Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 19, núm. 1, 2004. Pàg. 25–52

El teorema de Stokes a $\mathbb{R}^n$*

Josep M. Burgués

Resum

Hom fa una revisió de la teoria d'integració de formes diferencials i en particular del seu teorema principal: el teorema de Stokes, des de les versions més clàssiques fins a les idees més modernes al voltant del tema, fent atenció a alguns resultats particularment útils i remarcables.

1 Introducció

El teorema de Stokes, tal com gairebé tots els matemàtics el recorden, consisteix en una fórmula senzilla que relaciona objectes força abstractes, de significat obscur i formulació feixuga.

Això fa que sigui força més corrent l'ús de versions especialitzades del teorema (fórmula de Green, integració per parts a regions del pla o de l'espai) no només en matemàtiques sinó també en altres camps de la ciència i de la tècnica, de vegades amb terminologia i notació pròpies.

Juntament amb el lema de Poincaré, el teorema de Stokes és el resultat més important de l'anàlisi vectorial, continuació natural de l'àlgebra lineal i el càlcul en diverses variables i gairebé tan bàsica i general com aquests. D'això se'n deriva el seu caràcter abstracte, però també l'enorme varietat d'aplicacions. Ha experimentat diversos processos d'unificació, concentració i generalització, que són la causa del caràcter àrid i obscur de la seva formulació. A més, és una de les teories més genuïnament multidimensional, amb la complexitat combinatòria típicament inherent a aquestes.

* Aquest article va ser lliurat per a publicar-lo en el Butlletí de la SCM el novembre de 2003.

Però és justament en les aplicacions on sorgeixen (contràriament al que hauria de succeir) els problemes més importants i a la vegada més inquietants: la versió més corrent en els llibres de text habituals fa referència a enunciats molt restrictius (formes C^∞, dominis acotats amb vora regular C^1 de varietats diferenciables) o bé a objectes de tractament difícil (per exemple, de quina 2-cadena és vora[1] la corba de la figura 1?).

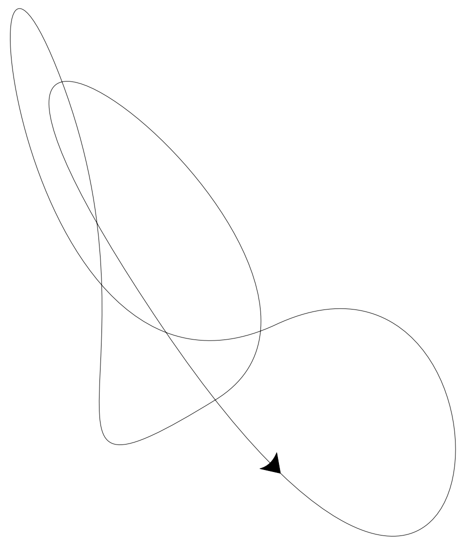

FIGURA 1: La corba és la imatge d'una 1-cadena c donada. Cal trobar una 2-cadena de la qual c sigui la vora i donar-ne descripcions paramètriques.

D'altra banda, sovint cal aplicar el teorema en situacions completament diferents: els objectes que cal integrar no són regulars en tots els punts o bé no ho són els dominis on cal integrar, o ambdues coses.

Des de l'actitud més honesta (matemàticament parlant) hom tracta *in situ* cada situació particular mitjançant aproximacions, estimacions quantitatives o bé consideracions de tipus geomètric o físic.

Romanen, però, unes quantes qüestions prou importants que fan d'aquest un tema viu amb problemes oberts:

1. Hi ha condicions més generals en les quals val una fórmula del tipus de Stokes?
2. És aquesta fórmula la «part visible» en el cas clàssic d'una fórmula que val per a objectes més generals?

1 Sovint el problema és de tipus epistemològic: només cal veure que una cadena com aquesta existeix (aquest és, però, un fet crucial!). Després aquesta cadena ja no s'empra més.

3. És la fórmula en qüestió el resultat d'una teoria més general que dóna altres fórmules en altres situacions?

I encara una altra qüestió (que tractarem de passada): en quins casos són equivalents (es dedueixen l'un de l'altre) el teorema de Stokes per a formes i els teoremes del tipus Stokes clàssic o divergència (per a camps vectorials)?

El propòsit d'aquestes notes és el de donar una visió de l'estat actual del tema a partir d'aquestes qüestions. No pretenem pas fer-ne un *survey*, ni tampoc, una aproximació històrica, sinó més aviat un repàs dels aspectes més remarcables, sobretot pel que fa a les contribucions més modernes, i amb una certa pretensió utilitària. Per aquest motiu emprarem en tot moment la terminologia i notació actuals, fins i tot en els teoremes anomenats *clàssics*. D'altra banda, el caràcter general és expositiu, i tant els desenvolupaments més tècnics (matemàticament parlant) com les demostracions són sistemàticament evitats i substituïts per comentaris i explicacions verbals.

La tria de la bibliografia només obeeix a la línia d'exposició mateixa. Ha estat feta seguint un criteri personal i està lluny, fins i tot en les intencions, d'ésser un inventari.

2 Els teoremes clàssics

El primer resultat que s'anomenà *teorema de Stokes*, i que enunciarem tot seguit, procedeix fonamentalment de la teoria de camps, més concretament, de l'estudi de l'electromagnetisme. (Vegeu [7].[2])

1 Teorema (Teorema de Stokes) *Si tenim una superfície llisa, relativament compacta i orientada,*[3] $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$*, amb forma (element)*[4] *d'àrea* σ *i vector normal* η*, limitada per una corba* $\gamma = \partial\Sigma$*, recorreguda de manera coherent amb l'orientació de* Σ*, i un camp* X *sense singularitats a un entorn de* Σ*, llavors*

$$\int_\Sigma (\operatorname{rot} X, \eta)\sigma = \int_\gamma X\,.$$

Donat un camp Y el terme (Y, η) mesura la densitat de flux d'energia per unitat de temps que travessa la superfície Σ, per l'acció d'aquest. Si X és un camp regular, $\operatorname{rot} X$ és un altre camp que conté informació sobre la variació de

2 En l'exposició de Maxwell hom pot veure que els noms més directament associats a aquest enunciat són els de Thomson, Tait, Green, etc.

3 *Orientació*: és una propietat *global* d'una varietat topològica que fa referència al fet que el grup d'homologia d'ordre màxim sigui $\mathbb{Z}$. En cas que la varietat sigui diferenciable això és equivalent a la possibilitat de triar un atles (o una parametrització local) tal que els canvis de carta tinguin determinant positiu. Aquest fet permet donar una definició del volum mitjançant una forma diferencial global.

4 *Forma o element d'àrea*: si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ és una hipersuperfície regular i $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ és una elecció regular del vector normal en la mateixa, l'element d'àrea és la contracció de l'element de volum de $\mathbb{R}^n$ amb η. La idea de base és que si el gruix d'una làmina plana és 1, l'àrea i el volum d'aquesta coincideixen numèricament.

X d'un punt de l'espai a un altre de proper. El terme $\int_\gamma X$ mesura la circulació d'energia al llarg de γ (l'energia que cal per desplaçar una partícula test[5] al llarg de γ per l'acció del camp).

Així podem reformular aquest teorema com un principi de conservació de l'energia: el desequilibri en la uniformitat de distribució del flux energètic produït per la variació de X, ($\operatorname{rot} X = \nabla \times X$) en diversos punts de la superfície Σ es compensa amb una circulació d'energia al llarg de la corba que limita Σ.

Cal notar, però, que aquest és un fet molt particular de $\mathbb{R}^3$ (sobretot pel que fa al camp rotacional).

A $\mathbb{R}^n$, si $n > 1$, hi ha un altra manera de mesurar la variació en l'espai d'un camp X: la funció $\operatorname{div} X$. I associat a l'operador «div», hi ha un altre resultat:

2 Teorema (Teorema de la divergència) *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és una regió acotada amb $\partial\Omega \in C^1$, amb vector normal (exterior) η i forma d'àrea σ, i X és un camp no singular en un entorn de $\bar{\Omega}$, tenim*

$$\int_{\partial\Omega} (X, \eta)\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} X \, \mathrm{d}m \, .$$

Aquest és un teorema amb el mateix esperit que el de Stokes: la variació d'un camp dins d'una regió (els desequilibris en la seva distribució dins de la regió) es compensa exactament amb una variació del flux a través de la varietat (interfície) que limita la regió.

Cal remarcar que la mesura de la variació del camp X, $\operatorname{div} X$, dins de Ω es pot identificar amb la densitat d'elements (càrregues) que creen el camp. En aquest sentit el corol·lari següent és molt il·luminador:

3 Teorema (Teorema de Gauss) *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una regió acotada amb frontera $\partial\Omega \in C^1$, amb vector normal (exterior) η i forma d'àrea σ.*

Siguin $P_1, \ldots, P_k \in \Omega$ i $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i

$$X(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\|x - P_j\|^2} \frac{x - P_j}{\|x - P_j\|} \, .$$

Llavors,

$$\Phi(X, \partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} (X, \eta)\sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^{k} q_j \, .$$

Aquest és un resultat en l'esperit dels dos teoremes anteriors. La diferència més notable, però, resideix en el fet que ara tenim un camp (elèctric, creat per les càrregues de valor q_i i situades en els punts P_i) que és singular a Ω, i el seu flux a través de la interfície és la suma dels «residus» de X en els punts singulars.[6]

5 Amb els paràmetres essencials fixats d'antuvi. Generalment unitària respecte al sistema d'unitats que hom faci servir.

6 *Residu*: en el context d'aquestes notes fa referència a un objecte (generalment una quantitat numèrica) que hom associa a una singularitat (d'un camp o forma). Es tracta d'una idea profunda

3 Formes i cadenes

Els principals problemes relacionats amb els camps vectorials, com ara l'existència de funció potencial per a un camp X donat, és a dir, d'una funció V tal que $\nabla V = X$, condueixen a l'estudi d'objectes més generals:

Si $X = (X_1, \ldots, X_n)$, la condició necessària per a l'existència d'una funció potencial per a X és la família d'identitats

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0\,, \qquad \forall\ i < j\,.$$

En total hi ha $\frac{n(n-1)}{2}$ equacions, que només poden organitzar-se com un camp si $n = 3$ (el camp $\operatorname{rot} X$).

Una característica important d'aquest sistema és l'antisimetria de les fórmules.[7] Aquesta antisimetria és també una característica dels operadors bàsics associats als camps (el rotacional, en el cas de $\mathbb{R}^3$).

Altres problemes fan referència a famílies de camps (distribucions, en el sentit geomètric), i en aplicar-los operadors diferencials apareixen objectes més complexos, de l'estil del sistema que hem comentat. Els conceptes que engloben tant els camps com les distribucions de camps i els objectes resultants d'aplicar-los els operadors diferencials bàsics, són, donada la multilinealitat que presenten, els de tensor i camp tensorial.

Si, a més, tenim en compte la propietat d'antisimetria, tenim les formes diferencials que essencialment són objectes que mesuren en cada punt el volum (i en determinen la orientació) dels k-paral·lelepípedes generats per distribucions de k-camps. I també tenim la diferencial exterior que unifica en un sol operador els operadors clàssics (divergència i rotacional), i que mesura la variació d'una forma en les direccions en què aquesta no mesura volum.

Aquestes propietats fan de les formes els objectes naturals pels quals es poden generalitzar els teoremes de la secció 1.

En aquest sentit tenim la versió estàndard del teorema de Stokes en diferents contextos:

4 Teorema (Teorema de Stokes a $\mathbb{R}^n$) *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és una regió acotada amb $\partial\Omega \in C^1$ i ω és una $(n-1)$-forma amb coeficients C^1 a un entorn de $\bar{\Omega}$, tenim*

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega\,.$$

i,

---

consistent *grosso modo* a pensar que, donat un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ i una certa classe d'objectes (camps, formes, etc.) amb singularitats a S, hi ha uns quants elements bàsics d'aquesta classe, de manera que qualsevol altre és combinació finita d'aquests. Els residus en són els coeficients. En el cas que ens ocupa, aquests elements bàsics tenen un significat topològic cabdal: generen la cohomologa del complementari del conjunt S.

7 Que es posa de manifest en el cas inhomogeni, és a dir, quan per a alguns i, j donats, els termes de la dreta no són 0.

5 TEOREMA (TEOREMA DE STOKES A SUBVARIETATS DE $\mathbb{R}^n$) *Si tenim una subvarietat orientable i regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, de dimensió k i amb vora regular $\partial\Sigma$, i ω és una $k-1$-forma C^1 a un entorn de $\bar{\Sigma}$, llavors*

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega\,.$$

Un detall important és que el càlcul explícit de les integrals que involucren subvarietats S ($= \partial\Omega$, Σ, $\partial\Sigma$) es realitza mitjançant parametritzacions adequades, és a dir aplicacions injectives $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, de rang màxim i on $U \subset \mathbb{R}^{\dim S}$ i $\Phi(U) = S$. Llavors,

$$\int_S \omega = \int_U \Phi^*(\omega)\,.$$

Això dóna lloc a una nova generalització: té sentit integrar formes diferencials sobre imatges de cubs k-dimensionals per aplicacions diferenciables, i, fent un pas més, sobre combinacions formals d'aquestes amb coeficients a $\mathbb{Z}$. Així pren sentit la idea de recórrer un cert objecte geomètric un nombre sencer de vegades i inclou la teoria de la integració sobre camins.

El $\mathbb{Z}$-mòdul generat pels cubs k-dimensionals amb imatge en una certa regió Ω de $\mathbb{R}^n$, o fins i tot, en una varietat diferenciable M, equipat d'unes certes relacions, s'anomena la *família de les k-cadenes sobre* Ω. Les relacions a què ens referim inclouen essencialment les cancel·lacions degudes al fet de recórrer una certa zona de Ω diverses vegades i amb signes (sentits) diferents. La k-cadena 0 és un objecte formal necessari des del punt de vista estructural per expressar aquestes cancel·lacions.

Com que la vora del cub estàndard $Q_k = [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$, que anomenarem ∂Q_k, està ben definida de manera natural, podem estendre el concepte a una k-cadena $c = \sum' \alpha_j c_j$, on $c_j = \Phi_j(Q_k)$:

$$\partial c = \textstyle\sum' \alpha_j \Phi_j(\partial Q_k)\,,$$

es dóna lloc, així, a una nova relació en el sentit dels teoremes anteriors.

6 TEOREMA (TEOREMA DE STOKES PER A CADENES) *Si M és una varietat diferenciable, ω és una $(k-1)$-forma C^1 a M, i c una k-cadena C^1 a M, tenim*

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega\,.$$

Cal fer notar que tenim un *teorema de Stokes per a cubs* com a conseqüència del teorema de Fubini i de la regla de Barrow.

El teorema per a cadenes és força general. De fet, no cal cap regularitat en l'objecte geomètric recobert per la imatge d'una cadena, sinó només en les aplicacions que la defineixen. D'aquesta manera s'aconsegueix un resultat aplicable a una varietat molt gran de situacions força generals.

4 Dualitat

Des d'un punt de vista categorial, podem pensar la situació com un cas de dualitat: la integral proporciona una relació de dualitat entre formes d'un cert grau k i cadenes de dimensió k. La *diferencial exterior*, com a morfisme entre espais de formes, dualitza a nivell de cadenes, i dóna lloc al morfisme *vora*. El teorema de Stokes és, senzillament, l'expressió d'aquesta relació de dualitat.

Concretem més aquestes idees:

Si $U \subset \mathbb{R}^n$, considerem, per a cada $0 \leq k \leq n$ l'espai $\Lambda^k C^\infty(U)$, amb la família de seminormes

$$\|\omega\|_{s,K} = \sup \left\{ \sum_{|I|=k} |D^\alpha \omega_I(x)| : \ x \in K, |\alpha| \leq s \right\}$$

si $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I \mathrm{d}x_I$, $K \subset U$, compacte, i $s \in \mathbb{N}$.

Considerem $\Upsilon_k(U)$ l'espai de les cadenes C^1 i k-dimensionals amb imatge a U, ara amb coeficients a $\mathbb{R}$, i amb la norma

$$\|c\| = \inf \left\{ \sum{}' |\alpha_j| \|c_j\|_{C^1([0,1]^k)}, \text{ si } \ c = \sum{}' \alpha_j c_j \right\} ,$$

que mesura el «pes» d'una cadena o d'un cub.

La teoria desenvolupada en els apartats anteriors es pot concretar en un aparellament natural:

$$\begin{array}{rccl} \int : & \Lambda^k C^\infty(U) \times \Upsilon_k(U) & \to & \mathbb{R} \\ & (\omega, c) & \mapsto & \langle \omega, c \rangle = \int_c \omega \end{array}$$

bilineal i que satisfà

$$\begin{aligned} \left| \int_c \omega \right| &\leq \|\omega\|_{0,c([0,1]^k)} \max \left\{ \| \det \mathcal{M}_k(J\Phi) \|_{C([0,1]^k)} : \ \forall \mathcal{M}_k(J\Phi) \right\} \leq \\ &\leq C(n,k) \|\omega\|_{0,c([0,1]^k)} \|c\|_{\Upsilon_k(U)} , \end{aligned}$$

on $\mathcal{M}_k(A)$ denota un menor d'ordre k d'una matriu A, i $C(n,k)$ vol dir una constant que només depèn de la dimensió de l'ambient i del grau de la forma (o dimensió de la cadena). Aquesta desigualtat és l'expressió quantitativa del fet que l'aparellament $\langle \ , \ \rangle$ és una forma bilineal contínua respecte a aquestes normes.

Geomètricament aquest aparellament indueix una relació d'equivalència entre cadenes:

Si $c,\ c' \in \Upsilon_k(U)$, direm que $c \sim c'$ exactament quan per a tota $\omega \in \Lambda^k C^\infty(U)$,

$$\int_c \omega = \int_{c'} \omega$$

i anomenem

$$\Xi_k(U)$$

l'espai quocient de $\Upsilon_k(U)$ per aquesta relació d'equivalència, equipat amb la norma quocient.

L'operador diferencial exterior

$$\mathrm{d} : \Lambda^k C^\infty(U) \to \Lambda^{k+1} C^\infty(U)$$

és lineal i continu: si $K, L \subset U$ són compactes i $K \subset \overset{\circ}{L}$,

$$\|\mathrm{d}\omega\|_{l,K} \le C(n,k)\|\omega\|_{l+1,L}\,,$$

i el teorema de Stokes (teorema 6) té com a conseqüència:

7 Proposició *L'operador*

$$\partial : \Xi_{k+1}(U) \to \Xi_k(U)$$

dualitza l'operador d, per la relació dual entre cadenes i formes:

$$\langle \mathrm{d}\omega, c\rangle = \langle \omega, \partial c\rangle\,.$$

A més, tenim

$$\|\partial c\|_{\Xi_k(U)} \le C(n,k)\|c\|_{\Xi_{k+1}(U)}\,.$$

Aquesta relació de dualitat, considerada en diferents espais de formes i cadenes, permet estendre el teorema de Stokes a situacions més generals. Això dóna lloc a teories d'integració que admeten generalitzacions tant dels conceptes de circulació i flux, com de les relacions (igualtats i desigualtats) isoperimètriques. A continuació donem les idees bàsiques d'un d'aquests desenvolupaments.

4.1 Cadenoles (chainlets)

L'esquema anterior, on les cadenes són essencialment deformacions diferenciables de cubs, s'adapta força bé a la integració en subvarietats. El que presentem a continuació, degut a J. Harrison (vegeu [5]) i basat en les idees de H. Whitney (vegeu [14]), permet tractar subconjunts de $\mathbb{R}^n$ més generals.

En la definició del corresponent concepte d'integral que estableix la relació de dualitat entre formes i cadenes hi tenen un paper fonamental les cancel·lacions degudes essencialment a cicles i al fet de «recórrer» objectes propers en sentits oposats. La teoria obtinguda és, en alguns aspectes, similar a una integral impròpia en el sentit de Riemann.

En comptes del cub unitari, partirem ara del símplex bàsic[8] a $\mathbb{R}^k$:

$$s_k = \left\{ (t_1, \ldots, t_k) \mid 0 \le t_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{k} t_i \le 1 \right\},$$

amb l'orientació estàndard.

8 La formulació en termes de símplex i en termes de cubs és equivalent. La primera està més lligada a la idea general de triangulació (a $\mathbb{R}^2$), i és força més útil per a alguns propòsits.

Un *k-símplex* a $\mathbb{R}^n$ és la imatge de s_k per una *aplicació afí* de $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^n$,

$$c = \phi(s_k)\,,$$

i una *cadena simplicial* és una suma formal de símplexs amb coeficients reals

$$c = \sum{}' \alpha_i c_i\,, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}\,.$$

Denotarem per a $S_k(U)$ el conjunt de k-cadenes simplicials amb la norma, anomenada *massa*

$$M(c) = \sum |\alpha_i|\; m_k(c_i) = \sum |\alpha_i|\,|\det(\phi \circ \phi^t)|^{\frac{1}{2}}\; m_k(s_k)\,.$$

Pel que fa a les *cancel·lacions*, un fet crucial és que les translacions *no són contínues* amb aquesta norma. De fet tenim,

$$M(c - T_{\epsilon e} c) = \begin{cases} 2M(c) & \text{si } \epsilon \neq 0 \\ 0 & \text{si } \epsilon = 0 \end{cases}\,,$$

on T_v és la translació donada pel vector $v \in \mathbb{R}^n$. (En aquest cas $v = \epsilon e$.)

El conjunt quocient per la relació d'equivalència esmentada en l'apartat anterior, amb la norma quocient:

$$M(\bar{c}) = \inf\{M(c') : \; c' \in \bar{c}\}\,,$$

que denotarem per $\mathcal{P}_k(U)$ s'anomena l'*espai de les cadenes polièdriques*.

Llavors les *translacions són contínues a* $\mathcal{P}_n(U)$, però no a $\mathcal{P}_k(U)$, si $k < n$, tal com mostra l'exemple següent:

1 Exemple *Si*

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (t_1, t_2) & \mapsto & (t_1, t_2, 0) \end{array}$$

i $c = \phi(s_2)$*, llavors per a* $e_3 = (0,0,1)$*,*

$$M(c - T_{\epsilon e_3} c) = \begin{cases} 2M(c) & \textit{si } \epsilon \neq 0 \\ 0 & \textit{si } \epsilon = 0 \end{cases}\,.$$

Una manera de resoldre aquest problema consisteix a definir una nova norma a $\mathcal{P}_k(U)$, basada en els conceptes següents:

8 Definició *Un* 0-dipol simple *k-dimensional consisteix en un k-símplex de diàmetre*[9] *més petit o igual que* 1*.*

9 Es tracta d'una normalització. En realitat n'hi ha prou amb considerar els símplexs amb diàmetre uniformement acotat.

Un 1-dipol simple *k-dimensional consisteix en la cadena formada per un 0-dipol simple k-dimensional menys la seva translació per un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| \leq 1$:*

$$c - T_v c\,.$$

Un j-dipol simple *k-dimensional consisteix en la cadena del tipus*

$$c - T_{v_j} c,$$

on c és un $(j-1)$-dipol simple k-dimensional i $v_j \in \mathbb{R}^n$ és tal que $\|v_j\| \leq 1$.

Un j-dipol *k-dimensional és una cadena de j-dipols simples:*

$$D^j = \textstyle\sum' \alpha_l c_l\,.$$

Així, doncs, un j-dipol consisteix a restar a un $(j-1)$-dipol un traslladat seu a una distància menor que 1. Per tal d'il·lustrar aquestes definicions fixem-nos en l'exemple de la figura 2.

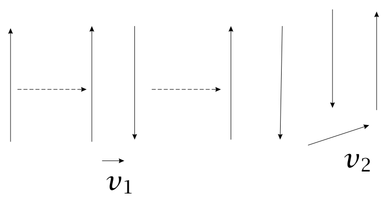

FIGURA 2

I definim una norma.

9 DEFINICIÓ (MASSA DIPOLAR) *Si c és un j-dipol simple k-dimensional generat per un k- símplex c_0 i vectors $v_1, \ldots, v_j$ amb $\|v_i\| \leq 1$, definim*

$$M_j(c) = m_k(c_0)\|v_1\| \cdots \|v_j\|\,.$$

Si $D^j = \sum' \alpha_l c_l$ és un j-dipol k-dimensional,

$$M_j(D^j) = \textstyle\sum' |\alpha_l| M_j(c_l)\,.$$

La massa del dipol es fa petita quan els elements que el componen són propers. Això és una manera de tenir en compte cancel·lacions.

Estructuralment, el fet decisiu és que per a cada cadena polièdrica tenim una descomposició dipolar a la qual podem associar unes normes que *fan contínues les translacions*, i així tenim en compte les *cancel·lacions*.

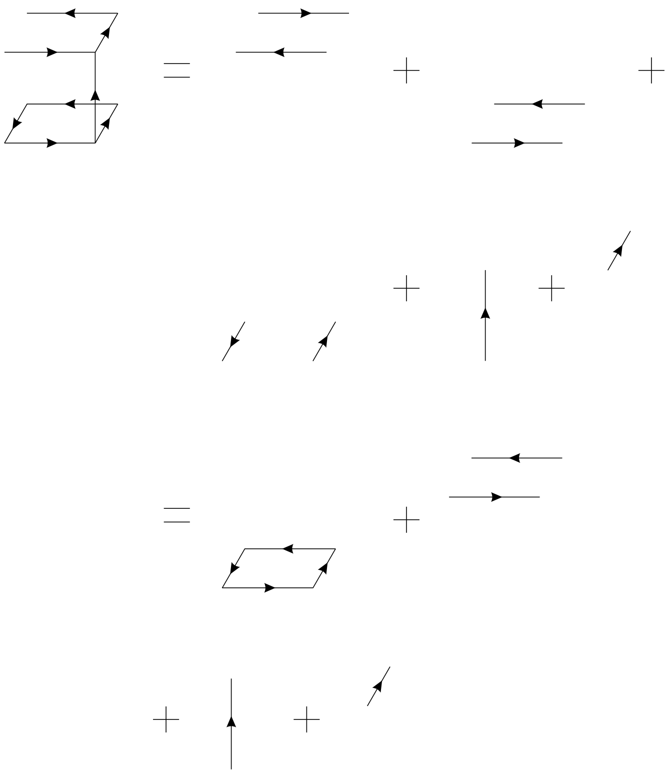

FIGURA 3: Dues descomposicions dipolars diferents d'una mateixa cadena.

10 PROPOSICIÓ *Qualsevol cadena polièdrica* $c \in \mathcal{P}_k(U)$ *admet una descomposició de la forma*

$$c = \sum_{j=0}^{l} D^j + \partial c' ,$$

on cada D^j *és un* j*-dipol* k*-dimensional i* $c' \in \mathcal{P}_{k+1}(U)$*.*

que fa natural la definició:

11 DEFINICIÓ (NORMES DIPOLARS) *Si* $c \in \mathcal{P}_k(U)$ *i* $r \in \mathbb{N}$*, definim*

$$\|c\|_0 = M(c) ,$$

i

$$\|c\|_r = \inf\left\{ \sum_{j=0}^{r} M_j(D^j) + \|c'\|_{r-1} : \ c = \sum_{j=0}^{l} D^j + \partial c' \right\}$$

si $r > 0$*.*

El teorema següent conté els fets més importants relacionats amb aquestes normes. Recordem només que si $s \in (0,1]$, $C^{k,s}(U)$ és el subspai de $C^k(U)$ de les funcions que tenen les derivades d'ordre k a $\mathrm{Lip}_s(U)$.[10]

12 TEOREMA *Sigui $c \in \mathcal{P}_k(U)$*

1. *Si $r \le r'$ llavors $\|c\|_{r'} \le \|c\|_r$.*
2. *Si $\omega \in \Lambda^k C^{r-1,1}(U)$,*
$$\left|\int_c \omega\right| \le \|\omega\|_{C^{r-1,1}} \|c\|_r \,.$$

13 COROL·LARI *Per a tot $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\|\ \|_r$ és una norma a $\mathcal{P}_k(U)$, i si definim l'espai de cadenoles*
$$\mathcal{A}_k^r(U)$$
com l'espai de Banach resultant de completar $\mathcal{P}_k(U)$ amb aquesta norma, tenim per a $r \le r'$, $\mathcal{A}_k^r(U) \subset \mathcal{A}_k^{r'}(U)$, amb inclusió contínua.[11]

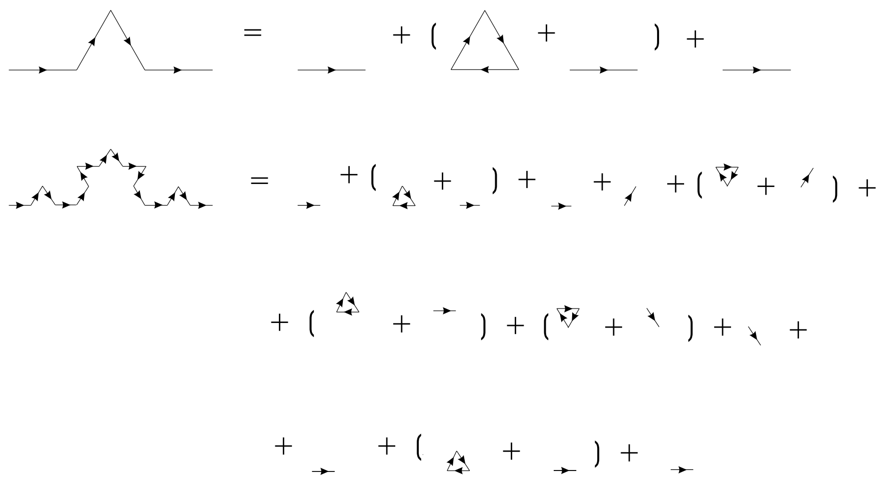

FIGURA 4.1: Descomposició dipolar de les dues primeres poligonals que aproximen la corba de Von Koch (*snowflake*).

2 EXEMPLE (EL FLOC DE NEU (SNOWFLAKE)) *Els espais $\mathcal{A}_k^r(U)$ contenen objectes més i més patològics a mesura que r augmenta. Un exemple és la corba de Von Koch, anomenada també* floc de neu, *generada per un procés iteratiu donat*

10 L'espai de les funcions tals que la diferència de valors entre dos punts és uniformement de l'ordre de la potència s de la distància entre aquests punts.
11 També hi ha una definició per a r no sencer, amb idèntiques propietats.

per un grup finitament generat de moviments i dilatacions en l'espai que actuen sobre una figura bàsica. En aquest cas la figura bàsica és un triangle equilàter. La figura 4.1 dóna una idea de com funciona el procés iteratiu sobre un dels costats i d'una descomposició dipolar del conjunt.

*L'objecte límit l'anomenem S (*snowflake*).*

Si en comptes d'aquest procés considerem el de la figura 4.2, començant per un segment S_0 i afegint-hi cicles (triangles) ∂T_k^j, tenim, anomenant S_k a la k-èsima aproximació de S,

$$S_k = S_{k-1} + \partial T_k^1 + \cdots + \partial T_k^{4^{k-1}} = S_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{4^{k-1}} \partial T_i^j ,$$

ja que cada segment en un pas en produeix quatre en el següent, i així el nombre de triangles va augmentant, i tenim

$$\|S_k\|_1 \leq \|S_0\|_0 + \sum_{i,j} \|T_i^j\|_0 = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \frac{1}{3} \frac{1}{2} \right)^i 4^{i-1} ,$$

i, per tant, $S \in \mathcal{A}_1^1(\mathbb{R}^n)$.

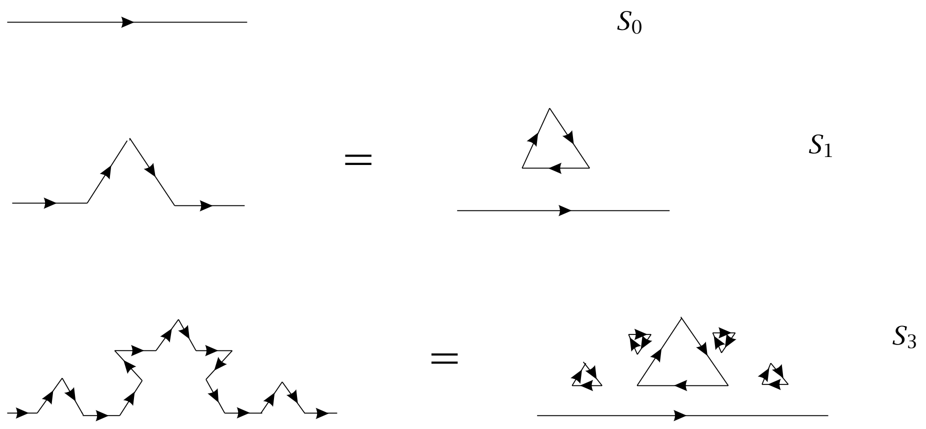

FIGURA 4.2: *Descomposició en cicles de l'*snowflake.

Els operadors habituals de l'anàlisi vectorial, s'estenen a aquests completats, i donen lloc a operadors continus. Des del punt de vista que ens ocupa, els més importants són:

a) *L'operador vora*: definit de manera estàndard en el cas d'un símplex, s'estén de manera natural a les cadenes polièdriques, i dóna lloc a un morfisme

$$\partial : \mathcal{P}_k(U) \to \mathcal{P}_{k-1}(U)$$

que satisfà:

14 Lema *Si $c \in \mathcal{P}_k(U)$,*

$$\|\partial c\|_{r+1} \leq \|c\|_r \,.$$

i llavors

15 Corol·lari *∂ té una extensió lineal i contínua:*

$$\partial : \mathcal{A}_k^r(U) \to \mathcal{A}_{k-1}^{r+1}(U) \,.$$

amb la qual tenim el teorema.

16 Corol·lari (Teorema de Stokes per a cadenoles)
Si $c \in \mathcal{A}_k^r(U)$ i $\omega \in \Lambda^{k-1}C^r(U)$,

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega \,.$$

1 Nota *Observem que això implica que hi ha un teorema de Stokes per a l'*snowflake.

b) *L'operador $*$ de Hodge*: està associat a l'estructura euclidiana[12] de $\mathbb{R}^n$, i essencialment converteix objectes (cadenes) posats a $\mathbb{R}^n$ en altres objectes ortogonals i de la mateixa mida. Més concretament, en el cas d'un k-símplex σ, consisteix en un límit (independent de la norma en aquest cas) de cadenes polièdriques formades per $(n-k)$-símplexs amb vèrtexs situats en un nombre finit de punts de σ distribuïts uniformement, i de manera que la suma de les $(n-k)$-àrees d'aquests és igual a la k-àrea de σ.

Tenim

$$* : \mathcal{P}_k(U) \to \mathcal{A}_{n-k}(U) \,.$$

17 Lema *Si $c \in \mathcal{P}_k(U)$,*

$$\| * c\|_r \leq \|c\|_r \,.$$

i llavors

18 Lema *$*$ té una extensió lineal i contínua:*

$$* : \mathcal{A}_k^r(U) \to \mathcal{A}_{n-k}^r(U) \,.$$

i arribem a:

19 Teorema (Teorema de dualitat de tipus Hodge per a cadenoles)
Si $c \in \mathcal{A}_k^r(U)$ i $\omega \in \Lambda^{k-1}C^r(U)$,

$$\int_c * \omega = \int_{*c} \omega \,.$$

12 Aquest operador representa una reformulació i generalització natural, per a les formes, del producte vectorial.

Donat que, mitjançant les identificacions entre camps i formes:

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{X}^r(U) & \to & \Lambda^1 C^\infty(U) \\ X & \mapsto & \omega_X = \sum_{j=1}^n X_j \, dx_j \end{array}$$

i

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{X}^r(U) & \to & \Lambda^{n-1} C^\infty(U) \\ X & \mapsto & \omega^X = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} X_j \, \widehat{dx_j}, \end{array}$$

hom obté formes que satisfan

$$\omega^{\operatorname{rot} X} = d\omega_X \text{ si } n = 3$$

i

$$(\operatorname{div} X)\, dx = d\omega^X \quad \text{en general},$$

amb les relacions

$$\omega^X = *\omega_X ,$$

i, per tant,

$$\omega^{\operatorname{rot} X} = *d\omega_X$$

i

$$(\operatorname{div} X)\, dx = d * \omega_X ,$$

llavors tenim:

20 Teorema (Teorema de Stokes clàssic per a cadenoles)
Si $c \in \mathcal{A}_k^r(U)$ i $\omega \in \Lambda^{k-1} C^r(U)$,

$$\int_c \omega^{\operatorname{rot} X} = \int_{\partial * c} \omega_X .$$

21 Teorema (Teorema de la divergència per a cadenoles)
Si $c \in \mathcal{A}_k^r(U)$ i $\omega \in \Lambda^{k-1} C^r(U)$,

$$\int_c (\operatorname{div} X)\, dx = \int_{*\partial c} \omega_X .$$

5 Subvarietats topològiques $\mathbb{R}^n$

La generalitat que permeten les cadenes i cadenoles té com a contrapartida el seu caràcter abstracte, que fa que calgui tractar moltes situacions mitjançant passos al límit d'aproximacions polièdriques. Sovint és força més convenient disposar de nocions de tipus més intrínsec de la integració sobre una subvarietat topològica de $\mathbb{R}^n$ o sobre la seva frontera.

Cal remarcar, en aquest sentit, el contraexemple següent de Whitney que fa palès el fet que això no és possible en general (vegeu [15]):

2 Nota *Considerem el tancat de* $\mathbb{R}^n$

$$T_1 = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4\,,$$

on Q_j *són els cubs mitjans de la figura 5, i* L_j *els segments que uneixen el cub* Q_j *amb l'anterior (vegeu la figura 5).*

Sigui T_j *el resultat de contreure* T_{j-1}*, girar-lo i traslladar-lo dins de cada cub de* T_{j-1}*, substituint-lo per aquest de manera que el conjunt resultant sigui tancat i connex.*

Considerem

$$T = \cap_{j \in \mathbb{N}} T_j.$$

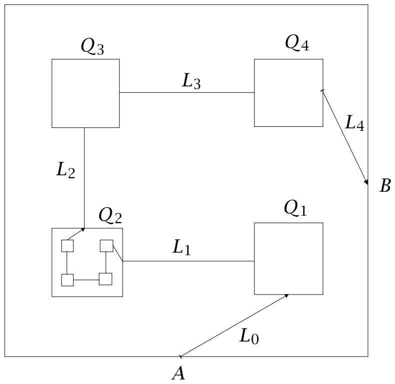

Figura 5

T *és una corba de Jordan i, tal com H. Whitney demostra a [15], existeix una funció* $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $\mathrm{d}f(x) = 0$ *per a tot* $x \in T$*, i a més* $f(A) = 0$ *i* $f(B) = 1$.

Això implica que cap noció lineal d'integració sobre T*, combinada amb la noció natural d'integració a* ∂T*, no permet un teorema del tipus de Stokes en aquest cas.*

El conjunt T de l'exemple anterior dóna una idea de com pot ser de complicada una subvarietat topològica de $\mathbb{R}^n$, i al mateix temps de la necessitat de posar importants restriccions al tipus d'objectes i situacions que cal considerar.

La primera d'aquestes teories procedeix de l'àmbit del problema de les superfícies minimals:

5.1 Teoria geomètrica de la mesura

Com abans $U \subset \mathbb{R}^n$, obert i $E \subset U$.

Quan es fa ús de la integració de Lebesgue, la descripció dels subconjunts de $\mathbb{R}^n$ mitjançant les seves funcions característiques proporciona un punt de vista bàsic. Les propietats funcionals d'un conjunt E, com ara les nocions de volum i de perímetre i les seves relacions reflecteixen amb força fidelitat les propietats de mesura de E i de la seva frontera ∂E, tal com veurem tot seguit.

L'eina principal és la *mesura de Hausdorff* k*-dimensional* a $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^k$, que té un paper similar al de la mesura de Lebesgue, però veu objectes (k-dimensionals) invisibles amb aquesta. De fet $\mathcal{H}^n = m_n$ a $\mathbb{R}^n$.

Es defineix amb un procés de completació del tipus de Caratheodory a partir de la mesura exterior:

$$(\mathcal{H}^k)^*(E) = \\ = \frac{m_k(B_1^k(0))}{2^k} \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(A_j))^k;\ E \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j,\ \mathrm{diam}(A_j) \le \delta \right\},$$

on $E \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt qualsevol.

Es tracta, doncs, d'una teoria que fa servir objectes molt naturals i que està profundament lligada a la geometria euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

Cal remarcar, a més, que la definició de $\mathcal{H}^k$ que acabem de donar s'estén sense problemes a $k \in [0,\infty)$ (generalitzant el factor de normalització $m_k(B_1^k(0))$ en termes de funcions Γ d'Euler). Això permet una noció de dimensió no entera per a un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ acotat: la *dimensió de Hausdorff*, que es defineix

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s \ge 0 :\ (\mathcal{H}^s)^*(A) > 0\}\,.$$

Coincideix amb la dimensió geomètrica en el cas de les subvarietats regulars immerses de $\mathbb{R}^n$.

El desenvolupament que presentem, ja clàssic, és degut a E. de Giorgi, H. Federer, W. Fleming, entre d'altres, i segueix sobretot [3].

Comencem, doncs, amb algunes propietats de les funcions reals a $\mathbb{R}^n$ actuant sobre els camps. Volem fer atenció sobretot en una generalització del concepte de gradient.

22 Definició (Funcions de variació acotada) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, direm que* $f \in BV(U)$ *si, i només si, existeix una constant positiva* $C = C(f)$ *tal que per a tot camp* X *amb coeficients a* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*, l'espai de les funcions* C^∞ *amb suport compacte, i* $\|X\|_{L^\infty(U)} \le 1$*, tenim*

$$\int_U f \,\mathrm{div}\, X \,\mathrm{d}m \le C(f)\,.$$

Observem que la idea de dualitat continua present. Els objectes associats són mesures de Radon.[13]

13 *Mesura de Radon*: qualsevol element del dual de l'espai de Frêchet de les funcions contínues amb suport compacte amb les seminormes del suprem sobre compactes. Aquests objectes permeten de mesurar conjunts i bastir una teoria similar a la de Lebesgue.

Denotarem $\mathcal{M}(A)$ al conjunt de les mesures de Radon que s'anul·len quan actuen sobre funcions que no tenen el suport a A.

23 Teorema (Teorema d'estructura) *Si $f \in BV(U)$, hi ha una mesura de Radon $\mu \in \mathcal{M}(U)$ i un camp η amb coeficients μ-mesurables a U i tals que*

1) $\|\eta(x)\| = 1$ *μ-q.p.t. $x \in U$.*
2) *Per a tot camp X amb coeficients a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tenim*

$$\int_U f \operatorname{div} X \, \mathrm{d}m = -\int_U (X, \eta) \, \mathrm{d}\mu \,.$$

De manera que partim d'objectes que ja verifiquen, en un cert sentit, un teorema del tipus de Stokes. Cal senzillament, refinar les idees per tal d'obtenir una caracterització de la mesura μ, així com del conjunt més petit (en un cert sentit) que la suporta, i que faci útil la identitat de 2).

Per als conjunts tals que la seva funció característica és de variació acotada hi ha una noció de *perímetre* en el sentit de la mesura (*variació acotada* i *perímetre finit* són essencialment sinònims):

24 Definició (Conjunts de perímetre localment finit) *Si $E \subset U$, mesurable, direm que $E \in BV_{\mathrm{loc}}(U)$ si, i només si,*

$$\chi_E \in BV_{\mathrm{loc}}(U) \,.$$

i llavors:

25 Corol·lari (Teorema bàsic d'estructura per a conjunts de perímetre localment finit) *Si $E \in BV_{\mathrm{loc}}(U)$, hi ha una mesura de Radon $\|\partial E\| \in \mathcal{M}(U)$ i un camp η_E amb coeficients $\|\partial E\|$-mesurables a U i tals que*

1) $\|\eta(x)\| = 1$ *$\|\partial E\|$-q.p.t. $x \in U$.*
2) *Per a tot camp X amb coeficients a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tenim*

$$\int_E \operatorname{div} X \, \mathrm{d}m = -\int_U (X, \eta_E) \, \mathrm{d}\|\partial E\| \,.$$

Aquesta segona propietat ja constitueix en si un teorema de l'estil del de la divergència, que relaciona la integral de la divergència de X sobre E amb el flux de X sobre el conjunt suport de la mesura[14] $\mathrm{d}\|\partial E\|$. Això és encara una relació vaga. La força de la teoria consisteix en què és possible donar una caracterització geomètrica d'aquest conjunt, relacionant-lo amb la frontera de E. En aquest sentit tenim:

26 Definició (Frontera reduïda d'un conjunt de perímetre localment finit) *Si $E \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, anomenem* frontera reduïda de E, $\partial^* E$, *el conjunt de punts $x \in \mathbb{R}^n$ tals que*

14 Aquesta és la notació adoptada tradicionalment per a la mesura de Radon corresponent a χ_E. La seva dubtosa estètica queda, en part, compensada per la seva pertinença.

1) $\|\partial E\|(B_r(x)) > 0$ *si* $r > 0$,
2) $\lim_{r\to 0} \frac{1}{\|\partial E\|(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \eta_E \, \mathrm{d}\|\partial E\| = \eta_E(x)$,
3) $\|\eta_E(x)\| = 1$.

Així la frontera distingida de E constitueix, a *grosso modo*, el conjunt de punts on «viuen» realment la mesura $\|\partial E\|$ i el camp η_E.

És un subconjunt de ∂E.

27 Corol·lari (Teorema d'estructura de la frontera reduïda d'un conjunt de perímetre localment finit) *Si* $E \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *llavors hi ha una família numerable de compactes* $\{K_l\}$, *i un conjunt* N *tals que*

1) $\partial^* E = \cup_l K_l \cup N$,
2) $\|\partial E\|(N) = 0$,
3) *Per a tot* l, *hi ha una hipersuperfície* C^1, Σ_l, *tal que* $K_l \subset \Sigma_l$,
4) $\eta_{E|_{\Sigma_l}}$ *és normal a* Σ_l *en els punts de* K_l,
5) $\|\partial E\|$ *és la restricció a* $\partial^* E$ *de* $\mathcal{H}^{n-1}$.

L'apartat 3) és, potser, el més remarcable i alhora el més profund. La frontera distingida és en la seva major part la porció regular de la frontera de E, i la mesura $\|\partial E\|$ és la restricció a aquesta d'un objecte natural de $\mathbb{R}^n$ com és $\mathcal{H}^{n-1}$.

Un conjunt que conté l'anterior i és més fàcilment «calculable» és el clàssic conjunt de *punts de densitat de Lebesgue* del conjunt E.

28 Definició (Frontera en el sentit de la mesura) *Si* $E \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *la* frontera en el sentit de la mesura de E, $\partial_* E$, *és el conjunt de punts* $x \in \mathbb{R}^n$ *tals que*

$$\Theta(E, x) = \limsup_{r \searrow 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{r^n} \in (0, 1)$$

i

$$\Theta(E^c, x) = \limsup_{r \searrow 0} \frac{m(E^c \cap B_r(x))}{r^n} \in (0, 1)\,.$$

Es tracta del conjunt de punts al voltant dels quals tant el conjunt en qüestió com el seu complementari són grans en mesura de Lebesgue. Així doncs, és una part de la frontera que exclou els punts cuspidals, però no pas els angulosos. La frontera reduïda constitueix la part substancial de la frontera, en el sentit de la mesura (de Lebesgue).

29 Lema *Si* $E \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\partial^* E \subset \partial_* E$$

i

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0\,.$$

I així arribem a

30 Teorema (Teorema de Stokes per a conjunts de perímetre finit) *Si $E \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, per a cada compacte $K \subset \mathbb{R}^n$*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap K) < \infty\,,$$

a més $\eta_E(x)$ està definit $\mathcal{H}^{n-1}$-gairebé per a tot $x \in \partial_* E$, i per a tot camp X amb coeficients a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tenim

$$\int_E \operatorname{div} X \,\mathrm{d}m = \int_{\partial_* E} (X, \eta_E)\,\mathrm{d}\|\partial E\|\,.$$

Parlant amb poca precisió, el flux de X es calcula sobre la part de ∂E on aquesta és regular, és a dir, té dimensió $n-1$ i vector normal en gairebé tots els punts, i això quan aquesta part és $\mathcal{H}^{n-1}$-gairebé tota la frontera. La integració es fa amb un objecte força similar a la mesura de Lebesgue $n-1$ dimensional transportada a aquesta part de la frontera.

Aquestes nocions corresponen, en el cas regular, a les nocions clàssiques respectives, i abasten casos com ara el cas que ∂E és localment la gràfica d'una funció de Lipschitz.

5.2 El cas de regions de $\mathbb{R}^n$. (El punt de vista de la dualitat)

En el cas que el domini d'integració sigui un obert acotat de $\mathbb{R}^n$ i no pas un conjunt general de tipus BV, tenim una idea d'integració basada en un *procediment més geomètric*: hom aproxima la regió d'integració per altres regions relativament més senzilles on valen els procediments clàssics. La integració sobre la frontera s'obté com a límit d'integrals frontera dels oberts que aproximen la regió de partida, i aquest límit es pot concretar en la integració sobre un subconjunt de la frontera de la regió inicial. Per tal que tot això sigui possible, cal que la regió i la seva frontera compleixin unes condicions de tipus mètric, topològic i combinatori.

Seguirem les idees de l'article [6].

Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una regió qualsevol. L'aproximació de Ω es fa mitjançant reunions de cubs que recobreixen Ω interiorment de manera prou eficient.

Definim els dominis bàsics amb els quals aproximarem Ω:

31 Definició (Descomposició afí) *Una descomposició afí de Ω és un família $\mathcal{T}$ de n-cubs (o de n-símplexs afins) de costats paral·lels als eixos i continguts tots a Ω, tals que:*

1) *Els seus interiors són disjunts.*
2) *Hi ha un subconjunt $E \subset \Omega$, tal que $m_n(E) = 0$ i $E \cup (\cup_{T\in\mathcal{T}} T) = \Omega$.*

En cas que E sigui buit, la descomposició $\mathcal{T}$ s'anomena pròpia.

Tenim diverses maneres de mesurar l'extensió d'una descomposició afí:

32 DEFINICIÓ *Si* $\mathcal{T}$ *és una descomposició afí de* Ω*, i* $d > 0$*, definim*

$$\|\mathcal{T}\|_d = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{diam}(\tau)^d .$$

El valor d'aquesta expressió pot ser $= +\infty$. Si és finita direm que $\mathcal{T}$ és *d-sumable*.

Sempre hi ha descomposicions pròpies. La més important d'aquestes és la clàssica descomposició de Whitney:

33 DEFINICIÓ (DESCOMPOSICIÓ DE WHITNEY)[15] *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *i considerem la descomposició pròpia formada per cubs diàdics del tipus*

$$Q = [\frac{l_1}{2^k}, \frac{l_1+1}{2^k}] \times \cdots \times [\frac{l_n}{2^k}, \frac{l_n+1}{2^k}] .$$

amb $l_i, k \in \mathbb{Z}$*.*

Definim $\mathcal{W}^k$ *la família de tots els* k*-cubs diàdics* $Q \subset \Omega$ *tals que:*

1) *Si* Q' *és un* k*-cub i* $Q' \cap Q \neq \emptyset$*, llavors* $Q' \subset \Omega$*.*
2) *Si* $k > 0$*,* $Q \nsubseteq Q''$ *per a tot* $Q'' \in \mathcal{W}^j$*, on* $j < k$*. (Comencem sempre per un* k_0 *mínim que compleixi 1) i 2)).*

I llavors

$$\mathcal{W} = \cup_k \mathcal{W}^k .$$

I ara una classe de dominis per als quals les anteriors són bones aproximacions.

34 DEFINICIÓ (DOMINI DE JORDAN) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *és un* domini de Jordan *si, i només si,* Ω *és connex acotat, orientat, i* $\partial\Omega$ *és una varietat topològica.*

35 PROPOSICIÓ *La descomposició de Whitney d'un domini de Jordan a* $\mathbb{R}^n$ *és sempre* n*-sumable.*

De fet ho és per a qualsevol domini acotat.

Així veiem que les descomposicions afins proporcionen dominis que aproximen bé els conjunts oberts generals. Ara, per tal de tenir un teorema del tipus de Stokes, el pas següent, que és crucial, consisteix a determinar aquells oberts per als quals hi ha descomposicions afins que, al seu torn, donen també bones aproximacions per a la frontera d'aquests.

Comencem amb alguns conceptes associats a la idea de recubriment eficient.

15 Aquesta definició descriu la mateixa família de cubs present en les tècniques d'extensió de jets degudes al mateix Whitney: cubs amb interiors disjunts i cadascun amb un diàmetre comparable amb la distància al complementari de Ω.

36 Definició *Si* $X \subset \mathbb{R}^n$ *és un subconjunt acotat i* $\epsilon > 0$*,*

$$N_X(\epsilon) = \min\{\sharp\{V_\alpha;\ \alpha \in A \subset \mathbb{N}\} :\ X \subset \cup V_\alpha;\ V_\alpha, \textit{bola de radi } \epsilon\}$$

i llavors la dimensió de Minkowskii *es defineix com*

$$\dim X = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N_X(\epsilon)}{-\log \epsilon}\,.$$

$N_X(\epsilon)$ expressa el cardinal del recobriment més eficient de X per a boles de radi ϵ.

Per tal d'entendre millor aquest concepte de dimensió fixem-nos en les propietats següents:

3 Nota

1) N_X *és una funció monòtona decreixent.*
2) $N_X(\epsilon) \leq \epsilon^{-(\dim X + \eta)}$ *per a tot* $\eta > 0$ *prou petit.*
3) *La mateixa dimensió pot ésser igualment definida mitjançant cubs diàdics (és a dir, d'aresta* 2^{-k}*).*
4) *La dimensió de Minkowskii coincideix amb la noció habitual de dimensió en el cas de subvarietats regulars i amb la de Hausdorff en el cas de conjunts autosimilars.*[16]

I ara

37 Definició *Si* Ω *és un conjunt acotat de* $\mathbb{R}^n$ *i* d *és un número positiu, direm que* $\partial\Omega$ *és* d*-sumable si*

$$\int_0^1 N_{\partial\Omega}(t)\, t^{d-1} \mathrm{d}t < \infty\,.$$

38 Lema *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *és un obert acotat i* $\partial\Omega$ *és* d*-sumable, llavors* $\dim(\partial\Omega) < +\infty$ *i*

$$\|\mathcal{W}\|_d < +\infty\,.$$

I ara, per a oberts amb frontera d-sumable, les descomposicions de Whitney donen lloc, com a límit en l'espai de les cadenes a $\mathbb{R}^n$ de les seves fronteres, a una cadena que fa el paper de «frontera» de Ω.

Considerem l'espai de les cadenes amb aquesta norma:

39 Definició

$$\mathcal{E}_d(\mathbb{R}^n) = (\overline{\Upsilon_n})_{\|\ \|_d}\,.$$

Tenim les vores de les cadenes que aproximen Ω, aproximen bé $\partial\Omega$ en cas que el domini sigui de Jordan i la vora d-sumable:

16 Un *conjunt autosimilar* és un conjunt invariant per un grup de moviments de l'espai (translacions, girs, simetries) i dilatacions, finitament generat (vegeu [8]).

40 PROPOSICIÓ *Si Ω és un domini de Jordan a $\mathbb{R}^n$ i $\partial\Omega$ és d-sumable, i diem*

$$W_k = \sum_{\tau \in \cup_{j \le k} \mathcal{W}^j} \tau ,$$

tenim l'existència a $\mathcal{E}_d(\mathbb{R}^n)$ de

$$\lim_k W_k ,$$

que anomenarem $\Omega^\flat$.

I automàticament tenim una noció d'integració a $\partial\Omega$:

41 DEFINICIÓ

$$\int_{\partial(\Omega^\flat)} \omega = \lim \int_{\partial W_k} \omega$$

per a tot $\omega \in \Lambda^{n-1}(U)$ i U entorn de $\bar{\Omega}$.

De fet hi ha altres objectes, per exemple políedres (dominis tals que les seves vores estan constituïdes per un nombre finit de bocins plans) que omplen Ω en el sentit de la mesura, que hom pot fer servir en l'aproximació.

Aquestes definicions permeten estendre la integració a formes menys regulars. A continuació exposem les condicions en què això és possible en termes de la integrabilitat i la grandària dels coeficients i de l'existència i integrabilitat de les seves derivades.

42 DEFINICIÓ *Direm que una funció $f \in ACL(U)$ (absolutament contínua en línies) si per a cada rectangle finit $R \subset U$, f és absolutament contínua en cada variable si fixem totes les altres.*

Direm que $\omega \in \Lambda^{n-1}W^{1,1}(U)$, si els coeficients de ω són a $ACL(U)$ i $\mathrm{d}\omega \in \Lambda^n L^1(U)$ (és a dir, $\mathrm{d}\omega$ té coeficients integrables).

Si $d > 0$, direm que $\omega \in F^d$ si per a tot $(n-1)$-símplex, σ,

$$\frac{1}{\mathrm{diam}(\sigma)^{n-1}} \left| \int_\sigma \omega \right|$$

està acotat independentment de σ, i igualment n'està

$$\frac{1}{\mathrm{diam}(\sigma)^d} \left| \int_{\partial\sigma} \omega \right|$$

per a tot n-símplex.

I obtenim com a resultat principal:

43 TEOREMA *a) Si $d \in (n-1, n]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini de Jordan tal que $\partial\Omega$ és d-sumable i ω coincideix $\mathcal{H}^{n-1}$ amb una forma Lip_{d-n+1}, llavors*

$$\omega_{|\partial\Omega} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\partial W_k} \omega \to 0 .$$

b) *Si ω coincideix $\mathcal{H}^{n-1}$ amb una forma Lip_1 i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini de Jordan,*

$$\omega_{|\partial\Omega} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\partial W_k} \omega \to 0\,.$$

c) *Si $d \in (n-1, n]$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini de Jordan tal que $\partial\Omega$ és d-sumable, per a tota $\omega \in \Lambda^{n-1}(F^d \cap W^{1,1})(\Omega)$*

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega\,.$$

Les parts a) i b) fan referència a la possibilitat de tenir una noció d'integració que s'estén linealment a les formes diferencials amb diferents graus de regularitat. c) és el teorema de Stokes per a formes i dominis amb menys regularitat. Cal remarcar el fet que hi ha exemples (vegeu [6]) que demostren que la regularitat exigida a ω és la més feble que permet aquest mètode.

6 Formes amb singularitats

En l'apartat anterior hem vist com la integració sobre oberts i vores es pot estendre al cas de *formes amb singularitats* (punts on els coeficients no són C^1). Ara examinarem una mica més a fons aquest aspecte i la validesa d'un teorema del tipus de Stokes en aquest cas. L'element essencial que cal tenir en compte són les cancel·lacions, que queden ben reflectides en la idea d'integrabilitat impròpia del tipus de Riemann o bé de Riemann-Stieltjes, i, com en aquests casos, la idea de primitiva i de continuïtat absoluta, convenientment generalitzades, tenen un paper bàsic.

Un altre aspecte important que cal remarcar és el fet que la manera natural de tractar les formes amb singularitats des del punt de vista funcional, tal i com exigeix la dualitat, consisteix a pensar en espais de *corrents*, val a dir, formes amb coeficients distribucions en el sentit de Schwartz, que són objectes que generalitzen les funcions. El lector pot pensar, per exemple, en formes amb coeficients funcions contínues, i límits puntuals d'aquestes.[17]

Vegeu [10] per a més detalls i demostracions.

Considerem l'espai $BV(\mathbb{R}^n)$ amb la norma *perímetre*, que ja hem introduït abans i que denotarem per $\| \; \|$.

En primer lloc, la integració es basteix al voltant dels elements següents:

El que fa el paper de mesura o «funció» absolutament contínua:

44 Definició (Càrrega)

$$F : BV(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

tal que $\forall \epsilon > 0,\ \exists \rho > 0$ *tal que si* $A \in BV(\mathbb{R}^n)$, $A \subset B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)$, $\|A\| < \frac{1}{\epsilon}$ *i* $\operatorname{diam} A < \rho$, *llavors* $|F(A)| < \epsilon$.

17 De fet les distribucions amb suport compacte són sempre derivades (en un cert sentit) de funcions contínues.

En altres paraules, el valor de F sobre un conjunt de perímetre finit està controlat, en termes de l'invers del perímetre i de la distància màxima del conjunt en el punt $0 \in \mathbb{R}^n$, sempre que el diàmetre d'aquest conjunt no sigui massa gran.

Els conjunts negligibles:

45 DEFINICIÓ (CONJUNT PRIM) *$S \subset \mathbb{R}^n$ és prim si, i només si, és $\mathcal{H}^{n-1}$-σ finit.*

Les densitats i pesos es refereixen a una funció:

46 DEFINICIÓ (GAGE) *Si $E \subset \mathbb{R}^n$, una funció*

$$\delta : E \to [0, +\infty)$$

s'anomena gage *si el conjunt $\{\delta = 0\}$ és prim.*

I la integració de tipus Riemann es fa, tal com és habitual, a partir d'una noció de partició:

47 DEFINICIÓ (PARTICIONS) *Una* partició *és una família finita de parelles de conjunts i punts*

$$P = \{(A_1, x_1), \dots, (A_l, x_l)\}$$

tal que $A_i \in BV(\mathbb{R}^n)$ disjunts dos a dos i $x_i \in \mathbb{R}^n$, per a tot i.

P s'anomena ϵ-regular *si, i només si, per a tot i,*

$$\frac{m_n(A_i)}{\operatorname{diam}(A_i \cup \{x_i\})\|A_i\|} > \epsilon\,.$$

P s'anomena δ-fina *si, i només si, per a tot i,* $\operatorname{diam}(A_i \cup \{x_i\}) < \delta(x_i)$.

Fixem-nos que la ϵ-regularitat és, de fet, una generalització de la idea d'isoperimetria. Per exemple els polígons plans són $\frac{1}{4}$-regulars. El concepte de δ-fina controla el fet que els punts escollits, que tal com es veu a la definició de funció integrable fan el paper de centre de masses dels A, no són llunyans d'aquests ni estan en el conjunt on $\delta = 0$. Així podem pensar en funcions singulars justament on $\delta = 0$, i els centres de masses de les particions δ-fines eviten aquests conjunts.

La clausura essencial d'un conjunt $E \in BV(\mathbb{R}^n)$ es defineix anàlogament a la frontera essencial:

48 DEFINICIÓ (CLAUSURA ESSENCIAL) *Si $E \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, la* clausura essencial *de E, $\overline{(E)}_*$, és el conjunt de punts $x \in \mathbb{R}^n$ tals que si $r > 0$, $\Theta(E, x) = \limsup_{r\to 0} \frac{m(E\cap B_r(x))}{r^n} > 0$.*

49 Definició (Funcions Riemann-integrables) *Una funció*

$$f : \overline{(E)_*} \to \mathbb{R}$$

és R-integrable *si i només si, existeix una càrrega* F *a* E *tal que* $\forall \epsilon > 0$ *podem triar un* gage δ *definit a* $\overline{(E)_*} \cap B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)$*, tal que per a tota partició* P ϵ*-regular i* δ*-fina*

$$\sum_{i=1}^{p} |f(x_i)m_n(A_i) - F(A_i)| < \epsilon .$$

En tal cas F *s'anomena una* R-primitiva *de* f *i definim, per a cada* $A \subset E$, $A \in BV(\mathbb{R}^n)$,

$$F(A) = (R)\int_A f \, \mathrm{d}x .$$

Així doncs, F fa el paper de primitiva de f. A més,

50 Proposició *Si* $A \subset E$, $A \in BV(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(A, \, \mathrm{d}m_n)$*, llavors* f *és* R*-integrable sobre* A *i*

$$F(A) = \int_A f \, \mathrm{d}m_n .$$

Ara alguns espais de corrents, que expressen fins on és possible estendre aquesta integració i aconseguir un teorema del tipus de Stokes:

51 Definició *a)* $BV_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *és l'espai de les funcions acotades, amb suport compacte i de variació acotada. Hi tenim diverses (semi-) normes:* $\| \, \|_1$ *i* $\| \, \|_\infty$ *en el sentit de la mesura de Lebesgue,* $\| \nabla \|_1$ *la norma del gradient a* L^1 *i* $\| \, \|_V$ *la norma de la variació total.*

b) $BV_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *és l'espai de les funcions localment acotades i localment de variació acotada*

c) Si $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$,

$$BV_k(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in BV_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \mathrm{spt}(f) \subset \overline{B_k}(0), \ \|f\|_\infty + \|f\|_V \le k + 1 \right\} .$$

Un resum de les seves propietats, d'altra banda típiques d'un espai de distribucions o corrents:

52 Proposició $BV_k(\mathbb{R}^n)$ *amb la norma* $\| \, \|_1$ *és un espai topològic i la topologia és compacta.*

La topologia més fina, τ*, que fa totes les inclusions* $BV_k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow BV_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *contínues fa de* $(BV_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tau)$ *un espai topològic localment convex, Hausdorff, seqüencial i seqüencialment complet.*

Anàlogament, si $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ és la forma de volum a $\mathbb{R}^n$, 53 Definició *Si* $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathbf{N}_n^{c,\infty}(E)$ *és l'espai dels corrents de la forma*

$$T = (g\ m_n)\,\mathrm{d}x$$

on $g \in BV_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *i* $\{g \neq 0\} \subset E$

Es tracta de corrents d'ordre màxim on els coeficients són mesures absolutament contínues respecte a la mesura de Lebesgue, i amb condicions de grandària i creixement que es deriven de la pertinença als espais anteriors.

L'estructura d'aquest espai:

54 Proposició $\mathbf{N}_n^{c,\infty}(E)$ *és un àlgebra i un subespai tancat de* $(BV_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tau)$.

Finalment, el fet principal

55 Teorema (Teorema de Stokes) *Siguin* $E \in BV_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *i* $\omega \in \Lambda^{n-1}(C(\bar{E}))$.

Si existeix $S \subset E$*, prim tal que* $\omega \in \Lambda^{n-1} Lip_1^{\mathrm{loc}}(E \setminus S)$*, llavors* $\mathrm{d}\omega$ *és* R*-integrable a E i per a tota* $T \in \mathbf{N}_n^{c,\infty}(E)$

$$\langle T, d\omega \rangle = \langle \partial T, \omega \rangle\,,$$

on $\partial T = -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(\frac{\partial g}{\partial x_j}\ m_n)\,\widehat{\mathrm{d}x_j}$*, si* $T = (g\ m_n)\,\mathrm{d}x$.

La fórmula principal es pot reescriure en termes de camps com

$$\int_E \operatorname{div} X_\omega\,\mathrm{d}m_n = \int_{\mathbb{R}^n} (X_\omega, \nabla g)\,\mathrm{d}m_n\,,$$

si els coeficients de X_ω són els mateixos de ω i en el mateix ordre.

A part de la validesa del teorema de Stokes per a formes amb coeficients més generals, cal observar la substitució dels seus dominis i vores per corrents i «vores de corrents».

7 Conclusió

En general tenim un teorema de Stokes en el sentit dels corrents:

Si T és una k-forma diferencial a $\mathbb{R}^n$ amb coeficients distribucions i ω és una $n-k-1$-forma diferencial amb coeficients funcions C^∞ amb suport compacte, llavors

$$\langle T, \mathrm{d}\omega \rangle = (-1)^{n-k-1}\langle \partial T, \omega \rangle\,,$$

que defineix ∂T. El problema consisteix a, per a una T donada, caracteritzar ∂T en termes de derivades de mesures i decidir la classe més gran en què podem triar ω per tal que la fórmula segueixi sent vàlida.

Referències

[1] Burgués, J. M. «Integració i càlcul vectorial». Universitat Autònoma de Barcelona, *Materials*, 94, 2002, 2a edició.

[2] Chilov, M. *Analyse mathematique. Fontions de plusieurs variables*. Moscou: Editorial Mir, 1975.

[3] Evans, L. C. ; Gaiepy, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. Boca Raton: CRC Press, 1992.

[4] Federer, H. *Geometric measure theory*. Springer, 1969.

[5] Harrison, J. «Flux across nonsmooth boundaries and fractal Gauss/Green/Stokes' theorem». *J. Phys. A. Math. Gen.*, 32, (1999).

[6] Harrison, J.; Norton, A. «The Gauss-Green theorem for fractal boundaries». *Duke Math. J.*, vol. 67, núm. 3, (1992), 575–588.

[7] Maxwell, J. C. *A treatise on electricity and magnetism*. Dover, vol. 1, 1954.

[8] Morgan, F. *Geometrie Measure Theory*. Acad. Press, 1988.

[9] Osgood, W. F. «A Jordan curve of positive area». *Trans. A.M.S.*, 4, (103), (1902), 107–112.

[10] Pfeffer, W. F. *The Stokes theorem for the generalized Riemann integral*. *Real Analysis Exchange*, vol. 26, (2), (2000–2001), 623–636.

[11] Spivak, M. *Calculus on manifolds*. W. A. Benjamin, 1965.

[12] Stein, E. M. *Singular integrals and differentiable properties of functions*. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1970.

[13] Sternberg, Sh. *Lectures on differential geometry*. New Jersey: Prentice Hall, Inc. 1964.

[14] Whitney, H. *Geometric Integration Theory*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957.

[15] Whitney, H. «A function non constant on a connected set of critical points». *Duke Math. J.*, 1, (1935), 514–517.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra, Barcelona
josep@mat.uab.es