja resolt amb tècniques anteriors. Ha de proporcionar una *tècnica general* i *potent* que permeti «enumeracions tan completes i revisions tan generals de tot» fins que estiguem certs que res no s'ha quedat fora de les seves possibilitats.[27]

Tanmateix, però, Descartes, almenys aparentment, no fa cap esment de la necessitat imperiosa d'haver de canviar de llenguatge. Això no obstant, els llenguatges de l'anàlisi i el de la síntesi no són, en cap cas, intercanviables. A voltes caldrà elaborar el primer; a voltes, el segon, i sovint, ambdós.

* * *

Després d'aquestes consideracions introductòries, que desitjo que siguin profitoses per comprendre una mica millor què entendrem en aquest text per *mètode*, ens retrobem a l'inici de la xerrada.

Abans de fixar-nos en les aportacions d'Arquimedes i de Descartes, voldria fer algunes reflexions sobre la *metodologia de la geometria grega*, una metodologia que es mantindria durant segles, i que inicia el seu canvi precisament al segle XVII. En aquest procés de canvi Descartes hi tindrà, juntament amb d'altres *geòmetres* de l'època, un paper protagonista.

2 La metodologia de la geometria grega

Sabem que la geometria grega és, des del punt de vista ontològic, una geometria euclidiana. Aquest fet caracteritza, en el món grec, l'*única* geometria possible, perquè *realment* —en el món de les *realitats ideals platòniques*, naturalment— no n'hi pot haver cap altra. Els geòmetres, ben cert, només coneixen les *ombres* que la *geometria*

---

26 DESCARTES 1637, a AT, **VI**, 21–22. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 40–41; FONT 1996, 103–104.

Descartes fa referència al famós episodi de l'«estufa», que tingué lloc a Neuburg, un llogaret proper a Ulm. La nit del 10 de novembre de 1619, Descartes té «tres somnis» a través dels quals descobreix els fonaments d'una ciència admirable. «Es tracta dels fonaments d'una nova filosofia». És el mateix any en què Johannes Kepler, a *De Harmonices Mundi*, formula la llei harmònica entorn del moviment dels planetes.

27 RODIS-LEWIS 1966, edició de 1989, 11–14. Vegeu també PLA 1997.

ideal projecta en les parets de la caverna del pensament humà. Aquest coneixement és, doncs, una epistemologia geomètrica i s'ha de plasmar d'alguna manera en una *metodologia* que permeti fer camí a tots aquells que tinguin l'habilitat suficient —als *artistes* de la geometria. Aquesta metodologia la posarem de manifest a través del que anomenaré, com ja he fet en d'altres ocasions, [28] les *limitacions de la geometria grega*,[29] algunes de les quals són d'una *transcendència* enorme i llurs conseqüències es manifesten de forma immediata. D'altres són, aparentment, molt menys notables, però juguen un paper decisiu en *revolucions* posteriors del pensament matemàtic.

La limitació pitagòrica. L'escola pitagòrica, en descobrir la *incommensurabilitat dels segments* —la impossibilitat d'amidar tots els segments amb un segment unitat—, es va trobar davant d'un problema d'índole metafísica realment notable.[30] Tant que anorreà la seva concepció cosmogònica, basada en: «Tot allò que és, és nombre». «Tot allò que pot ser conegut, ho pot ser pel nombre». «Tot el que és, té assigant un nombre».[31]

Però, amb la incommensurabilitat, això ja no és d'aquesta manera. Fixada una unidad de mesura de longitud (de superfície, de volum, de temps, etc.), no podem pas garantir que tota longitud (respectivament, tota superfície, volum, temps, etc.) sigui *entera* o *racional*. Això obligà els pitagòrics a distingir dues menes d'entitats, conceptualment ben diferents. Els *nombres* ($\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu o\zeta$) —associables solament a les magnituds commensurables amb la unitat corresponent— i les *magnituds* ($\mu\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\theta o\zeta$). Les magnituds —mai no definides amb claredat— s'assimilen a les entitats geomètriques (o físiques) que no són susceptibles de ser amidades.[32]

Òbviament, en un intent de generalització i d'unificació, totes les entitats geomètriques (i físiques) esdevenen *magnituds*. Ens trobem, doncs, amb magnituds commensurables, fixada la unitat, i magnituds incommensurables. Per tal d'obviar la unitat, podem *comparar* magnituds d'una mateixa espècie. En definitiva, la limitació pitagòrica *no* permet d'assignar un racional a la mesura relativa d'un segment a un altre. Dos segments no són necessàriament l'un part alíquota de l'altre. S'esvaiex, durant segles, la *concepció numèrica*, tan desitjada pels pitagòrics per poder donar raó del comportament cosmogònic.[33]

La limitació pitagòrica obligarà a introduir un *nou concepte de raó*. El concepte de raó que s'havia mostrat realment útil en la concepció numèrica, a través de les *parts alíquotes*, en la *teoria dels nombres racionals*.[34] Aquest concepte, tanmateix, s'esmuny a tot intent d'explicació metafísica. No és possible donar una *caracterització ontològica* de la raó existent entre magnituds d'una mateixa espècie que expliqui alhora la commensurabilitat i la incommensurabilitat. Això no obstant, Èudox aconseguirà d'establir una *teoria relacional*, coneguda com la *teoria de la proporció de les magnituds*. Dóna una definició de les *relacions d'igualtat i d'ordre entre dues raons* fent ús, en la definició, dels nombres naturals i de la relació *ser més gran, igual o més*

28 PLA 1987, 835–837.

29 Són, de fet, limitacions que imposem a la nostra manera d'*entendre-la* i de *construir-la*.

30 Vegeu KLINE 1980, edició castellana de 1985, 118–130.

31 Vegeu BECKER 1959, edició castellana de 1966, 16–18.

32 BECKER 1959, edició castellana de 1966, 109.

33 Heus aquí una epistemologia que diferencia radicalment la cultura grecooccidental de l'oriental. Aquesta darrera, amb arrels a Egipte, Mesopotàmia, l'Índia i la Xina, és eminentment calculista; es basa en algorismes de càlcul, i defuig els problemes derivats d'una racionalitat ontològica. Influirà en la cultura grecooccidental gràcies a les importants aportacions de l'Islam.

34 EUCLIDES [III a. C.], a VERA 1970, **I**, 830. Vegeu PLA 1997.

petit entre magnituds de la mateixa espècie, i evitant la raó existent entre elles. Així doncs, Èudox recorrre a *idees clares* i *distintes*. Evita, però, assignar una *característica numèrica* a la raó entre dues magnituds.[35] Amb aquesta nova teoria és possible establir els *teoremes de geometria*, vàlids en el cas commensurable, al cas general.[36] Les demostracions són ara força més sofisticades que en el cas commensurable.[37]

La limitació platònica. És clar que, malgrat que la diagonal $A\Gamma$ d'un quadrat de costat AB és incommensurable amb el costat, és *possible construir-la*. De fet, és possible de construir un quadrat de costat donat AB, malgrat que, com a espècies, el quadrat i el costat són diferents. De fet, construïm quatre costats iguals i perpendiculars. Aquests costats es tallen en quatre punts. Són els vèrtexs del quadrat. Ara bé, quan es parla de *construir*, cal precisar quines són les *eines* amb les quals està permès de construir.

Tot rau, de fet, com vèiem, a determinar *punts* i, coneguts els punts, els *segments* que els uneixen. Els punts només es poden *construir* tallant segments rectilinis i circumferències, ja sigui entre si o els uns amb les altres. Això és el que resumim quan diem que, per tal de resoldre un problema clàssic, només està permès l'ús del regle i el compàs. I també que, els objectes geomètrics necessaris, per fer una demostració, solament es poden construir amb aquestes dues eines. És a dir, en paraules de Pappos, «la geometria grega és plana».[38]

Un problema és doncs resoluble si, fixades les dades inicials —«segments donats en posició»—, som capaços de trobar la solució emprant solament les dades inicials i el regle i el compàs [i, si cal, el segment unitat]. Aquesta limitació exclou del món geomètric qualsevol punt la determinació del qual precisa de corbes diferents del segment rectilini i de la circumferència, com ara les còniques, la cissoide, la concoide, l'espiral d'Arquimedes, la quadratriu, etc. A l'hora de generar corbes, no s'admet ni el moviment, ni les marques en el regle —la *nuesis*, tan estimada per Arquimedes.

La limitació aristotèlica. Aquesta limitació exclou la possibilitat d'acceptar, al si de la geometria, l'*infinit en acte*. Tanmateix s'accepta l'*infinit en potència*, tant pel que fa a l'addició com a la divisió. L'addició s'aplica al discret, i al continu entès com a discret. La divisió només és aplicable al continu.[39] Ambdós conceptes —l'addició i la divisió— s'entenen com a intuïtius. Qualsevol magnitud és, de fet, contínua i, per tant, *infinitament divisible*, però només està permès, en cada construcció concreta, efectuar un *nombre finit* de divisions. Una magnitud concreta és, però, addicionable amb si mateixa o amb d'altres de la mateixa espècie tantes vegades com calgui, però, en cada cas concret, solament podem fer un *nombre finit* d'addicions.[40]

Aquesta limitació comporta el fet que, a la geometria del regle i el compàs, només és permès un *nombre finit d'utilitzacions* d'aquests ginys. No hi ha, però, cap limitació en el nombre d'utilitzacions acceptables, sempre que finalment sigui finit. És a dir, tot procés ha de tenir un fi *actual*.[41]

35 És suficient la introducció d'un símbol sense semàntica. Vegeu Pla 1998c.
36 Les demostracions són vàlides tant entre casos incommensurables, com entre casos commensurables i, fins i tot, en casos híbrids.
37 Euclides [iii a. C.], llibres **V** i **VI**.
38 Pappos [iv], a Vera 1970, **II**, 926.
39 En el cas discret, la divisió, és sempre finita. Vegeu Becker 1959, edició castellana de 1966, 109.
40 Això, no obstant, planteja la qüestió de la infinitud de l'espai geomètric. En cada cas, només cal un espai finit prou extens, però *idealment* l'espai ha de ser infinit, un fet que Aristòtil rebutja. És suficient pensar-lo com infinit en potència, però finit en acte. Això conté la llavor de la contradicció.
41 És ben conegut que l'acceptació d'una infinitat d'usos del regle i el compàs permet de trisecar l'angle

La limitació de Pappos. És molt menys espectacular que les altres, però té la seva importància atès que és una limitació que, malgrat tot, està íntimament vinculada amb la limitació pitagòrica. La geometria grega és *tridimensional* i això fa que sigui possible acceptar magnituds d'una dimensió —segments—, de dues —i superfícies finites—, de tres —sòlids afitats. Qualsevol altre *ens geomètric* no és acceptable dins la geometria euclidiana grega del regle i el compàs. No hi ha objectes geomètrics ideals que transcendeixin les tres dimensions.

De fet, doncs, només disposem de segments rectilinis, rectangles i paral·lelepípedes entesos, respectivament, com el producte de dos o tres segments rectilinis. Cal observar —és un fet important— que, en la geometria grega, el rectangle limitat per AB i $A\Gamma$ (o el paral·lelepípede d'arestes $AB, A\Gamma, A\Delta$) no és mai un objecte numèric.[42] A més, $AB \times A\Gamma, AB \times A\Gamma \times A\Delta$ són magnituds d'espècies diferents. No poden ser, en cap cas, comparades, afegides, etc.[43]

És possible multiplicar dos o tres segments, un segment i una superfície, però és impossible multiplicar dues superfícies, un sòlid i un segment, etc., perquè, com dèiem, no està permès transcendir les tres dimensions i, de fet, l'espècie resultant de multplicar dues espècies geomètriques té, com a dimensió, la suma de les dimensions de les espècies que es multipliquen.

La limitació de Pappos restringeix, doncs, molt fortament el que podríem anomenar *àlgebra de la geometria grega*. La sotmet a haver de respectar l'*homogeneïtat* en les addicions i li *limita* la possibilitat dels productes per raó de la tridimensionalitat.[44]

La limitació euclidiana. És la que imposen els postulats dels *Elements* d'Euclides. De fet és una limitació sobre la naturalesa de la geometria entesa com a ciència. Conté algunes contradiccions que cal esmentar. Accepta alhora les limitacions pitagòrica, platònica i aristotèlica. Així una *recta* està sempre determinada per *dos punts*, que en són els seus *extrems*.[45] Això no obstant es pot perllongar tant com es vulgui per cada un dels seus extrems, sempre que el perllongament sigui finit. [46] Però, en cap cas, no és possible acceptar rectes *il·limitades* o *infinites*. Això contradiu clarament l'existència de rectes paral·leles, perquè el paral·lelisme de dues rectes comporta la seva existència en tant que rectes infinites.[47] És precisament per aquesta raó que Euclides en un intent de màxim rigor, dóna la condició necessària i suficient

---

i quadrar el cercle. La trisecció de l'angle s'obté dividint per la meitat indefinidament. La rectificació del cercle amb l'ús exclusiu del regle i el compàs la trobem en els treballs de Descartes. [Vegeu AT, **X**, 304–305.]

42 Encara que parlem del producte de AB i $A\Gamma, AB \times A\Gamma$, ens referim al rectangle com a figura geomètrica. La figura és el rectangle i el rectangle és la figura. La superfície s'identifica amb el propi rectangle. No hi ha valor numèric.

43 Aquí apareix, doncs, la *llei d'homogeneïtat*, que trobem encara en l'obra de François Viète.

44 Una conseqüència d'això és la impossibilitat d'establir la igualtat entre dues raons arbitràries a través de la igualtat del producte dels seus mitjos i extrems, ja que pot succeir que aquests productes no existeixin.

En canvi Euclides, a E **VI**, 16, a Vera 1970, **I**, 815–816, estableix que «Si quatre rectes són proporcionals, el rectangle format per les dues mitges és equivalent al rectangle format per les dues extrems, i recíprocament, si el rectangle format per les dues mitges és equivalent al rectangle format per les dues extrems, aleshores són proporcionals». És a dir, donades les rectes AB, $\Gamma\Delta$, MN, ΠP, $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{MN}{\Pi P}$, si i només si, $AB \times \Gamma\Delta = MN \times \Pi P$.

45 Euclides [III a. C.], llibre **I**, a Vera 1970, **I**, 704.

46 Euclides [III a. C.], llibre **I**, a Vera 1970, **I**, 704.

47 Euclides [III a. C.], llibre **I**, a Vera 1970, **I**, 704.

per tal que dues rectes (finites) es tallin si es perllonguen suficientment.[48] L'*infinit* només apareix, doncs, en la definició de *rectes paral·leles*.[49] Això ho podia haver evitat, introduint com a definició de paral·lelisme el fet que, en tallar dues rectes per una tercera, els angles interns dels mateix costat sumessin exactament dues rectes. Aquesta definició, però, és lluny de ser intuïtiva i, per tant, no és acceptable.[50]

L'altre postulat estableix que, donats dos punts, sempre existeix una circumferència que passa per un d'ells i té l'altre punt com a centre. Euclides no ofereix cap condició que garanteixi quan dues circumferències, o una recta i una circumferència, es tallen. S'accepta implícitament que es tallen quan la distància entre els centres d'ambdues circumferències és més petita que l'addició dels radis, i quan la distància entre el centre de la circumferència i la recta és més petita que el radi. Es toquen, en canvi, quan hi ha igualtat.

La limitació arquimediana. Abans ja hem indicat que no existeix cap definició del concepte de raó entre dues magnituds de la mateixa espècie que inclogui els casos commensurable i incommensurable. Això no obstant, Èudox ofereix una definició de *raó entre dues magnituds de la mateixa espècie*: «dues magnituds tenen raó quan hi ha un *múltiple d'una d'elles que supera l'altra*».[51] En donar-ho com a definició, s'obre la possibilitat que dues magnituds de la mateixa espècie puguin tenir raó, o no tenir-ne. Així la *raó* esdevindria, en això, semblant a la *commensurabilitat*. Arquimedes imposa, però, una limitació en el món de les magnituds gregues: «dues raons de la mateixa espècie sempre tenen raó».[52] Dit en d'altres paraules, si Γ i Δ són dues magnituds de la mateixa espècie, sempre *existeix un múltiple* d'una d'elles que supera l'altra; és a dir, *sempre existeix un nombre natural* $n \in \mathbb{N}$, tal que $n\Gamma > \Delta$.[53]

Amb aquesta limitació s'exclou la possibilitat dels *àtoms* o dels *infinitesimals*. S'exclou la possibilitat de magnituds *no divisibles*. S'introdueix, doncs, la hipòtesi que totes les magnituds són *infinitament divisibles*. En efecte, si existís una magnitud Γ indivisible, fóra del tot impossible que $n\Gamma > \Delta$, si Δ, en canvi, fos divisible, perquè una magnitud divisible no esdevé mai, per divisió finita, inferior a una magnitud indivisible; és a dir, una magnitud divisible, amb un nombre finit de divisions, no pot esdevenir un àtom o un indivisible. I això és el que s'esdevindria, si $n\Gamma > \Delta$, donat que, dividint Δ per la meitat n o més vegades, obtindríem que $\Delta_m, m > n$, és indivisible (puix que $\Delta_m < \Gamma$ i Γ és indivisible).

* * *

Podríem dir, doncs, que la geometria grega dels *Elements* d'Euclides, amb totes les seves possibilitats, està sotmesa a una *metodologia epistemològica* que té, com a regles, les *limitacions* esmentades. I basant-se en ells s'elaboren les obres d'Euclides, però també *Les Còniques* d'Apol·loni i els treballs d'Arquimedes i, en particular, els

48 Euclides [III a. C.], llibre **I**, a Vera 1970, **I**, 704.
49 Euclides [III a. C.], llibre **I**, definició 23, a Vera 1970, **I**, 704.
50 Els postulats han de ser *evidents*. Això és l'únic que en pot garantir la validesa. Tanmateix però, el postulat de les paral·leles no ho és o, si ho volem dir d'una altra manera, hi ha molts teoremes que ho són molt més i que, no obstant això, han de ser demostrats. Aquest és un dels grans problemes de la, diguem-ne, fonamentació euclidiana.
51 Euclides [III a. C.], llibre **V**, definició 4, a Vera 1970, **I**, 787.
52 Arquimedes [III a. C.], *De l'esfera i del cilindre*, Vera 1970, **II**, 27.
53 Així simplifiquem l'addició de la magnitud Γ amb ella mateixa n vegades.

que fan referència a les *quadratures* i *cubicatures*, així com tots els altres treballs de geometria, grecs i posteriors, fins a arribar al segle XVII.

3 La teoria de la proporció

«Donades quatre magnituds Γ, Δ, Λ i X, la raó de la primera amb la segona *és la mateixa* que la raó de la tercera amb la quarta quan *equimúltiples de la primera i de la tercera* són, respectivament, *més grans, iguals* o *més petits que equimúltiples de la segona i la quarta*».[54] És a dir,

$$\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Lambda}{X}$$

si i només si, per a tot $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m\Gamma \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} n\Delta \quad \text{implica} \quad m\Lambda \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} nX.$$

Aleshores diem que les magnituds Γ, Δ, Λ i X són *proporcionals*.[55]

El llenguatge de la teoria de les proporcions esdevé el llenguatge bàsic de la geometria grega i de la que la succeí fins ben entrat el segle XVII, sobretot quan es volen establir teoremes que, conceptualment, són quantitatius, però que, desterrats els nombres del món geomètric, no es poden enunciar en termes quantitatius. Aleshores s'ha de recórrer necessàriament a les proporcions precisament perquè *no* es disposa de *quantitats numèriques adients*.[56]

Ara bé, la teoria de la proporció mena a *teoremes* que han d'establir proporcions —*igualtats entre raons*. Això fa que, inexorablement, per poder *enunciar un teorema*, calgui conèixer-ne d'antuvi el que es vol demostrar, sense que sigui possible calcular prèviament el valor de la igualtat. El resultat s'ha de conèixer per endavant. La demostració vindrà després.

Es podria pensar que, en tot teorema, primer cal conèixer l'enunciat; després cal establir-ne la validesa. Però no és pas d'això del que ara parlem. Ens referim a qüestions que, avui, podem establir —amb limitacions— calculant-les. Pensem, per exemple, en el volum de la cúpula de Viviani. Una integral ens permet de calcular-lo, i un cop calculat —sempre que no s'hagi comès cap error— aquest és el seu valor. No cal pas demostrar-ho! En la geometria grega, en canvi, no és possible calcular. És una geometria de la demostració, però no una geometria del càlcul.

Un exemple ens ajudarà a entendre-ho. Sabem que la «raó dels triangles semblants és com la raó doble dels costats homòlegs».[57] Això implica que dos polígons regulars semblants del mateix nombre de costats siguin com la raó doble dels diàmetres de les circumferències circumscrites.[58]

Així doncs,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

54 EUCLIDES [III a. C.], llibre **V**, definició 5, a VERA 1970, **I**, 787.

55 Podríem haver definit quatre magnituds proporcionals sense passar pel concepte de raó, però aleshores implícitament, per la simetria de la definició, hauríem acceptat que les quatre eren de la mateixa espècie. D'aquesta manera, només cal que ho siguin dos a dos.

56 S'ha perdut la *característica numèrica*. Vegeu PLA 1998c.

57 EUCLIDES [III a. C.], llibre **VI**, proposició 19, a VERA 1970, 817.

58 EUCLIDES [III a. C.], llibre **XII**, proposició 1, a VERA 1970, 943.

on P_n, Q_n designen polígons regulars de n costats, semblants.

Suposem ara que, els polígons P_n, Q_n estan inscrits, respectivament, en els cercles C_1, C_2. Designem, respectivament, S_1, S_2 les superfícies corresponents. Aleshores, si considerem que $\lim_{n\to\infty} P_n = S_1$ i $\lim_{n\to\infty} Q_n = S_{12}$, tindrem que

$$\frac{S_1}{S_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Aquest raonament **no** és acceptable en la mentalitat grega, perquè suposa el *pas a l'infinit* i això contradiu la *limitació aristotèlica* que impedeix d'anar a l'infinit.[59]

Ens cal, doncs, procedir d'una altra manera. Ens cal suposar que la igualtat $\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$ és vertadera. És a dir, hem d'admetre que

> els quadrats dels diàmetres de dues circumferències tenen la mateixa raó que les superfícies respectives dels cercles que clouen.[60]

Però, com podem demostrar-ho?

La teoria de la proporció ens facilita el *mètode d'exhaustió*.[61] Aquest mètode estableix que:

> donades dues magnituds Γ, Δ de la mateixa espècie, si
>
> $\Gamma_1 < \frac{1}{2}\Gamma$; és a dir, si Γ_1 s'obté de Γ traient-li més de la meitat;
>
> $\Gamma_2 < \frac{1}{2}\Gamma_1$; és a dir, si Γ_2 s'obté de Γ_1 traient-li més de la meitat;
>
> ...
>
> $\Gamma_n < \frac{1}{2}\Gamma_{n-1}$; és a dir, si Γ_n s'obté de Γ_{n-1} traient-li més de la meitat,
>
> amb un nombre finit de passos, s'aconsegueix que $\Gamma_n < \Delta$.

Cal, doncs, conèixer la proporció que es desitja establir i, usant el mètode d'exhaustió, demostrar el teorema. Així tindrem la síntesi, però l'haurem aconseguit per mitjà d'un teorema *indirecte*, *no construïble*, perquè el resultat ha de ser conegut d'antuvi. No cal, doncs, l'*anàlisi*. Només cal provar quelcom *formalment*, lògicament, correctament, i un dels mètodes de demostració proposat per Aristòtil per a demostrar teoremes matemàtics és la *reducció a l'absurd*.[62] La *reducció a l'absurd* consisteix, doncs, a suposar *fals* allò que es pretén demostrar i deduir-ne una *falsedat* indiscutible.[63]

---

59 En la mentalitat grega, podríem acceptar que, quan n és gran, $\frac{P_n}{Q_n} \approx \frac{d_1^2}{d_2^2}$, però això no justificaria mai la igualtat entre ambdues raons. Podria servir per intuir-les, però és difícil saber si un geòmetra grec podia permetre's aquesta mena de reflexions.

60 EUCLIDES [III a. C.], **XII**, proposició 2, a VERA, 170, **I**, 943–944.

61 Aquest nom l'introduí, el segle XVII, Gregoire Saint Vincent.

62 ARSITÒTIL, [IV a. C.], *Analítics Primers* i, 23, 41 a 26–27. El mètode de reducció a l'absurd s'ha mostrat d'una gran utilitat en les demostracions lògiques de molts teoremes matemàtics.

63 Aristòtil, per tal de posar de manifest la seva utilitat, l'aplica a la demostració de la incommensurabilitat —la irracionalitat— de la diagonal d'un quadrat de costat unitat:

> Tot el qui argumenta *per l'absurd* infereix, per sil·logisme una conclusió falsa. S'estableix hipotèticament la conclusió original quan quelcom impossible s'obté d'una pressuposició contradictòria, com, per exemple, que la diagonal [d'un quadrat] és incommensurable [amb el seu costat]. La raó és que, si suposem que són commensurables, nombres senars són iguals amb nombres parells. Efectivament s'obté que nombres senars són iguals a nombres parells, i així queda provat que la diagonal és

Així, si volem provar que $\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$ és vertadera, caldrà suposar que $\frac{S_1}{S_2} \neq \frac{D_1^2}{D_2^2}$ i deduir-ne una contradicció. Però, si suposem que $\frac{S_1}{S_2} \neq \frac{d_1^2}{d_2^2}$, aleshores existeix una superfície S tal que $\frac{S_1}{S} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$.[64] Ara bé, cal que $S \gtrless S_2$. Però, no pot ser que $S < S_2$, ni tampoc que $S > S_2$, atès que cada una d'elles porta a contradicció.[65]

* * *

La geometria grega, desproveïda dels nombres, no pot oferir teoremes numèrics ni tampoc demostracions constructives dels càlculs de quadratures. Ens proporciona, això sí, demostracions d'una gran correcció lògica, un cop sabem el que volem demostrar. Això implica una gran intuïció, un olfacte molf fi, per tal de poder conèixer per endavant el que es cerca. Hi ha síntesi, però no hi ha anàlisi.[66]

Se'ns planteja, doncs, una qüestió nova: com és possible intuir o conèixer el resultat que volem demostrar, abans de tenir la certesa de la seva validesa, certesa que només ens pot donar la demostració? Hi ha algun *mètode* per aconseguir-ho? En definitiva, hi ha alguna *anàlisi* sistemàtica?

4 La quadratura de la paràbola

Aquestes preguntes van ser, amb tota probabilitat, les que Eratòstenes, el *beta*, va adreçar a Arquimedes, l'*alfa*, meravellat per la gran capacitat —l'enorme olfacte— d'aquest darrer per *intuir*, i, posteriorment, demostrar, teoremes de quadratures i cubicatures. La resposta d'Arquimedes és el que avui coneixem com *El Mètode d'Arquimedes*.[67]

Recordem que Arquimedes, «un dels més grans matemàtics de la història»[68], en els seus tractats aconsegueix d'establir una quantitat notable de resultats relatius a quadratures, cubicatures i determinació de centres de gravetat.[69] No pretenem pas fer-ne un estudi detallat. Només volem posar de manifest, en el cas particular de la *quadratura de la paràbola*, el teorema que lliga la superfície d'un segment de paràbola amb el triangle [canònic][70] inscrit i la demostració formal que d'ell n'ofereix.

incommensurable, ja que una conclusió falsa s'obté del pressupòsit contradictori.

[Vegeu Thomas, **I**, 110–111.] El més usual és aconseguir provar alhora una certa proposició i la seva negació.

64 E**XII** 2 dels *Elements* d'Euclides. Vegeu Vera 1970, **I**, 944–945.

65 Tot rau a demostrar que els polígons de 2^n costats exhaureixen el cercle. Per tant, si, per exemple, $S < S_2$, existirà un polígon regular de 2^n costats , Q, inscrit a S_2 tal que $S_2 - Q < S_2 - S$. Considerem ara el polígon de 2^n costats, P, semblant a Q, inscrit a S_1. Aleshores, per la proposició E**XII** 1, resulta que

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{S_1}{S} = \frac{P}{Q}.$$

Ara bé, $Q > S$ i $P < S_1$, i això contradiu la igualtat de dues raons, segons que estableix Euclides a la definició 7 del llibre **V** dels *Elements* [Vera 1970, 788].

66 O bé no hi ha una anàlisi prou completa per tal de posar de manifest clarament allò que es busca.

67 De fet, curiosament, Arquimedes no utilitza enlloc la paraula *mètode* que, com hem vist, és d'arrel grega. Utilitza la paraula *τροποζ*, quan diu: «[...] *αύτὸ βιβλίον έξορίσαι τροπον τινόζ ίδιότητα* [...]». Vegeu Arquimedes [iii a. C.], a González-Vaqué 1997, 140.

68 Bell 1950, 39.

69 Aconsegueix, doncs, de resoldre, en termes de la teoria de la proporció, gran quantitat de qüestions vinculades amb el que avui coneixem com a *càlcul integral*.

70 És el nom que dono al triangle que té la mateixa base i alçada que el segment parabòlic.

És a dir, la síntesi del problema. I, d'altra banda, com és possible utilitzar les propietats de la paràbola per aconseguir l'anàlisi del problema. La intenció principal, però, és adonar-nos que, en l'anàlisi, s'usa un llenguatge diferent del que s'usa a la síntesi. Aquest canvi de llenguatge no és merament instrumental, sinó que respon a un trencament epistemològic.

Abans d'entrar en els detalls tècnics, voldria fer notar dues qüestions. La primera és que, en la síntesi, també cal utilitzar certes propietats de l'objecte geomètric que s'estudia —en el nostre cas, la paràbola— i, per tant, és impossible prescindir completament de l'anàlisi geomètrica. La segona és que, en l'estudi de la quadratura de la paràbola, no ens trobem pas davant d'un problema; no cal construir res.[71] La paràbola està donada en posició i el que volem és establir una relació entre la seva superfície i la del triangle [canònic] inscrit. No obstant això, per poder demostrar un teorema cal conèixer què diu el seu enunciat i, en aquest cas, cal conèixer d'antuvi la proporció que es vol demostrar. Un cop coneguda la relació cal establir la seva validesa. Ara bé, això no es fa pas mitjançant un procés d'anàlisi-síntesi, en sentit estricte. Es fa *formalment* usant, tal com ja hem indicat abans, el principi lògic de *reducció a l'absurd*. En canvi, en el *mètode* —en l'anàlisi de la relació— caldrà elaborar una tècnica *mecanicoteòrica* que permeti *trobar* la relació que estableix l'enunciat del teorema. Després, en tot cas, caldrà la síntesi: la demostració formal.

Així doncs, si ajuntem els dos treballs d'Arquimedes, ens trobem davant d'un procés d'anàlisi-síntesi, usant aquests mots en sentit ampli.[72]

La síntesi de la quadratura de la paràbola. Es vol demostrar el següent teorema:

> TEOREMA *Tot segment parabòlic equival a quatre vegades la tercera part del triangle d'igual base i alçada que el segment.*[73]

La idea de la demostració és ben simple i la descompondrem en passos. Sigui $AB\Gamma$ un segment de paràbola de corda $A\Gamma$ i diàmatre $B\Delta$, el qual talla la paràbola en el vèrtex B. Disposem doncs del segment parabòlic $AB\Gamma$ i del triangle $\triangle AB\Gamma$.

El teorema afirma que el segment de paràbola $AB\Gamma$ és igual a $\frac{4}{3}\triangle AB\Gamma$.[74]

És a dir, si S designa la superfície del segment de paràbola $AB\Gamma$, resulta que $S = \frac{4}{3}\triangle AB\Gamma$.

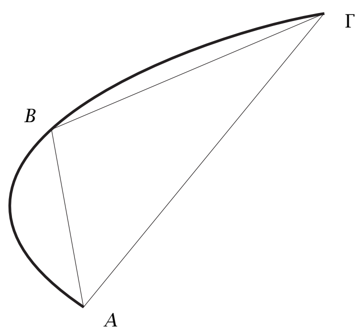
En efecte:

71 Recordem la diferència que estableix Pappos entre *teorema* i *problema*, segons la qual en els primers s'estableixen les propietats de les figures o cossos geomètrics, mentre que en els segons es construeixen. Diu: «Els qui volen distingir les qüestions que s'investiguen en la Geometria creuen que convé anomenar problema allò que cal fer, o construir, i teoremes allò que, un cop s'han establert certes hipòtesis, permet deduir conseqüències i, en general, a allò que els afecta. Tanmateix, entre els antics, hi ha qui opina que tot és un problema i d'altres que opinen, al contrari, que tot és un teorema. [...]» [Vegeu VERA 1970 **II**, 925.]

72 Voldria recordar que el mètode mecànic per a determinar àrees i volums fou molt apreciat al Renaixement, i que fou usat de formes diverses per Leonardo da Vinci [1452–1519], Galileu [1564–1642], etc. El retrobem, com a teoria matemàtica del càlcul integral, a les *Cartes de Dettonville* de Blaise Pascal [1623–1662], un intent realment important en què el genial pensador i místic francès intenta, motivat per l'estudi de la *cicloide*, de bastir un edifici de càlcul integral. Dissortadament és un text que neix massa tard i, d'alguna manera, neix mort, perquè ja s'ha trobat el camí del càlcul diferencial que ha d'esdevenir el camí del futur.

73 ARQUIMEDES [III a. C.], a VERA 1970, **II**, 237.

74 L'anàlisi de la paràbola ens diu que el diàmetre conjugat a $A\Gamma$ talla totes les paral·leles a $A\Gamma$ en els seus punts mitjos.



1. El triangle [canònic] corresponent a un segment de paràbola és més gran que la meitat del segment de paràbola.[75]
2. Si ara, a cada un dels segments laterals de la paràbola, hi dibuixem el triangle [canònic], aleshores el triangle $\triangle AB\Gamma$ és 8 vegades cada un dels triangles laterals. És a dir,

$$T = \triangle AB\Gamma = 8 \triangle AB_1B = \triangle BB_2\Gamma.$$

3. Per 1, els triangles canònics exhaureixen la paràbola.[76]
4. De fet, doncs, el segment de paràbola $AB\Gamma$ és igual a la suma *infinita* de $T, \frac{1}{4}\,T, \frac{1}{4}\left(\frac{T}{4}\right), \ldots$ Ara bé, com ja hem repetit mantes vegades, aquest càlcul no està permès en virtut de la limitació aristotèlica.[77]

Això obliga Arquimedes a calcular el valor del *romanent P_m de la sèrie*. És a dir, a determinar allò que cal sumar a $S_m = T + \frac{1}{4}\,T + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\,T\right) + \cdots + \frac{T}{4^m}$ per tal d'obtenir $\frac{4}{3}\,T$.[78] Arquimedes aconsegueix d'establir que

5. $S_m + \frac{1}{3}\,\frac{T}{4^m} = \frac{4}{3}\,T$.[79]
6. Ara tot rau a provar que

$$S = \text{el segment de paràbola } AB\Gamma = \frac{4}{3}\,T.$$

75 Cal recordar que la tangent a la paràbola en el punt B és paral·lela a la corda $A\Gamma$.
76 La propietat val per a cada segment de paràbola.
77 Si ho estigués, la demostració s'hauria acabat. L'única dificultat fóra establir 2.
78 Vegeu la importància que té el fet de conèixer, per endavant, $\frac{4}{3}\,T$.
79 Aquesta igualtat és ben simple i *recurrent*. La recurrència —una tècnica molt útil— serà utilitzada per Arquimedes amb una certa naturalitat. Tot rau, de fet, a provar que

$$\frac{T}{4^m} + \frac{1}{3}\,\frac{T}{4^m} = \frac{1}{3}\,\frac{T}{4^{m-1}},$$

ja que aleshores, procedint recurrentment, s'obté amb tota facilitat que

$$T + \frac{1}{4}\,T + \cdots + \frac{1}{4^m}\,T + \frac{1}{3}\,\frac{1}{4^m}\,T = \frac{3}{4}\,T.$$

Així s'aconsegueix evitar la intervenció de l'*infinit actual*.

La prova, perquè sigui lògicament rigorosa, s'ha de fer per reducció a l'absurd. Suposem, doncs, que no fos així. Tindríem dues possibilitats:

6.1. S = el segment de paràbola $AB\Gamma > \frac{4}{3}T$. Aleshores fem la inscripció successiva dels triangles canònics, tal com hem descrit a 2 i 3. Tindrem, per l'exhaustió, que

$$S - \left(T + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{4^m}\right) < S - \frac{4}{3}T.$$

D'on en resulta que

$$T + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{4^m} > \frac{4}{3}T,$$

que és del tot impossible, ja que $S_m + P_m = \frac{4}{3}T$.

6.2. S = el segment de paràbola $AB\Gamma < \frac{4}{3}T$. Sigui $\Delta = \frac{4}{3}T - S$ i suposem que m és prou gran per tal que $\frac{T}{4^m} < \Delta$. Aleshores

$$T + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{4^m} + \frac{1}{3}\frac{T}{4^m} = \frac{4}{3}T.$$

Per tant,

$$\frac{4}{3}T - \left(T + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{4^m}\right) = \frac{1}{3}\frac{T}{4^m} < \frac{T}{4^m} < \Delta = \frac{4}{3}T - S.$$

Finalment, doncs,

$$S < T + \frac{1}{4}T + \cdots + \frac{1}{4^m}T,$$

que és impossible puix que els triangles canònics són triangles inscrits.

Tot el procés reposa en l'arquimedianitat i en el fet que cada un dels triangles és 4 vegades la suma dels dos triangles laterals, els quals exhaureixen el segment parabòlic. La demostració és simple:

Sabem que Δ és el punt mig de la corda $A\Gamma$ i Y és el punt mig de la corda BA. Per la semblança de triangles Δ_1 és el punt mig de ΔA. A més,

$$\frac{BX}{B\Delta} = \frac{XB_1^2}{\Delta A^2} = \frac{\Delta\Delta_1^2}{\Delta A^2} = \frac{1}{4}.$$

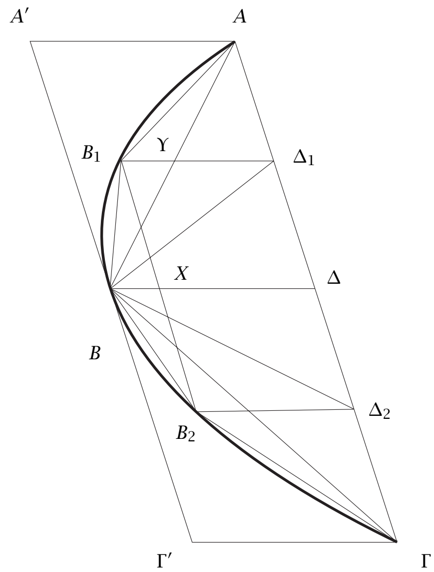
Per tant, $BX = \frac{1}{4}B\Delta$ i $X\Delta = B_1\Delta_1 = 3\,BX$. D'on $Y\Delta_1 = 2\,BX = 2\,B_1Y$. Aleshores

$$\triangle BB_1A = \frac{1}{2}\triangle B\Delta\Delta_1,$$

perquè tenen la mateixa alçada, però la base B_1Y és una meitat de la base $Y\Delta_1$. Però

$$\triangle B\Gamma\Delta_1 = \frac{1}{2}\triangle BA\Delta$$

per la mateixa raó: tenen la mateixa alçada, però la base $B\Delta = \frac{1}{2}Y\Delta_1$.



D'ací el resultat clau: si el primer triangle $\triangle B\Delta A$ val τ, el següent $\triangle BAB_1$ val $\frac{\tau}{4}$ i, finalment, si $\triangle BA\Gamma$ val T, la suma dels dos següents $\triangle BB_1A, BB_2\Gamma$ val $\frac{T}{4}$.

Així doncs la demostració —la síntesi—, basada en algunes propietats de la paràbola, és clara, però no ens proporciona cap intuïció del resultat inicial $S = \frac{4}{3}\,T$ o, si ho preferiu, de $\frac{S}{T} = \frac{4}{3}$. Podríem pensar que la intuïció s'obté *sumant la sèrie*

$$T + \frac{1}{4}\,T + \frac{1}{4^2}\,T + \cdots + \frac{1}{4^n}\,T + \cdots$$

Però aquesta és una manera de procedir molt moderna —massa numèrica— i ens vindrà de l'Orient i, en particular, de l'Índia, via l'Islam i s'incorporarà a Occident amb els treballs d'Oresme del segle XIV.[80]

L'anàlisi de la quadratura de la paràbola. Com podríem intuir el resultat anterior, si no coneguéssim el teorema d'Arquimedes? Podríem *idear un mètode teòric* que servís per fabricar superfícies d'un material uniforme i pesar-les fins que pesessin el mateix. En el cas de la paràbola, caldria trobar la manera de poder pesar el segment de paràbola i el triangle. Ens trobaríem que no hi ha pas equilibri. Podríem pesar el segment de paràbola i un triangle i mig, ens passaríem. Podríem pesar el segment de paràbola i un triangle i un terç. Exacte!

El mètode ens ha anat bé perquè dóna la casualitat que $S = T + \frac{1}{3}\,T$. Però la qüestió és molt més profunda: és possible d'establir un mètode que sigui aplicable tant en aquest cas —que és un cas amb commensurabilitat— com en d'altres, en els quals pot fallar la commensurabilitat? Per poder respondre a aquesta qüestió ens cal aclarir d'antuvi quin fóra l'*element intuïtiu* que hem de considerar com a «clar i distint»

80 No hi ha res que ens pugui fer pensar que a la Grècia clàssica haguessin pensat en la possibilitat d'usar aquest mètode. Ja hem vist com l'evita Arquimedes. La limitació aristotèlica és fortíssima.

La tècnica de sumar la sèrie anterior permet de dividir un angle en tres parts iguals. Només cal fer una infinitat d'usos del regle i el compàs.

en l'elaboració d'aquest mètode. Sembla, com ens recorda Arquimedes precisament en la carta adreçada a Eratòstenes, que Demòcrit d'Abdera fou el primer que va calcular el volum d'una piràmide i d'un con. Per fer-ho s'havia plantejat la qüestió que ara ens ocupa i havia arribat a la conclusió: «les magnituds estan compostes d'*àtoms*» i els *àtoms no* són pas de la *mateixa espècie* que la magnitud de la qual en són àtoms. Així doncs, una piràmide, un con, etc., estan formats de *plans paral·lels* a la base. El volum de cada un dels plans és nul, però *tots junts* formen la piràmide, el con, etc., i aquests sòlids tenen volum. Tot rau, doncs, a veure com podem usar aquest fet per determinar el volum que s'obté quan s'ajunten tots els plans. Una possibilitat, íntimament lligada a la teoria de la proporció, rau a *comparar cada una de les superfícies d'un sòlid* amb les d'un altre del qual en coneguem el volum. En el cas que, entre les superfícies respectives, es mantingui una certa raó de proporcionalitat, podrem aventurar que *totes juntes* també mantindran aquesta mateixa raó? I, al seu torn, els volums també?[81]

Parlant un xic grollerament, podem afirmar que el *mètode arquimedià* per intuir quadratures i cubicatures té les seves arrels en aquesta forma de pensar. I és un *mètode* perquè s'aplica a *casos ja coneguts* i ens proporciona el resultat esperat, però, a més, és aplicable a problemes desconeguts, i ens permet en aquests casos conèixer-ne el resultat. Conegut el resultat podrem enunciar el teorema. Després naturalment, caldrà demostrar-lo amb el rigor que proporcionen els mitjans lògics de què s'ha dotat la matemàtica grega: la teoria de la proporció.

Arquimedes és ben clar:

> Amb anterioritat et vaig enviar alguns teoremes que havia descobert, i et vaig invitar que, un cop coneguessis ja els resultats que et proporcionaven els enunciats, trobessis les demostracions que encara no t'havia donat a conèixer. Els enunciats dels teoremes eren els següents:
>
> Del primer: si s'inscriu un cilindre en un prisma recte que té com a base un paral·lelogram —en aquest context, un quadrat— de manera que tingui les bases situades en els dos paral·lelograms i els costats en els altres plans del prisma, i si fas un pla que passi pel centre de la base del cilindre i per un dels costats del quadrat que es troba en la cara oposada, el pla tallarà del cilindre un segment limitat per dos plans i per la superfície del cilindre, sent un dels plans el que hem dibuixat i l'altre el que es troba a la base del cilindre, i sent la superfície cilíndrica la que està compresa per aquests dos plans; el segment del cilindre que hem tallat és la sisena part del prisma tot sencer.
>
> L'enunciat del segon teorema era: si dins d'un cub hi inscrivim un cilindre que té les bases situades en dos paral·lelograms oposats i la superfície tangent als quatre plans restants, i en el mateix cub s'hi inscriu un altre cilindre amb les dues bases en uns altres dos paral·lelograms i la superfície tangent als quatre plans restants, la figura compresa per les dues superfícies cilíndriques i inserida en ambdues és igual a dos terços del cub sencer.
>
> S'esdevé que aquests teoremes difereixen d'altres descoberts amb anterioritat. En aquells comparàvem els volums de les figures dels conoides i dels esferoides[82] i els seus segments, amb els volums de cons i cilindres, sense que

81 Aquesta és la postura que mantindrà l'escola galileana, formada pel propi Galileu, per Bonaventura Cavalieri i per Evangelista Torricelli, entre d'altres i que, malgrat les fortes crítiques que va rebre, donà un impuls enorme al desenvolupament del càlcul de quadratures al segle XVII. I no és estrany que sigui així, perquè l'escola galileana era atomista.

82 Fa referència al seu treball *Dels conoides i dels esferoides.* ARQUIMEDES [III a. C.], a VERA 1970, **II**, 100–147.

cap d'elles resultés ser igual a una figura sòlida limitada per plans; mentre que cada una d'aquestes figures compreses entre dos plans i superfícies cilíndriques resulta igual a una figura sòlida limitada per plans.[83]

Doncs bé, havent formulat les demostracions d'aquests teoremes en aquest llibre, te les envio.

Reconeixent, com et deia, el teu zel i el teu domini excel·lent en filosofia, i també que saps apreciar, quan s'esdevé l'ocasió, la investigació de les qüestions matemàtiques, m'ha semblat oportú confiar-te per escrit, i explicar en aquest mateix llibre, les característiques pròpies d'un mètode[84] amb el qual et serà possible d'abordar la investigació de certes qüestions matemàtiques per mitjà de la mecànica. Quelcom que, n'estic ben conveçut, no és pas menys útil per tal d'aconseguir les demostracions d'aquests mateixos teoremes. Perquè alguns dels primers que se'm van acudir per la mecànica, van rebre després demostració per mitjà de la geometria, atès que la investigació per aquest mètode *queda lluny d'una demostració.* És més fàcil *construir la demostració després d'haver adquirit amb aquest mètode un cert coneixement dels problemes, que no pas buscar-la sense tenir-ne cap mena de coneixement.* [... Per això, fins i tot en el cas] dels teoremes referents al con i a la piràmide, la demostració dels quals trobà Èudox, a saber: que el con és la tercera part del cilindre i la piràmide la tercera part del prisma, amb la mateixa base i alçada, cal atribuir bona part del mèrit a Demòcrit, que fou el primer que els va enunciar sense demostració. També, en el meu cas, s'esdevé que el descobriment dels teoremes que ara et dono a conèixer ha tingut lloc d'una manera semblant a com la tingué en els precedents. I he volgut publicar el mètode un cop perfilat per tal que ningú no es pensi que, quan em referia a ell, parlava per parlar.[85] I alhora perquè estic fermament convençut que pot resultar una contribució no gens menyspreable en la investigació matemàtica. Així doncs, m'atreveixo a suposar que alguns dels meus contemporanis o successors trobaran, usant el mètode que exposo aquí, d'altres teoremes que a mi encara no se m'han acudit.

Així doncs, exposo en primer lloc el resultat que també va ser el primer que se'm va manifestar per via mecànica. És a dir: que *tot segment d'una secció d'un con rectangle és quatre terços del triangle que té la mateixa base i alçada.* Seguidament, un per un, els altres resultats tractats de la mateixa manera. Al final del llibre formulo les demostracions geomètriques dels teoremes els enunciats dels quals t'he enviat amb anterioritat.[86]

* * *

83 Fixem-nos que hi ha una analogia amb el problema de la *quadratura.* Pels matemàtics grecs, *quadrar una figura plana* significa «donar un quadrat que tingui la mateixa superfície que la figura plana que es pretén quadrar». Aquí, d'alguna manera, Arquimedes ens ofereix dos sòlids que són «cubicables».

84 Aquí, com ja he indicat abans, Arquimedes usa el terme grec $\tau\rho\acute{o}\pi o\nu$ que vol dir «manera».

85 Arquimedes s'hi refereix al final del seu *De la quadratura de la paràbola*, i aquest text fou conegut a la baixa edat mitjana i en el Renaixement.

86 Arquimedes [iii a. C.], a Vera 1970, **II**, 261–2612. La traducció catalana i l'èmfasi són meus.

Arquimedes estableix deu hipòtesis o resultats previs i després quinze teoremes que estableix mecànicament.

Per desgràcia, l'esperança que el seu mètode resultés útil tant als seus contemporanis com a les generacions venidores, es frustrà, perquè el*Mètode* es va perdre i no es retroba fins que l'any 1906 a Istanbul fou identificat per Heiberg en un palimpsest del segle x. Aquest text es va conservar gràcies a uns monjos del segle xiii que van haver de recórrer als seus 185 fulls per escriure-hi al damunt una col·lecció de textos litúrgics i de pregàries.

Recentment disposem d'una traducció al català. Vegeu Arquimedes [iii a. C.], *Mètode*, a González-Vaqué 1977.

Arquimedes al text *De la quadratura de la paràbola*[87] fa una *anàlisi* de la paràbola, basant-se en els resultats del matemàtics que l'han precedir en l'estudi de les seccions còniques: Euclides, Aristeu, el Vell i Apoŀloni. Estableix, com és usual,

1. La *corda* $A\Gamma$ del segment de paràbola i el *diàmetre* $B\Delta$ que li correspon.[88]
2. Donada una paràbola $AB\Gamma$, el diàmetre $B\Delta$, la corda $A\Gamma$, paraŀlela a la tangent a la paràbola en el vèrtex B, la tangent a la paràbola en el punt Γ, ΓE, que talla ΔB en E. Aleshores les rectes $B\Delta$ i BE són iguals.[89]
3. Donat un segment parabòlic $AB\Gamma$, des del punt A tirem AZ, paraŀlela al diàmetre, ΔB, i des del punt Γ la tangent ΓZ. En el triangle $\triangle AZ\Gamma$, $K\Lambda$ paraŀlela a AZ, que tallarà la corba en O. Bé doncs, aquestes rectes queden dividides en la mateixa raó, i la part de $A\Gamma$ del costat de A i la de $K\Lambda$ del costat del mateix punt seran els termes que es correspondran en la proporció.[90]

D'aquesta anàlisi, què en podem deduir? En podem deduir fàcilment que[91]

$$\frac{\Lambda K}{\Lambda O} = \frac{\Gamma A}{A\Lambda},$$

que permet afirmar que[92]

$$\Lambda K \times A\Lambda = \Lambda O \times \Gamma A.$$

És a dir, la *línia de paràbola* $O\Lambda$ pel braç constant ΓA equilibra la línia ΛK del triangle $\triangle A\Gamma Z$, coŀlocada al seu lloc $A\Lambda$.

Ara bé, l'idoni fóra coŀlocar la línia del triangle al seu centre de gravetat, que és, com sabem, el punt N en què ΓB talla ΛK.

Això ens obliga a transportar la línia $A\Gamma$ a la línia ΓM. Ho podem aconseguir usant el teorema de semblança de triangles. Tenim que

$$\frac{\Gamma M}{MN} = \frac{\Gamma A}{A\Lambda}.$$

Perllonguem la recta ΓM fins a un punt Θ tal que $M\Theta = M\Gamma$. D'on en resulta que

$$\frac{\Gamma A}{A\Lambda} = \frac{M\Theta}{MN}.$$

Aleshores, coŀloquem en el punt Θ totes les línies $O\Lambda$ de la paràbola, situant el centre de la línia en Θ. Anomenem-les $T\Theta H$ [= $O\Lambda$]. En resulta:

$$KN\Lambda \times MN = T\Theta H \times M\Theta.$$

---

87 ARQUIMEDES [III a. C.], a VERA 1970, **II**, 223–225.

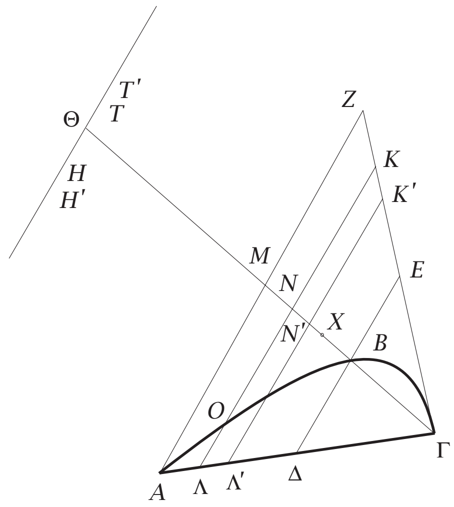
88 El diàmetre $B\Delta$, conjugat a la corda $A\Gamma$, s'obté unint els punts mitjos de totes les paraŀleles a la corda $A\Gamma$, que estan alineats, o bé unint el punt mig Δ de la corda amb el vèrtex B de la paràbola, el qual és el punt de tangència de la tangent a la paràbola, paraŀlela a la corda. És la proposició 1 de *De la quadratura de la paràbola* [ARQUIMEDES [III a. C.], a VERA 1970, **II**, 223.

89 Aquest resultat el trobem a *Les Còniques* d'Apoŀloni, **I**, proposició 3. Vegeu APOŀLONI [III a.C.] a VERA 1970, **II**, 347. És la proposició 2 de *De la quadratura de la paràbola* [ARQUIMEDES [III a. C.], a VERA 1970, **II**, 224.

90 ARQUIMEDES [III a. C.], *De la quadratura de la paràbola*, prop. 5, a VERA 1970, **II**, 225: $\frac{KO}{O\Lambda} = \frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda}$. És una conseqüència de la proposició anterior i de la *composició de raons*, establerta per EUCLIDES a *Elements*, **VI**, proposició 19. [EUCLIDES [III a. C.], a VERA 1970, **I**, 817.]

91 Vegeu EUCLIDES [III a. C.], llibre **V** dels *Elements*, proposició 18, a VERA 1970, **I**, 801.

92 EUCLIDES [III a. C.], llibre **VI** dels *Elements*, proposició 16, a VERA 1970, **I**, 815–816.



Per tant, segons *De l'equilibri dels plans*, **I**, proposicions 6 i 7,[93] $MN\Lambda$ equilibra $T\Theta H$, cada un d'ells situat al seu centre de gravetat, que és el punt mig del segment. Ara, per la hipòtesi 3, en resulta que M és el centre de gravetat d'ambdós pesos.[94]

Això val, per a tota paral·lela $\Lambda'N'K'$ a $EB\Delta$ del triangle $\triangle A\Gamma Z$, mantenint-la sempre al seu lloc N', si la comparem amb el segment rectilini $\Lambda'O'$, determinat per la corda $A\Gamma$ i la paràbola, si el considerem col·locat en Θ; és a dir, amb el segment $T'\Theta H' = \Lambda'O'$ i on Θ és el punt mig del segment $T'H'$.

Totes les rectes del triangle $\triangle A\Gamma Z$, formen el triangle $\triangle A\Gamma Z$. Totes les ordenades del segment de paràbola ΛO equivalen al segment de paràbola. Ara bé el triangle al seu lloc equilibra el triangle col·locat al seu centre de gravetat X.

Però, per la hipòtesi 5,[95] sabem que $XM = \frac{1}{3}\Gamma M$.

Finalment, doncs, si fem el segment de paràbola $AB\Gamma$ igual a S, tenim que

$$S \times M\Theta = \triangle AZ\Gamma \times MX = \triangle AZ\Gamma \times \frac{1}{3}\Gamma M = 4\,\triangle AB\Gamma \times \frac{1}{3}\Gamma M.$$

Tot rau, doncs, a haver fet una anàlisi acurada de les propietats de la paràbola, les quals ens han permès d'establir d'antuvi, la relació

$$K\Lambda \times A\Lambda = O\Lambda \times \Gamma A.$$

I, per la semblança dels triangles, vinculats de forma íntima a la paràbola, la relació definitiva

$$KN\Lambda \times NM = T\Theta H \times M\Theta.$$

La resta ha estat fàcil, sempre que estiguem disposats a acceptar que *les superfícies es componen de línies* i que, aleshores, podem utilitzar la mecànica de la palanca per

93 Arquimedes [iii a. C.], a Vera 1970, **II**, 186–188.
94 Arquimedes [iii a. C.], a Vera 1970, **II**, 184.
95 Arquimedes l'ha demostrat a *De l'equilibri dels plans*, **I**, proposició 15; **II**, proposició 5 [Arquimedes [iii a. C.], a Vera 1790, **II**, 192–193; 197].

tal de determinar la superfície que busquem. Ara bé, en acceptar això, ens veiem obligats necessàriament a **abandonar** la *limitació arquimediana*. És a dir, ens veiem obligats a canviar de concepció epistemològica de la naturalesa de les magnituds i, de retruc, òbviament de manera de parlar, de llenguatge. Hem passat del llenguatge de les *magnituds infinitament divisibles* al llenguatge dels *infinitèsims geomètrics* i, com fa notar el propi Arquimedes, a la *mecànica* dins la geometria. El *mètode* porta el seu propi llenguatge i no podem pas obviar-lo.

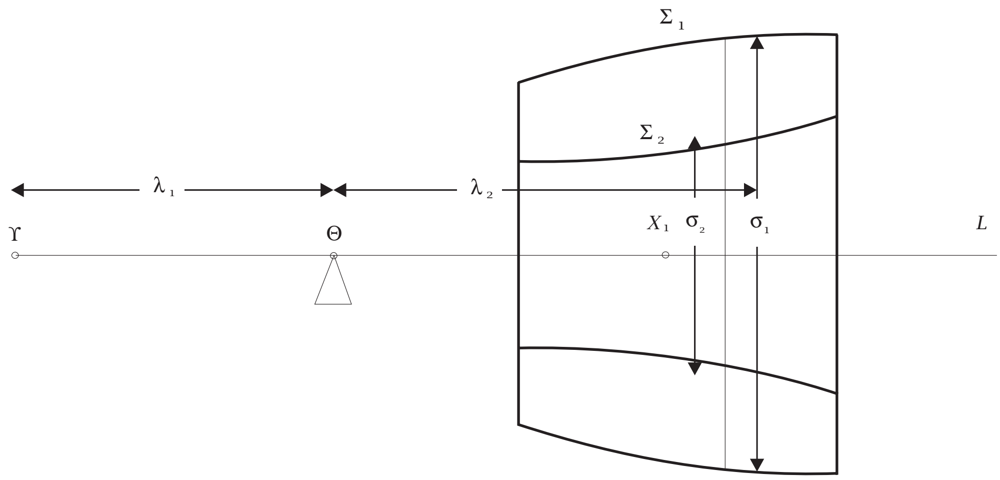
En definitiva, el *mètode d'Èudox* està íntimament inserit en *la teoria de la proporció de la geometria euclidiana*, una teoria que permet l'exhaustió perquè té com a principi bàsic, l'*arquimedianitat* —l'*existència de raó* entre dues magnituds arbitràries de la mateixa espècie. El *mètode d'Arquimedes*, en canvi, malgrat conduir als mateixos resultats, *ens obliga a abandonar l'arquimedianitat i a introduir els elements infinitesimals*. El llenguatge, entès com a expressió de les idees, com a forma de posar sintàcticament allò que estem manejant d'acord amb la manera d'entendre-ho, té una semàntica irrenunciable. Si canviem de model epistemòlogic, hem de canviar necessàriament de llenguatge.

* * *

La qüestió és ara establir el *mètode* de forma general i veure si és útil per a intuir d'altres quadratures i cubicatures. Arquimedes no ofereix una exposició independent del mètode. Ofereix els resultats que obté aplicant-lo i determina quinze resultats ben diversos: superfícies de figures planes i sòlids, volums de sòlids i centres de gravetat de figures planes i sòlids.

Nosaltres, però, podem donar una descripció general del mètode.[96]

Suposem que Σ_1, Σ_2 són dues regions convexes, que tenen un mateix diàmetre $[a, b]$ que es troba en la recta L.[97]



Suposem que, en el cas de Σ_1 coneixem la mesura [superfície o volum] $\mu(\Sigma_1)$ i el centre de gravetat X_1. Volem determinar la mesura $\mu(\Sigma_2)$.

96 Vegeu, per exemple, EDWARDS 1979, 69–70.

97 Suposarem, per simplificar, que ambdues regions són bidimensionals o tridimensionals i simètriques respecte de L. [En el cas dels sòlids són sòlids de revolució.]

Per aconseguir-ho, hem de determinar dos punts M i Θ de la recta L tals que

$$\sigma_1 \times \lambda_1 = \sigma_2 \times \lambda_2,$$

on $\lambda_1 = M\Lambda$ i $\lambda_2 = M\Theta$ i σ_1, σ_2 són, respectivament, les seccions laminars de les regions Σ_1 i Σ_2 que corresponen al punt Λ de l'eix L. Aleshores la *llei de la palanca* ens garanteix que cada element de regió, col·locat allà on la relació indica, equilibra l'altre. Si els considerem tots junts i, a més, considerem la regió Σ_1 col·locada al centre de gravetat, tindrem que

$$\mu(\Sigma_1) \times \gamma_1 = \mu(\Sigma_2) \times \lambda_2.$$

Aquesta expressió permet trobar $\mu(\Sigma_2)$, coneguts $\mu(\Sigma_1)$ i γ_1, però també permet trobar γ_1, si coneixem les dues mesures $\mu(\Sigma_1), \mu(\Sigma_2)$.

Ara tot depèn de les possibilitats que aquest mètode pugui oferir-nos i això és el que ens mostra *El mètode* d'Arquimedes.[98]

5 El problema de les tres i les quatre rectes

És ben sabut que els pitagòrics van elaborar la *tècnica d'aplicació d'àrees* per tal de poder resoldre *geomètricament* problemes que la matemàtica babilònica i egípcia resolia amb *algorismes numèrics concrets*.[99]

Aquesta tècnica consisteix, de fet, en el següent:

TEOREMA *Donat un segment AB i una superfície [quadrada] $\overline{MN}^2$, és possible determinar un segment AX tal que*

- *el rectangle $AB \times AX$ sigui igual a $\overline{MN}^2$ [cas parabòlic]; o*
- *el rectangle $(AB + BX) \times BX$ sigui igual a $\overline{MN}^2$ [cas hiperbòlic]; o*
- *el rectangle $(AB - BX) \times BX$ sigui igual a $\overline{MN}^2$ [cas el·líptic].*

Hom diu, respectivament, que $\overline{MN}^2$ s'aplica *exactament* [o *en paràbola*], *per excés* [o *en hipèrbola*] o *per defecte* [o *en el·lipse*] damunt del segment AB.[100]

Sabem, a més, que les tres aplicacions es poden efectuar amb regle i compàs. Tot rau, doncs, a construir el punt X de manera que

98 ARQUIMEDES [III a. C.], a VERA 1970, **II**, 261–297; a GONZÁLEZ-VAQUÉ 1997.

El lector interessat pot llegir les *Cartes de Dettonville* de Blaise Pascal [1659] per tal d'adonar-se de les possibilitats que té la tècnica de la balança, aplicada al càlcul de quadratures, cubatures i centres de gravetat.

99 De fet, és la manera geomètrica de resoldre allò que, en el context aritmètic, és una equació de primer i segon graus.

100 Fixem-nos que el que s'aplica és una àrea donada —un paral·lelogram, un rectangle, un quadrat— en un segment també donat.

Vegeu, per exemple, THOMAS 1939, edició de 1980, **I**, 186.

> Una de les grans troballes del pitagòrics fou el mètode conegut amb el nom de l'aplicació d'àrees, que va esdevenir un giny molt potent en mans del matemàtics grecs que els van succeir. El geòmetra diu *aplicar* [$\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$] una àrea a una recta donada, quan es construeix un rectangle o un paral·lelogram igual a l'àrea donada, damunt exactament de la recta donada. Diu que l'àrea *s'aplica per defecte* o *en el·lipse* [$\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\acute{\iota}\pi\epsilon\iota\nu$] quan el rectangle o el paral·lelogram es construeix en una part de la recta donada. I *per excés* [$upsilon\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$] quan el rectangle o el paral·lelògram es construeix damunt la recta perllongada. El mètode és desenvolupat en les proposicions següents dels *Elements* d'Euclides: I,44, 45, II, 5, 6, 11; VI, 27, 28, 29. Aquestes proposicions són equivalents a la resolució de les equacions quadràtiques, no només en casos particulars sinó en tota la seva generalitat.

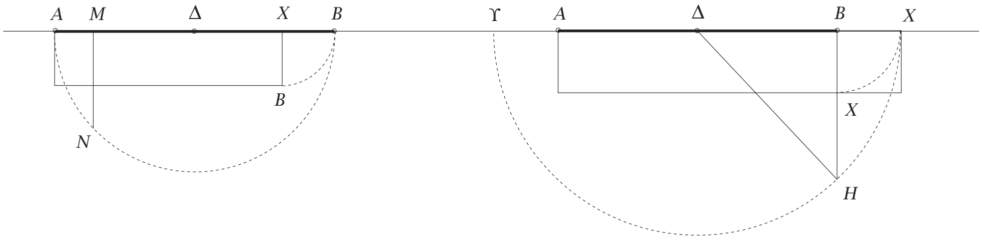
Recordem que les còniques reben el nom segons que la *propietat geomètrica* de cada un dels seus punts respecte del *latus rectum* sigui d'un o altre tipus.

$$\overline{MN}^2 = AB \times BX \qquad \text{[}\textit{Elements}\text{ d'Euclides, llibre }\mathbf{I}\text{, proposició 44]}$$
$$\overline{MN}^2 = (AB - BX) \times BX \qquad \text{[}\textit{Elements}\text{ d'Euclides, llibre }\mathbf{II}\text{, proposició 5]}$$
$$\overline{MN}^2 = (AB + BX) \times BX \qquad \text{[}\textit{Elements}\text{ d'Euclides, llibre }\mathbf{II}\text{, proposició 6]}$$

Vegem-ne la construcció amb regle i compàs, tenint en compte que, en els tres casos, els segments MN i AB estan donats.

Cas parabòlic. Tot consisteix a determinar la *quarta proporcional* de tres segments coneguts, i això és una conseqüència immediata de la semblança de triangles o de l'anomenat *teorema de Tales*.[101]

Els altres dos, d'acord amb els *Elements* d'Euclides, s'aconsegueixen dividint el segment AB per la meitat en el punt Δ.[102]



Cas el·líptic. Fem una circumferència, amb el centre en Δ, i de radi $\frac{AB}{2}$. A continuació, portem MN damunt de $\frac{AB}{2}$.[103] Seguidament considerem la semicorda igual a MN i tindrem el segment que buscàvem.[104]

Cas hiperbòlic. Ara fem $BH = MN$ i considerem la circumferència que passa per H i té el centre en Δ. Aleshores

$$BH^2 = BX \times BY = BX \times AX.$$

* * *

El problema de *doblar el quadrat* ens porta a trobar la *mitjana proporcional* entre els segments $AB + AB$ i AB.[105] Aquest problema és resoluble amb regle i compàs de forma anàloga als dos anteriors.

Ara bé, com féu notar Hipòcrates de Quios, la *duplicació del cub* ens porta a haver de trobar *dues mitjanes proporcionals* entre $2\,AB = AB + AB$ i AB. És a dir, «cal trobar dos segment OX i ΠY tals que

$$\frac{AB}{OX} = \frac{OX}{\Pi Y} = \frac{\Pi Y}{2\,AB}\text{ ».}$$

101 Tanmateix, la demostració d'Euclides al llibre **I** no fa servir pas la teoria de la proporció, que, com ja hem indicat abans, introdueix als llibres **V** i **VI**. De fet, tot consisteix a veure que, donats un segment rectilini i un angle, sempre podem aplicar en l'angle i en el segment un paral·lelogram igual a un triangle donat, un resultat que s'obté gràcies a les propietats del *gòmon* del paral·lelogram. Vegeu Euclides [iii a. C.], a Vera 1970, 730–731.

102 Vegeu Burton 1991, edició de 1997, 162–166, o bé Waerden 1961, 118–123.

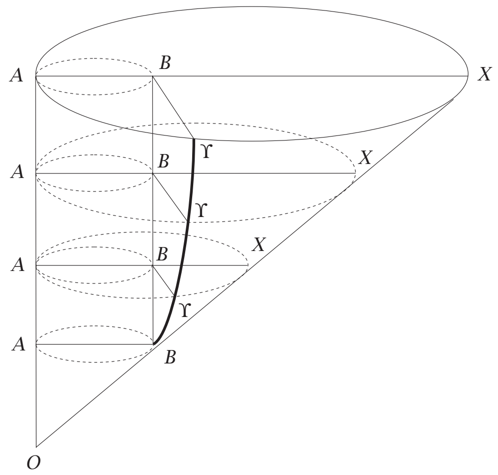
103 Cal, és clar, que $MN < \frac{AB}{2}$. En el llenguatge algèbric aquesta condició imposa que el *discriminant* de l'equació de segon grau sigui > 0, ja que cal que hi hagi solució real; és a dir, geomètrica.

104 Sembla, malgrat que és discutible, que Descartes, a *La Géométrie* utilitza la potència, d'un punt a una circumferència, una tècnica que trobem al llibre **III** dels *Elements* d'Euclides [Euclides [iii a. C.], a Vera 1970, **I**, 771–774.]

105 Aritmèticament equival a determinar l'arrel quadrada de 2.

Ens trobem, doncs, amb la proposició 44 del llibre primer dels *Elements*, però com a *problema indeterminat*. Així doncs, *fixat AB*, volem trobar un segment BX tal que el rectangle de costats AB i BX *sigui un quadrat*, però ara cal que alhora determinem el costat BY d'aquest quadrat, perquè és indeterminat. Hem passat d'un problema ben determinat a un problema indeterminat.

Ara bé, pel que hem exposat fins ara, sabem que, per a cada segment BX, el segment BY es pot determinar amb regle i compàs, però atès que BX és desconegut, hem de fer una *infinitat d'aplicacions del regle i el compàs* —una per a cada determinació del segment BX— i això va en contra de la *limitació arisotèlica*.



Malgrat tot, és lícit analitzar què és el que realment volem fer. El segment AB és fix, però cal emprar-lo diverses vegades. Per això el col·loquem a nivells diferents, per tal de poder distingir *visualment* les operacions successives.

Ara, a continuació de cada segment AB, de forma creixent gradualment —uniformement, podríem dir—, afegim els corresponents segments variables BX. Amb cada una d'aquestes parelles podem determinar el segment BY, que és la *mitjana proporcional* de AB i BX. Resulta que, per a cada segment BX, tindrem un punt Y que genera, en l'espai, un *lloc geomètric de punts*, tals que, en cada pla, satisfan $BY^2 = AB \times AX$.

El lloc que buscàvem ens el podem imaginar, perfectament bé, com una corba plana damunt d'una superfície semblant a una paperina. De fet, és un con recte, d'aresta perpendicular a la base i col·locada a un extrem del diàmetre bàsic. Així hem obtingut, de forma natural, una de les corbes sòlides, la *paràbola*.[106]

Resulta, doncs, que la *indeterminació* del problema es resol amb el mètode que consisteix a aplicar *en paràbola* la superfície d'un quadrat AY^2, de costat AY desconegut, damunt d'un segment *donat AB*. La determinació del costat del quadrat equival a determinar una certa *secció cònica*.

Aquest resultat planteja de forma natural dues qüestions. Com són les seccions còniques que s'obtenen tallant altres menes de cons, vinculats a d'altres problemes? Com són les seccions còniques que s'obtenen tallant el con d'abans, però amb plans

106 Els matemàtics àrabs van tenir la idea d'aplanar el con, i donar la paràbola totalment en pla, sense haver de recórrer al con. Vegeu, per exemple, BERGGREN 1986, 88, figura 3.14.

paral·lels a l'altra aresta o bé amb plans oblics? Aquestes corbes *sòlides* estan lligades d'alguna manera amb la *generalització per indeterminació* dels altres dos problemes d'aplicació d'àrees, en els quals cal determinar dos segments BX, BY tals que

$$\frac{AB + BX}{BY} = \frac{BY}{BX}; \quad \frac{AB - BX}{BY} = \frac{BY}{BX}?$$

Més encara, què passaria si imposéssim que

$$\frac{(AB \pm BX) \times BX}{BY^2} = \frac{AB}{MN}?$$

La resposta a aquestes preguntes la van donar, segons diuen els historiadors de la matemàtica grega, Menecm,[107] Més tard, Aristeu, el Vell, i Euclides, en sengles *Elements de les seccions còniques*, actualment perduts, van aprofundir l'estudi de les corbes sòlides.[108]

* * *

És curiós constatar que la primera determinació d'un *lloc geomètric* la trobem en un dels pocs textos d'Aristòtil en el qual aquest insigne filòsof proporciona una demostració mètrica. Es tracta de la proposició 5 del llibre III de la *Meteorologia*. El problema està vinculat amb la forma de l'arc de Sant Martí i diu:

> Atès que els punts K i H estan donats, també ho estarà la recta KH i la recta MH i la raó de MH a MK. Per tant, M toca una circumferència donada.[109]

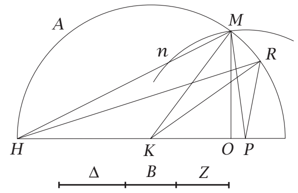
Si ho traduïm al llenguatge dels *llocs geomètrics*, tindrem l'enunciat següent: «donats dos punts K i H, el lloc geomètric dels punts M tals que la raó $\frac{MH}{MK}$ és donada, és una *circumferència*».[110]

107 Un deixeble de l'Acadèmia de Plató, germà de Dinostrat, sembla que va ser el primer que va reduir la determinació de dues mitjanes proporcionals entre dos segments donats al problema de tallar dues paràboles. Vegeu Thomas 1939, edició de 1980, 279–284.

108 Vegeu Pappos iv d. C., a Vera 1970, **II**, 1004. Sembla que l'obra sobre còniques d'Euclides constitueix la base dels quatre primers llibres de *Les Còniques* d'Apol·loni.

109 Aristòtil [iv a. C.], a Bekker 1831-1836, reedició de 1960-1961, 376 a 4–6. Vegeu també Heath 1949, edició de 1970, 183–190.

110 La demostració és la següent: S'introdueix un segment rectilini i el dividim en parts Δ i B tals que $\frac{\Delta}{B} = \frac{MH}{MK}$, la raó donada. Aleshores perllonguem una recta Z tal que $\frac{\Delta}{B} = \frac{B+Z}{\Delta}$. Anàlogament KH s'estén fins a P de manera que $\frac{Z}{KH} = \frac{B}{KP}$. Unim M amb P. Afirmo que P és el centre de la circumferència damunt la qual cauen les rectes que passen per K; és a dir, les rectes trencades KMH que satisfan la condició del lloc. Agafem la línia PT tal que $\frac{PR}{KR} = \frac{PH}{PT}$. Això significa que els triangles PKT i PTH són semblants, atès que tenen en comú l'angle KPT. Aleshores $\frac{PT}{KP} = \frac{HP}{PT} = \frac{\Delta}{B}$, la raó donada.



D'una banda, doncs, el punt T és un punt del lloc, mentre que, d'una altra, PT és la mitjana proporcional de KP i PH, magnituds donades i independents de l'elecció de T. Això fa que PT quedi ben determinada. Per tant, $PT = PM$ i el lloc que cercàvem és una circumferència de centre P i radi PM.

En el raonament anterior, en què usàvem un con recte adequat, hem aconseguit determinar els punts X tals que, fixat un segment AB,

$$BY^2 = BX \times AB.$$

És a dir, la recerca i estudi dels llocs geomètrics de punts no és pas un problema estrany als geòmetres grecs, ni de bon tros. No ens ha d'estranyar, doncs, que es plantegessin el *problema de les tres i les quatre rectes.*

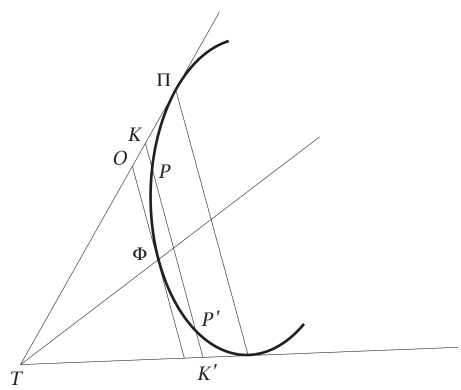
L'anàlisi de les tres i les quatre rectes. L'estudi de les seccions còniques és desenvolupat a bastament a *Les Còniques* d'Apol·loni. Aquesta obra —realment densa i de difícil lectura i comprensió— constitueix, sense cap mena de dubte, l'equivalent dels *Elements* d'Euclides pel que fa a les *seccions còniques.* En relació amb el lligam entre les còniques amb centre —la *hipèrbola* i l'*el·lipse*— i les seves *tangents*, Apol·loni, al llibre tercer, ens ofereix el següent teorema:

TEOREMA 16 *Si $O\Pi$ i $O\Phi$ són tangents a una cònica i KK' és una corda paral·lela a $O\Phi$ que talla la cònica en P i P', aleshores*

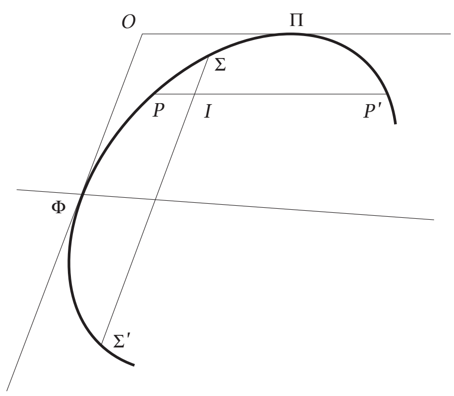
$$\frac{O\Pi^2}{O\Phi^2} = \frac{\Pi K^2}{KP \times K'P}.$$[111]

TEOREMA 17 *Si PP' i $\Sigma\Sigma'$ són secants a una cònica, paral·leles respectivament a $O\Pi$ i $O\Phi$ i cada una d'elles talla l'altra en I, aleshores*

$$\frac{O\Pi^2}{O\Phi^2} = \frac{PI \times IP'}{\Sigma I \times I\Sigma'}.$$[112]



Teorema 16



Teorema 17

111 Apol·loni [iii a. C.], a Vera 1970, **II**, 386–387.
112 Apol·loni [iii a. C.], a Vera 1970, **II**, 387–389. Cal observar que val tant si el punt I és interior com si és exterior.

Observem que aquesta propietat generalitza, d'alguna manera, la *potència d'un punt a una circumferència*. En aquest cas, $O\Pi^2 = O\Phi^2$ i $K\Pi^2 = KP \times KP'$.[113]

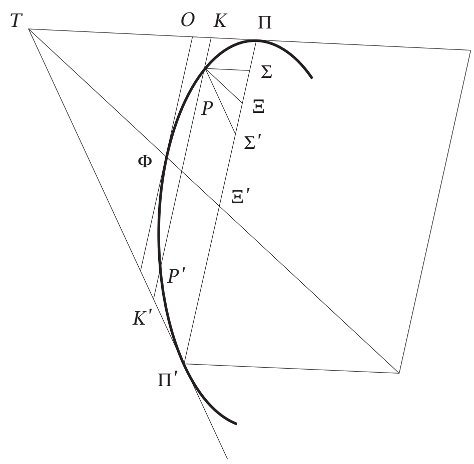
Observem també que, $KP' = PK$, perquè

$$\frac{K\Lambda}{\Lambda T} = \frac{\Pi\Xi}{\Xi T} = \frac{\Pi'\Xi}{\Xi T} = \frac{K'\Lambda}{\Lambda T}.$$

Per tant, $K\Lambda = K\Lambda', \Lambda P = \Lambda P'$. D'on: $K\Lambda - \Lambda P = K'\Lambda - \Lambda P'$ i, per tant, $KP = K'P'$. D'on, finalment, $KP' = KP + PP' = K'P' + PP' = PK'$.

Finalment, hem d'indicar que les tangents a la cònica en els extrems de la corda $\Pi\Pi'$ es tallen en T i la recta que passa pels punts mitjos de les ordenades —el *diàmetre conjugat a la corda*— passa per T, degut al fet que es tracta d'una cònica.[114]

Aquest teorema ens permet d'establir que una cònica [amb centre] té la propietat de ser el *lloc de les tres rectes*. En efecte: donada una cònica $\Pi\Phi\Pi'$, fem les tangents $T\Pi, T\Pi'$. Bisequem la corda $\Pi\Pi'$. Tindrem el punt Ξ. Unim els punts T i Ξ. La recta $T\Xi$ tallarà la cònica en el punt Φ, sent $T\Xi$ el diàmetre corresponent a les coordenades paral·leles $\Pi\Pi'$.



A més, si $O\Phi$ és paral·lela a $\Pi\Pi'$, serà tangent a la cònica en el vèrtex Φ. Ara des d'un punt P de la cònica, fem tres paral·leles: una a $T\Pi$, l'altra a $T\Xi$, i la tercera a $T\Pi'$. Tallaran $\Pi\Pi'$ en els punts Σ, Ξ' i Σ', respectivament. Aleshores,

$$KP = \Pi\Sigma, P'K = PK' = \Sigma'\Pi'.$$

$$\frac{\Pi K}{P\Xi'} = \frac{\Pi T}{T\Xi}$$

113 EUCLIDES [III a. C.], a VERA 1970, **I**, 771–773.
Eren coneguts per Arquimedes, perquè en el lema que segueix a la proposició tercera de l'obra *Dels conoides i els esferoides* en dóna l'enunciat, i afegeix «com està demostrat en els *Elements*», en referència als *Elements cònics* d'Aristeu, el Vell [IV a. C.]. Vegeu VERA 1970, **II**, 109.

114 Estem treballant amb un *feix* de còniques *bitangents*. La *corda* i les dues *rectes tangents* constitueixen les còniques degenerades del feix: una recta doble i dues rectes. Això és el que garanteix que el diàmetre passi per T. Aquesta observació la dec al professor Eduard Casas.
Això no obstant, és un resultat que trobem ja al llibre segon de *Les còniques* d'Apol·loni. Vegeu APOL·LONI [III a. C.], a VERA 1970, 378–379].

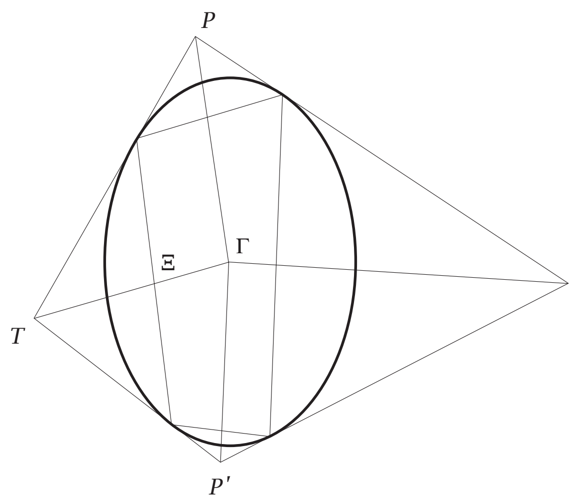
i $\Pi K^2 = P\Xi'^2 \times \frac{\Pi T^2}{T\Xi^2}$. D'on:

$$\frac{O\Pi^2}{O\Phi^2} = \frac{\left(P\Xi'^2 \times \frac{\Pi T^2}{T\Xi^2}\right)}{KP \times PK'}$$

i finalment, $P\Xi'^2 = \frac{O\Pi^2}{O\Phi^2} \times \frac{\Pi T^2}{T\Xi^2} \times KP \times PK'$, on el coeficient $\frac{\Pi^2}{O\Phi^2} \times \frac{\Pi T^2}{T\Xi^2}$ és totalmemt independent del punt genèric P de la cònica.

Així doncs, els punts P d'una cònica amb centre satisfan la propietat de ser *lloc de tres rectes*: les rectes són $T\Pi$, $T\Pi'$ i $\Pi\Pi'$, els angles estan ben determinats i el coeficient de proporcionalitat és $\frac{O\Pi^2}{O\Phi^2} \times \frac{\Pi T^2}{T\Xi^2}$.

Ara ens podem plantejar el problema de les *quatre rectes*. D'antuvi, considerem una cònica (amb centre) i el quadrilàter circumscrit. Apliquem successivament el lloc de les tres rectes i tindrem que una cònica *satisfà també el lloc de les quatre rectes*.[115]



La síntesi grega del problema de les tres i les quatre rectes. El recíproc el podem muntar de la forma següent: suposem donades tres rectes $T\Pi$, $T\Pi'$ i $\Pi\Pi'$ que es tallin dues a dues.

Sigui Ξ el punt mig de $\Pi\Pi'$. Unim Ξ amb T. Sigui Φ el punt del *lloc* que es troba damunt la recta $T\Xi$. Aleshores

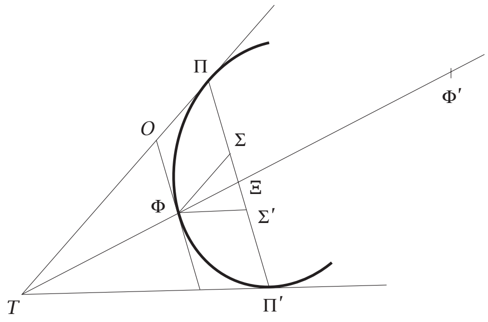
$$\frac{\Xi^2}{\Pi\Sigma \times \Sigma'\Pi'} = \frac{M^2}{N^2},$$

on $\frac{M^2}{N^2}$ és una raó donada. Ara bé, $\Pi\Sigma = \Sigma'\Pi' = O\Phi$ i $\frac{O\Phi}{T\Phi} = \frac{\Pi\Xi}{T\Xi}$.

Per tant, $\frac{\Phi\Xi^2}{O\Phi^2} = \frac{M^2}{N^2}$. És a dir, $\frac{\Phi\Xi}{O\Phi} = \frac{M}{N}$ i composant:

$$\frac{\Phi\Xi}{T\Phi} = \frac{M}{N} \times \frac{\Pi\Xi}{T\Xi},$$

115 El cas en que l'angle sigui més general cal estudiar-lo més detingudament, però atès que l'únic que fem és introduir *sinus* correctors, no sembla que res hagi de canviar excessivament.



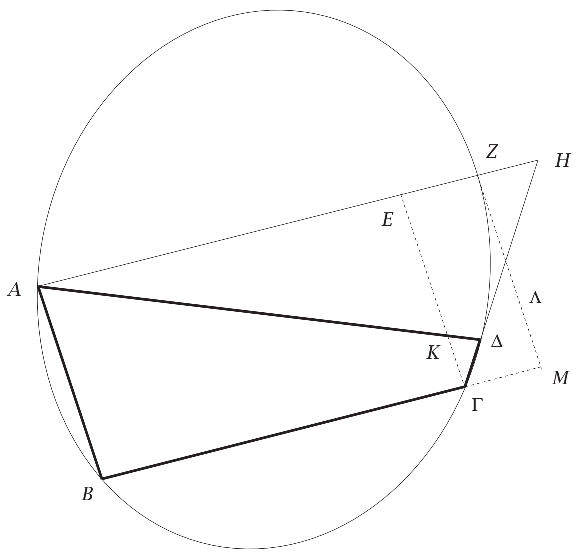
que és una raó donada per les tres rectes. El punt Φ queda determinat per aquesta relació [i és determinable amb regle i compàs] damunt la recta $T\Xi$. Així tenim el *diàmetre* $T\Xi$, *dues tangents a la cònica* $T\Pi, T\Pi'$ i el *vèrtex* Φ *de la cònica*. Aleshores,

i) quan Φ biseca la línia $T\Xi$ tenim una paràbola, el *latus rectum* Λ de la qual ve donat per $\Pi\Xi^2 = \Lambda \times \Phi\Xi$;

ii) quan Φ no biseca la línia $T\Xi$, busquem Φ' que sigui el punt que satisfà la *quaterna harmònica* $\frac{\Phi\Xi}{\Xi\Phi'} = \frac{\Phi T}{T\Phi'}$. Aleshores $\Phi\Phi'$ és el *diàmetre* de la cònica i Φ, Φ' són els vèrtexs. El latus rectum Λ s'obté per $\frac{\Pi\Xi^2}{\Phi\Xi\times\Phi'\Xi} = \Lambda\times\Phi\Phi'$. Aleshores,

α) si $\Phi\Xi < T\Phi$ és una el·lipse;

β) si $\Phi\Xi > T\Phi$ és una hipèrbole.



Per veure el recíproc del cas de les quatre rectes, suposem quatre rectes que formin un trapezi $AB\Gamma\Delta$. Les distàncies les agafem en direccions paral·leles a les rectes AB i $B\Gamma$. Fem el paral·lelogram de costats AB i $B\Gamma$. Tindrem $AB\Gamma E$. Perllonguem AE

fins a trobar un punt Z del lloc. AZ talla $\Gamma\Delta$ en H i $A\Delta$ talla $E\Gamma$ en K. Per Z fem una paral·lela a $E\Gamma$ que tallarà el perllongament de $B\Gamma$ en M i $A\Delta$ en Λ.

Ara bé, Z és un *punt del lloc*. Per tant, $\frac{ZH \times ZA}{Z\Lambda ZM} = \frac{P}{\Sigma}$, on $\frac{P}{\Sigma}$ és una raó donada.

Però $ZM = E\Gamma$ i $\frac{ZA}{Z\Lambda} = \frac{EA}{EK}$, per la semblança dels triangles $\triangle AZ\Lambda, \triangle AEK$. Això ens diu que el segment ZH està ben determinat, ja que

$$ZH = \frac{P}{\Sigma} \times \frac{Z\Lambda}{ZA} \times ZM = \frac{P}{\Sigma} \times \frac{EK}{EA} \times E\Gamma,$$

on tots els termes del segon membre estan determinats per les condicions del problema. Ara bé, «donats cinc punts d'una cònica, la cònica queda unívocament determinada».[116] Per tant, els punts A, B, Γ, Δ, Z determinen una cònica. És a dir, el *trapezi* A, B, Γ, Z determina unívocament una cònica.

D'aquesta manera, en certs casos particulars, aconseguim de resoldre els problemes de les tres i les quatre rectes, usant l'anàlisi-síntesi grega, basada en la teoria de la proporció dels segments rectilinis que, de fet, descansa fonamentalment en el *teorema de Tales*.

* * *

Pappos d'Alexandria es preguntarà pel problema de les *cinc* i les *sis rectes* i afirmarà que s'obté *un lloc més complicat que no pas les còniques*, però serà incapaç de resoldre'l. Tampoc no serà capaç de precisar què vol dir *més complicat que*, quan parlem de llocs geomètrics. A més, la seva pròpia limitació el porta a haver de negar la possibilitat de considerar el *problema general*: determinar el lloc de les $2n-1$ o $2n$ rectes, donat que, quan $n > 3$, el producte de n rectes no és acceptable: «transcendeix l'espai de tres dimensions».[117]

6 El problema de les tres i les quatre rectes en Descartes

La síntesi cartesiana del problema de les $2n-1$, $2n$ rectes. La primera referència que fa Descartes de com cal aplicar el *mètode*, en la geometria, l'ofereix a la *segona part* del *Discours de la méthode*, immediatament després d'haver formulat els quatre principis, quan diu *in extenso*:

> [...] Però no per això vaig tenir la intenció de procurar aprendre totes aquelles ciències particulars que correntment s'anomenen matemàtiques; ja que, veient que, malgrat llurs objectes siguin diferents, no deixen de concordar totes en tant que no consideren res més que les *diverses relacions o proporcions que s'hi troben*, creia que era molt millor examinar tan sols aquestes *proporcions en general*, pressuposant-les només en els temes que em servissin per donar-me'n un coneixement més fàcil, fins i tot sense constrènyer-les de cap manera, per tal de poder aplicar-les millor, després, a tots aquells altres temes que convingués. Havent advertit més tard que de cara a conèixer-les necessitaria considerar-les cadascuna en particular, i només de vegades retenir-les o comprendre-les plegades, vaig pensar que a fi de considerar-les millor en particular calia suposar-les en línia, *ja que no es trobaria res més simple ni que pogués representar més distintament a*

116 Apol·loni [iii a. C.] *Còniques*, **IV**, proposició 25, a Vera 1970, **II**, 405–406. Vegeu també Heath 1896, edició de 1961, cli–clvi, 126–134; Eecke 1963, 299–300.

117 Pappos [iv], a Vera 1970, **II**, 405–406.

> *la imaginació i als meus sentits.* I per retenir-les o comprendre-les conjuntament calia que les expliqués amb xifres, el més abreujades possible; així manllevaria el millor de l'anàlisi geomètrica i de l'àlgebra, i corregiria tots el defectes de l'una amb l'altra.[118]

En aquest text hi trobem, doncs, l'explicació que Descartes ofereix del mètode quan s'ha d'aplicar en la geometria.[119] D'entrada, cal fer l'anàlisi en base a la teoria de la proporció i a la geometria dels grecs. La síntesi, en canvi, s'efectua amb un trencament total de l'esperit grec. Cal recórrer a les «rectes» —que són el més clar i distint— i assignar-los una «xifra». És a dir, cal trencar amb la limitació imposada per la incommensurabilitat: és a dir, amb la *limitació pitagòrica*.[120] Tota recta té assignada la seva longitud tant si és commensurable com si és incommensurable; tant si és coneguda com si és desconeguda. Heus ací, doncs, el primer trencament de Descartes.

Però, a més, n'insinua un altre: «només cal considerar línies». És a dir, cal d'alguna manera reduir els rectangles, els cubs, etc. a línies. Això li permetrà desempallegar-se de la *limitació de la homogeneïtat*. Magnituds d'espècies diferents es transformen, aleshores, en segments rectilinis. Això li permet alliberar-se de la *limitació de Pappos*. Un producte de n factors ben determinats —segments de longitud donada— es pot considerar perfectament com un segment rectilini d'una certa longitud, que ve donada de forma natural per les longituds dels factors.

No és, doncs, gens estrany que Descartes, després d'haver sintetitzat tot just a l'inici del llibre el seu programa, el desenvolupi amb tota mena de detalls, al *llibre I* de *La Géométrie*:

> Tots els problemes de geometria es poden reduir amb facilitat a termes tals que, en endavant, només sigui necessari conèixer la longitud d'algunes línies rectes per tal de poder-los construir.[121]

El resum és clar: per tal de resoldre —construir— un problema de geometria només ens cal conèixer les longituds de certes línies rectes. Però Descartes deixa clar que el que cal, per tal de conèixer la solució d'un problema geomètric, *és saber-la construir*. Així s'enfronta amb la *limitació platònica* en el sentit següent:

> Quins són els ginys que podem acceptar per construir una solució?[122]

Això és el que porta Descartes a introduir l'*àlgebra geomètrica*:

> I, atès que la totalitat de l'aritmètica solament es compon de quatre o cinc operacions que són l'addició, la subtracció, la multiplicació, la divisió, i l'extracció

118 **VI**, 19–20. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 39; FONT 1996, 101–102. L'èmfasi és meva.

119 Com recordava Jordi Sales el dia 11 de març de 1998 en la xerrada, feta a l'IEC, titulada «L'"heur" cartesià», Descartes fa servir molt poques vegades la paraula mètode en el *Discours de la méthode*. Curiosament en els paràgrafs que segueixen el que acabem de citar, l'usa tres o quatre vegades seguides. Vegeu ARNAU-GUTIÉRREZ 1988, edició de 1992, 39–41; FONT 1996, 101–104.

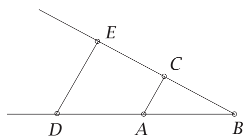
120 Vegeu PLA-VIADER 1998, XVIII-XXX; en particular, XXII-XXV.

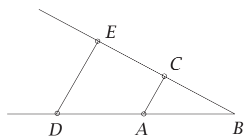
121 AT, **VI**, 369. Vegeu PLA-VIADER 1998, 11. L'èmfasi és meu.

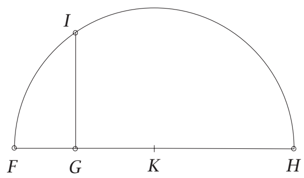
122 Descartes respecta, però, en tot moment, la limitació euclidiana. Disposa, doncs, del teorema de Tales i, de retruc, del de Pitàgores. També és absolutament respectuós amb la limitació aristotèlica: en la resolució geomètrica de cada problema concret, només podem fer servir els ginys mecànics, necessaris per realitzar les construccions oportunes, un nombre finit de vegades.

> de rels que podem considerar com una mena de divisió, així també l'únic que cal fer en geometria en relació amb les línies que busquem, quan les elaborem per tal que ens siguin conegudes, és sumar-ne o restar-ne unes altres.[123] O bé, disposant d'una línia que anomenaré la unitat per tal de relacionar-la de la millor forma possible amb els nombres, i que normalment pot agafar-se a discreció, i de dues línies més, trobar-ne una quarta que sigui a una d'elles com l'altra és a la unitat; això equival a multiplicar. O bé, trobar una quarta línia que sigui a una de les altres dues com la unitat és a l'altra; això equival a dividir. O, finalment, trobar una, dues, o vàries mitjanes proporcionals entre la unitat i alguna altra línia, un fet que equival a determinar la rel quadrada o cúbica, etc.[124]

I tot seguit Descartes mostra com és possible, donada la unitat, efectuar geomètricament el producte, el quocient i l'extracció de l'arrel quadrada. Observa, a més, que aquestes operacions són efectuables amb regle i compàs.[125] En aquestes operacions recorre a la teoria de la proporció.[126]







producte
$DA = u$
$EC = a$, $AB = b$
$CD = a \times b$

quocient
$DA = u$
$CB = a$, $AB = b$
$EB = a/b$

arrel quadrada
$FG = u$
$GH = a$
$GI = \sqrt{a}$

I és aleshores quan trenca amb la homogeneïtat de la geometria clàssica, defensada encara per Viète.[127] Tot són línies rectes.

> Cal posar de manifest que, amb a^2, b^3, i d'altres semblants, d'ordinari indico línies simples, malgrat que les anomeni, aprofitant els noms de l'àlgebra, quadrats o cubs, etc.[128]

Ara tot és a punt per *establir el procediment que ens porta a les equacions* —la síntesi cartesiana del problema geomètric—[129] que ha de servir *per a resoldre els problemes*.[130]

123 A *La Géométrie* aquestes operacions són negligides. En canvi, Descartes hi dedica un paràgraf a la *regula* XVIII, AT, **X**, 462.
124 AT, **VI**, 369–370; Pla-Viader 1998, 11–12.
125 La suma i la resta ens les ha descrit a la *regula* **XVIII** [AT, **X**, 462; Turró 1998, 120–124].
126 Vegeu Pla-Viader 1998, 14, nota 16.
127 Per això diu que «ell comença allà on Viètehavia acabat».
128 AT, **VI**, 371; Pla-Viader 1998, 14.
129 Val la pena recordar que, a *La Géométrie*, no hi ha cap mena d'anàlisi, ni geomètrica ni de cap altre tipus, dels problemes que es resolen per síntesi. Així doncs, com posa de manifest Rodis-Lewis 1966, edició de 1989, –16, no és possible comparar l'anàlisi i la síntesi cartesianes de *La Géométrie*, i conseqüentment no és possible tampoc observar si hi ha una correspondència clara entre l'una i l'altra. Vegeu Pla 1996.
130 Queda aleshores pendent la qüestió geomètrica que, Descartes mai no defuig. Finalment cal la construcció de la solució.

> Si volem, doncs, resoldre un problema qualsevol, caldrà d'antuvi suposar-lo ja resolt i aleshores donar nom a totes les línies que ens semblin necessàries per a la seva construcció, tant les que són desconegudes com les altres.[131]

L'anàlisi, la gran absent en l'obra geomètrica cartesiana, porta Descartes a les *línies*, que són, en geometria, el *més clar i distint* que la ment pot concebre:

> Aleshores, sense fer cap mena de distinció entre les línies que ens són conegudes i les que no, cal recórrer la dificultat [del problema] d'acord amb l'ordre que ens mostri de la forma més natural possible les relacions que hi ha entre elles, fins a aconseguir expressar una mateixa quantitat de dues maneres: això és el que s'anomena una *equació*, atès que els termes d'una de les expressions són iguals als de l'altra.[132]

Ara ja només queda una cosa per fer: interpretar els resultats geomètricament.[133]

> I hom pot, en tot cas, reduir d'aquesta manera totes les quantitats desconegudes a una de sola, sempre que el problema es pugui *construir* amb circumferències i línies rectes, o bé amb seccions còniques, o àdhuc amb *algun altre tipus de corba* que només sigui un o dos graus més complexa.[134]

Fixem-nos que Descartes , a més de les circumferències i les línies rectes, accepta d'altres corbes.

> Per aquesta raó em limitaré a dir-vos que, si a l'hora de resoldre aquestes equacions, no us oblideu de fer servir totes les divisions possibles, obtindreu infal·liblement els termes més simples als quals és possible reduir el problema.[135]

Aquesta advertència posa Descartes en un autèntic compromís perquè l'obliga a esbrinar quina és la *forma més simple* de cada un dels problemes de la geometria grega. En la mentalitat grega, malgrat que hi ha autors que ho posen en dubte,[136] *construir* era equivalent a donar-ne l'existència; és a dir, els actuals *teoremes d'existència*.[137] Descartes, gràcies al mètode, pot establir la conclusió següent:

> I si els problemes es poden resoldre mitjançant la geometria ordinària, és a dir, fent servir solament línies rectes i circumferències dibuixades sobre una superfície plana, quan la darrera equació hagi estat completament desentrellada constarà, com a màxim, d'un únic quadrat desconegut, igual al producte de la seva rel per una quantitat coneguda més o menys alguna altra quantitat coneguda.[138]

Aquest mètode, tanmateix, ha de portar Descartes a resoldre, amb claredat i rigor, problemes que els matemàtics grecs amb prou feines havien intuït, altres que ells no

131 AT, **VI**, 372; PLA-VIADER 1998, 16. L'èmfasi és meu.
132 AT, **VI**, 372; PLA-VIADER 1998, 16–17. L'èmfasi és meu.
133 Vegeu QUINTÁS 1981, 479, nota 11.
134 AT, **VI**, 374; PLA-VIADER 1998, 18. L'èmfasi és meu. Per Descartes, les solucions algèbriques no basten. Calen les solucions geomètriques i aquestes s'han de construir.
135 AT, **VI**, 374; PLA-VIADER 1998, 18. L'èmfasi és meu.
136 Vegeu KNORR 1986, 74, 77, 143 nota 49, i 373, nota 46.
137 És curiós notar que, malgrat la concepció platònica de la geometria grega, la construcció —platònica, naturalment— és essencial per a l'existència.
138 AT, **VI**, 374; PLA-VIADER 1998, 18.

havien estat capaços de resoldre, i encara altres que no havien pogut plantejar-se. A més, li ha de permetre aclarir la distinció entre problema «més complex», de «solució més simple», etc. Això és el que Descartes fa al *Llibre II*, i és l'èxit del mètode.

* * *

Per veure de quina manera el *mètode cartesià* és *productiu*, comparat amb el mètode grec, i també de quina manera es produeix el canvi de llenguatge —que és el que realment ens interessa—, centrarem l'atenció en el problema de les tres i les quatre rectes.

Descartes treu el problema de les tres i les quatre rectes del *Llibre VII* de la *Col·leccio Mathematica* de Pappos.[139] Segons aquest geòmetra grec del segle IV d. C., ni ell, ni Euclides, ni tampoc Apol·loni, ni cap geòmetra grec, no havien aconseguit de resoldre el *problema de les tres i les quatres rectes* amb tota la seva generalitat. Això permet a Descartes, tot plagiant i alhora innovant les paraules de Pappos, enunciar-lo amb aquestes paraules:

> Si tenim tres, quatre o més rectes donades en posició, en primer lloc *es demana un punt* des del qual puguem tirar una línia recta a cada una de les línies, segons angles donats, de tal manera que es compleixi el següent. Si n'hi ha tres, cal que el rectangle format per dues d'elles estigui en la proporció donada amb el quadrat de la tercera; o bé, si n'hi ha quatre, amb el rectangle format per les altres dues; o bé, si n'hi ha cinc, que el paral·lelepípede format per tres d'elles estigui en la proporció donada amb el paral·lelepípede format per les altres dues i una línia donada; o bé, si n'hi ha sis, que el paral·lelepípede format per tres d'elles estigui en la proporció donada amb el paral·lelepípede format per les altres tres; o bé, si n'hi ha set, que el producte que s'obté quan se'n multipliquen quatre tingui la proporció donada amb el producte obtingut en multiplicar les tres restants amb una recta donada; o bé, si n'hi ha vuit, que el producte de la multiplicació de quatre estigui en la proporció donada amb el producte de les altres quatre. I així la qüestió es pot estendre a qualsevol altre nombre de línies. I, atès que hi ha *una infinitat de punts diferents* que poden satisfer el que aquí es demana, *es vol saber* també i *dibuixar* la línia damunt la qual s'han de trobar tots aquests punts.[140]

Observem que l'enunciat de Descartes és, en si mateix, digne d'atenció. D'una banda, *cal trobar un punt concret*. D'una altra, *cal trobar el lloc* i, finalment, *cal dibuixar-lo*. Així doncs, cal distingir entre trobar un punt i trobar un lloc, i també entre trobar un lloc i dibuixar-lo.

Atès que el problema inicial és geomètric, en la mentalitat de Descartes, la solució algèbrica no és suficient. Cal també —és una exigència de la seva interpretació del mètode aplicat a la geometria— una solució geomètrica. La solució algèbrica és un *mitjà*, però *mai no és el fi*.

A més, la seva reducció dels productes de rectes a rectes li permet de sobrepassar el domini estrictament geomètric, un domini limitat, com ens recorda Pappos.[141]

139 PAPPOS [IV], a EECKE 1932, edició de 1982, **II**, 507–510.

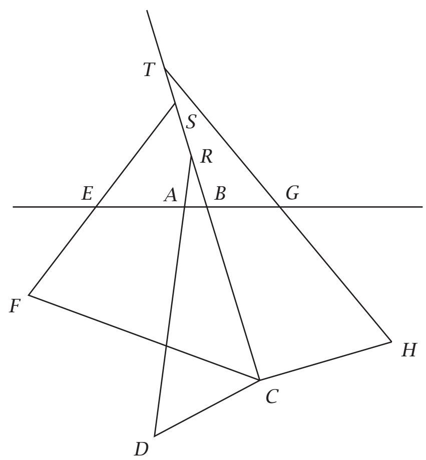
140 AT, **VI**, 379–380; PLA-VIADER 1998, 25–26. L'èmfasi és meu.

141 «Però si hi ha més de sis rectes no podem saber si quelcom comprès per quatre rectes guarda una certa proporció donada amb quelcom comprès per la resta, perquè *no hi ha res* comprès dessota de *més de tres dimensions*» [PAPPOS [IV], a EECKE 1982, **II**, 509]. Aquest text el reprodueix Descartes per tal de posar de manifest la *potència* del mètode, un mètode que transcendeix la geometria grega de

El problema geomètric, després de la síntesi —insisteixo, no hi ha anàlisi pròpiament dita—, esdevé una *equació* [*polinòmica*]. Des del punt de vista de l'àlgebra —que és el que realment tenim després de la síntesi— no hi ha cap raó per renunciar a equacions de *tipus* [o grau] superior al tercer.

Veiem, doncs, com procedeix Descartes en la síntesi del problema de les $2n-1$, $2n$ rectes:

> D'antuvi, suposo el problema resolt i per alliberar-me de la confusió de *totes* aquestes línies, considero *una* de les donades, i *una* d'aquelles que cal determinar —per exemple, AB i CD— com a línies principals. A elles intento referir totes les altres. Anomeno x el segment de la línia AB que es troba entre A i B, i el segment BC l'anomeno y. Perllongo la resta de línies que m'han donat fins que tallin a cadascuna d'aquestes dues o, si cal, al seu perllongament, sempre que no els siguin paral·leles. Aleshores, com podem veure a la figura, aquests perllongaments tallen la línia AB en els punts A, E, G, i la línia BC en els punts R, S, T. Ara, atès que tots els angles del triangle ARB són donats, la relació que hi ha entre els costats AB i BR queda també donada. Aquesta relació la faig igual a la raó existent entre z i b. Com que AB és x, resulta que RB és $\frac{bx}{z}$, i aleshores tenim que CR és igual a $y+\frac{bx}{z}$, perquè el punt B es troba entre els punts C i R. Tanmateix, si el punt R estigués entre els punts C i B, tindríem CR igual a $y-\frac{bx}{z}$. Finalment, si el punt C es trobés entre els punts B i R, CR seria $-y+\frac{bx}{z}$.



> De manera semblant, els tres angles del triangle DRC són donats i, per tant, també ho serà la raó existent entre els costats CR i CD, que faig igual a la raó entre z i c. CR és igual a $y+\frac{bx}{z}$ i, per tant, CD val $\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{zz}$. Aleshores, com que les línies AB, AD, i EF són donades en posició, la distància que hi ha entre els punts A i E estarà ben determinada. Suposem que l'anomeno k. Aleshores EB serà igual a $k+x$, o bé a $k-x$ en el cas que el punt B estigués entre E i A, i a $-k+x$, si E estigués entre A i B. I, com que els angles del triangle ESB són donats, la raó entre BE i BS està ben determinada i faig que sigui igual a la raó

dimensió tres [AT, **VI**, 378]. Descartes reconeix l'avantatge del seu mètode quan diu: «[...] considerava haver establert que el meu mètode és millor que el mètode actual». [Vegeu AT, **I**, 340].

> que hi ha entre z i d. Per tant, BS és $\frac{dk+dx}{z}$, i la línia completa CS és $\frac{zy+dk+dx}{z}$. Tanmateix, si el punt S es trobés entre B i C, seria $\frac{zy-dk-dx}{z}$. Però, si el punt C es trobés entre B i S, tindríem $\frac{-zy+dk+dx}{z}$. A més, els tres angles del triangle FSC són donats, i d'ací se'n segueix la proporció que hi ha entre CS i CF, que fem igual a la que hi ha entre z i e. Tota la línia CF serà igual a $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$.
>
> Anàlogament, AG, que anomeno ℓ està donat i, per tant, BG és $\ell - x$. Ara, utilitzant el triangle BGT, resulta que la raó entre BG i BT també està donada, i la faig igual a la que hi ha entre z i f. Aleshores BT serà igual a $\frac{f\ell-fx}{z}$, i CT $\frac{zy+f\ell-fx}{z}$. Novament, atès que la raó entre TC i CH és coneguda perquè el triangle TCH està ben determinat, la faig igual a la raó que hi ha entre z i g. Tindrem doncs que CH és $\frac{+gzy+fg\ell-fgx}{zz}$.[142]

Aquest text el podem reescriure ben fàcilment en un llenguatge més actual, i alhora més clar. Considerem donades les línies L_1, L_2, L_3, L_4, $L_5, \ldots$, i els angles ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, $\phi_5, \ldots$ Des d'un punt C tirem línies que tallin cada una de les rectes L_i formant un angle ϕ_i. Ara *cal determinar* les longituds d_1, d_2, d_3, d_4, $d_5, \ldots$ dels segments respectius CB, CD, CF, CH, $CI, \ldots$, i els hi imposem que

$$\frac{d_1 \cdots d_n}{d_{n+1} \cdots d_{2n}} = \frac{m}{n},$$

on pot ocòrrer, en el cas senar, que d_{2n} sigui una longitud donada d.

Aquesta és la síntesi que va, d'allò que és clar i distint, al problema.

Per fer-la, Descartes —i en això aconsegueix el canvi de llenguatge que busquem— *dóna nom* a CB i AB: $AB = x$, $CB = y$, i els suposa perllongats per tal de poder-hi referir tots els altres segments.[143] La teoria de la proporció, atesa la coneixença de les rectes i dels angles, ens mena a una equació en les variables x, y. És l'*equació* del problema, perquè la síntesi, en el llenguatge nou, mena sempre a una o vàries equacions.

Ara bé, el fet de suposar el problema resolt permet deduir que cada una de les distàncies d_i és de la forma

$$d_i = a_i x + b_i y + c_i, i = 2, 3, 4, 5, \ldots, \quad \text{i} \quad d_1 = y,$$

on $a_i, b_i, c_i, i = 2, 3, 4, , 5, \ldots$, són nombres coneguts i x i y depenen del punt C del lloc que hàgim elegit.[144]

Així el problema de Pappos, *completament desproveït de tot significat geomètric*, es converteix en una equació:

- per a tres rectes: $d_1 \cdot d_2 = \lambda \cdot d_3^2$,
- per a quatre rectes: $d_1 \cdot d_2 = \lambda \cdot d_3 \cdot d_4$,
- per a cinc rectes: $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = \lambda \cdot a \cdot d_4 \cdot d_5$,
- $\cdots$

142 AT, **VI**, 382–384; PLA-VIADER 1998, 30–33. L'èmfasi és meu.
Per fer-ho, Descartes recorre al *teorema del sinus* dels triangles, que és un teorema de teoria de la proporció.

143 És l'elecció d'eixos. Vegeu PLA-VIADER 1998, 29-33, notes.

144 Aquí, atenció!, el problema resolt és un problema particular i hem de garantir-ne la validesa general, per tal que el mètode sigui científic. Això és el que diu el principi de l'enumeració completa. Vegeu PLA 1998b.

- per a $2n-1$ rectes: $d_1 \cdot \cdots \cdot d_n = \lambda \cdot a \cdot d_{n+1} \cdot \cdots \cdot d_{2n-1}$,
- per a $2n$ rectes: $d_1 \cdot \cdots \cdot d_n = \lambda \cdot d_{n+1} \cdot \cdots \cdot d_{2n-1} \cdot d_{2n}$.

Aquestes equacions tenen el mateix grau que el nombre màxim de rectes d_i de cada membre. El problema de Pappos de les tres i les quatre rectes, de les cinc i les sis rectes, ..., de les $2n-1$, $2n$ rectes, s'ha convertit en un problema totalment nou. S'ha transformat en el problema de *classificar* equacions polinòmiques i, *a través d'elles*, en el problema de *classificar* les línies corbes associades.[145]

És a dir, el mètode condueix Descartes a les equacions de la forma $P(x, y) = 0$, on $P(X, Y)$ és un polinomi arbitrari en X, Y. Les corbes associades —les corbes que Descartes anomena *geomètriques*— són, per a l'autor francès, les úniques corbes que podem acceptar en geometria. Hem substituït, doncs, els punts determinables intersecant circumferències i rectes en punts determinables intersecant corbes geomètriques.

A més, el grau dels polinomis ens permet de classificar la *complexitat* de les corbes geomètriques, «quelcom que els geòmetres grecs mai no van aconseguir».[146]

* * *

145 Aquesta manera de plantejar el problema era desconegut pels antics, segons posa de manifest Descartes, quan diu:

> Els antics han observat molt bé que els problemes de geometria es classifiquen en plans, sòlids i lineals; és a dir, que uns problemes es poden construir només tirant línies rectes i circumferències; d'altres necessiten, a més, una secció cònica, i els darrers, corbes més complexes. No obstant això, el que m'estranya és que, entre les línies més complexes, no hagin estat capaços de distingir graus diversos, i tampoc no entenc perquè les han anomenat *mecàniques* en lloc d'anomenar-les *geomètriques*. Perquè dir que això és degut al fet que cal emprar alguna mena de mecanisme per descriure-les, ens portaria a haver de renunciar a les circumferències i a les línies rectes atès que, per tal de poder-les representar en el paper, cal recórrer al regle i al compàs, que també són instruments. No és tampoc degut al fet que els instruments emprats per dibuixar-les, en ésser més complexos que el regle i el compàs, hagin de ser necessàriament menys precisos, ja que si aquesta fos la raó caldria refusar-les com a mecàniques atès que, a la mecànica, la precisió de la construcció és més fina que a la geometria, on hom cerca una gran finor de raonament, la qual, sense cap mena de dubte, pot ser tan perfecta per a aquesta mena de línies com per a les altres.
>
> No diré tampoc que aquesta exclusió es degui al fet de no voler acréixer el nombre de postulats perquè estaven satisfets amb els que ja havien establert. A saber, els que diuen que sempre és possible unir dos punts donats per mitjà d'una recta, i descriure una circumferència que passi per un punt donat i tingui el centre en un altre punt donat. Doncs, a l'hora de tractar les còniques, no han tingut cap mena d'escrúpol a suposar, a més d'aquests dos, que donat un con sempre és possible de tallar-lo per mitjà d'un pla donat. I per tal de dibuixar les corbes que jo introduiré aquí, només cal acceptar que dues o més línies poden moure's, l'una per l'altra, de manera que els punts en què es tallin generin noves corbes. I això no em sembla pas més complicat.
>
> És cert, però, que no han pas acceptat completament les seccions còniques a la seva geometria i jo no pretenc pas de canviar els noms en ús. Ara bé, és ben clar, em sembla, que si considerem geomètric tot allò que és precís i exacte, i mecànic allò que no ho és, i si considerem la geometria com una ciència que, en general, permet de conèixer la mesura dels cossos, aleshores no hi ha cap motiu per excloure les línies més complexes que no valgui també per a les més simples, atès que aquestes també les podem imaginar com descrites per un moviment continu, o per diversos moviments successius de tal naturalesa que els darrers siguin determinats completament pels que els precedeixen, ja que, d'aquesta faisó, és possible tenir un coneixement exacte de llur mesura.
>
> Pot ser, però, que el que ha impedit als geòmetres antics acceptar les corbes que són més complexes que les seccions còniques sigui el fet que les primeres que van considerar fossin, atzarosament, l'espiral, la quadratriu i d'altres semblants que cal considerar realment com a mecàniques i, per tant, no es poden admetre, de cap manera, entre les que jo penso introduir en aquesta obra. Això és degut al fet que les hem de concebre com a generades per dos moviments separats que no tenen, entre si, cap vinculació que puguem amidar amb precisió. Malgrat tot, després van examinar la concoide, la cissoide, i algunes altres, que són geomètriques. Però, en no conèixer gaire bé les seves propietats, no els van concedir pas més entitat que a les primeres. O bé, considerant que no coneixien gaire coses de les seccions còniques i que en quedaven moltes sobre el regle i el compàs que encara ignoraven, no els va semblar aconsellable iniciar l'estudi de qüestions més difícils.

Vegeu AT, **VI**, 388–390; Pla-Viader 1998, 39–42.

146 AT, **VI**, 390; Pla-Viader 1998, 41.

Falta, però, la justificació geomètrica d'aquestes corbes. No és possible d'acceptar altres ginys, a més del regle i el compàs, que «assoleixin la mateixa precisió»?[147] I és aleshores quan Descartes introdueix la *teoria de la proporció continuada*, però *finita*.[148]

És aquesta teoria continuada de la proporció la que permet a Descartes defensar que la introducció d'altres ginys mecànics és lícita:

> I per tal de dibuixar les corbes que jo introduiré aquí, només cal acceptar que dues o més línies poden moure's, l'una per l'altra, de manera que els punts en què es tallin generin noves corbes.[149]

És clar, doncs, «si considerem geomètric tot allò que és precís i exacte, i mecànic allò que no ho és»,[150] que les corbes generades per ginys mecànics —sempre que condueixin a proporcions «contínues»— han de ser considerades geomètriques.

I un cop assolit aquest canvi total d'interpretació del fet geomètric, associat indissolublement al canvi de llenguatge que ja hem comentat, Descartes pot oferir-nos una definició precisa de *geometria*:

> Considerem la geometria com una ciència que, en general, permet de conèixer la mesura dels cossos.[151]

Per tant,

> no hi ha cap motiu per excloure les línies més complexes que no valguin també per a les més simples, atès que aquestes també les podem imaginar com descrites per un moviment continu, o per diversos moviments successius de tal naturalesa que els darrers siguin determinats completament pels que els precedeixen, ja que, d'aquesta faisó, és possible tenir un coneixement exacte de llur mesura.[152]

És precisament aquesta argumentació la que el porta aleshores *a reduir* l'exactitud a una *teoria mecànica de la proporció*.

* * *

Tornant, però, al lloc de les tres i les quatre rectes, Descartes s'adona del fet que l'equació que s'obté, en tot cas, és de la forma:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Efectuant aleshores una anàlisi detallada d'aquestes equacions aconsegueix d'establir que *totes elles* corresponen a seccions còniques. El problema clàssic —solament intuït pels matemàtics grecs— queda, doncs, definitivament resolt.

---

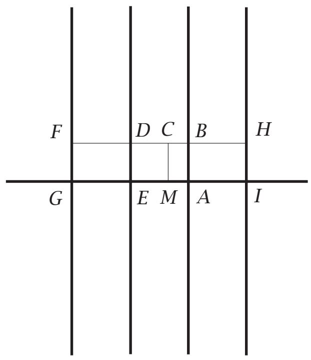
147 AT, **VI**, 389; PLA-VIADER 1998, 41.
148 Vegeu PLA 1987, 833-844; PLA-VIADER 1998, XIX-XXVIII, XLVII-LI, i 43.
149 AT, **VI**, 389; PLA-VIADER 1998, 40. I afegeix: «I això no em sembla pas més complicat».
150 AT, **VI**, 389; PLA-VIADER 1998, 41. En Descartes, «precís» significa expressable per mitjà de polinomis.
151 AT, **VI**, 389; PLA-VIADER 1998, 41.
152 AT, **VI**, 390; PLA-VIADER 1998, 41.

Però, encara podem anar més lluny: tota secció cònica és la solució d'algun problema de tres o quatre rectes? La resposta de Descartes és afirmativa.[153] De fet, doncs, Descartes estableix el teorema següent:

> TEOREMA *El lloc de les tres i les quatre rectes és, en tot cas, una secció cònica i recíprocament.*

Això encoratja Descartes a anar encara més lluny. D'una banda, és possible resoldre el cas «més simple» del lloc de les cinc rectes:

> TEOREMA *Donades quatre rectes paral·leles i equidistants i una cinquena recta perpendicular a les tres, trobar el lloc dels punts tals que el producte de distàncies a tres de les rectes paral·leles sigui igual al producte de la distància comuna entre les rectes paral·leles, del punt a l'altra paral·lela i del punt a la cinquena recta, la perpendicular.*[154]



$CM = x, \quad CB = y, \quad AI = AE = GE = a, \quad CF = 2a - y, \quad CD = a - y, \quad CH = a + y$

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$$

Fent els càlculs, ben elementals,

$$CF \times CD \times CH = CB \times CM \times AI,$$

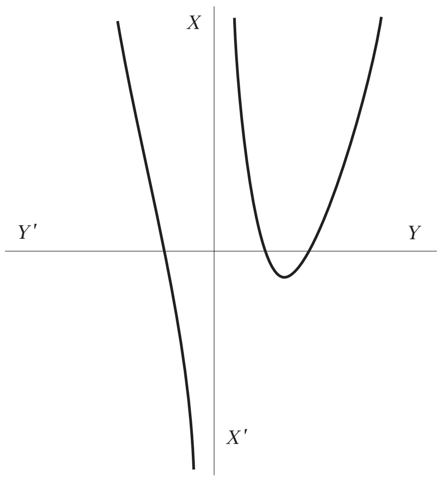
on $CM = x, CB = y, AI = AE = GE = a, CF = 2a - y, CD = a - y, CH = a + y$, s'obté l'equació:

$$y^3 - 2\,a\,y^2 - a^2\,y + 2\,a^3 = a\,x\,y.$$

153 «I, atès que la posició de les rectes pot variar de totes les maneres possibles i, en conseqüència, variaran de totes les maneres possibles les quantitats donades, i els signes + i − de l'equació, és clar que no hi ha cap corba de primer gènere que no sigui útil quan el problema [de Pappos] consta de quatre rectes; [...]». Vegeu AT, **VI**, 397; PLA-VIADER 1998, 52

154 «Si el problema dels antics consta de cinc rectes, totes elles paral·leles, és evident que el punt buscat es troba damunt d'una línia recta. Ara bé, si consta de cinc rectes, quatre de les quals són paral·leles, i la cinquena és perpendicular a totes elles, i a més totes les rectes que surten del punt buscat són perpendiculars a les rectes donades i s'imposa, finalment, que el paral·lelepípede format per tres de les rectes tirades a tres de les rectes paral·leles sigui igual al paral·lelepípede format per les altres dues, l'una tirada sobre la quarta recta paral·lela i l'altra sobre la perpendicular, i per una tercera línia donada, tenim el que em sembla que és el més simple que hom pot imaginar, si exceptuem el cas precedent». Vegeu AT, **VI**, 408; PLA-VIADER 1998, 68–69.

Li correspon una corba geomètrica perquè és expressable polinòmicament. La gràfica d'aquesta corba és la següent:[155]



$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$

Però, i això per Descartes és molt més important encara, és geomètrica perquè és construïble per mitjà d'un giny mecànic que és tan precís com el regle i el compàs. Precisament el que ha descrit amb tota mena de detalls, al començament del llibre segon, després de mostrar el compàs proporcional.[156]

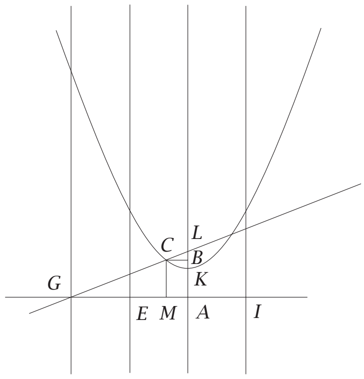
Descartes recorre, doncs, a aquest giny, però aplicant-lo ara a una paràbola.[157] Considera essencialment dues rectes GL i AL. La recta GL pot girar pivotant en el punt G. El punt L es manté sempre damunt la recta AL, que és, al seu torn l'eix de simetria d'una paràbola que té el focus en el punt L.[158]

Per tal de veure que el lloc del cas més senzill de les cinc rectes és una corba que es pot construir amb aquest giny, fa servir una paràbola adequada. És la paràbola d'eix AB, amb vèrtex K, focus L, lligat amb el punt G per la recta GL. El paràmetre és a. Així doncs, $CB^2 = a\,KB$. Aleshores, com podem veure al peu de la figura següent, el càcul és fàcil:

$$B = a - \frac{xy}{2a - y} = \frac{2aa - ay - xy}{2a - y} = ay^2.$$

Per Descartes, l'èxit del *mètode* és tan gran que «totes les corbes geomètriques han de ser la solució d'un problema geomètric».[159] Això, juntament amb l'èxit assolit

155 AT, **VI**, 407–410; PLA-VIADER 1998, 68–70.
156 AT, **VI**, 393–394; PLA-VIADER 1998, 45–76.
En aquesta presentació l'aplica a una recta i obté una hipèrbola. El fa servir per mostrar que hi ha corbes geomètriques —generables amb compassos— de qualsevol gènere. Vegeu PLA-VIADER 1998, 46–50, i en particular les notes 28 a 33.
157 AT, **VI**, 408–410; PLA-VIADER 1998, 68–71.
158 La paràbola llisca damunt el seu eix de simetria, mantenint-se unida pel focus amb el punt G a través de la recta GL.
159 AT, **VI**, 381, i 397; PLA-VIADER 1998, 28–29 i, en particular, la nota 59, i 52–54, notes 41 i 42.



$GA = 2a, \quad CB = MA = y, \quad CM = AB = x, \quad GM = 2a - y, \quad LK = a, \quad BL = xy/(2a - y), \quad BK = a - BL = ay^2$

en el cas de les seccions còniques, el porta a fer una afirmació que Isaac Newton establirà que és falsa:[160]

> *Tota equació polinòmica* $P(x, y) = 0$ *és la solució d'un problema de les* $2n - 2$, $2n$ *rectes per un* n *convenient.*[161]

La validesa d'aquesta afirmació havia de tranquil·litzar, sense cap mena de dubte, l'esperit de Descartes. Tota equació polinòmica correspondria a un lloc geomètric —correspondria a un problema geomètric— i *tindria dret de ciutadania* dins la geometria. Això, no obstant, no és així: hi ha equacions polinòmiques que no poden procedir de cap problema de les $2n - 1$, $2n$ rectes. Malgrat tot, malgrat l'error, Descartes ha aconseguit amb el mètode —amb el canvi de llenguatge associat al mètode— caracteritzar, d'una vegada per totes, la naturalesa de les corbes. Hi ha, doncs, corbes de dues menes. En paraules de Gottfried Wilhelm Leibniz, hi ha *corbes algèbriques* —les que poden ser descrites amb polinomis— i *corbes transcendents* —aquelles l'escriptura de les quals transcendeix l'escriptura algèbrica.[162]

7 Conclusions

Aquests dos exemples —el d'Arquimedes i el de Descartes— han posat de manifest, a bastament, el fet que la introducció d'un mètode comporta la creació d'un llenguatge idoni, *ad hoc*.

En el cas d'Arquimedes, la síntesi s'efectua amb el llenguatge de la teoria de la proporció, basat en una epistemologia arquimediana de les magnituds. L'anàlisi, en canvi, s'efectua amb el llenguatge dels infinitament petits, un llenguatge que respon a una concepció epistemològica de les magnituds completament diferent de l'anterior.

160 Vegeu Newton 1707, i Pla-Viader 1998, 52.
161 AT, **VI**, 397; Pla-Viader 1988, 52–54.
162 Gottfried Wilhelm Leibniz criticà en Descartes el mateix que Descartes havia criticat als geòmetres grecs. L'expulsió de la geometria de les corbes que no són expressables algèbricament. [Vegeu Leibniz 1682, 1684, 1686, 1691, i 1694, a Parmentier 1989, 65–66, 82–83, 133-135, 192–193, i 292–295.]

En el cas de Descartes, en canvi, l'anàlisi [i si volem també la síntesi] es pot fer en el llenguatge de la teoria de les magnituds no assignades numèricament. Però, la síntesi es pot fer molt més còmodament i clarament introduint el llenguatge algèbric dels segments amb una característica numèrica assignada que permet reduir totes les magnituds geomètriques a segments. Aquesta síntesi permet classificar les corbes en *geomètriques* i *mecàniques* i les primeres, a més, segons l'ordre de complexitat. Permet de resoldre gran quantitat de problemes de forma sistemàtica, evitant el recurs excessiu de les imatges. El nou llenguatge s'ha imposat en l'ensenyament actual de la matemàtica per damunt del mètode clàssic de la geometria, després de l'anomenada *aritmetització* de la geometria esdevinguda el segle XIX.

Això no obstant, aquest treball, com s'indicava ja a la introducció, només és l'inici d'un estudi molt més aprofundit. Caldria analitzar amb cura les aportacions dels mètodes de Fermat, de Newton i de Leibniz relatiu al càlcul diferencial i de fluxions i a la representació de les funcions per mitjà de *sèries de potències*. Caldria aprofundir el mètode aritmètic de Fermat i calibrar en quin punt, i sota quines circumstàncies, apareix el canvi de llenguatge. El mètode d'Euler del *càlcul de variacions* està vinculat a un llenguatge nou respecte del llenguatge del càlcul diferencial, un llenguatge que enceta l'*anàlisi funcional*.[163]

Em sembla, però, que he acomplert el compromís que m'havia fixat i que esmentava a la introducció: iniciar aquestes reflexions. A més, he establert que els mètodes d'Arquimedes i Descartes estan íntimament vinculats, respectivament, a un canvi de llenguatge que, en cada cas, és adequat a la naturalesa íntima dels problemes que es volen resoldre. La possibilitat d'estendre aquesta afirmació al cas general queda apuntada per a una altra ocasió.

Barcelona, 30 de maig de 1996

En el quatre-cents aniversari del naixement de Descartes

Referències

[1] ADAM, CH., MILHAUD, G. (editors). *Correspondance* de Descartes, 8 volums, PUF, París, 1936–1963.

[2] ADAM, CH., TANNERY, P. (editors). *Oeuvres* de Descartes, 12 volums i un suplement. L. Cerf, París, 1897–1913. Reeditat per Vrin, París, 1996. Citat com AT.

[3] APOL·LONI *Còniques.* (III a. C.) Vegeu HEATH [1896], o EECKE [1922].

[4] ARISTÒTIL *Obres completes.* (IV a. C.) Vegeu BEKKER [1831–1836].

[5] ARISTÒTIL *Analítics primers.* Gredos. Madrid.

[6] ARISTÒTIL *Analítics posteriors.* Gredos. Madrid.

[7] ARQUIMEDES *Obres completes.* (III a. C.) Vegeu HEATH [1897], edició de 1960; EECKE [1960].

[8] ARQUIMEDES *El mètode.* Vegeu HEATH [1897], edició de 1960, apèndix; EECKE [1960], **II**, 477–519; GONZÁLEZ-VAQUÉ [1993], i [1997]; VEGA [1986].

163 Vegeu l'excel·lent treball de Dou, a DOU 1993.

[9] ARNAU, H., GUTIÉRREZ, J. M. *El Discurs del Mètode. Descartes.* Alhambra-Logman, Madrid, 1988. Reeditat l'any 1992.

[10] BAILLET, A. *La Vie de Monsieur Des-Cartes*, dos volums. 1692. Reimprès en facsímil per Slatkine, Ginebra, 1970.

[11] BECK, J. L. *The Methode of Descartes. A Study of the Regulæ.* Clarendon, Oxford, 1952.

[12] BECKER, O. *Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise.* Verlag Karl Albert GmbH, Munic, 1959. Hi ha una traducció castellana de Miguel de Guzmán, *Magnitudes y límites del pensamiento matemático.* Rialp, Madrid, 1966.

[13] BEKKER, O. (editor). *Aristotelis Opera.* Reimerum, Berlín, 1831–1836. Reimprès a Berlín, 1960–1961.

[14] BELL, E. T. *Men of Mathematics.* Simon & Schuster, Nova York, 1937. Hi ha una traducció francesa d'Ami Gandillon, *Les Grands Mathématiciens*, Payot, París, 1950.

[15] BELLO REGUERA, E. *Discurso del Método. René Descartes.* Editorial Tecnos, Madrid, 1987.

[16] BOS, H. J. M. «On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*». *Arch. Hist. Exact Sci.*, **24** (1981), 295–338.

[17] BOSCH, A. *El Discurs del mètode.* Alhambra, Madrid, 1989.

[18] BOYER, C. B. *A History of Mathematics.* John Wileey & Sons, Nova York, 1968. Hi ha una traducció castellana de Mariano Martínez Pérez, *Historia de la Matemática.* Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[19] BURTON, D. M. *The History of Mathematics. An Introduction.* Allyn & Bacon, Inc., Boston, 1984. Reeditat per MacGraw Hill, Nova York, 1991.

[20] COROMINES, J. *Diccionari etimològic i complementari de la llengua catalana* [D. E. C.]. Barcelona, 19–.

[21] COUSIN, V. *Oeuvres de Descartes*, nou volums. París, 1824.

[22] DESCARTES, R. *Regulæ ad directionem ingenii*, 1628. Amsterdam, 1701. Vegeu AT, **X**, 359–468; NAVARRO CORDÓN [1984], 60–168; i TURRÓ [1998].

[23] DESCARTES, R. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la véritée dans les sciences.* Leiden, 1637. Vegeu AT, **VI**, 1–78; XIRAU [1935]; RODIS-LEWIS [1966b], 29–95; GARCÍA MORENTE [1970], 25–78; GRANADA [1984], 1–61; BELLO REGUERA [1987], 1–104; BOSCH [1989], 18–98; ARNAU-GUTIÉRREZ [1988], edició de 1992; FONT [1996], 71–180.

[24] DESCARTES, R. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la véritée dans les sciences, Plus la Dioptrique, les Méthéors, et Géométrie qui sont des essais de cette méthode.* Leiden, 1637. Vegeu AT, **VI**, 1–485; QUINTÁS [1981], 1–407.

[25] DESCARTES, R. *La Géométrie.* Leiden, 1637. Vegeu AT, **VI**, 367–485; QUINTÁS [1981], 276–407, OLSCAMP [1965]; SMITH-LATHAM [1971], 1–243; ÉDITIONS DE L'AREFPPI [1984], 1–126, 127–145; PLA-VIADER [1998].

[26] DESCARTES, R. *Oeuvres.* Veure ADAM-TANNERY [1897–1913].

[27] DIJKSTERHUIS *Archimedes.* Amsterdam, 1938–1944. Reeditat per Princeton University Press, Princeton, 1987.

[28] Dou, A. *Leonhard Euler. Método de máximos y mínimos.* Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1993.

[29] Éditions de l'AREFPPI *La Géométrie, René Descartes.* Éditions de l'AREFPPI, Nantes, 1984.

[30] Edwards, C. H. Jr. *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag, Nova York, 1979.

[31] Eecke, P. ver *Les Coniques d'Apollonius de Perge.* Traducció al francès, amb una introducció i notes. Anveres, 1922. Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1963.

[32] Eecke, P. ver *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique.* Traducció al francès, amb una introducció i notes. Anveres, 1932. Reeditat en dos volums per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1982.

[33] Eecke, P. ver *Les œuvres complètes d'Arcimède*, dos volums. Traducció al francès, amb una introducció i notes. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1960.

[34] Euclides *Elements.* (iii a. C.) Vegeu Peyrard [1819], reedició de 1966; Heath [1908], edició de 1926; Vera [1970], **I**, 702–980; Vitrac [1990–1994].

[35] Font, P. L. *Discurs del mètode.* Edicions 62, Barcelona, 1996.

[36] García Morente, M. *Discurso del método. Meditaciones metafísicas.* Espasa-Calpe, Madrid, 1970.

[37] González, P. M., Vaqué, J. *Arquímedes. El método relativo a los teoremas mecánicos.* Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1993.

[38] González, P. M., Vaqué, J. *Arquímedes. Métode.* Col·lecció Escriptors grecs. Fundació Bernat Metge, Barcelona, 1997.

[39] Granada, M. Á. *Discurso del método. Tratado de las pasiones.* Planeta. Barcelona, 1984.

[40] Heath, sir Th. *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections, edited in modern notation. . . .* Cambridge University Press, Cambridge, 1896. Reeditat per W. Heffer & Sons, Camdridge, 1961.

[41] Heath, sir Th. *The works of Archimedes. . . .* Cambridge University Press, Cambridge, 1897. Reeditat per Dover Publications, Nova York, 1960.

[42] Heath, sir Th. *The thirteen Books of Euclid's Elements. . . .* Cambridge University Press, Cambridge, 1908. Reeditat per Dover Publications, Nova York, 1956.

[43] Heath, sir Th. *A History of Greek Mathematics.* General Publishing Company, Canadà, 1921. Reeditat, en dos volums, per Dover, Nova York, 1981.

[44] Heath, sir Th. *Mathematics in Aristotle.* Oxford, 1949. Reeditat per Clarendon Press, Oxford, 1970.

[45] Institut d'Estudis Catalans *Diccionari de la llengua catalana.* Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 1995.

[46] Juhel, J.-Ch. «Additif a *La Géométrie* de René Descartes». Vegeu Éditions de l'AREFPPI. Nantes, 1984.

[47] Jullien, V. *Descartes. La Géométrie de 1637.* Presses Universitaires de France, París, 1996.

[48] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, Oxford, 1972. Reeditat en tres volums a Oxford University Press. Oxford, 1990. Hi ha una traducció castellana en tres volums de Mariano Martínez, Juan Tarrés i Alfonso Casal, sota la direcció de Jesús Hernández, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[49] Kline, M. *Mathematics. The loss of certainty.* Oxford University Press, Oxford, 1980. Hi ha una traducció castellana d'Andrés Ruíz Merino, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Siglo XXI editores, Madrid, 1985.

[50] Knorr, W. R. *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Birkhäuser, Boston, 1986. Reeditat per Dover, Nova York, 1993.

[51] Leibniz, G. W. *Articles des Acta Eroditorum*, (1682–· · ·) a Parmentier [1989].

[52] Marías, J. *La filosofía en sus textos.* Editorial Labor, Barcelona, 1963.

[53] Navarro, J. M. *Reglas para la dirección del espíritu.* Alianza Editorial, Madrid, 1994.

[54] Newton, I. *Arithmetica Universalis*, 1707, a Whiteside [1967–1981], **II**, 337–345.

[55] Olscamp, P. J. *Discours on Method, Optics, Geometry, and Metereology.* Bobbs-Merril Co., Nova York, 1965.

[56] Pappos d'Alexandria *La Collection Mathématique.* Vegeu Eecke [1932].

[57] Parmentier, M. *G. W. Leibniz. La naissance du calcul différentiel. 26 articles des «Acta Eroditorum».* Vrin, París, 1989.

[58] Pla, J. «*La Géométrie* com un exemple del *Discours de la méthode* de René Descartes». Simpòsium: «350 anys del *Discours de la Méthode* de Descartes (1637)». *Actes del III Congrés de Llenguatges Naturals i Llenguatges Formals*, **II**, 821–863, 1987.

[59] Pla, J. «La quarta llei del mètode de Descartes». *Actas del II Congreso de Ontología*, Sant Sebastià, 1996. En premsa.

[60] Pla, J. «El mètode cartesià i *La Dioptrique*». En premsa.

[61] Pla, J., Viader, P. *Descartes. La Géométrie.* Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 1998. En premsa.

[62] Quintás, G. *René Descartes. Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría.* Ediciones Alfaguara, Madrid, 1981.

[63] Rabuel, C. *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes.* Marcellin Duplain, Lió, 1730.

[64] Rodis-Lewis, G. *Descartes et le rationalisme.* Presses Universitaires de France, 1966. Reeditat el març de 1989, París.

[65] Rodis-Lewis, G. *Descartes. Discours de la méthode.* GF-Flammarion, París, 1966.

[66] Sales, J. *L'Heur cartesià i la publicació de 1637. (Lliçons del 8, 14 i 15 de gener de 1997).* Apunts de classe. Barcelona, 1997.

[67] Smith, D. E., Latham, M. L. *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition.* Open Court Publishing Co., Nova York, 1925. Reeditat per Dover Publications, Nova York, 1954.

[68] Stevin, S. *Traicté des incommensurables grandeurs, avec un Appendice de l'explication du dixième livre d'Euclide.* Leyden, 1634.

[69] TANNERY, P., HENRY, CH. (editors). *Oeuvres de Fermat*. 4 volums. París, 1891–1912. *Supplément* (editor C. de Waard). París.

[70] THOMAS, I. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, 2 volums. Loeb, Harvard University Press, Cambridge, 1939–1941.

[71] TURRÓ, S. *Regles clares i útils per a la direcció de l'enginy en la recerca de la veritat*. Edicions 62, Barcelona, 1998. En premsa.

[72] VEGA, L. *Arquímedes. El Método*. Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[73] VERA, F. *Científicos griegos*, dos volums. Aguilar, Madrid, 1970.

[74] VITRAC, B. *Euclide. Les Éléments*, 2 volums. Presses Universitaires de France, París, 1990–1994.

[75] WAERDEN, B. L. VAN DER *Science Awakening*. Oxford University Press, Nova York, 1961.

[76] WHITESIDE, D. T. (editor). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, en 8 volums. Cambridge University Press, Cambridge, 1967–1981.

[77] XIRAU, J. *R. Descartes, Discurs del mètode. Per a ben conduir la raó i encercar la veritat a les ciències*. Col·lecció Popular Barcina LII. Editorial Barcino, Barcelona, 1929.

DEPARTAMENT DE LÒGICA, HISTÒRIA I FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
pla@cerber.mat.ub.es