

Com les varietats invariants formen espirals i anells en galàxies barrades

MERCÈ ROMERO-GÓMEZ, PATRICIA SÁNCHEZ-MARTÍN I JOSEP J. MASDEMONT

Resum: L'espectacularitat de les galàxies barrades consisteix no solament en la presència de la barra, allargada en el centre de la galàxia, sinó també en els braços espirals o anells que es desenvolupen en les parts exteriors. No hi ha una teoria clara per a la formació d'anells i, fins fa poc, només n'hi havia una que explicava l'origen dels braços espirals en galàxies no barrades. En els darrers anys hem desenvolupat una teoria basada en els sistemes dinàmics que relaciona els braços espirals i els anells amb les varietats invariants hiperbòliques associades a òrbites periòdiques i quasiperiòdiques al voltant de punts d'equilibri colineals del sistema.

Paraules clau: sistemes dinàmics, varietats invariants, estructura i dinàmica de galàxies.

Classificació MSC2010: 37D10, 85A05.

1 Introducció

Des dels temps d'Edwin P. Hubble (1889–1953) que les galàxies es classifiquen segons la seva forma, bàsicament, en el·líptiques i espirals. I dins les espirals, en espirals normals (figura 1 esquerra), on les espirals es formen des del centre de la galàxia, i espirals barrades (figura 1 dreta), on al centre de la galàxia hi ha una sobredensitat allargada en forma de cigar o més o menys el·lipsoïdal, anomenada barra galàctica, i les espirals es formen al final de la barra. Actualment sabem que almenys el 66 % de les galàxies espirals són barrades (Sheth *et al.* [35]), la qual cosa ha impulsat els astrònoms i teòrics a estudiar-ne les característiques a fons. De fet, les galàxies barrades no es caracteritzen només per tenir espirals sinó que moltes d'aquestes presenten anells en lloc d'espirals (vegeu la primera fila de la figura 9).

Dins de les espirals barrades existeix una subclassificació segons si els braços espirals estan molt enrotllats a la barra i presenten un nucli central molt brillant o si són més oberts i el nucli central és molt feble. Són les galàxies de tipus primerenc i de tipus tardà, respectivament.



FIGURA 1: Galàxies espirals. Esquerra: Galàxia espiral normal (no barrada) M 74 (cortesia NASA). Dreta: Galàxia espiral barrada NGC 1300 (cortesia NASA, ESA, i The Hubble Heritage Team STScI/AURA).

Pel que fa als anells, una galàxia en pot presentar múltiples i de diferents tipus segons la classificació morfològica [8, 9, 38]. Un anell intern, r , proper i encerclant la barra i anells externs amb diferents orientacions respecte la barra i més aviat allargats. Si el semieix major de l'anell extern és perpendicular al semieix major de la barra, es diu que la galàxia té un anell de tipus R_1 . Si aquest anell no està complet s'anomena pseudoanell i es denota per R'_1 . Si el semieix major de l'anell és paral·lel al semieix major de la barra, es diu que l'anell és de tipus R_2 . Finalment, hi ha galàxies que presenten els dos anells a la vegada; aleshores diem que tenen un anell R_1R_2 . Aquesta classificació la va realitzar observacionalment R. J. Buta [7] en els anys vuitanta amb una mostra de més de 1 000 galàxies. Més endavant Buta mateix a [8] classifica una mostra de més de 3 500 galàxies segons els tipus d'anells, la seva orientació i la seva mida.

A part de classificar els braços i els anells segons la seva forma, és important saber també com s'han format en les galàxies barrades. Per a això s'han d'entendre els models actuals que expliquen el seu origen. Fins fa poc, es creia que els braços espirals eren ones de densitat i que els anells estan associats a ressonàncies de la barra amb el disc de la galàxia, és a dir, que les espirals i els anells tenien un origen diferent. La teoria d'ones de densitat la van desenvolupar als anys setanta els astrònoms Lin & Shu ([20, 21]) i, a grans trets, descriu els braços espirals com una lleugera pertorbació en forma d'espiral molt enrotllada en la component gasosa del disc. Quan les estrelles i els núvols de gas que viatgen pel disc es troben aquesta pertorbació, es produeixen els xocs que originen noves estrelles. Segons aquesta teoria, els braços espirals són estructures globals de llarga vida en el disc, és a dir, la forma del braç es manté constant en el temps. Però la teoria d'ones de densitat no explica quin és el mecanisme generador d'aquestes ones.

Pel que fa als anells, es creu que l'anell intern està associat a la freqüència de corotació (punts on la barra i les estrelles del disc giren a la mateixa velocitat

angular) i que l'anell extern està associat a la freqüència exterior de Lindblad (punts on la barra gira dues vegades més ràpid que les estrelles del disc). En les regions de la galàxia on es produeixen aquestes ressonàncies té lloc una acumulació d'estrelles que formen anells (Schwarz [32, 33, 34]).

En els darrers anys, hem desenvolupat una nova teoria (vegeu [29, 30]) que unifica la formació dels braços espirals i anells en galàxies barrades. Aquesta teoria només necessita l'existència de la barra per formar aquestes estructures i es basa en les varietats invariants hiperbòliques associades a òrbites periòdiques i quasiperiòdiques al voltant dels punts d'equilibri colineals del sistema galàctic (vegeu [29, 30]). Les varietats invariants defineixen l'esquelet principal de la dinàmica de transport en els sistemes dinàmics i en el camp galàctic hi trobem un exemple bonic d'aplicació.

2 La modelització d'una galàxia barrada

Per estudiar la dinàmica de moviment dins d'una galàxia cal buscar una distribució de densitat de massa que approximi bé la seva lluminositat. En les galàxies, això es fa descomponent en models de densitat les seves components principals: el disc de la galàxia, la barra, el bulb central i l'halo que la formen. D'aquestes components, el disc, el bulb i l'halo es modelitzen mitjançant una distribució axisimètrica, mentre que la barra és una component allargada amb una forma aproximada d'el·lipsoide. Un punt important que cal remarcar és que no utilitzarem una distribució de densitat específica per als braços espirals o anells. Aquestes estructures sortiran de manera natural de la dinàmica del sistema.

En la literatura es poden trobar distintes distribucions de densitat que s'han utilitzat per a modelar les diferents components d'una galàxia. Llavors, a partir de la distribució de densitat, es pot calcular el potencial mitjançant l'equació de Poisson: $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, on G és la constant de gravitació, ρ és la distribució de densitat i Φ , el potencial desitjat corresponent.

Per començar descriurem els potencials i les distribucions de densitat més utilitzades. El disc de la galàxia es caracteritza per ser una distribució de densitat amb una caiguda exponencial des del centre de la galàxia cap a les parts més exteriors. Els potencials més comuns són els de Miyamoto-Nagai [26] i el de Kuz'min/Toomre (Kuz'min [19], Toomre [37]). L'expressió del potencial de Miyamoto-Nagai és la següent:

$$\Phi_d(R, z) = -\frac{GM_d}{\left(R^2 + \left[a_d + \left(z^2 + b_d^2\right)^{1/2}\right]^2\right)^{1/2}}, \quad (1)$$

on M_d és la massa del disc, a_d i b_d són les longituds d'escala radial i vertical, respectivament. El potencial de Kuz'min/Toomre s'acostuma a donar en termes de densitat superficial:

$$\sigma_d(r) = \frac{V_d^2}{2\pi r_d} \left(1 + \frac{r^2}{r_d^2}\right)^{-3/2}, \quad (2)$$

on els paràmetres V_d i r_d fixen les escales de la velocitat i el radi, respectivament. El bulb central, juntament amb l'halo estel·lar, es modela utilitzant una distribució de densitat del tipus

$$\rho_h(r) = \rho_s \left(1 + \frac{r^2}{r_s^2}\right)^{-3/2}, \quad (3)$$

on ρ_s i r_s determinen la seva densitat central i l'anomenat factor d'escala, respectivament. Esferoides amb una concentració alta tindran valors alts de ρ_s i valors petits de r_s , mentre que el contrari passa en el cas d'esferoides amb una concentració baixa. Encara que introduïm components axisimètriques separades, és important emfatitzar aquí que el que importa és la corba de rotació de tota la component axisimètrica i no la descomposició de la corba segons cada component. La corba de rotació, molt emprada pels astrònoms, és la gràfica del mòdul de la velocitat que portaria una estrella en una hipotètica òrbita circular situada a un cert radi del centre de la galàxia. Seguint el model keplerià, les corbes de rotació creixen de manera lineal fins a un cert radi i després haurien de de créixer com $1/\sqrt{r}$ i tendir asimptòticament a zero ja que la llum visible de la galàxia també decreix. A la pràctica, s'ha observat que les corbes de rotació de galàxies externes es tornen planes (vegeu la figura 2) a radis grans, encara que la matèria visible s'hagi extingit (Bosma [6]). Aquest fet ha induït els astrònoms a introduir la matèria fosca en els seus models. En el nostre model, ajustem els paràmetres que componen el potencial de manera que la forma de la corba de rotació s'assembli a les corbes observades.

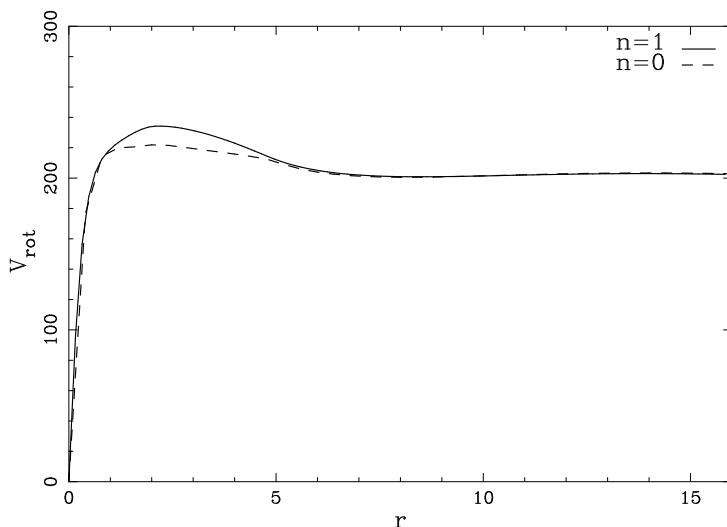


FIGURA 2: Corbes de rotació per a un model amb disc de Kuz'min/Toomre, esferoide i barra Ferrers amb índex de concentració $n = 0$ (línia discontinua) i $n = 1$ (línia contínua). El radi està mesurat amb Kpc i la velocitat en km/s.

Per a modelitzar la barra, tant trobem potencials físics, que provenen d'una distribució de densitat, com models ad hoc, anomenats així perquè es construeixen a fi que satisfacin unes certes propietats o supleixin mancances d'altres models. Els més utilitzats són l'el·lipsoide de Ferrers [15], com a potencial físic, i els potencials de tipus quadrupol, com a potencials ad hoc. La distribució de densitat associada al potencial de Ferrers és la següent:

$$\rho_b = \begin{cases} \rho_0(1 - m^2)^n, & m \leq 1, \\ 0, & m > 1, \end{cases} \quad (4)$$

on $m^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/b^2$, i a i b són els semieixos major i menors de l'el·lipsoide, respectivament. El paràmetre n mesura el grau de concentració de la barra i ρ_0 mesura la seva concentració central. Aquest paràmetre està relacionat amb la massa de la barra mitjançant l'expressió

$$M_b = 2^{2n+3} \pi a b^2 \rho_0 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2) / \Gamma(2n+4), \quad (5)$$

on Γ és la funció gamma d'Euler. Els potencials de tipus quadrupol s'obtenen en fer una descomposició de Fourier de tot el potencial i retenir la component $m = 2$. D'aquesta manera els potencials de quadrupol tenen la forma

$$\Phi_b(r, \theta) = -A(r) \cos(2\theta), \quad (6)$$

on $A(r)$ és una funció que depèn del radi i determina la mida i l'amplitud de la barra. Un exemple clàssic podria ser

$$A(r) = A_b \cdot \begin{cases} 2 - \left(\frac{r}{R_b}\right)^3, & r \leq R_b, \\ \left(\frac{R_b}{r}\right)^3, & r \geq R_b, \end{cases} \quad (7)$$

on R_b determina la mida i A_b determina l'amplitud [14, 16]. En resum, doncs, el potencial galàctic global amb el qual treballarem vindrà donat per la superposició d'aquests potencials: $\Phi = \Phi_d + \Phi_h + \Phi_b$, on Φ_d és el potencial de disc, Φ_h representa l'halo estel·lar i Φ_b descriu la barra.

3 Les equacions de moviment i la dinàmica al voltant dels punts d'equilibri

Considerem un sistema de referència on la barra de la galàxia giri com un sòlid rígid al voltant de l'eix de les z amb una velocitat constant, anomenada velocitat del patró, $\Omega_p = (0, 0, \Omega_p)$.¹ Les equacions del moviment en el sistema no inercial on la barra està fixa estan descrites en forma vectorial com a (vegeu [5])

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi_{\text{eff}} - 2(\Omega_p \times \dot{\mathbf{r}}), \quad (8)$$

¹ Les variables en negreta denoten vectors.

on $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és el vector posició, $\Phi_{\text{eff}} = \Phi - \frac{1}{2}\Omega_p^2(x^2 + y^2)$ és el potencial efectiu en el sistema no inercial i $\Phi = \Phi_{axi} + \Phi_b$ és el potencial total del sistema, considerant que Φ_{axi} comprèn les components axisimètriques i Φ_b denota el potencial de barra descrits en la secció 2.

Els punts d'equilibri del sistema (8) els trobem allà on s'anulla el gradient del potencial efectiu. Hi ha cinc punts d'equilibri, denotats per L_i , $i = 1 \dots 5$, tots localitzats en el pla galàctic, $z = 0$, i distribuïts tal com veiem a la figura 3. L'estabilitat d'aquests punts tindrà un paper important i la descriurem més endavant.

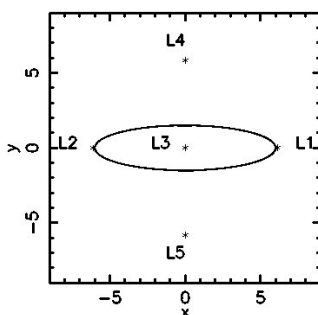


FIGURA 3: Posició dels punts d'equilibri en el pla galàctic. Els cinc punts de Lagrange estan assenyalats amb un asterisc, mentre que la línia més gruixuda assenyalava la posició i la llargada de la barra.

Les equacions del moviment (8) tenen també una integral primera, anàloga a l'energia en el sistema inercial, anomenada *energia de Jacobi* o *constant de Jacobi* i definida per

$$E_J = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \Phi_{\text{eff}}. \quad (9)$$

Per a un valor d'energia fixat, aquesta equació defineix una superfície de velocitat zero i, el tall d'aquesta amb el pla galàctic, $z = 0$, defineix les corbes de velocitat zero: $\Phi_{\text{eff}}(x, y) = E_J$. Notem que, a causa del valor no negatiu que ha de tenir l'energia cinètica a (9), els punts (x, y) de l'espai de configuracions tals que $\Phi_{\text{eff}}(x, y) > E_J$ constitueixen regions prohibides per al nivell d'energia considerat. Mentre que les regions on $\Phi_{\text{eff}}(x, y) \leq E_J$ són possibles llocs de moviment que s'anomenen regions de Hill.

També, com que la densitat associada al potencial s'estén molt més en el pla galàctic que en la direcció vertical, i com que el pla galàctic és invariant, és comú restringir l'estudi del problema en aquest pla. A la figura 4 podeu veure les regions de Hill per al problema pla segons els valors d'energia considerats.

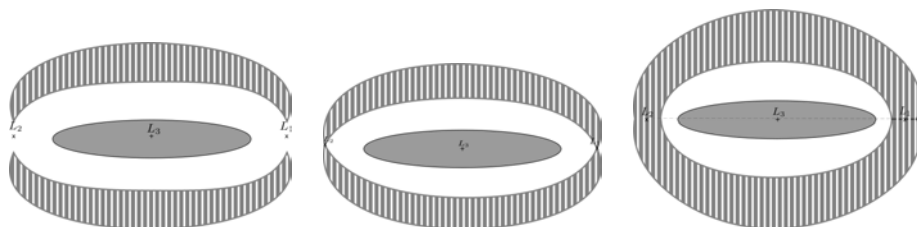


FIGURA 4: Regions de Hill a $z = 0$ segons el nivell d'energia E_J considerat. Si denotem per E_{L_i} l'energia dels punts d'equilibri L_1 i L_2 ($E_{L_1} = E_{L_2}$), les tres figures ens descriuen la forma i connectivitat de les regions de Hill que tenim quan $E_J > E_{L_i}$, $E_J = E_{L_i}$ i $E_J < E_{L_i}$ dins el rang d'energies del nostre interès. Depenent de si l'energia és més gran o més petita que l'energia dels punts d'equilibri L_1 i L_2 , les regions de Hill estan constituïdes per una o dues components connexes que formen el complementari de les zones prohibides, representades per les zones ratllades. Ara bé, ja sigui en el cas de dues components connexes, o en el cas d'una única component connexa, en el nostre rang d'energies d'interès sempre es delimiten dues possibles zones de moviment. Una d'interior, on hi ha la barra (representada per una el·lipse en gris), i una altra d'exterior que envoltaria les regions prohibides. En el cas on només tenim una única component connexa com a regió de possible moviment, les regions de Hill interior i exterior queden connectades per «un coll d'ampolla» a l'entorn de la posició dels punts d'equilibri L_1 i L_2 (vegeu també la figura 6).

3.1 Punts d'equilibri lagrangians i dinàmica al voltant seu

Tal com veiem a la figura 3, dos dels punts d'equilibri, els que denotem per L_1 i L_2 , estan situats al llarg del semieix major de la barra (que en aquest article considerem que es troba damunt l'eix x) i són del tipus centre \times sella. Al centre de la galàxia, i origen del nostre sistema de coordenades, hi trobem el punt L_3 , mentre que al llarg del semieix menor de la barra (damunt de l'eix y i oposats en signe) hi ha els punts L_4 i L_5 . Els tres darrers punts són linealment estables i de tipus centre \times centre. Notem també l'analogia d'aquests punts, anomenats *punts de Lagrange*, amb els d'altres models com el problema restringit de tres cossos (vegeu [36]).

Associada a cada centre de cada un d'aquests punts d'equilibri hi ha una família d'òrbites periòdiques, i també òrbites quasiperiòdiques en cas de tenir més d'una component central. Les òrbites al voltant del punt d'equilibri L_3 han estat ben estudiades a la literatura. Aquestes òrbites són estables per a un rang gran d'energies i per això es considera que poden atrapar matèria al voltant seu. D'aquesta manera es caracteritzen per formar l'esquelet de la barra (vegeu la figura 5 i els treballs de Contopoulos & Papayannopoulos [13], Pfenniger [28], Patsis, Skokos, Athanassoula [27], Contopoulos [12], per citar-ne alguns).

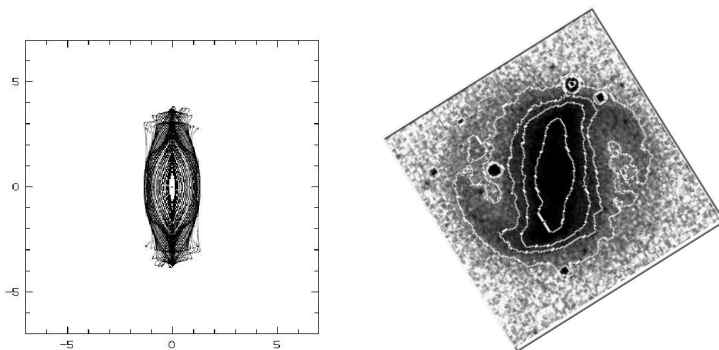


FIGURA 5: A la figura de l'esquerra es representen un conjunt d'òrbites periòdiques estables al voltant del punt L_3 (figura 7a de Patsis, Skokos & Athanassoula [27]). En aquest cas, el semieix major de la barra coincideix amb l'eix de les γ . A la figura de la dreta es mostra la barra de la galàxia NGC 4314 extreta de Digital Sky Survey.

Les òrbites al voltant de L_4 i L_5 són també linealment estables i s'acostumen a anomenar òrbites *banana*, però la seva forma no representa cap característica de la galàxia [27]. Les òrbites al voltant dels punts L_1 i L_2 són inestables i, per aquest fet, no poden atrapar matèria al seu voltant durant llargs períodes de temps. És per això que no s'havien estudiat mai amb profunditat fins als treballs que hem desenvolupat a [29, 30, 31], on també incloem l'anàlisi del paper que exerceixen les seves varietats invariants.

3.2 El paper de les varietats invariants

Denotem per $X = (x, \gamma, \dot{x}, \dot{\gamma})$ un estat del nostre model pla i per $\Psi_t(X)$ l'òrbita que, per a $t = 0$, té l'estat X ($\Psi_0(X) = X$). Com és ben sabut, donada una òrbita periòdica γ_i en un entorn de L_1 o de L_2 , on la família és inestable, hi tenim associades les seves varietats estable i inestable que es defineixen per

$$W_{\gamma_i}^s = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\Psi_t(X) - \gamma_i\| = 0 \right\},$$

$$W_{\gamma_i}^u = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Psi_t(X) - \gamma_i\| = 0 \right\},$$

on la doble barra denota distància euclidiana a l'espai de fase. És a dir, que la varietat invariant estable (respectivament, inestable) està formada pel conjunt d'òrbites asimptòtiques que tendeixen a l'òrbita periòdica γ_i quan el temps tendeix a més infinit (respectivament, a menys infinit).

Les òrbites de $W_{\gamma_i}^s$ i $W_{\gamma_i}^u$ tenen la mateixa energia que l'òrbita periòdica γ_i i, per tant, pertanyen a la mateixa varietat energètica 3-dimensional que conté γ_i . A més, topològicament, $W_{\gamma_i}^s$ i $W_{\gamma_i}^u$ es poden descriure com a cilindres 2-dimensionals que formen, per a cada varietat, dues branques que es troben a l'òrbita

periòdica d'una manera similar al comportament d'un punt de sella (en aquest cas el punt és un cercle S^1), tal com es veu a la figura 6. Notem que per a cada parell de branques una es dirigeix, o prové, de la component interior a la corba de velocitat zero, mentre que l'altra ho fa respecte de la component exterior. També, dins el nivell d'energia, aquests cilindres separen diferents comportaments depenent de si un estat es troba a dins, a fora o al damunt seu, tal com es pot veure als treballs iniciats per Conley per al problema restringit (vegeu [11, 17, 18]).

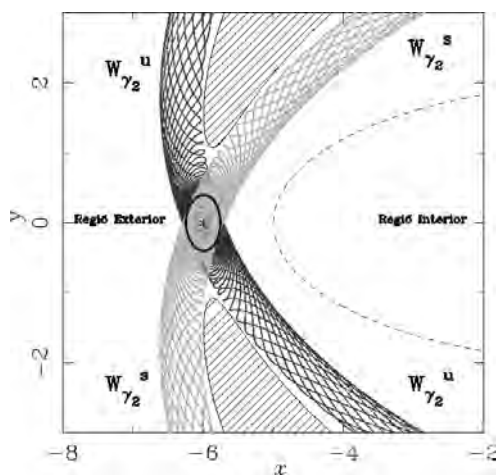


FIGURA 6: Varietats invariants estable i inestable d'una òrbita periòdica al voltant del punt L_2 . En gris clar, les dues branques de la varietat invariant estable, $W_{\gamma_i}^s$, i en gris més fosc, les dues branques de la varietat invariant inestable, $W_{\gamma_i}^u$. Les regions prohibides es representen per les zones ratllades mentre que la línia discontinua de la regió interior assenyalava la posició de la barra i la corba negra al voltant del punt d'equilibri representa l'òrbita periòdica, γ_i . Les components dinàmiques es faran visibles en una galàxia en cas que les seves òrbites continguin estrelles.

Una bona manera de visualitzar i entendre aquestes varietats 3-dimensionals és per mitjà de seccions de Poincaré. En el nostre cas, prenem la superfície de secció S definida per $y = 0$, $x > 0$ amb $\dot{y} < 0$. És a dir, considerem les òrbites en tallar la part positiva de l'eix x amb la component de velocitat y negativa.

En aquesta secció S considerarem les interseccions de les varietats $W_{\gamma_2}^s$ i $W_{\gamma_2}^u$. Sortint de l'òrbita periòdica γ_2 i integrant temps endavant per a $W_{\gamma_2}^u$ (resp. temps enrere per a $W_{\gamma_2}^s$) obtenim el primer tall de la varietat amb S , que anomenem $W_{\gamma_2}^{u,1}$ (resp. $W_{\gamma_2}^{s,1}$).

Tal com veiem a la figura 7, on representem la projecció (x, \dot{x}) de $W_{\gamma_2}^{u,1}$ i de $W_{\gamma_2}^{s,1}$ dins de S , $W_{\gamma_2}^{u,1}$ i $W_{\gamma_2}^{s,1}$ són dues corbes tancades. És també important

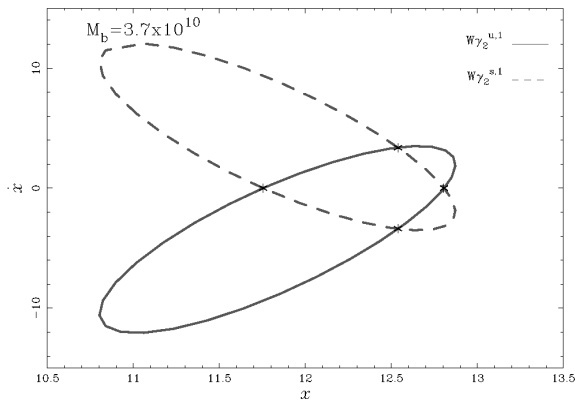


FIGURA 7: Tall de les varietats invariants estable i inestable d'una òrbita periòdica al voltant del punt L_2 amb la secció S . En línia discontinua, el primer tall de la branca de la varietat invariant estable, $W_{\gamma_2}^s$, i en línia contínua, el primer tall de la branca de la varietat invariant inestable, $W_{\gamma_2}^u$. Els punts marcats amb un asterisc corresponen a òrbites homoclíniques.

notar que una parella (x, \dot{x}) a S representa una òrbita de manera única en cas que l'energia estigui fixada, ja que l'estat (x, y, \dot{x}, \dot{y}) es completa amb $y = 0$ i la coordenada $\dot{y} < 0$ s'obté imposant la restricció que l'estat pertanyi a la varietat de nivell d'energia donat.

Arribats a aquest punt ens cal recordar alguns conceptes pel que fa a òrbites asimptòtiques temps endavant i temps enrere a la vegada: una òrbita ψ es diu que és homoclínica si $\psi \in W_{\gamma_i}^u \cap W_{\gamma_i}^s$, $i = 1, 2$. Anàlogament es diu que ψ és heteroclínica si $\psi \in W_{\gamma_i}^u \cap W_{\gamma_j}^s$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Tenim, per tant, que un punt de $W_{\gamma_2}^{u,1} \cap W_{\gamma_2}^{s,1}$ representat a la projecció (x, \dot{x}) de S es correspon amb una òrbita homoclínica. A l'exemple de la figura 7 hi ha quatre punts però, com és natural, la forma i posició relativa de $W_{\gamma_2}^{u,1}$ i $W_{\gamma_2}^{s,1}$ varia depenent de l'energia i del model galàctic considerat i i poden tallar-se o no.

Les interseccions, o la manca d'interseccions, de varietats estables i inestables determinen l'esquelet fonamental de la dinàmica i classifiquen, d'alguna manera, conjunts de trajectòries atenent al seu comportament passat i futur, tal com va intuir Poincaré i després Smale i molts altres van formalitzar i estudiar. En un context semblant al que ens ocupa es poden trobar descripcions i anàlisis detallades a [18, 22, 25] per al cas del problema pla, i a [17] per al cas del problema espacial. Però, pel que fa a l'aplicació concreta de l'exemple que representem a la figura 7, referit a l'estudi de formació de braços i anells en galàxies barrades, només notarem els fets següents:

- Tal com hem dit, els punts de S que es troben damunt de $W_{\gamma_2}^{s,1}$ o de $W_{\gamma_2}^{u,1}$ corresponen a òrbites asimptòtiques a γ_2 ja sigui temps endavant o temps enrere.

- Els punts de S que es troben a l'interior de la corba $W_{\gamma_2}^{s,1}$ es corresponen a òrbites dins del cilindre $W_{\gamma_2}^s$ que, temps endavant, passaran pel «coll d'ampolla» que hi ha entre les regions de Hill de la corba de velocitat zero prop de γ_2 i transitaran, d'aquesta manera, de la regió galàctica exterior a la interior, on es troba la barra.
- Els punts de S que es troben a l'exterior de la corba $W_{\gamma_2}^{s,1}$ es corresponen amb òrbites fora del cilindre $W_{\gamma_2}^s$ les quals, temps endavant, la primera vegada que es trobin a prop del mateix «coll d'ampolla» no transitaran sinó que romandran a la regió exterior.
- Per als punts de S que hi ha a les regions interior o exterior a la corba $W_{\gamma_2}^u$ el comportament és totalment anàleg però considerant el temps enrere. És a dir, de manera respectiva, o bé vénen de transitar pel coll d'ampolla, o bé la darrera vegada que han passat a prop del coll d'ampolla no han transitat.

Atenent a aquests fets, diferents regions de S queden classificades segons el seu comportament passat i futur. És clar que «per veure» més endavant en el futur, o més enrere en el passat, caldria considerar més interseccions ($W_{\gamma_2}^{s,j}$, $W_{\gamma_2}^{s,j}$, $j = 2, 3, \dots$) i també el paper de $W_{\gamma_1}^{s,j}$, $W_{\gamma_1}^{s,j}$, ($j = 1, 2, \dots$) les quals es poden intersecar entre si, i també amb les de γ_2 , la qual cosa dóna comportaments homoclínic o heteroclínic complexos.

A la figura 8 representem alguns exemples possibles: a la part (a) tenim una òrbita homoclínica a γ_2 i que podria correspondre a algun dels punts d'intersecció de la figura 7. L'òrbita surt de γ_2 , no transita quan està prop de L_1 (és a dir, estaria fora d'una corba $W_{\gamma_1}^{s,1}$ calculada per exemple damunt d'una secció posada a $x = 0$, $y > 0$) i després de fer la volta torna a γ_2 . A la part (b) tenim una òrbita heteroclínica que surt de l'òrbita de Lyapunov a prop de L_2 i arriba a la Lyapunov a prop de L_1 i que podria estar calculada intersecant les corresponents varietats en una secció posada a $x = 0$. Finalment a la part (c) tenim una òrbita de trànsit que, d'estar prop de la barra a la regió interior, passa pel coll d'ampolla i surt a la regió exterior en espiral.

Aquests tres tipus d'òrbites esdevenen l'esquelet de les estructures d'anells i espirals observades en les galàxies. En el cas que els paràmetres del model siguin els adequats, el sistema presentarà òrbites heteroclíniques i la morfologia global resultant serà la d'anell de tipus rR_1 , és a dir, una galàxia amb els dos anells r i R_1 presents a la vegada; en el cas que els paràmetres del model facin que el sistema presenti òrbites homoclíniques, la morfologia global serà d'anell de tipus R_1R_2 . Finalment, per a certs paràmetres, el sistema només té òrbites de tipus trànsit i, aleshores, depenent de l'angle de cargolament de la varietat invariant, la morfologia global serà d'anell R_2 o de braços espirals. A la secció següent analitzem quins són els paràmetres que diferencien una morfologia d'una altra.

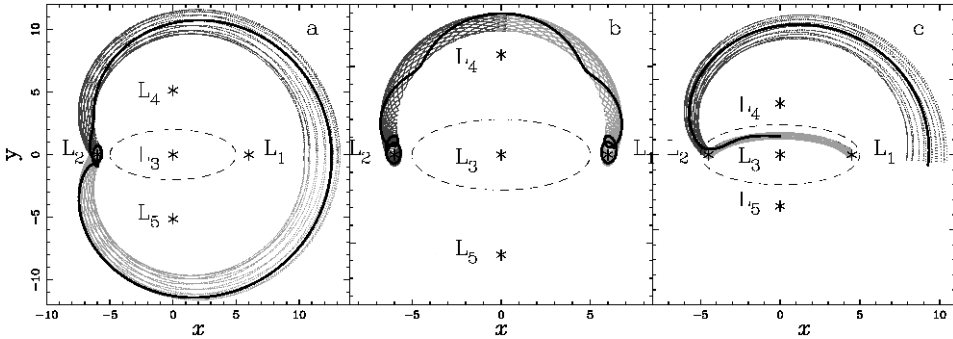


FIGURA 8: Varietats invariants estable i inestable d'una òrbita periòdica al voltant dels punts d'equilibri L_1 i L_2 . En gris clar representem les varietats invariants estables, $W_{y_i}^s$, i en gris més fosc, les varietats invariants inestables, $W_{y_i}^u$. Els asteriscs marquen la posició dels punts d'equilibri i les línies discontinües en forma d'el·lipse assenyalen la forma de la barra. Les òrbites més gruixudes en negre de cada quadre es corresponen amb òrbites: (a) homoclíniques, (b) heteroclíniques i (c) de trànsit.

3.3 Estudi morfològic en funció dels paràmetres galàctics

En aquesta secció volem estudiar com depèn el lloc geomètric de les varietats invariants, i per tant, l'existència d'òrbites homoclíniques, heteroclíniques i de trànsit, dels paràmetres de la barra. Considerarem dues famílies de models lleugerament diferents. El primer, que anomenarem model A, tindrà un disc de Kuz'min/Toomre (2), un esferoide (3) i una barra de Ferrers (4). El segon, que anomenem model B, tindrà la mateixa component axisimètrica que el model A i una barra quadrupol (6). Els models de tipus A tenen quatre paràmetres lliures principals: la seva concentració central ρ_c ; el quocient dels semieixos de la barra, a/b ; la massa de la barra, M_b (5), i la velocitat angular, Ω_p (parametritzada mitjançant el radi de Lagrange² r_L). A [29] vàrem comprovar que només la massa de la barra i el radi de Lagrange tenen una influència en regions exteriors, i per tant, limitem l'estudi a aquests dos paràmetres. Pel que fa al model B, només té dos paràmetres lliures que són l'amplitud del potencial de barra, A_b , i el radi de Lagrange. La resta de paràmetres dels models restaran fixats. Per a cadascun dels models, construïm una graella on en cada quadre considerem uns valors rellevants per a aquest espai de paràmetres: (r_L, M_b) per al model A i (r_L, A_b) per al model B (vegeu els panells superior i inferior, respectivament, de la figura 10). Cada fila correspon a un valor de la força de la barra i cada columna, a un valor de la velocitat angular del patró.

² Definim r_L com la distància entre els punts d'equilibri L_1 i L_2 al centre de la galàxia. Aquesta distància està relacionada amb la velocitat angular del patró mitjançant:

$$\Omega_p^2 = r_L \left(\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right)_{r_L}, \quad (10)$$

on $\Phi(r)$ és el potencial en el pla galàctic.

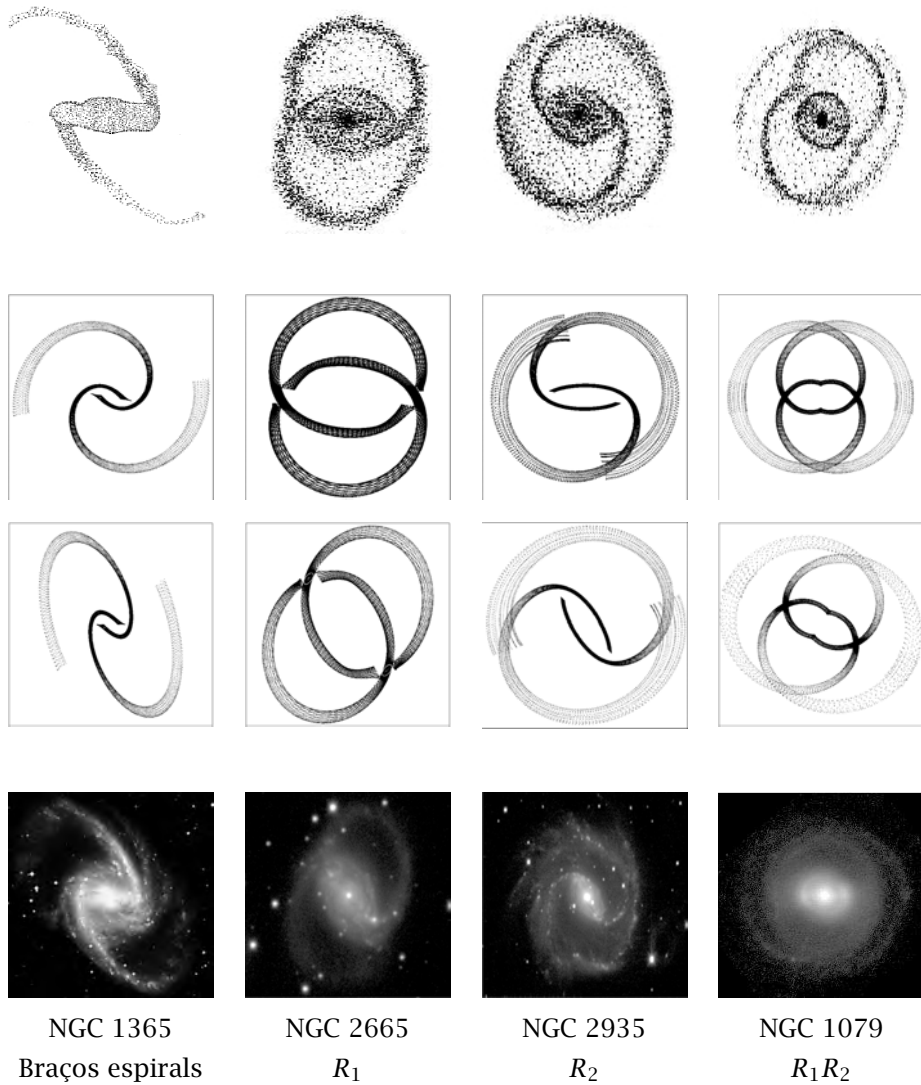


FIGURA 9: Morfologies d'anells i de braços espirals. A la darrera fila tenim quatre galàxies tipus: espiral, R_1 , R_2 i R_1R_2 . La primera fila mostra dibuixos esquemàtics d'aquests tipus realitzats per Buta i Crocker [10]. A les files centrals veiem com les varietats invariants poden reproduir morfologies semblants. Concretament a la segona fila representem les varietats al pla i a la tercera fila, una projecció adequada.

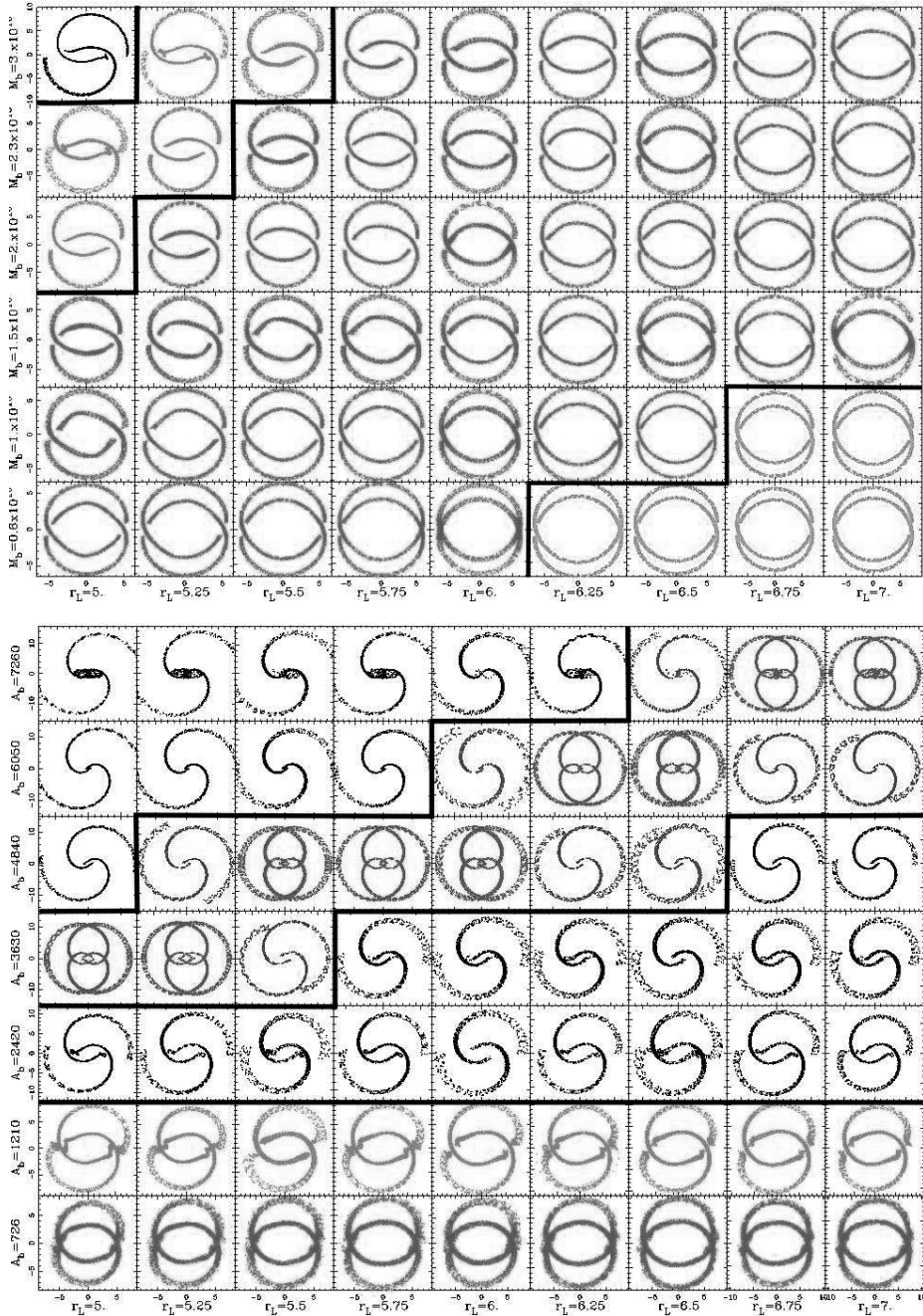


FIGURA 10: Morfologies en funció dels paràmetres principals de la modelització: r_L i M_b per al model A (quadre superior) i r_L i A_b per al model B (quadre inferior). Les transicions estan descrites en el text.

Tenint en compte si cada cas presenta òrbites homoclíniques, heteroclíniques o de trànsit, hem trobat i classificat les morfologies de les branques exteriors de les varietats en espirals, anells R_1 , anells R_2 i anells R_1R_2 . Atenent als quadres de la figura 10 obtenim una clara tendència en el pla (força, velocitat angular). Diferents morfologies estan agrupades en diferents parts del pla formant, de manera aproximada, bandes diagonals. Així, en el model A observem una transició, via anells R_1 , des de la galàxia espiral de l'extrem superior esquerra a l'extrem inferior dret, on els braços exteriors formen pràcticament un sol anell circular. En el model B s'observen dues bandes de galàxies espirals separades per una banda d'anells R_2 i R_1R_2 , mentre que a la part inferior d'aquesta figura hi ha una transició envers els anells R_1 de la darrera fila.

Notem també la diferència entre els dos models. El model A és més físic i aquest fet ens restringeix el rang de valors per a la massa de la barra. En canvi, el model B és un model ad hoc i ens permet ampliar el rang del paràmetre d'amplitud de la barra. La diferència entre els dos quadres ens indica que el rang de massa del model A correspon a un petit rang del paràmetre A_b del model B, entre 726 i 2420. L'exploració del paràmetre A_b en el model B reflecteix les diferents morfologies de les varietats invariants.

4 Comparació amb la teoria de les ones de densitat

Com hem apuntat en la introducció, en la teoria d'ones de densitat els braços espirals es formen a causa de petites pertorbacions en la component gasosa. Segons aquesta teoria, els núvols de gas que giren en el disc es troben aquesta pertorbació, es crea una sobredensitat que fa que es produeixin xocs i formació estel·lar i les estrelles formades evolucionen i continuen girant en el disc. Per tant, les estrelles travessen el braç espiral transversalment. El sentit de circulació de les estrelles és una de les diferències més importants entre les dues teories. En la teoria de les varietats invariants, les partícules circulen per dins els tubs de les varietats, és a dir, resseguint el braç espiral. En la figura 11 veiem quina és la circulació natural en un model de varietats invariants. Partint de la part interna de la galàxia, les partícules seguirien la branca interior de la varietat estable, s'acostarien al punt d'equilibri i escaparien cap enfora seguint la branca exterior de la varietat inestable. Aquesta circulació, però, porta d'alguna manera implícit el fet que les partícules dels braços provenen del centre de la galàxia i que la barra fa de reserva per als braços. Tenint en compte que les simulacions de N -cossos han demostrat que la barra no és una estructura estable sinó que evoluciona en el temps allargant-se i frenant-se (e.g. Widrow *et al.* [39] i referències a l'interior), sembla que a la llarga s'haurien de veure galàxies on la barra brilli menys que els braços, i aquest fet no s'observa. Mitjançant simulacions de partícules test, hem pogut comprovar que no totes les partícules que poblen els braços espirals provenen del centre de la barra. A mesura que la barra es va formant en el disc de la galàxia, les varietats també van apareixent i partícules amb la posició i velocitat adequada que inicialment estaven en les parts externes del disc, ara segueixen les varietats.

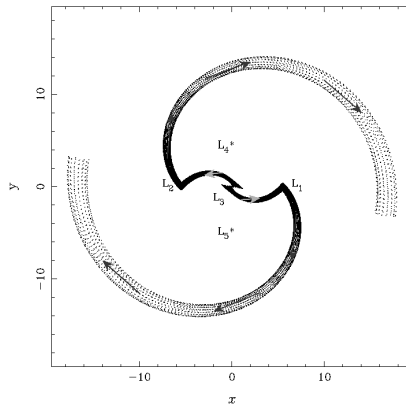


FIGURA 11: Sentit de circulació de les partícules al llarg de les varietats invariants. Les varietats estables es disposen a la part interior de la figura i les inestables a la part exterior.

Una altra diferència amb els braços originats mitjançant ones de densitat fa referència a la morfologia. La teoria de les ones de densitat consisteix, a grans trets, a pertorbar la dinàmica del disc mitjançant una funció que, descomposta en sèrie de Fourier, recull el mode $m = 2$ i té un lloc geomètric imposat que, de manera estàndard, és d'una forma logarítmica. És a dir, els braços espirals generats per la teoria d'ones de densitat tenen una forma logarítmica, imposada per les pròpies equacions. Aquesta forma s'ha deduït a força de deprojectar una mostra de galàxies espirals normals i comprovar que la majoria de les espirals es poden ajustar mitjançant una funció logarítmica (vegeu [23]). Aquest estudi, però, només inclou les espirals normals, sense barra. En galàxies barrades s'aprecia com l'espiral no espirala cap enfora sinó que s'expandeix fins a assolir un radi màxim i després retorna a la regió de la barra, com per exemple a la galàxia NGC 1365 representada a la figura 12. Aquest fenomen també el poden reproduir les varietats invariants. Observem la mateixa figura 12, on en el quadre de l'esquerra es detecta la sobredensitat dels braços en la galàxia NGC 1365 i en el de la dreta, la sobreposem amb les varietats invariants d'un model de tipus B amb $r_L = 5$ i $A_b = 1210$, en el pla $(\ln(r), \theta)$. En aquest pla, un braç logarítmic es representaria amb una línia recta.

També hi ha certs paràmetres dels models que permeten que les varietats invariants tinguin una forma aproximadament logarítmica. Estudiem com varia l'angle d'enrotllament dels braços obtinguts mitjançant varietats invariants en funció de la força de la barra, expressada com a quocient de la força tangencial de la barra en el radi de Lagrange i la força radial de la component axisimètrica. En cada model la forma de les varietats invariants s'ha ajustat a una espiral logarítmica. El resultat reproduïx l'obtingut per Schwarz [33] mitjançant simulacions dinàmiques amb partícules test i també les dades observacionals obtingudes per Martínez-García [24] a partir d'una mostra de galàxies externes i donada a la figura 13.

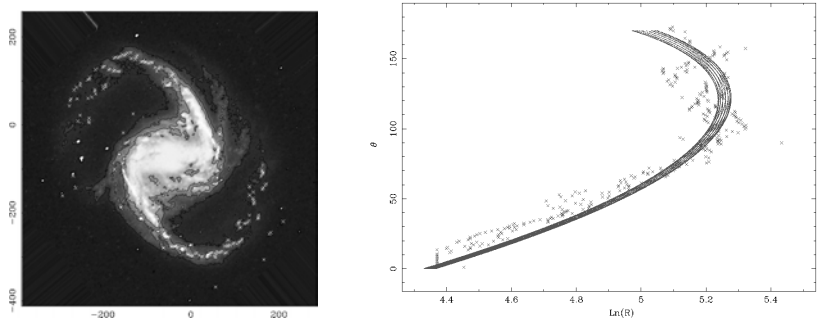


FIGURA 12: En el panell de l'esquerra es representa la galàxia NGC 1365 i, marcats amb punts, la sobredensitat donada pels braços espirals. En el panell de la dreta, sobreposem els punts corresponents a la figura de l'esquerra amb les varietats invariants corresponent al model B amb $r_L = 5$ i $A_b = 1210$, en el pla $(\ln(r), \theta)$.

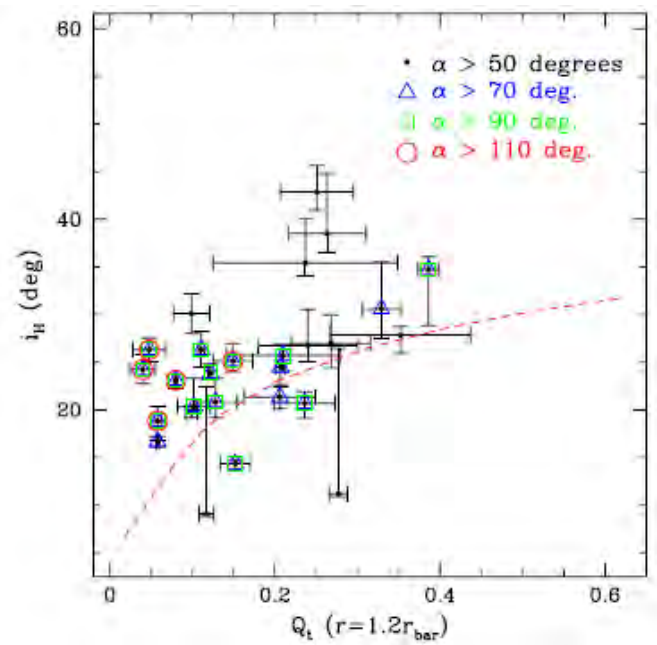


FIGURA 13: Variació de l'angle d'enrotllament en funció de la força tangencial de la barra avaluada en el punt de Lagrange L_1 per a una mostra de galàxies descrita en [24]. La línia discontinua indica la predicció de les varietats invariants.

5 Comparacions observacionals amb galàxies externes

En la sèrie d'articles [29, 30, 31], fets amb la col·laboració d'investigadors de l'Observatori de Marsella, hem aplicat la teoria dels sistemes dinàmics i el càlcul de varietats invariants a un potencial galàctic, tot comprovant que aquestes tenen l'estructura adequada per descriure els braços i els anells de galàxies barrades. Així mateix hem estudiat quin és l'efecte del gas acumulat en aquestes òrbites i quina és la cinemàtica induïda (vegeu [1, 2, 3]).

La forma dels anells es manté no només per als models barrats estàndards, sinó també quan la barra és de tipus «ansae». Aquest tipus de barra es caracteritza per tenir unes sobredensitats de forma més o menys esfèrica al capdavant de la barra, i perquè observacionalment semblen nanses enganxades als extrems de la barra. Podem modelitzar les barres nansa afegint al potencial de la barra dos discs idèntics, cadascun centrat en la posició dels punts de Lagrange L_1 i L_2 . Això fa que canviï la topologia de les corbes de potencial isoefectiu de la manera següent: els punts L_1 i L_2 esdevenen mínims del potencial d'on es bifurquen dos punts de sella, un a cada costat del mínim. Els anomenem L_j^i i L_j^o ($j = 1, 2$) (vegeu el quadre superior esquerre de la figura 14). Tenim llavors que al voltant d'aquests punts d'equilibri existeix una família inestable d'òrbites periòdiques amb les varietats invariants corresponents. La dinàmica que descriuen i la seva forma global, representada a la resta de quadres de la figura 14, és més complexa, però es pot descriure amb les mateixes idees que hem presentat a la secció 3.

Pel que fa a la forma dels anells, hem calculat, per a tota la mostra de models considerats, quina és la relació dels semieixos dels anells que serveix als astrònoms per a les seves classificacions: d_o/D_o , on d_o és el semieix menor de l'anell exterior i D_o és el semieix major de l'anell exterior, així com el quocient dels semieixos de l'anell interior, d_i/D_i , definit de manera anàloga. En la mostra de galàxies amb anells del catàleg de Buta [8], aquests valors estan entre 0.82 ± 0.07 i 0.81 ± 0.06 , respectivament. A la figura 15 els representem segons la força de la barra, descrita en funció de la força tangencial, com s'ha mencionat anteriorment. L'escala de grisos i els símbols dels punts representen les morfologies (R_1 en gris fosc i R'_1 en gris més clar) i els diferents models utilitzats en l'estudi (rombes, model A, i asteriscs, model B). Notem la forta correlació entre el quocient dels semieixos i la força de la barra: com més forta és la barra, més excèntrics són els anells. Notem també que pràcticament tots els valors formen part de la zona ombrejada que coincideix amb el rang observacional que hem mencionat.

Un altre fet observacional que cal tenir en compte és que la major part dels braços espirals estan formats per gas i, per tant, és natural preguntar-se quin serà l'efecte del gas en les òrbites atrapades per les varietats invariants. Per estudiar aquest efecte, ens remetem al treball de Schwarz [33], on s'utilitzen simulacions de partícules test. En certes posicions aleatòries en el disc es simula el xoc de partícules fent perdre una certa quantitat d'energia cinètica a la partícula. En els nostres treballs [2, 3] utilitzem una tècnica semblant: prenem condicions

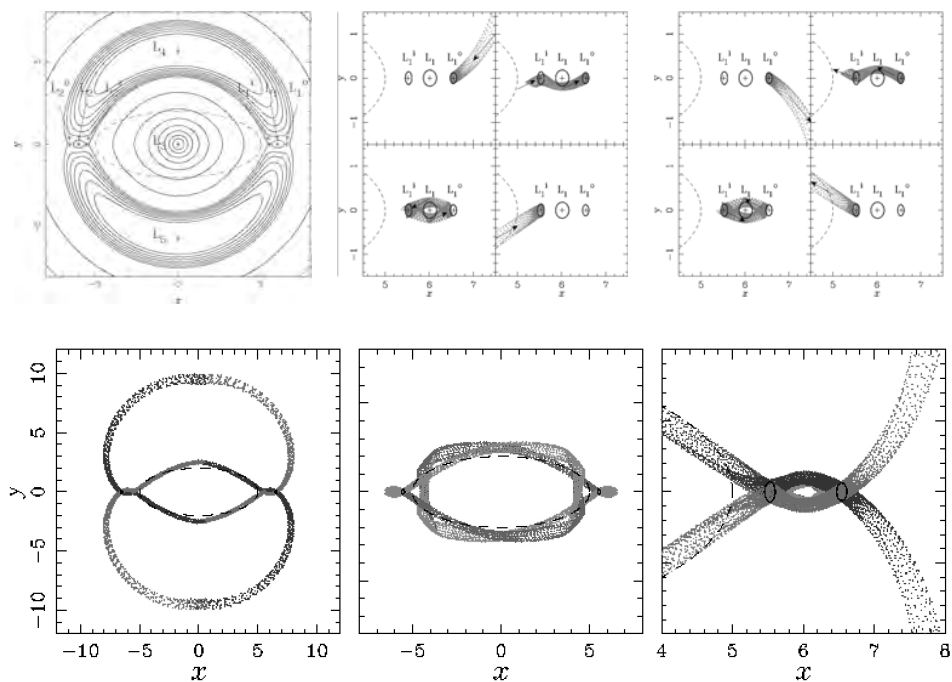


FIGURA 14: Dinàmica al voltant dels punts d'equilibri al final de les barra nansa. Superior esquerra: Corbes de potencial isoefectiu i posició dels punts d'equilibri. Superior centre i dreta: Òrbites periòdiques i varietats invariants al voltant dels nous punts sella L_1^i i L_1^o . Inferior esquerra: les varietats associades al punts L_1^o i L_2^o mantenen la forma global d'anell. Inferior centre: Les varietats invariants associades als punts L_1^i i L_2^i donen una forma més rectangular a l'anell interior. Inferior dreta: Ampliació de la zona dels punts d'equilibri emfatitzant la forma de nansa.

inicials d'òrbites atrapades per les varietats invariants i en una posició aleatòria al llarg de mitja revolució li fem perdre energia cinètica i continuem integrant. Llavors comparem dues coses: les trajectòries originals i les trajectòries amb xoc, i comprovem que les òrbites amb xoc estan, com si diguéssim, per dins dels cilindres de les òrbites originals. És a dir, en fer perdre energia a la partícula, aquesta s'ha mogut de la varietat invariant original a una òrbita confinada per la varietat corresponent de l'energia final. L'efecte global és que els braços amb xoc són més estrets i densos en la part central (vegeu el quadre esquerre de la figura 16). La segona comprovació és la comparació de les varietats invariants amb el resultat de les partícules test de Schwarz. Comprovem que les sobredensitats donades per les simulacions (punts en negre) i les donades per les òrbites amb xocs (zones ombrejades en gris clar) se solapen perfectament, tal com veiem al quadre dret de la figura 16.

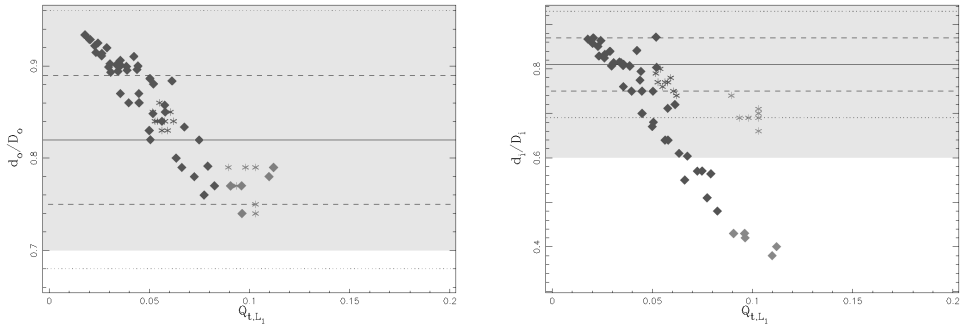


FIGURA 15: Quocient dels semieixos de l'anell exterior (figura esquerra) i de l'anell interior (figura dreta) en funció de la força tangencial avaluada en el punt d'equilibri L_1 . La línia horitzontal sòlida marca la mitjana observacional; la discontinua assenyalava el rang dins la desviació estàndard i la puntejada, el rang dins dues vegades la desviació estàndard. La zona ombrrejada assenyalava el rang observacional obtingut per Buta [8]. L'escala de grisos dels punts denota el tipus de morfologia (gris fosc per a anells R_1 i gris clar per a pseudoanells rR'_1), mentre que els diferents símbols denoten els diferents models (rombes per al model A i asteriscs per al model B).

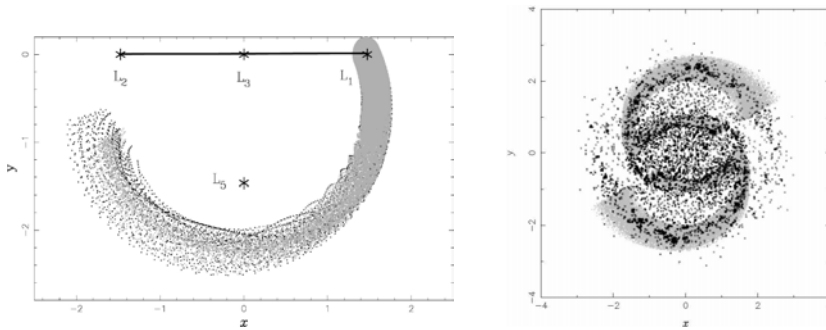


FIGURA 16: Efectes del gas en les òrbites atrapades per les varietats invariants. Panell esquerre: Comparació de les varietats invariants (en negre) i les òrbites afectades pels xocs (ombrrejades amb gris clar). Els asteriscs marquen la posició dels punts d'equilibri, i la línia recta superior marca la posició de la barra. Panell dret: Comparació de les òrbites afectades pels xocs (ombrrejades en gris clar) amb les partícules test de les simulacions de Schwarz (en negre).

Finalment, calculem la velocitat al llarg de la línia de visió en diferents punts de l'espiral i dels anells exteriors (vegeu figura 17). És a dir, projectem el vector velocitat de cada partícula en el sistema inercial al llarg de la línia que uneix la posició de l'observador i la de la partícula. Cadascun dels quadres representa un angle de visió diferent; això vol dir que la posició de l'observador respecte la galàxia és diferent en cadascun dels quatre casos considerats. En conseqüència podem generalitzar el resultat a les diferents configuracions de galàxies que ens podem trobar al cel. L'eix de les x representa l'angle al llarg de la varietat invariant definit de manera matemàtica i l'eix de les y , la projecció al llarg de l'eix de la visió del vector de velocitats en el sistema inercial. Comprovem que en el cas que la morfologia sigui d'anell R_1 , la podem ajustar per una corba sinusoidal (corba vermella), mentre que en el cas d'espirals, mai es pot ajustar per un sinus. La funció sinus és la que normalment s'utilitza per calcular l'eix principal de la galàxia i deprojectar-la.

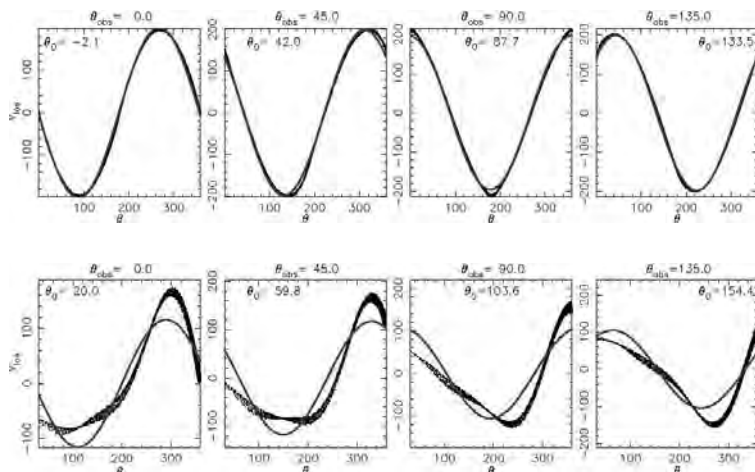


FIGURA 17: Velocitats al llarg de la línia de visió presa amb quatre angles diferents. D'esquerra a dreta: 0° , 45° , 90° i 135° . A les representacions superiors, la morfologia correspon a un anell R_1 , mentre que en les inferiors, la morfologia és de braços espirals. En cada cas, apareixen amb un traç més gruixut en negre les velocitats donades per les òrbites atrapades per les varietats invariants en funció de l'angle al llarg de la varietat, i per una línia grisa l'ajust per una corba sinusoidal. El valor θ_0 indica la posició en la qual la velocitat en la línia de visió s'anulla.

6 Conclusions i recerca actual

La teoria de sistemes dinàmics i, en particular, el paper de les varietats invariants modelitza de manera precisa els problemes de dinàmica galàctica. Mentre que les teories anteriors sobre la formació de braços espirals i/o anells en galàxies barrades no consideren un origen comú, les varietats invariants associades a

les òrbites hiperbòliques localitzades als extrems de la barra sí que proveeixen aquesta possibilitat.

En diversos treballs hem desenvolupat aquesta teoria considerant diferents potencials galàctics i atenent als més usats pels astrònoms a fi de modelitzar galàxies amb barra. Tots tenen una component axisimètrica, que modelitza el disc, bulb i halo de la galàxia, i una component no axisimètrica, que modelitza la barra. Hi ha bàsicament dos tipus de potencials per modelitzar una barra. Un, en el qual el potencial es deriva d'una distribució de densitat i que és més «físic» en el sentit que prové d'una densitat on la barra està ben definida, és a dir, té una llargada, una amplada, una massa. Mentre que la segona opció és utilitzar el segon mode de la descomposició de Fourier de tot el potencial global de la galàxia. Aquests darrers tipus de potencial s'anomenen quadrupol o ad hoc perquè no provenen d'una distribució de densitat donada a priori.

Per a cadascun d'aquests models, hem realitzat comparacions amb observacions i/o hem proporcionat eines de predicció per tal de comprovar si la teoria és plausible. En els tests referents a la morfologia dels anells i espirals hem comprovat que les prediccions s'ajusten bé a la realitat. També hem comprovat que l'efecte del gas en les espirals no afecta la forma de les varietats invariants de manera inadequada, sinó que precisament fa que siguin més estretes. Finalment, hem comprovat que la velocitat en la línia de visió per a morfologies de tipus anell es pot ajustar amb una corba sinusoidal, mentre que si la galàxia té dos braços espirals, no es pot ajustar per un sinus. Aquest fet té conseqüències en el procés de càlcul de l'angle de posició d'una galàxia.

Pel que fa a morfologies més especials, la formació dels ansae als extrems de la barra i la dinàmica associada també queda descrita en un marc comú. Actualment estem usant la teoria per a explicar la formació dels anomenats *warps*. Aquests són deformacions del disc i dels braços espirals en la direcció z , és a dir, fora del pla, tal com passa a la galàxia del signe integral que podem veure a la figura 18. Per les simulacions fetes, sembla que aquest fenomen estaria associat a la precessió de la barra [4].

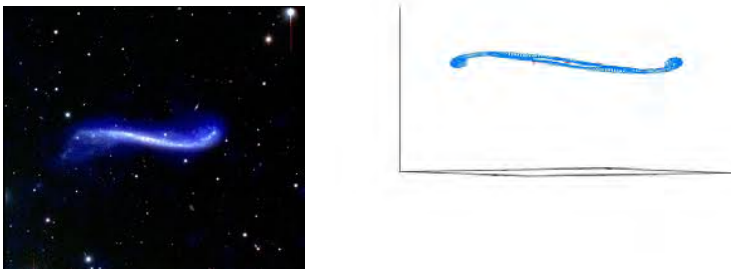


FIGURA 18: Esquerra: Vista transversal de l'anomenada *galàxia del signe integral* (UGC 3697) en la qual podem apreciar la curvatura dels braços en la direcció z . Dreta: Una simulació on les varietats invariants queden corbades respecte de la barra i observacionalment reproduirien el mateix patró.

Agraïments

Aquest treball ha estat parcialment finançat pels ajuts MINECO-FEDER AYA2009-14648-C02-01, AYA2010-12176-E, AYA2012-39551-C02-01, MTM2009-06973, MTM2012-31714, per l'AGAUR 2009SGR-D-D859-E i pel CONSOLIDER CSD2007-00050. Agraïm també l'ajut de l'Agrupació Astronòmica de Manresa.

Referències

- [1] ATHANASSOULA, E.; ROMERO-GÓMEZ, M.; BOSMA, A.; MASDEMONT, J. J. «Rings and spirals in barred galaxies - II. Ring and spiral morphology». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 400 (4) (2009), 1706-1720.
- [2] ATHANASSOULA, E.; ROMERO-GÓMEZ, M.; BOSMA, A.; MASDEMONT, J. J. «Rings and spirals in barred galaxies - III. Further comparisons and links to observations». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 407 (3) (2010), 1433-1448.
- [3] ATHANASSOULA, E.; ROMERO-GÓMEZ, M.; MASDEMONT, J. J. «Rings and spirals in barred galaxies - I. Building blocks». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 394 (1) (2009), 67-81.
- [4] BARAJAS, D. «Precessing models and eventual links with galaxy warps». Màster Tesi. Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC, Barcelona, 2011.
- [5] BINNEY, J.; TREMAINE, S. *Galactic dynamics*. 2a ed. Princeton, Nova Jersey: Princeton University Press, 2008. (Princeton Series in Astrophysics)
- [6] BOSMA, A. «21-cm line studies of spiral galaxies. I - Observations of the galaxies NGC 5033, 3198, 5055, 2841, and 7331. II - The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types». *Astronom. J.*, 86 (1981), 1791-1846.
- [7] BUTA, R. J. «The structure and dynamics of ringed galaxies. I - The morphology of galaxy rings, and statistics of their apparent shapes, relative sizes, and apparent orientations with respect to bars». *Astrophys. J.*, 61 (1986), 609-630.
- [8] BUTA, R. J. «The catalog of southern ringed galaxies». *Astrophys. J. Suppl.*, 96 (1995), 39-116.
- [9] BUTA, R. J.; CORWIN JR, H. G.; ODEWAHN S. C. *The Vaucouleurs Atlas of Galaxies*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [10] BUTA, R. J.; CROCKER, D. A. «The outer Lindblad resonance and the morphology of early type disk galaxies». *Astronom. J.*, 102 (1991), 1715-1723.
- [11] CONLEY, C. C. «Low energy transit orbits in the restricted three-body problem». *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 732-746.
- [12] CONTOPOULOS, G. *Order and chaos in dynamical astronomy*. Berlín: Springer-Verlag, 2002. (Astronomy and Astrophysics Library)
- [13] CONTOPOULOS, G.; PAPAYANNOPOULOS, TH. «Orbits in weak and strong bars». *Astronom. and Astrophys.*, 92 (1-2) (1980), 33-46.

- [14] DEHNEN, W. «The effect of the outer Lindblad resonance of the Galactic bar on the local stellar velocity distribution». *Astronom. J.*, 119 (2) (2000), 800–812.
- [15] FERRERS, N. M. «On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae und elliptic rings of variable densities». *Quart. J.*, 14 (1876), 1–22.
- [16] FUX, R. «Order and chaos in the local disc stellar kinematics induced by the Galactic bar». *Astronom. and Astrophys.*, 373 (2) (2001), 511–535.
- [17] GÓMEZ, G.; KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; MASDEMONT, J.; ROSS, S. D. «Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem». *Nonlinearity*, 17 (5) (2004), 1571–1606.
- [18] KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. «Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics». *Chaos*, 10 (2) (2000), 427–469.
- [19] KUZ'MIN, G. G. «A stationary galaxy model admitting triaxial velocity distribution». *Astronomicheskii Zhurnal*, 33 (1956), 27–45. [En rus]
- [20] LIN, C. C.; SHU, F. H. «On the spiral structure of disk galaxies». *Astrophys. J.*, 140 (1964), 646–655.
- [21] LIN, C. C.; SHU, F. H. «On the spiral structure of disk galaxies, II. Outline of a theory of density waves». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55 (2) (1966), 229–234.
- [22] LLIBRE, J.; MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. «Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L_2 in the restricted three-body problem». *J. Differential Equations*, 58 (1) (1985), 104–156.
- [23] MA, J.; ZHAO, J. L.; SHU, C. G.; PENG, Q. H. «Some statistical properties of spiral galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 350 (1999), 31–37.
- [24] MARTÍNEZ-GARCÍA, E. «Testing theories in barred-spiral galaxies». *Astrophys. J.*, 744 (2) (2012), 92–105.
- [25] MCGEHEE, R. P. «Some homoclinic orbits for the restricted three-body problem». Tesi doctoral. Universitat de Wisconsin-Madison, 1969.
- [26] MIYAMOTO, M.; NAGAI, R. «Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies». *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27 (1975), 533–543.
- [27] PATSIS, P. A.; SKOKOS, CH.; ATHANASSOULA, E. «Orbital dynamics of three-dimensional bars - IV. Boxy isophotes in face-on views». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 342 (1) (2003), 69–78.
- [28] PFENNIGER, D. «The 3D dynamics of barred galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 134 (2) (1984), 373–386.
- [29] ROMERO-GÓMEZ, M.; ATHANASSOULA, E.; MASDEMONT, J. J.; GARCÍA-GÓMEZ, C. «The formation of spiral arms and rings in barred galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 472 (1) (2007), 63–75.

- [30] ROMERO-GÓMEZ, M.; MASDEMONT, J. J.; ATHANASSOULA, E.; GARCÍA-GÓMEZ, C. «The origin of rR_1 ring structures in barred galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 453 (1) (2006), 39–45.
- [31] ROMERO-GÓMEZ, M.; MASDEMONT, J. J.; GARCÍA-GÓMEZ, C.; ATHANASSOULA, E. «The role of the unstable equilibrium points in the transfer of matter in galactic potentials». *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14 (12) (2009), 4123–4138.
- [32] SCHWARZ, M. P. «The response of gas in a galactic disk to bar forcing». *Astrophys. J.*, 247 (1981), 77–88.
- [33] SCHWARZ, M. P. «How bar strength and pattern speed affect galactic spiral structure». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 209 (1984), 93–109.
- [34] SCHWARZ, M. P. «A re-examination of some bar-driven models of spiral structure». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 212 (1985), 677–686.
- [35] SHETH, K. [et al.]. «Evolution of the bar fraction in COSMOS: quantifying the assembly of the Hubble sequence». *Astrophys. J.*, 675 (2) (2008), 1141–1155.
- [36] SZEBEHELY, V. G. *Adventures in celestial mechanics. A first course in the theory of orbits*. Austin, TX: University of Texas Press, 1989.
- [37] TOOMRE, A. «On the distribution of matter within highly flattened galaxies». *Astrophys. J.*, 138 (1963), 385–392.
- [38] DE VAUCOULEURS, G. «Classification and morphology of external galaxies». A: *Astrophysics IV: Stellar Systems*. Berlín-Heidelberg: Springer, 1959, 275–310. (Handbuch der Physik; 53)
- [39] WIDROW, L. M.; PYM, B.; DUBINSKI, J. «Dynamical blueprints for galaxies». *Astrophys. J.*, 679 (2) (2008), 1239–1259.

MERCÈ ROMERO-GÓMEZ
DEPARTAMENT D'ASTRONOMIA I METEOROLOGIA
INSTITUT DE CIÈNCIES DEL COSMOS (ICC)
UNIVERSITAT DE BARCELONA (IEEC-UB)
MARTÍ I FRANQUÈS, 1
08028 BARCELONA
mromero@am.ub.es

PATRICIA SÁNCHEZ-MARTÍN, JOSEP J. MASDEMONT
IEEC-UPC I DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
DIAGONAL, 647 (ETSEIB)
08028 BARCELONA
patricia.sanchez.martin@upc.edu, josep@barquins.upc.edu