Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 28, núm. 1, 2013. Pàg. 87–115. DOI: 10.2436/20.2002.01.48

Endre Szemerédi, Premi Abel 2012

Resum: Aquest article presenta una breu descripció de les contribucions matemàtiques més destacades d'Endre Szemerédi, Premi Abel 2012.

Paraules clau: teorema de Szemerédi, lema de regularitat, teoria extremal de grafs, teoria de Ramsey, algorismes d'ordenació.

Classificació MSC2010: 01A65, 05-02, 11-02.

1 Introducció

El passat 21 de març de 2012, el president de l'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres, Nils Christian Stenseth, va anunciar el guanyador de l'edició 2012 del Premi Abel, considerat com la màxima distinció científica en matemàtiques i que està dotat amb un milió de dòlars. El guardó va ser atorgat al matemàtic hongarès Endre Szemerédi, membre del Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet (Institut de Matemàtiques Alfréd Rényi) de Budapest i professor a la Universitat de Rutgers, Nova Jersey, Estats Units.

La citació del premi diu:

> Per les seves contribucions fonamentals a la matemàtica discreta i a les ciències de la computació i en reconeixement de l'impacte profund i durador d'aquestes contribucions a la teoria additiva de nombres i a la teoria ergòdica.

Un dels resultats més celebrats de Szemerédi és el teorema que porta el seu nom, sobre l'existència de progressions aritmètiques en conjunts d'enters de densitat positiva. La contribució fonamental de Szemerédi, però, consisteix més aviat en una manera original i peculiar de pensar les matemàtiques. Així ho va posar de manifest el membre del comitè del Premi Abel, Terence Tao [59], en rebre la medalla Fields l'any 2006 amb les paraules següents:

Aquest article és una versió actualitzada del que va aparèixer en castellà, amb el mateix títol, a *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 15 (2012), núm. 3, pàg. 537–559.

Endre Szemerédi[1]

> Un teorema famós de Szemerédi afirma que qualsevol conjunt d'enters amb densitat positiva conté progressions aritmètiques arbitràriament llargues. Hi ha diverses demostracions d'aquest teorema profund, però totes elles estan basades en una dicotomia fonamental entre estructura i aleatorietat, cosa que porta a la descomposició de qualsevol objecte en una component estructurada i una component aleatòria.

Convertir aquest principi genèric en un instrument eficaç, del qual es puguin derivar resultats precisos amb sentit matemàtic, és una de les contribucions cabdals de Szemerédi. El valor d'aquesta contribució per a la història de les matemàtiques i les ciències de la computació és el que ha estat objecte de màxim reconeixement, afegint el seu nom a la llista dels onze destacadíssims matemàtics que han rebut el Premi Abel fins avui.

Endre Szemerédi és autor de més de dos-cents articles, la majoria dels quals han tingut un impacte profund en la investigació matemàtica dels darrers cinquanta anys, i el seu ritme de treball segueix, als setanta-dos anys, en plena activitat.

L'objectiu d'aquest article és apropar el lector a algunes de les contribucions més significatives d'Endre Szemerédi, i està organitzat com segueix.

Comencem a la secció 2 amb el *teorema de Szemerédi* que ja hem mencionat. La demostració de Szemerédi d'aquest teorema segueix sent considerada com un dels exercicis més sofisticats de raonament combinatori de la història de les matemàtiques. En aquesta demostració hi ha el germen de l'anomenat

1 Fotografia gentilment cedida per Francesc Creixell, i que apareixerà en el projecte fotogràfic *Abstract minds*.

lema de regularitat de Szemerédi, que està considerat com una de les seves contribucions més importants. El lema de regularitat s'ha consolidat com un potent instrument d'anàlisi amb nombroses aplicacions, i ha estat analitzat des de molt diverses perspectives, algunes de les quals es tracten a la secció 3.

Una de les conseqüències del lema de regularitat és l'anomenat *lema d'eliminació*, que proporciona demostracions més simples del teorema de Szemerédi, una de les quals s'inclou a la secció 4.

El lema de regularitat s'enuncia habitualment en el llenguatge de la teoria de grafs, i és en aquest context en el qual es troben algunes de les seves aplicacions més naturals. La secció 5 recull algunes de les contribucions de Szemerédi en aquesta àrea. Una de les passions matemàtiques de Szemerédi, que revela la influència del seu mestre i amic Pál Erdős, és la teoria combinatòria de nombres. A la secció 6 es descriuen algunes de les contribucions de Szemerédi en aquesta àrea més enllà del teorema que porta el seu nom. En relació amb una d'aquestes contribucions mencionem també un dels resultats més cèlebres de Szemerédi a la geometria discreta, el teorema de Szemerédi-Trotter.

A continuació, la secció 7 tracta una de les contribucions més significatives de Szemerédi a la teoria de Ramsey: la determinació dels nombres de Ramsey $R(3,n)$. De les diverses contribucions de Szemerédi a la informàtica teòrica tractarem a la secció 8 la seva aportació al problema dels algorismes d'ordenació, que va contribuir al naixement dels principis de desaleatorització d'algorismes probabilístics i a mètodes de paral·lelització d'algorismes.

Acabarem aquest recorregut amb una aproximació biogràfica i humana a Szemerédi, i amb les relacions que el darrer guardonat amb el Premi Abel ha mantingut amb el nostre país.

2 Progressions aritmètiques

Als anys vint del segle XX Göttingen era un dels centres de la investigació matemàtica europea, i atreia molts dels matemàtics que van marcar la història de la primera meitat del segle. Un dels visitants a l'estiu del 1928 va ser el jove Van der Waerden, que aleshores va tenir coneixement d'un problema d'enunciat simple que estava desafiant els esforços dels matemàtics més il·lustres que hi havia a Göttingen. Es tractava de provar que qualsevol partició dels enters en un nombre finit de parts en conté una amb progressions aritmètiques arbitràriament llargues. Van der Waerden va aconseguir una prova d'aquest resultat que es coneix avui amb el teorema que porta el seu nom. L'excel·lent article d'Ignasi Mundet [42], publicat en aquest BUTLLETÍ, està dedicat a aquest resultat i al seu fecund desenvolupament fins als nostres dies.

El teorema de Van der Waerden és un dels resultats bàsics de l'anomenada *teoria de Ramsey aritmètica*. Aquesta denominació es fa en relació amb el teorema de Ramsey, l'enunciat del qual es pot resumir de forma imprecisa dient que qualsevol partició finita d'una estructura prou gran (o infinita) conté en una de les parts una subestructura donada. El teorema original que dóna nom a la teoria va ser provat per un (altre) matemàtic peculiar, Frank Plumpton Ramsey, el 1930 (vegeu per exemple [9] per a una història de la teoria de Ramsey i del personatge que la va iniciar). Pál Erdős i György Szekeres van provar poc després un resultat equivalent el 1935 i, de fet, el desenvolupament de la teoria de Ramsey va ser impulsat sobretot per Erdős. No és estrany que Erdős, interessat fonamentalment en la teoria de nombres, relacionés el teorema de Van der Waerden amb la vella qüestió sobre l'existència de progressions aritmètiques de nombres primers.

Com havia fet amb altres problemes aritmètics, Erdős va enfocar aquest problema centrant-se més en propietats qualitatives generals que en les propietats aritmètiques dels conjunts de nombres sobre els quals es plantejaven les preguntes, fossin quadrats, potències o nombres primers. Com un primer pas, Erdős i Turán van conjecturar el 1936 que l'existència d'una progressió aritmètica de llargada k en un conjunt d'enters està assegurada simplement per raons de densitat: qualsevol conjunt d'enters amb densitat positiva ha de contenir una progressió aritmètica de llargada k. Aquí la mesura de densitat d'un conjunt A d'enters és

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n},$$

és a dir, el límit superior de la proporció d'enters a A dins d'intervals de la forma $[1, n]$. Aquest valor s'anomena, tècnicament, la *densitat superior* de A. El teorema de Van der Waerden és una conseqüència d'aquesta conjectura, ja que en una partició finita dels enters, almenys una de les parts ha de tenir densitat positiva.

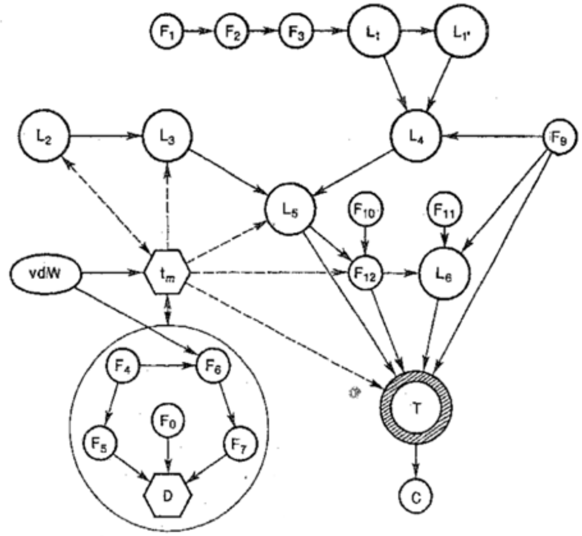
Vint anys després d'haver estat formulada, Klaus Roth va obtenir el primer resultat positiu de la conjectura d'Erdős-Turán per a progressions de llargada 3. Roth va fer servir una versió del mètode del cercle de Hardy i Littlewood, combinat amb una idea que també faria servir més endavant Szemerédi: el resultat és trivialment cert per a conjunts de densitat gran, pròxima a 1. Es tracta d'analitzar aleshores la densitat màxima en la qual podria haver-hi un contraexemple a la conjectura i arribar a una contradicció veient que el possible contraexemple hauria de tenir una densitat estrictament més gran sobre alguna progressió aritmètica. L'ús de l'anàlisi de Fourier limitava, en aquell moment, l'aplicació del mètode a progressions de llargada més gran que 3.

Szemerédi va estendre primer, el 1969, el teorema de Roth a progressions aritmètiques de llargada 4 fent servir mètodes combinatoris. Sis anys més tard, el 1975, en una sessió plena de gom a gom al Colloque de Théorie de Graphes et Combinatoire a Marsella, i amb un títol críptic, *On certain sets of integers*, Endre Szemerédi va presentar la demostració de la conjectura d'Erdős-Turán per a progressions de llargada k arbitrària, que es coneix avui com a *teorema de Szemerédi*.

Teorema 1 (teorema de Szemerédi). *Qualsevol conjunt d'enters amb densitat superior positiva conté infinites progressions aritmètiques de llargada k per a cada nombre natural k.*

Erdős acostumava a oferir recompenses pels problemes que proposava, i el preu que hi donava suggeria la dificultat del problema. Per a la conjectura d'Erdős-Turán havia ofert la respectable quantitat de 1.000 \$. Arribat el moment, les seves dificultats financeres li van permetre pagar només la meitat de l'import que havia promès. Tot i això, aquest va ser l'import més gran que Erdős va haver de pagar mai per la solució d'algun dels seus problemes.

La demostració de Szemerédi del teorema que porta el seu nom segueix sent considerada una obra mestra de raonament combinatori. El diagrama que acompanya l'article on es presenta la demostració [53] i que es reprodueix a la figura 1, dóna una idea de la complexitat del raonament.



The diagram represents an approximate flow chart for the accompanying proof of Szemerédi's theorem. The various symbols have the following meanings: F_k = Fact k, L_k = Lemma k, T = Theorem, C = Corollary, D = Definitions of B, S, P, α, β, etc., t_m = Definition of t_m, vdW = van der Waerden's theorem, F_0 = "If $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ is subadditive then $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$ exists".

FIGURA 1: Diagrama que expressa el flux de la demostració, inclòs a [53, pàg. 202] per guiar el lector.

Un dels elements de la demostració que es va convertir després en una eina bàsica en diversos àmbits, incloent la teoria de grafs, la teoria de computació, la teoria de nombres o la geometria discreta, és el *lema de regularitat de Szemerédi*. A la secció 3 es descriu l'enunciat i algunes aplicacions d'aquest lema i a la secció 4 s'indica la seva aplicació per obtenir una demostració directa del teorema de Roth per a progressions de llargada 3.

La complexitat de la demostració original del teorema de Szemerédi va ser probablement un dels estímuls que van animar altres matemàtics a explorar demostracions alternatives del teorema. De manera sorprenent, Hillel Furstenberg [22] va obtenir poc després, el 1977, una demostració del teorema de Szemerédi basada en la teoria ergòdica. El teorema de recurrència de Furstenberg diu que, donat un espai de probabilitat $(X, \mathcal{B}, \mu)$ i un enter positiu k, per a cada operador invertible T que conserva la mesura i cada conjunt A de mesura positiva hi ha infinits nombres naturals n per als quals

$$\mu(A \cap T^n A \cap T^{2n} A \cap \cdots \cap T^{(k-1)n} A) > 0.$$

Furstenberg va provar que aquest enunciat és lògicament equivalent al teorema de Szemerédi a través del que avui s'anomena el *principi de transferència de Furstenberg*, que introdueix una topologia en el conjunt de nombres enters i associa a cada conjunt d'enters de densitat positiva un conjunt de mesura positiva en un cert espai de probabilitat.

Aquesta aproximació al teorema de Szemerédi va resultar extremament fructífera i va permetre obtenir extensions del teorema que, fins molt més tard, no van tenir altra demostració que la que proporcionava la teoria ergòdica. Per exemple, Furstenberg i Katznelson [23] van obtenir la versió multidimensional del teorema de Szemerédi:

Teorema 2 (teorema de Szemerédi d-dimensional). *Siguin $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{N}^d$ k vectors d-dimensionals de coordenades enteres. Per a cada conjunt A de densitat superior de Banach positiva a $\mathbb{N}^d$ hi ha infinites parelles $(a, r) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ tals que els elements $a + rv_1, \dots, a + rv_k$ estan tots dins del conjunt A.*

El teorema de Szemerédi es redueix al cas $d = 1$ i $v_i = i - 1$, $i = 1, \dots, k$. L'impuls que va donar el teorema de Szemerédi a aquesta connexió amb la teoria ergòdica està reflectit també en la citació del Premi Abel.

El 2001 Gowers [25] va obtenir una tercera demostració del teorema de Szemerédi a través de l'anàlisi de Fourier, i va estendre així el camí iniciat per Roth cinquanta anys abans. Amb aquesta finalitat Gowers va introduir eines innovadores en l'anàlisi de Fourier clàssic, com les que avui s'anomenen *normes de Gowers*, combinades amb noves eines combinatòries, com una versió refinada del teorema de Balog i Szemerédi (una altra vegada Szemerédi en acció) que es coneix avui com a *teorema de Balog-Gowers-Szemerédi*. L'avantatge de la demostració de Gowers és que proporciona els millors resultats quantitatius sobre la menor densitat que garanteix l'existència de progressions aritmètiques d'una certa llargada. Erdős denotava per $r_k(n)$ la mida màxima d'un conjunt d'enters a l'interval $[1, n]$ que no conté progressions aritmètiques de llargada k. El teorema de Szemerédi es pot enunciar com

$$r_k(n) = o(n) \quad (n \to \infty)$$

per a qualsevol enter positiu k. La demostració de Gowers dóna

$$r_k(n) < \frac{n}{(\log \log n)^{c(k)}}, \quad c(k) = 2^{-2^{k+9}},$$

que, per a k arbitrari, és la millor fita que es coneix. Per a apreciar el valor d'aquest resultat quantitatiu, cal recordar que les fites involucrades a la demostració del teorema de Van der Waerden creixen de manera astronòmica amb k. De fet, Gowers [24] va provar que aquest creixement és inevitable, tot i que la fita anterior redueix l'expressió original en diversos ordres de magnitud.

Com era habitual en Erdős, un cop provat el teorema de Szemerédi va plantejar el repte següent en la mateixa direcció:

Conjectura 3 (Erdős). Sigui $a_1 < a_2 < \cdots$ una successió d'enters tal que la sèrie dels seus inversos

$$\sum_i \frac{1}{a_i}$$

és divergent. Aleshores la succesió conté progressions aritmètiques arbitràriament llargues.

Aquest és encara un problema obert, la solució afirmativa del qual resoldria la qüestió de l'existència de progressions aritmètiques arbtràriament llargues en la successió de nombres primers, ja que la sèrie dels inversos de primers és divergent. Tot i la dificultat d'aquest problema, combinant una altra vegada les eines proporcionades per Szemerédi amb altres ingredients, Green i Tao [29] van provar el 2005 el que ha esdevingut el cèlebre *teorema de Green-Tao*: qualsevol subconjunt de densitat positiva dins els nombres primers conté progressions aritmètiques arbitràriament llargues. Podeu trobar una descripció dels ingredients del teorema de Green-Tao a l'excel·lent article de Martin Klazar [33] que va publicar aquest Butlletí poc després de fer-se públic aquest resultat excepcional.

Hi ha encara una quarta demostració del teorema de Szemerédi de naturalesa purament combinatòria i relacionada amb el seu lema de regularitat. Les dues seccions següents expliquen l'enunciat del lema de regularitat, algunes de les seves conseqüències i la seva relació amb el teorema de Szemerédi.

3 El lema de regularitat

El *lema de regularitat* de Szemerédi, una de les seves contribucions més impactants, ha resultat un instrument de múltiples aplicacions en diverses àrees de les matemàtiques. El conjunt de tècniques associades a aquesta eina constitueix el que s'anomena avui el *mètode de regularitat* de Szemerédi. Com ell mateix explica, el mètode de regularitat no és només una eina específica, sinó tota una filosofia per a estudiar problemes discrets amb un nombre gran d'elements. La filosofia es resumeix en la frase «En qualsevol caos hi ha un ordre», el títol de la conferència que Endre Szemerédi va donar a l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) el juny de 2012. A continuació expliquem el significat que Szemerédi dóna a aquesta frase.

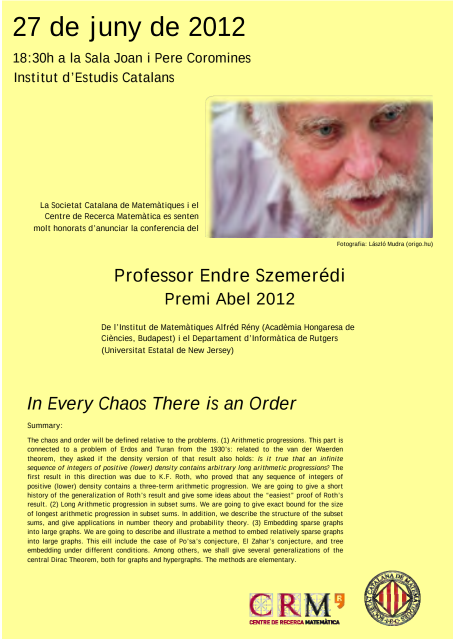


FIGURA 2: Cartell que va anunciar la conferència de Szemerédi a l'IEC del 27 de juny de 2012.

Originalment el lema de regularitat s'expressa en el llenguatge de la teoria de grafs, un dels elements més simples de l'univers matemàtic juntament amb els conjunts i els nombres. Recordem que un *graf* és simplement un conjunt de parells d'elements d'un conjunt donat, que expressa una relació binària entre aquests elements. Seguint l'imaginari habitual, els elements del conjunt de referència V s'anomenen *vèrtexs* i el conjunt E de parells, *arestes*. Així, un graf és un parell $G = (V, E)$. Si G té n vèrtexs, aleshores el seu nombre d'arestes és com a màxim $\binom{n}{2}$.

El lema de regularitat diu que qualsevol graf prou gran es pot aproximar per un graf que té una part estructurada i una part aleatòria en un sentit que es pot fer precís.

Comencem per considerar un *graf bipartit*; és a dir, un graf que admet una partició del conjunt de vèrtexs en dues parts, $V = A \cup B$, i en el qual totes les arestes tenen exactament un vèrtex en cadascuna d'aquestes dues parts. Suposem que, per construir el conjunt d'arestes de $G = (A \cup B, E)$, escollim cadascun dels parells $(a, b) \in A \times B$ amb probabilitat p independentment dels altres. El nombre esperat d'arestes a G és $p|A| \cdot |B|$ i la densitat esperada d'arestes del graf és

$$p = \frac{|E(G)|}{|A| \cdot |B|}.$$

A més, per a qualsevol parell de subconjunts $X \subset A$ i $Y \subset B$, la densitat esperada d'arestes al subgraf induït per aquests subconjunts és també

$$p = \frac{e(X,Y)}{|X| \cdot |Y|},$$

on $e(X,Y)$ denota el nombre d'arestes de G amb un vèrtex a X i un a Y.

Considerem ara un graf arbitrari G i dos subconjunts disjunts de vèrtexs $A, B \subset V$. La *densitat* del parell de subconjunts a G es defineix com

$$d(A,B) = \frac{e(A,B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Per a un nombre real $\epsilon > 0$ fixat diem que el parell (A,B) és *ϵ-regular* si

$$\forall X \subset A,\ \forall Y \subset B : |X| \geq \epsilon|A|,\ |Y| \geq \epsilon|B|,$$

se satisfà

$$|d(A,B) - d(X,Y)| \leq \epsilon.$$

És a dir, la densitat de qualsevol parell (X,Y) de subconjunts prou grans (podríem dir de densitat positiva) de A i B difereix menys que ϵ de la densitat del parell (A,B). Els grafs bipartits aleatoris que hem definit abans tenen certament la propietat de ser ϵ-regulars amb alta probabilitat. Així podem dir que un parell ϵ-regular es comporta aproximadament com un graf aleatori.

L'avantatge del model dels grafs aleatoris que hem definit és la simplicitat de la seva anàlisi, almenys per a molts dels problemes naturals en teoria de grafs. Les arestes apareixen de forma independent amb probabilitat fixada, un model que en teoria de probabilitat es coneix molt a fons. Aquest avantatge es manté en els parells ϵ-regulars amb un grau d'aproximació definit pel paràmetre ϵ.

El lema de regularitat diu que, fixat $\epsilon > 0$, *qualsevol* graf prou gran admet una partició en un nombre finit de parts, la majoria de les quals formen parells ϵ-regulars. Més específicament:

Teorema 4 (lema de regularitat, Szemerédi [54]). *Per a cada $\epsilon > 0$ i cada número natural m existeixen $M = M(\epsilon, m)$ i $N = N(\epsilon, m)$ amb la propietat següent.*

Qualsevol graf G amb $n \geq N$ vèrtexs admet una partició $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ del conjunt de vèrtexs en un nombre k de parts que satisfà

$$m \leq k \leq M,$$

amb parts de mides gairebé iguals

$$|V_i - V_j| \leq 1, \quad i,j = 1,\ldots,k,$$

tals que tots els parells (V_i, V_j), llevat de ϵk^2, són ϵ-regulars.

El lema de regularitat captura de forma precisa una propietat universal dels grafs que permet desenvolupar eines d'anàlisis de gran eficàcia. L'elegància de la seva formulació, en la qual l'aproximació es descriu en termes d'un únic paràmetre ϵ, és un exercici de creativitat que es reconeix en la menció del Premi Abel.

Es pot donar un sentit més precís al lema de regularitat interpretant-lo en termes de l'aproximabilitat d'un graf arbitrari per un graf aleatori. Considerem la classe $\mathcal{R}$ de grafs aleatoris $R(v, k, \{p_{ij},\ 1 \le i < j \le k\})$ que tenen conjunt de vèrtexs $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, unió disjunta de k conjunts de mida $|V_i| = v$, amb arestes escollides de forma independent amb probabilitat p_{ij} per als parells de $V_i \times V_j$. El lema de regularitat diu que qualsevol graf prou gran es pot aproximar amb un nivell de precisió arbitrari (donat per ϵ) per un graf de la classe $\mathcal{R}$.

Una primera observació és que si $\{G_n,\ n \ge 1\}$ és una successió de grafs tals que G_n té n vèrtexs i $o(n^2)$ arestes (per exemple una quantitat lineal d'arestes), el lema de regularitat diu simplement que els grafs de la successió poden ser aproximats per grafs nuls, és a dir, sense arestes. En altres paraules, el lema de regularitat només resulta útil per a famílies de grafs *densos*, és a dir, amb cn^2 arestes, una proporció positiva de totes les possibles. El lema també té un enunciat trivial si les parts tenen mida 1, ja que aleshores tots els parells són trivialment ϵ-regulars (la família de conjunts de mida almenys $\epsilon|V_i|$ queda reduïda a V_i). Per això l'enunciat limita superiorment el nombre de parts.

La segona observació és que, en termes quantitatius, els valors de les constants M i N que garanteix l'enunciat són relativament pobres. Això no és només degut al disseny de la demostració, sinó que, com va provar Gowers [24], la fita que s'obté per a M és inevitablement alta, una torre de la forma $2^{2^{2^{\cdots}}}$ d'alçada proporcional a ϵ^{-5}. Aquest és el preu que cal pagar per a obtenir un enunciat tan universal.

Aquestes observacions, però, no eliminen l'eficàcia del lema. La seva universalitat es manifesta no només en les aplicacions sinó en les connexions que s'estableixen amb altres àrees de la matemàtica.

Lovász i Szegedy [40] han desenvolupat un programa ambiciós en el qual el lema de regularitat se situa en la perspectiva de l'anàlisi, i donen tres interpretacions analítiques del lema de regularitat.

Des d'aquesta perspectiva es considera l'espai $\mathcal{W}$ de funcions mesurables acotades $W\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Per a una partició $\{S_1, \ldots, S_m\}$ de $[0,1]$, les funcions de $\mathcal{W}$ constants en els rectangles $S_i \times S_j$ són funcions esgraonades. Un graf s'identifica de manera natural amb les funcions esgraonades que prenen valors a $\{0,1\}$ associades a particions en les quals tots els intervals S_i tenen la mateixa llargada. Es defineix aleshores la norma

$$\|W\|_\square = \sup_{S,T \subset [0,1]} \left| \int_{S \times T} W(x,y)\, dx\, dy \right|$$

a W. El lema de regularitat (de fet una versió dèbil del lema) es pot expressar aleshores de la manera següent:

Teorema 5 (lema de regularitat). *Sigui $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ el conjunt de funcions de $\mathcal{W}$ que prenen valors a $[0,1]$. Per a cada funció $W \in \mathcal{W}_0$ i cada $\epsilon > 0$ existeix una funció esgraonada $W' \in \mathcal{W}_0$ que té com a màxim $\lceil 2^{2/\epsilon^2} \rceil$ graons tal que*

$$\|W - W'\|_\Box \le \epsilon.$$

Amb la mateixa notació, Lovász i Szegedy [40] donen també una interpretació topològica del lema de regularitat. Denotem per Φ el conjunt d'aplicacions bijectives $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$ que conserven la mesura. Per a cada $W \in \mathcal{W}$ definim $W^\phi(x,y) = W(\phi(x),\phi(y))$. Aleshores,

$$\delta_\Box(U,W) = \inf_{\phi\in\Phi} \|U^\phi - W\|_\Box, \quad U,W \in \mathcal{W},$$

resulta ser una distància a $\mathcal{W}$ si identifiquem dues funcions U,W quan $\delta_\Box(U,W) = 0$. Definim $\mathcal{X}_0$ com l'espai mètric que s'obté de $\mathcal{W}_0$ amb aquesta identificació. Aleshores el lema de regularitat s'enuncia com:

Teorema 6 (lema de regularitat). *L'espai métric $\mathcal{X}_0$ és compacte.*

Aquestes interpretacions analítica i topològica inicien la teoria de *grafs límit* que permet analitzar qualsevol seqüència infinita de grafs a través de les seves subsuccessions convergents. El problema d'identificar les funcions que poden aparèixer com a límits de seqüències de grafs planteja preguntes topològiques i analítiques d'enorme riquesa que formen una de les derivacions més interessants del lema de regularitat avui en dia, tant des del punt de vista teòric com en les aplicacions a l'anàlisi de grans xarxes complexes, un tema molt actual, vegeu per exemple [41, 10].

Tao [58] proposa una aproximació diferent al lema de regularitat que fa servir eines de la teoria de la probabilitat i de la teoria de la informació. En un graf bipartit dens $G = (V_1 \cup V_2, E)$ escollim dos vèrtexs $x_1 \in V_1$ i $x_2 \in V_2$ amb la distribució uniforme. El conjunt E d'arestes de G s'interpreta aleshores com l'esdeveniment que $(x_1,x_2) \in E$. La densitat del graf és la probabilitat de E en aquest espai de probabilitat.

Si G és un graf aleatori, els esdeveniments associats a subconjunts $A_1 \subset V_1$ i $A_2 \subset V_2$ (és a dir, l'esdeveniment que consisteix en $x_1 \in A_1$ i $x_2 \in A_2$) són incorrelats amb E. Això s'expressa dient que la densitat d'arestes en el subgraf induït a $A_1 \times A_2$ és la mateixa que la de tot el graf aleatori G. En el cas diametralment oposat en què G, en lloc de ser aleatori, contingui totes les arestes de $A_1 \times A_2$ i cap altra aresta, aleshores E queda determinat amb dos bits d'informació: n'hi ha prou amb saber que $x_1 \in A_1$ i $x_2 \in A_2$.

El lema de regularitat s'expressa aleshores de la manera següent: donades dues variables aleatòries X_1, X_2 i un esdeveniment E (un graf), hi ha dues variables Z_1, Z_2 amb poca entropia (un nivell baix de complexitat) determinades per X_1 i X_2 de manera que E és aproximadament independent de X_1 i X_2 quan es condiciona a Z_1 i Z_2. En altres paraules, quan es condiciona a Z_1 i Z_2 es veu el graf com si fos aleatori, i les variables Z_1, Z_2 es poden obtenir amb poca informació (responen a una estructura). L'enunciat precís d'aquesta versió demana una preparació que ara no ve al cas, però obre el camí a generalitzacions substancials del lema de regularitat que són les que es fan servir en la prova del teorema de Green-Tao sobre progressions aritmètiques de nombres primers.

4 El lema d'eliminació

El *lema d'eliminació* és una de les conseqüències del lema de regularitat que es troba més sovint en les aplicacions del mètode de regularitat. Una vegada més, el llenguatge de la teoria de grafs permet expressar-lo de la manera més adient. La primera formulació del lema d'eliminació es troba en un article de Ruzsa i Szemerédi [48] de l'any 1976. Un graf de n vèrtexs que conté k triangles es pot transformar en un graf lliure de triangles eliminant com a màxim k arestes, una per a cadascun dels k triangles. El lema d'eliminació diu que o bé un graf té cn^3 triangles, una proporció positiva de tots els possibles en un conjunt de n vèrtexs, o bé n'hi ha prou amb eliminar poques arestes (un ordre de magnitud menor del que es podria esperar) per a suprimir-los tots. Més concretament:

TEOREMA 7 (LEMA D'ELIMINACIÓ, RUZSA-SZEMERÉDI [48]). *Per a cada $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que a qualsevol graf $G = (V, E)$ amb n vèrtexs que tingui com a màxim δn^3 triangles hi ha un subconjunt $E' \subset E$ d'arestes de mida $|E'| < \epsilon n^2$ de manera que $G' = (V, E \setminus E')$ és un graf lliure de triangles.*

La demostració del lema d'eliminació és una aplicació del mètode de regularitat. Una de les motivacions de Ruzsa i Szemerédi va ser la de donar una prova directa del teorema de Szemerédi per a progressions de llargada 3 que il·lustrés l'estratègia del mètode de regularitat en la prova d'aquest resultat. De fet, la demostració és ara tan simple i elegant que es pot descriure en poques línies com segueix.

Sigui $A \subset [1, n]$ un subconjunt amb densitat $c = |A|/n$. Construïm un graf tripartit G que té com a conjunt de vèrtexs la unió disjunta de $V_1 = [1, n]$, $V_2 = [1, 2n]$ i $V_3 = [1, 3n]$. Cada vèrtex $i \in V_1$ és adjacent als vèrtexs $i + a \in V_2$ per a cada $a \in A$, i cada vèrtex $i \in V_2$ és adjacent als vèrtexs $i + a \in V_3$. Finalment, cada vèrtex $i \in V_3$ és adjacent als vèrtexs $i - 2a \in V_1$ sempre que $i - 2a \in [1, n]$.

Cada triangle d'aquest graf G es correspon amb una solució de l'equació $x + y - 2z = 0$ amb $x, y, z \in A$, i aleshores (x, y, z) es correspon amb una progressió aritmètica de llargada 3 a A, que pot ser degenerada ($x = y = z$). En aquesta possibilitat rau justament la força de l'argument: el graf G conté almenys $n|A| = (c/n)n^3$ triangles, un per a cadascuna d'aquestes progressions aritmètiques degenerades; si el graf no conté cap altre triangle, és a dir, no hi ha cap progressió aritmètica de llargada 3 no degenerada, el lema d'eliminació diu que es poden suprimir aquests triangles eliminant com a màxim ϵn^2 arestes per a algun $\epsilon > 0$ que depèn només de $\delta = c/n$ i que satisfà $\epsilon \to 0$ per a $\delta \to 0$; aquests triangles, però, són disjunts en arestes, i per tant només es poden eliminar traient almenys una aresta per a cadascun, és a dir, almenys $n|A| = c$ arestes, cosa que, per a c fix i n prou gran, porta a una contradicció.

La sorprenent simplicitat i elegància de l'argument anterior il·lustra l'estil de l'escola matemàtica hongaresa en general i de Szemerédi en particular.

L'aparició d'aquesta demostració va suggerir la possibilitat d'obtenir una prova semblant per a progressions de llargada k en general. La mateixa idea es pot fer servir si es consideren hipergrafs en lloc de grafs. Un *hipergraf* és simplement un parell $H = (V, E)$ on E és ara una família de subconjunts de V (en lloc de subconjunts de mida 2 com al cas dels grafs). En realitat, l'objecte interessant són els grafs *k-uniformes*, en els quals totes les arestes tenen mida k. Frankl i Rödl [21] van proposar un programa amb l'objectiu de provar el teorema de Szemerédi a través del lema d'eliminació per a hipergrafs, que passava per obtenir un lema de regularitat per a aquests objectes. Aquest programa el van posar en marxa Elek i Szegedy [14], Gowers [26], Rödl i Skokan [45, 46] i Tao [57], que entre el 2005 i el 2007 van arribar de manera independent a provar versions lleugerament diferents del lema de regularitat per a hipergrafs, que condueixen totes elles a la versió següent del lema d'eliminació.

Teorema 8 (lema d'eliminació per a hipergrafs). *Sigui K un hipergraf k-uniforme amb h vèrtexs. Per a cada $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ amb la propietat següent. Si un hipergraf k-uniforme H amb n vèrtexs conté com a màxim δn^h còpies de K, aleshores existeix un conjunt d'un màxim de ϵn^{k-1} arestes de H la supressió de les quals elimina totes les còpies de K en H.*

Aquesta versió del lema d'eliminació permet, amb un argument semblant al que hem descrit abans, obtenir una demostració simple del teorema de Szemerédi. Una versió especialment simple de l'argument es pot trobar a [51]. A més, permet obtenir una prova de la versió d-dimensional del teorema de Szemerédi que hem comentat a la secció 2 amb un argument igualment brillant suggerit per Solymosi [49] i posat a la pràctica per Gowers [26].

De fet, el lema d'eliminació permet anar molt més enllà. Les progressions aritmètiques de llargada k es poden expressar com a solucions d'un sistema lineal de $k-2$ equacions amb k incògnites (per al cas $k = 3$ es redueix a l'equació $x-2y+z = 0$). Green [28] va donar una versió algebraica del lema de regularitat que tenia per objectiu el lema següent d'eliminació per a grups abelians:

Teorema 9 (lema d'eliminació algebraic). *Sigui G un grup abelià d'ordre n i $X \subset G$. Per a cada $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que, si una equació lineal de la forma $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$ té com a màxim δn^{k-1} solucions a X, aleshores hi ha un subconjunt $X' \subset X$ de mida menor o igual que ϵn de manera que l'equació no té cap solució a $X \setminus X'$.*

Aplicat a l'equació $x - 2y + z = 0$, el lema anterior prova el teorema de Szemerédi per a progressions de llargada 3 en grups abelians. En particular, prenent el grup cíclic, un argument estàndard permet obtenir el resultat en els enters. El lema d'eliminació va ser generalitzat per Král, Serra i Vena a grups no abelians [37], i a sistemes d'equacions lineals amb coeficients enters en grups finits [38, 39], resultat que en particular estén el teorema de Szemerédi als grups abelians finits (i també als enters).

Com en moltes de les contribucions de Szemerédi, el lema d'eliminació ha trobat aplicacions en àrees diverses, en particular a les ciències de la computació. Una de les més espectaculars és l'obtenció d'algorismes extremament eficients per a detectar l'existència d'estructures determinades en grans grafs, cosa que s'anomena *property testing*. Per a determinar si un graf molt gran conté un subgraf determinat o bé satisfà alguna propietat estructural, per exemple la planaritat, no pot evitar-se de fer una exploració exhaustiva i necessàriament costosa. En canvi, el lema d'eliminació permet distingir amb enorme eficiència si un graf està molt a prop o molt lluny de tenir una certa propietat estructural; vegeu per exemple [5, 4, 6, 47].

5 Algunes aplicacions a la teoria de grafs

El lema de regularitat està descrit en el llenguatge de la teoria de grafs, i és natural que en aquest marc trobi nombroses aplicacions. En particular resulta una eina especialment útil en el que s'anomena la *teoria extremal* de grafs. La qüestió bàsica de la teoria extremal de grafs és determinar quin és el nombre màxim d'arestes d'un graf amb n vèrtexs si no conté un subgraf H donat. En altres paraules, es demana quin és el mínim nombre d'arestes que garanteix que qualsevol graf amb n vèrtexs conté H. A més d'una pregunta natural en la teoria de grafs, la resposta té relació amb altres àrees, com la teoria de Ramsey, les ciències de la computació o les que ja hem vist a la teoria de nombres.

El graf complet K_n, amb tots els $\binom{n}{2}$ parells com a arestes, conté naturalment tots els subgrafs d'ordre $n' \le n$. El graf complet bipartit $K_{n/2,n/2}$, però, té encara una proporció positiva de totes les arestes i, en canvi, no conté cap triangle (i tampoc cap subgraf complet d'ordre $n' > 2$). Per tant, es necessiten més de $n^2/4$ arestes per a poder garantir l'existència d'un simple triangle. El primer resultat de la teoria extremal de grafs, i un dels més emblemàtics, és d'un altre matemàtic hongarés, Pál Turán:

Teorema 10 (teorema de Turán [60]). *Per a un número natural r donat, el nombre màxim d'arestes d'un graf de $n > r$ vèrtexs que no conté el graf complet K_{r+1} com a subgraf és*

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

A més, l'únic graf extremal (amb el nombre màxim d'arestes) que no conté cap K_{r+1} és el graf complet bipartit $K_{n_1,\ldots,n_r}$, on $n_1+\cdots+n_r = n$ i $|n_i-n_j| \le 1$.

El nombre màxim d'arestes d'un graf de n vèrtexs que no conté un graf donat H es denota per $ex(n,H)$. Així, el teorema de Turán diu que

$$ex(n,K_{r+1}) = \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

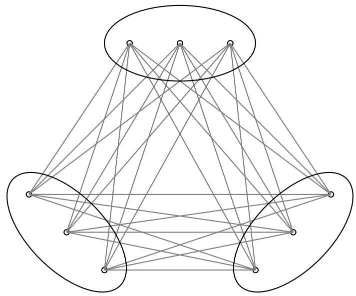


FIGURA 3: El graf extremal de 9 vèrtexs que no conté K_4.

Sorprenentment Erdős i Stone [17] van provar que es pot aconseguir una estimació anàloga que, per a qualsevol graf H, depèn només del seu nombre cromàtic. Recordem que el *nombre cromàtic* d'un graf H és el nombre mínim de parts d'una partició del seu conjunt de vèrtexs tal que cada part indueix un subgraf sense arestes; és a dir, totes les arestes de H connecten punts de parts diferents. Els grafs de Turán són extremals (amb el màxim nombre d'arestes) per la propietat de tenir n vèrtexs i nombre cromàtic r.

TEOREMA 11 (ERDŐS-STONE). *Sigui H un graf amb nombre cromàtic $\chi(H) = r + 1$. Aleshores,*

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\binom{n}{2} + o(n^2).$$

Una de les primeres aplicacions del lema de regularitat a la teoria de grafs va ser la demostració d'aquest teorema. Li van seguir una llarga sèrie de resultats dels quals mencionem només alguns en els quals Szemerédi va contribuir directament i que fan servir, d'una manera que no detallem aquí, el lema de regularitat.

El primer d'aquests resultats, el teorema de Hajnal-Szemerédi [30], és una versió del teorema de Turán en la qual es demana que les arestes estiguin localment ben repartides, i es conclou que el graf no només conté alguna còpia de K_r sinó un nombre lineal de còpies disjuntes en arestes. La condició local sobre el repartiment d'arestes és donada en termes del grau mínim del graf. Recordem que el *grau* d'un vèrtex és el nombre d'arestes que li són incidents, i que el *grau mínim* d'un graf és el menor dels graus dels seus vèrtexs. Fem notar que un graf amb n vèrtexs i grau mínim δ té almenys $\delta n/2$ arestes.

TEOREMA 12 (HAJNAL-SZEMERÉDI). *Sigui G un graf amb n vèrtexs i grau mínim*

$$\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right) n.$$

Aleshores G conté $\lfloor n/r \rfloor$ còpies disjuntes en arestes del graf complet K_r.

A més de ser una referència recurrent en la seva àrea i un resultat notablement difícil de provar, Hajnal i Szemerédi el fan servir per a demostrar la conjectura d'Erdős que expliquem a continuació.

El fet que un graf H tingui nombre cromàtic $r = \chi(H)$ indica que el conjunt de vèrtexs es pot partir en r parts cadascuna de les quals indueix un subgraf sense arestes, una partició cromàtica. No diu res, però, de la mida relativa d'aquestes parts, cosa que sovint és rellevant en les aplicacions. En realitat es poden construir grafs H tals que no es pot evitar una gran discrepància entre les mides de les parts en una partició cromàtica de mida $\chi(H)$. Un teorema clàssic, el teorema de Brooks, diu que el nombre cromàtic d'un graf H diferent del graf complet o d'un cicle senar és menor o igual que el seu grau màxim, $\Delta(H)$.

Erdős va conjecturar que sempre existeixen particions cromàtiques en $\Delta(H) + 1$ parts de manera que totes les parts tenen, llevat d'una unitat, el mateix cardinal. Per això el teorema de Hajnal-Szemerédi s'enuncia sovint en la formulació següent:

Teorema 13 (Hajnal-Szemerédi). *Sigui $G = (V, E)$ un graf amb n vèrtexs i grau màxim $\Delta(G)$. Hi ha una partició cromàtica $V_1, \dots, V_k$ amb $k \le \Delta(G) + 1$ tal que $|V_i - V_j| \le 1$ per a tot i, j.*

Tornant a la versió original del teorema de Hajnal-Szemerédi, Alon i Yuster [7] van considerar l'extensió de l'enunciat a grafs arbitraris diferents del graf complet. Van obtenir resultats aproximats d'aquesta extensió i van formular la seva forma exacta en la conjectura següent:

Conjectura 14 (Alon-Yuster). Sigui H un graf amb h vèrtexs i nombre cromàtic $r = \chi(H)$. Existeix una constant K tal que qualsevol graf G amb n vèrtexs i grau mínim

$$\delta(G) \ge \left(1 - \frac{1}{r}\right) hn$$

admet un recobriment del seu conjunt d'arestes per còpies disjuntes de H, llevat d'un conjunt residual de K arestes.

Komlós, Sárközy i Szemerédi [35] van provar la conjectura per a n suficientment gran fent servir una versió especial del lema de regularitat.

La mena de problemes extremals que hem considerat fins aquí tracten l'existència de subgrafs fixats en un graf dens gran. Quan s'estudia el problema per a grafs d'ordre comparable al del graf que el conté no es poden donar en general resultats del mateix tipus, ja que el teorema de Ramsey ho impedeix (vegeu la secció 7 sobre el teorema de Ramsey). El problema, però, torna a tenir sentit si es restringeix la classe de subgrafs que es vol submergir. El cas més típic és el de la classe dels arbres. Recordem que un *arbre* és un graf connex (és a dir, hi ha un camí entre qualsevol parell de vèrtexs) sense cicles (és a dir, el camí que uneix dos vèrtexs qualssevol és únic).

Un argument simple prova que el mínim nombre d'arestes per tal que un graf G amb n vèrtexs contingui una estrella de k arestes (l'arbre format per un vèrtex de grau k i k vèrtexs de grau 1) és $(k-1)n/2+1$. Erdős i Sós van conjecturar que aquest mateix nombre provoca l'aparició de *tots* els arbres de k arestes.

CONJECTURA 15 (ERDŐS-SÓS). Sigui G un graf amb n vèrtexs i més de

$$(k-1)n/2$$

arestes. Aleshores G conté tots els arbres amb k arestes.

Ajtai, Komlós, Simonovits i Szemerédi resolen aquesta conjectura per a n suficientment gran en un article encara no aparegut; vegeu [36].

Acabem aquest recull de resultats en teoria extremal de grafs amb dues conjectures que en certa manera cobreixen els resultats anteriors i en les quals el lema de regularitat segueix sent una eina eficient.

Un teorema clàssic de Dirac diu que si G és un graf amb n vèrtexs i grau mínim $\delta \geq n/2$ aleshores G conté un cicle hamiltonià, un cicle que passa una única vegada per cadascun dels vèrtexs del graf. Seymour va conjecturar el 1974 l'extensió següent del teorema de Dirac. Recordem que la *potència k-èsima H^k d'un graf H* és el graf que té el mateix nombre de vèrtexs i totes les arestes $\{x,y\}$ formades per parells de vèrtexs que estan a distància com a màxim k en H.

CONJECTURA 16 (SEYMOUR). Sigui G un graf amb n vèrtexs i grau mínim

$$\delta(G) \geq \frac{k}{k+1}n.$$

Aleshores G conté la potència k-èsima d'un cicle hamiltonià.

Es pot provar que la conjectura de Seymour implica el resultat profund de Hajnal-Szemerédi amb el qual començàvem aquesta secció. Una vegada més, la conjectura va ser provada per Komlós, Sárközy i Szemerédi [34] per a n suficientment gran.

Per a la classe general de grafs, Bollobás i Eldridge van suggerir la conjectura següent que també estén el teorema de Hajnal-Szemerédi.

CONJECTURA 17 (BOLLOBÁS-ELDRIDGE). Sigui G un graf amb n vèrtexs i grau mínim

$$\delta(G) \geq \frac{kn-1}{k+1}.$$

Aleshores G conté tots els subgrafs H amb grau màxim $\Delta(H) \leq k$.

Csaba, Shokoufandeh i Szemerédi [13] van provar la conjectura per a $k=3$ i n suficientment gran.

Tots aquests exemples il·lustren la força del lema de regularitat per a la resolució de problemes extremals en teoria de grafs. El principi bàsic és considerar particions regulars de grafs prou grans. Aquestes particions tenen un nombre afitat de parts i la majoria de parells són ϵ-regulars. La naturalesa quasialeatòria dels parells regulars permet identificar els subgrafs d'interès en el graf de referència, i sovint permeten concloure l'existència d'un gran nombre d'aquests subgrafs. Aquests resultats han marcat certament l'evolució de la teoria de grafs en els darrers vint-i-cinc anys.

6 Tornant a la teoria de nombres

Com a bon deixeble d'Erdős, Szemerédi ha tingut sempre una relació especial amb la teoria de nombres. Més enllà del cèlebre teorema que porta el seu nom, va tractar diversos problemes amb el seu estil característic de pensament matemàtic.

Un dels més antics està relacionat amb la conjectura següent d'Erdős i Heilbronn [16]. Donat un grup abelià G d'ordre n, Erdős i Heilbronn van conjecturar que existeix una constant $c = c(G)$ tal que qualsevol subconjunt $S \subset G$ de mida $|S| \geq c\sqrt{n}$ conté un subconjunt S' de suma zero, és a dir,

$$\sum_{x' \in S'} x' = 0.$$

En un dels seus primers articles, Szemerédi [52] va provar la conjectura. El valor òptim de $c = c(G)$ es coneix com la *constant d'Olson* del grup, de la qual es coneixen avui bones estimacions. Després de la prova de Szemerédi, Erdős va conjecturar també que el valor d'aquesta constant per a grups cíclics d'ordre primer p és $c = \sqrt{2}$.

Szemerédi va tornar repetidament al problema. Tot i que un conjunt d'enters $A \subset [1, n]$ pot no tenir cap estructura particular, els conjunts de sumes $A + A$, $A + A + A$, assoleixen una estructura cada vegada més definida a mesura que creix el nombre de sumands. Un dels projectes més recents de Szemerédi amb Van Vu tracta de l'existència de progressions aritmètiques en els conjunts de la forma $A + A + \cdots + A$, un treball aparegut a *Annals of Mathematics* el 2006 [56]. Basant-se en aquests resultats, Nguyen, Szemerédi i Vu [43] van resoldre el 2008, després de molts intents anteriors, la conjectura d'Erdős sobre grups cíclics d'ordre primer, *on revient toujours au premier amour*.

Una altra contribució destacable fa referència al problema suma-producte. El fet que la suma i el producte siguin operacions en certa manera ortogonals es manifesta en molts problemes de la teoria de nombres. La dificultat de trobar una progressió aritmètica (una estructura additiva) en la seqüència de nombres primers (una estructura multiplicativa) és només un exemple que il·lustra la relativa incorrelació entre les dues operacions aritmètiques bàsiques.

Erdős i Szemerédi [18] van proposar la manera següent de fer evident aquesta incorrelació. Sigui A un conjunt finit d'enters. És fàcil veure que la mida del conjunt suma és almenys $|A + A| \geq 2|A| - 1$ i que la igualtat se satisfà només si A és una progressió aritmètica. En aquest cas, però, la mida del conjunt producte $|A \cdot A|$ és més gran que $|A|^{2-\epsilon}$ amb $\epsilon \to 0$ si $n = |A| \to \infty$ (una estimació precisa d'aquest problema senzill és un resultat ben complex de teoria de nombres, vegeu [19]). Recíprocament, $|A \cdot A| \geq 2|A| - 1$ i la igualtat se satisfà només per a progressions geomètriques, en el qual cas $A + A$ assoleix el seu valor màxim $|A|^2$. Erdős i Szemerédi van provar que existeix $\delta > 0$ tal que qualsevol conjunt d'enters A prou gran satisfà

$$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq |A|^{1+\delta},$$

i van conjecturar que la desigualtat segueix sent certa per a qualsevol $\delta < 1$.

El primer avenç significatiu en aquest problema el va fer un altre matemàtic hongarés, Gyorgi Elekes, fent servir un altre resultat de Szemerédi, el teorema de Szemerédi-Trotter, una de les seves contribucions a la geometria discreta que aprofitem per a comentar aquí.

Considerem un conjunt P de n punts i un conjunt L de m rectes en el pla. Denotem per $I(P, L)$ el conjunt d'incidències de punts de P i rectes de L. Trivialment $|I(P, L)| \leq mn$. El problema consisteix a obtenir una fita superior no trivial d'aquest nombre d'incidències. L'exemple següent proporciona un nombre gran d'incidències. Per a un número natural k, prenem el conjunt de punts

$$P = \{0, 1, \ldots, k - 1\} \times \{0, 1, \ldots, 4k^2 - 1\},$$

i el conjunt de rectes

$$L = \left\{y = ax + b : (a, b) \in \{0, 1, \ldots, 2k - 1\} \times \{0, 1, \ldots, 2k^2 - 1\}\right\}.$$

Tenim $n = |P| = |L| = 4k^3$ i cada recta conté k punts (un de cada abscissa), de manera que $|I(P, L)| = 4k^4 = (4/4^{1/3})n^{4/3}$. El teorema de Szemerédi-Trotter diu que, pel que fa a l'ordre de magnitud, aquest exemple és extremal.

Teorema 18 (Szemerédi-Trotter [55]). *Siguin P un conjunt de n punts i L un conjunt de m rectes en el pla. El nombre $|I(P, L)|$ d'incidències entre punts de P i rectes de L és com a màxim*

$$|I(P, L)| = O(m + n + (mn)^{2/3}).$$

Aquest teorema ha tingut nombroses aplicacions i extensions, i Elekes [15] el va fer servir per a obtenir la primera estimació no trivial en el problema de suma-producte amb una idea simple i elegant: donat un conjunt A d'enters, es pren el conjunt de punts $P = (A \cdot A) \times (A + A)$ i el conjunt de rectes $L = \{y = ax + b : (a, b) \in A^{-1} \times A\}$. Ara tenim $|P| = |A \cdot A| \cdot |A + A|$, $|L| = |A|^2$ i $|I(L, P)| = |A|^3$ (cada recta talla $|A|$ punts de P), de manera que el teorema de Szemerédi-Trotter dóna

$$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \gg |A|^{5/4}.$$

El problema suma-producte ha donat lloc a una rica literatura en la qual han intervingut matemàtics com Bourgain, Garaev, Katz, Konyagin, Solymosi o Tao.

El lector interessat pot trobar una descripció de l'apassionant evolució d'aquest problema en l'excel·lent article de Solymosi [50], on dóna en particular la seva prova del fet que la desigualtat suma-producte és certa per a qualsevol $\delta < 1/3$, que és el rècord actual en aquest problema.

Acabem aquesta breu revisió amb una altra de les grans contribucions de Szemerédi que porta el segell del seu estil inconfusible. Es tracta una vegada més d'un problema additiu.

Sigui A un conjunt finit d'enters. És clar que si $A + A$ té una mida petita, diguem que $|A+A| \le c|A|$, aleshores hi ha molts elements al conjunt suma $A+A$ que poden ser escrits de moltes maneres diferents com a suma de dos elements de A. Balog i Szemerédi es van plantejar la qüestió inversa. És cert que si hi ha un gran nombre de quàdruples $x, x', y, y' \in A$ amb $x + x' = y + y'$ aleshores el conjunt suma ha de ser petit? En aquest context es defineix l'*energia* d'un conjunt com

$$\omega(A) = |\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A \times A \times A \times A : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}|,$$

on $n = |A|$. Trivialment tenim $\omega(A) \le n^3$. No és difícil veure que si $|A+A| \le cn$, aleshores $\omega(A) \ge n^3/c$. La pregunta és si el fet que $\omega(A)$ sigui una proporció positiva del seu valor màxim implica que el conjunt suma ha de tenir una mida lineal en $|A|$. La resposta a aquesta pregunta és en general negativa: un conjunt pot tenir una energia molt gran i contenir alguns elements que fan que el conjunt suma sigui també gran. El lema de Balog i Szemerédi dóna una resposta explícita a aquesta qüestió.

Teorema 19 (lema de Balog-Szemerédi [8]). *Sigui A un conjunt finit d'enters amb energia $\omega(A) \ge 1/K$. Hi ha constants c, C i un subconjunt $A' \subset A$ amb $|A'| \ge cK^{-C}|A|$ tals que*

$$|A' + A'| \le CK^C |A'|.$$

En altres paraules, un conjunt amb energia gran ha de contenir un conjunt gran amb conjunt de suma petit. El teorema es coneix avui com a *teorema de Balog-Gowers-Szemerédi* pel fet que Gowers va donar-ne una versió per a sumes de conjunts diferents amb una millor estimació de les constants. Com ja hem mencionat a la secció 2, aquesta versió és un dels ingredients de la prova analítica de Gowers del teorema de Szemerédi.

7 Nombres de Ramsey

El teorema de Ramsey que hem mencionat a la secció 2 té una versió en el context dels grafs que resulta molt senzilla d'enunciar. Un conjunt S de vèrtexs d'un graf G és *estable* si no hi ha arestes de G entre vèrtexs de S. A l'altre extrem, si tots els parells de vèrtexs de S estan connectats, aleshores S és una *clica* (un gal·licisme de difícil traducció que s'ha consolidat). Un conjunt estable de vèrtexs a G és una clica al complement de $\overline{G}$ (aquí el *complement* de $G = (V, E)$ denota el graf $\overline{G}$ amb el complement $\binom{V}{2} \setminus E$ del conjunt d'arestes). El teorema de Ramsey per a grafs es pot enunciar de la manera següent:

Teorema 20 (Ramsey). *Per a cada dos números naturals k, l existeix un número natural $R(k,l)$ tal que, per a qualsevol graf G amb $n \geq R(k,l)$ vèrtexs, o bé G té una clica d'ordre k o bé $\overline{G}$ té una clica d'ordre l.*

Els nombres de Ramsey $R(k,l)$ són els naturals més petits que satisfan la conclusió del teorema de Ramsey. No és difícil provar que $R(3,3) = 6$; és a dir, que qualsevol graf amb almenys sis vèrtexs o bé conté un triangle o bé un conjunt estable de tres vèrtexs, i que aquesta afirmació és falsa per a la família de grafs de cinc vèrtexs. Llevat d'un reduït nombre de parells (k,l), el problema de determinar els nombres de Ramsey ha resultat ser d'una complexitat inesperada, i els intents de donar estimacions per a aquests nombres han estat a l'origen de nocions i tècniques d'abast molt general. La demostració d'Erdős i Szekeres de la versió anterior del teorema de Ramsey proporciona la fita superior

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

L'obtenció d'una fita inferior per als nombres de Ramsey diagonals, $k = l$, va originar el que s'anomena el *mètode probabilista* d'Erdős, que s'ha convertit en una eina fonamental en combinatòria. Combinada amb la fita superior anterior proporciona les desigualtats

$$c_1 k 2^{k/2} < R(k,k) < c_2 4^k k^{-1/2}$$

per a certes constants positives c_1, c_2. Ambdues fites es van obtenir entre el 1935 i el 1945, i es mantenen avui amb millores poc substancials, malgrat els enormes esforços que s'han dedicat a millorar-les. És per això que qualsevol avenç en aquesta àrea representa un esdeveniment singular.

El 1980 Ajtai, Komlós i Szemerédi [1] van introduir una tècnica algorísmica que es coneix avui com el *mètode semialeatori* d'Ajtai-Komlós-Szemerédi, amb el qual van obtenir la fita superior

$$R(k,l) \leq c_k \frac{l^{k-1}}{(\log l)^{k-2}},$$

per a certa constant c_k que depèn de k. Aquesta fita té sentit per a k fix com una aproximació asimptòtica per a l gran. El mètode semialeatori que es va introduir en l'obtenció d'aquest resultat s'ha incorporat com una de les eines habituals en la combinatòria i en la teoria de la complexitat. D'altra banda, divuit anys més tard i en un article cèlebre que li va valer el Premi Fulkerson el 1997, un jove Jeong Han Kim [32] va provar que, per a $k = 3$, la fita superior té en realitat l'ordre correcte de magnitud:

$$R(3,l) \sim c \frac{l^2}{\log l}.$$

D'aquesta manera els nombres de Ramsey $R(3,l)$ són l'única família infinita no trivial per a la qual es coneix el comportament asimptòtic dels nombres de Ramsey.

Un altre resultat destacat de Szemerédi en la teoria de Ramsey és el següent. El teorema de Ramsey fa referència als grafs complets: per a qualsevol graf G amb $n \geq R(k,k)$ vèrtexs, o bé G o bé el seu complement contenen el graf complet K_k. Fixem ara un graf arbitrari H i reformulem el teorema de Ramsey per a H. Sigui $R(H)$ el número natural més petit tal que, per a qualsevol graf G amb $n \geq R(H)$ vèrtexs, o bé G o bé $\overline{G}$ contenen H. Erdős i Burr [11] van conjecturar que si H és un graf poc dens en arestes, aleshores $R(H)$ havia de tenir un ordre de magnitud substancialment menor que per als grafs complets. La conjectura de Burr-Erdős diu més concretament el següent. Es diu que un graf és *k-degenerat* si qualsevol subgraf conté un vèrtex de grau com a màxim k. Per exemple, els grafs k-regulars, en els quals tots els vèrtexs tenen grau k, són trivialment k-degenerats. No és difícil veure que els grafs planaris (que es poden dibuixar en el pla sense que les arestes es tallin en punts que no són vèrtexs) són 5-degenerats, o que els arbres són 1-degenerats. El nombre d'arestes dels grafs k-degenerats és lineal en el nombre de vèrtexs, i no quadràtic com en els grafs complets. La conjectura de Burr-Erdős diu que els nombres de Ramsey $R(H)$ en la classe dels grafs k-degenerats creixen linealment en l'ordre de H. La conjectura va ser provada per Chvatál, Rödl, Szemerédi i Trotter [12] per a la subclasse dels grafs amb grau màxim fitat superiorment:

Teorema 21. *Existeix una funció $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, per a qualsevol graf H de k vèrtexs i grau màxim $\Delta(H)$, se satisfà*

$$R(H) \leq f(\Delta(H))k.$$

La demostració fa servir novament el lema de regularitat. Tot i que hi ha alguns resultats addicionals, la conjectura d'Erdős i Burr és encara oberta, malgrat que Fox i Sudakov [20] han provat recentment una fita superior només lleugerament superlineal.

8 Un algorisme paral·lel d'ordenació

Fullejant l'enorme volum de treball de Szemerédi, trobem difícil resistir-nos a la temptació de comentar alguna més de les seves contribucions. Per mantenir la longitud d'aquest article dins de límits raonables, hem triat només un dels seus resultats amb major impacte. Així, per acabar, presentem una altra perla d'Ajtai, Komlós i Szemerédi [2]. En aquest treball es tracta un dels problemes més bàsics de la teoria de la computació: amb quina rapidesa hom pot ordenar n objectes per la seva magnitud?

Donats n objectes de mides diferents en un ordre arbitrari, volem ordenar-los de més gran a més petit. Per a aconseguir-ho, fem servir una escala per a comparar dos objectes i hom voldria obtenir una ordenació perfecta després del mínim nombre de comparacions possible. Com que hi ha $n!$ ordenacions possibles, un moment de reflexió revela que qualsevol algorisme necessita almenys $\log_2 n! \sim n \log_2 n$ comparacions en el pitjor dels casos (observem simplement que cada comparació redueix el nombre de possibles ordenacions coherents amb els resultats obtinguts fins ara per un factor de com a màxim 2). De fet, hi ha algorismes simples (com `MergeSort, HeapSort, QuickSort`) que són capaços d'ordenar objectes sense utilitzar més d'unes $n \log_2 n$ comparacions.

Una qüestió molt més difícil i fonamental és si els algorismes d'ordenació poden ser eficientment paral·lelitzats. Suposem que tenim $n/2$ balances de manera que en qualsevol moment podem dividir els objectes en $n/2$ parells i fer $n/2$ comparacions. Quant de temps necessitem per a ordenar els objectes? Per l'argument anterior, com a mínim $2 \log_2 n$ passos són necessaris, però es pot aconseguir aquest mínim nombre? Aquesta pregunta difícil —de gran importància pràctica— no va tenir una resposta fins que l'article d'Ajtai, Komlós i Szemerédi va ser publicat. Aquests autors van ser capaços de construir un algorisme (també anomenat *sorting network*) que ordena n objectes en $O(\log n)$ passos paral·lels.

L'algorisme és bastant sofisticat així que, en lloc de descriure'n els detalls, n'indicarem les idees principals. Suposem que es poden dividir, en K passos, els n objectes en dos grups de mida $n/2$, tals que cada objecte d'un grup és més gran que cadascun dels objectes de l'altre grup. Llavors, mitjançant una aplicació recursiva d'aquest algorisme, podrem ordenar els n objectes en $K \log_2 n$ passos. Malauradament, això no és possible si es vol mantenir K constant (és a dir, que K no creixi amb n). Un ingredient clau de l'algorisme d'Ajtai, Komlós i Szemerédi és un mètode que, en un nombre constant de passos, divideix els n objectes de tal manera que el nombre d'objectes mal col·locats sigui petit. Ho van fer mitjançant l'aplicació de l'eina gairebé màgica dels *grafs expansors*.

En termes generals, un graf expansor de n vèrtexs és un graf tal que cada vèrtex està connectat a un petit (limitat) nombre de vèrtexs i, no obstant això, per a cada conjunt S de vèrtexs de mida $|S| \leq n/2$, el nombre de veïns dels vèrtexs de S que estan fora de S és gran (és a dir, té almenys $\lambda|S|$ vèrtexs per a alguna constant $\lambda > 0$). L'existència de grafs expansors no és difícil de provar amb arguments probabilístics. De fet, els grafs aleatoris de grau constant són grafs expansors. Se'n coneixen també construccions explícites, tot i que són molt més sofisticades. Avui en dia els grafs expansors s'han fet servir en una àmplia varietat d'àrees com ara la teoria de la codificació, *property testing*, la teoria d'*immersions mètriques* i moltes altres. Remetem el lector a l'excel·lent article de Hoory, Linial i Wigderson [31], que descriu exhaustivament el tema dels grafs expansors i les seves aplicacions.

Ajtai, Komlós i Szemerédi van ser dels primers a adonar-se de les propietats excepcionals d'aquesta bella eina. En una aplicació senzilla però enginyosa dels grafs expansors van provar que, en un nombre constant de passos, els n objectes poden ser dividits en dos grups de mida $n/2$ de manera que gairebé tots els objectes d'un dels grups són més petits que gairebé tots els objectes de l'altre grup. Aquesta és la clau de l'argument, però l'obtenció d'un algorisme adequat exigeix molta feina que nosaltres no detallarem aquí; vegeu per exemple [2] i [3].

9 Endre Szemerédi

Després d'haver descrit algunes de les seves contribucions matemàtiques més substancials, acabem amb una breu referència biogràfica i humana de Szemerédi.

Endre Szemerédi és un personatge original i la seva biografia està plena d'incidències peculiars que a ell li agrada destacar, fins i tot (potser especialment) en les ocasions més solemnes. En la majoria d'entrevistes que se li han fet en ocasió de la concessió del Premi Abel, per exemple, li agrada detallar aquelles parts de la seva biografia que destaquen la part més corrent de la seva condició humana. No es tracta només d'una manifestació de la seva extrema discreció personal, sinó també de l'expressió de la seva incomoditat davant la mistificació que sovint acompanya als grans personatges de la història. Szemerédi és cèlebre per la seva exagerada modèstia i per la seva forma peculiar de tractar les formalitats del món acadèmic, sempre amb un penetrant sentit de l'humor.

Endre Szemerédi va néixer a Budapest l'any 1940. El seu contacte amb les matemàtiques va ser gairebé accidental. Cedint a les pressions del seu pare, va començar a estudiar medicina, una carrera que no el va atreure i que va abandonar aviat. Mentre treballava en una fàbrica com a obrer no qualificat, un amic seu el va convèncer d'estudiar matemàtiques, i el 1960 es va matricular a la facultat de matemàtiques i física de la Universitat Loránd Eötvös de Budapest. Segons explica ell mateix, les matemàtiques no el van fascinar fins que va seguir un curs de Pál Turán sobre teoria de nombres. En aquell moment va decidir dedicar-se a la investigació matemàtica. Durant els seus estudis a Budapest, Pál Erdős i András Hajnal van tenir una gran influència en la seva carrera.

Després de graduar-se va aconseguir una beca per a fer el doctorat a Moscou amb Alexander Gelfond, un investigador reconegut en la teoria combinatòria de nombres. Per un error d'escriptura en ciríl·lic, li va ser assignat Israel Gelfand com a supervisor de la seva tesi doctoral. El traspàs inesperat de Gelfond el va deixar en la disjuntiva de renunciar a una beca prestigiosa o seguir amb Gelfand. Afortunadament Gelfand va accedir que Szemerédi escrivís la seva tesi en l'àrea que havia triat, la matemàtica discreta, i així va poder doctorar-se a Moscou.

A la seva tornada a Budapest, Szemerédi es va incorporar com a membre de l'Institut de Matemàtiques de Budapest (que avui porta el nom del seu fundador, Alfréd Rényi). El 1986 va ser nomenat professor al departament d'Informàtica de la Universitat de Rutgers a Nova Jersey, i des d'aleshores comparteix el seu temps entre Hongria i els Estats Units.

A més del Premi Abel, el seu treball ha estat reconegut amb nombroses distincions, entre les quals hi ha el Premi Grünwald (1968), el Premi Pólya (1975), el Premi AMS Leroy M. Steele (2008) o el Premi Rolf Schock (2008). Ha estat professor a les universitats de Stanford, McGill, Chicago, al Mathematical Sciences Research Institute de Berkeley i al CalTech de Los Angeles; és membre de l'Institute of Advanced Studies de Princeton i va ser guardonat amb un doctorat *honoris causa* per la Universitat Karlova de Praga el 2010. El seu treball ha seduït un nombre cada vegada més extens de matemàtics d'àmbits molt diversos fins a culminar amb el reconeixement que suposa la concessió del Premi Abel el 2012.

Endre Szemerédi donant una conferència a l'IEC el juny de 2012.

Szemerédi manté una relació especial amb el nostre país. La seva dona, Anna Keppes, és filla d'un membre de les brigades internacionals que va acudir a donar suport a la República en la Guerra Civil espanyola. A més d'arriscar la seva vida, aquest acte d'idealisme li va suposar una peripècia vital bastant estesa en aquells anys negres de la història europea. El règim feixista d'Horthy li va impedir tornar a la seva Hongria natal en acabar la guerra espanyola i va haver d'acompanyar l'exili republicà a Mèxic, on va néixer l'Anna. Els lligams sentimentals amb el nostre país devien pesar quan van decidir que les dues filles bessones de Szemerédi vinguessin a Barcelona a fer un postgrau d'economia a la Universitat Pompeu Fabra ara farà uns deu anys. Una de les dues viu actualment a Madrid i l'altra visita sovint el nostre país. Mentre les seves filles estudiaven a Barcelona, Szemerédi visitava sovint la ciutat per seguir de prop els seus progressos acadèmics. Molts matemàtics catalans aprofitàvem aquestes visites per a discutir amb ell o per involucrar-lo en *workshops* i seminaris que s'organitzaven a Barcelona. Amb aquests contactes vam poder apreciar el caràcter extremament entranyable de Szemerédi, la seva extraordinària generositat i la seva apassionada relació amb les matemàtiques.

En el marc d'aquesta relació va ser convidat el 2010 a participar en una excel·lent conferència organitzada pel Centre de Recerca Matemàtica amb el suport de l'European Science Foundation, la Societat Matemàtica Europea (EMS) i la xarxa ERCOM de centres de recerca matemàtica europeus, que va reunir a Barcelona alguns dels millors investigadors de tot el món en l'àrea de la matemàtica discreta el juny del 2012. D'aquesta manera vam tenir la sort de comptar amb la seva presència a Barcelona just poques setmanes després d'haver-li estat concedit el Premi Abel, i de poder escoltar-lo en persona explicant la seva peculiar visió de les matemàtiques en una sala plena de gom a gom a l'Institut d'Estudis Catalans.

Un tret especial de Szemerédi és la seva passió pels esports. Juga a tennis regularment i segueix molt de prop els esdeveniments esportius. En particular és un gran aficionat al futbol, i un gran seguidor del Milan i del Barça, fins al punt que en una entrevista recent va anticipar el resultat del partit que va enfrontar aquests dos equips a la copa europea. En la darrera visita que va fer a Barcelona la Societat Catalana de Matemàtiques va obsequiar Endre amb una samarreta del Barça que el va fer molt feliç.

Agraïments

Els autors agraeixen la valuosa ajuda de Dani Lugosi en la versió catalana d'aquest article.

Referències

[1] Ajtai, M.; Komlós, J.; Szemerédi, E. «A note on Ramsey numbers». *J. Combin. Theory Ser. A*, 29 (3) (1980), 354–360.

[2] Ajtai, M.; Komlós, J.; Szemerédi, E. «Sorting in $c \log n$ parallel steps». *Combinatorica*, 3 (1) (1983), 1–19.

[3] Ajtai, M.; Komlós, J.; Szemerédi, E. «An $O(n \log n)$ sorting network». A: *Proceedings of the 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. Boston, Mass.: ACM, 1983, 1–9.

[4] Alon, N.; Fernandez de la Vega, W.; Kannan, R.; Karpinski, M. «Random sampling and approximation of MAX-CSPs». *J. Comput. System Sci.*, 67 (2) (2003): *Special issue on STOC2002 (Montreal, QC)*, 212–243.

[5] Alon, N.; Fischer, E.; Krivelevich, M.; Szegedy, M. «Efficient testing of large graphs». *Combinatorica*, 20 (4) (2000), 451–476.

[6] Alon, N.; Shapira, A. «Every monotone graph property is testable». A: *STOC'05: Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. Nova York: ACM, 2005, 128–137.

[7] Alon, N.; Yuster, R. «H-factors in dense graphs». *J. Combin. Theory Ser. B*, 66 (2) (1996), 269–282.

[8] Balog, A.; Szemerédi, E. «A statistical theorem of set addition». *Combinatorica*, 14 (3) (1994), 263–268.

[9] Bollobás, B.; Thomason, A. «Frank Ramsey». *Combin. Probab. Comput.*, 12 (5–6) (2003): *Special issue on Ramsey theory*, 469–475.

[10] Borgs, C.; Chayes, J.; Lovász, L. «Unique limits of dense graph sequences». [Manuscrit]

[11] Burr, S. A.; Erdős, P. «On the magnitude of generalized Ramsey numbers for graphs». A: *Infinite and finite sets*. Vol. 1: (*Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday*). Amsterdam: North-Holland, 1975. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; 10), 215–240.

[12] Chvatál, C.; Rödl, V.; Szemerédi, E.; Trotter, W. T., Jr. «The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree». *J. Combin. Theory Ser. B*, 34 (3) (1983), 239–243.

[13] Csaba, B.; Shokoufandeh, A.; Szemerédi, E. «Proof of a conjecture of Bollobás and Eldridge for graphs of maximum degree three». Paul Erdős and his mathematics (Budapest, 1999). *Combinatorica*, 23 (1) (2003), 35–72.

[14] Elek, G.; Szegedy, B. «Limits of hypergraphs, removal and regularity lemmas. A non-standard approach». arXiv:0705.2179.

[15] Elekes, G. «On the number of sums and products». *Acta Arith.*, 81 (4) (1997), 365–367.

[16] Erdős, P.; Heilbronn, H. «On the addition of residue classes mod p». *Acta Arith.*, 9 (1964), 149–159.

[17] Erdős, P.; Stone, A. H. «On the structure of linear graphs». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 1087–1091.

[18] Erdős, P.; Szemerédi, E. «On sums and products of integers». A: *Studies in pure mathematics*. Basilea: Birkhäuser, 1983, 213–218.

[19] Ford, K. «The distribution of integers with a divisor in a given interval». *Ann. of Math. (2)*, 168 (2) (2008), 367–433.

[20] Fox, J.; Sudakov, B. «Two remarks on the Burr-Erdős conjecture». *European J. Combin.*, 30 (7) (2009), 1630–1645.

[21] Frankl, P.; Rödl, V. «Extremal problems on set systems». *Random Structures Algorithms*, 20 (2) (2002), 131–164.

[22] Furstenberg, H. «Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions». *J. Analyse Math.*, 31 (1977), 204–256.

[23] Furstenberg, H.; Katznelson, Y. «An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations». *J. Analyse Math.*, 34 (1978), 275–291 (1979).

[24] Gowers, W. T. «Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma». *Geom. Funct. Anal.*, 7 (2) (1997), 322–337.

[25] Gowers, W. T. «A new proof of Szemerédi's theorem». *Geom. Funct. Anal.*, 11 (3) (2001), 465-588.

[26] Gowers, W. T. «Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem». *Ann. of Math. (2)*, 166 (3) (2007), 897–946.

[27] Gowers, W. T. «The work of Endre Szemerédi» [en línia]. `http://www.abelprize.no/c54147/binfil/download.php?tid=54060`.

[28] Green, B. «A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups, with applications». *Geom. Funct. Anal.*, 15 (2) (2005), 340–376.

[29] Green, B.; Tao, T. «The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions». *Ann. of Math. (2)*, 167 (2) (2008), 481–547.

[30] Hajnal, A.; Szemerédi, E. «Proof of a conjecture of P. Erdős». A: *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*. Amsterdam: North-Holland, 1970, 601–623.

[31] Hoory, S.; Linial, N.; Wigderson, A. «Expander graphs and their applications». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 43 (4) (2006), 439–561 [en línia].

[32] Kim, J. H. «The Ramsey number $R(3,t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$». *Random Structures Algorithms*, 7 (3) (1995), 173–207.

[33] Klazar, M. «Progressions aritmètiques de nombres primers». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 21 (2) (2006), 229–245.

[34] Komlós, J.; Sárközy, G. N.; Szemerédi, E. «Proof of the Seymour conjecture for large graphs». *Ann. Comb.*, 2 (1) (1998), 43–60.

[35] Komlós, J.; Sárközy, G. N.; Szemerédi, E. «Proof of the Alon-Yuster conjecture». Combinatorics (Prague, 1998). *Discrete Math.*, 235 (1–3) (2001), 255–269.

[36] Komlós, J.; Simonovits, M. «Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory». A: *Combinatorics, Paul Erdős is eighty*. Vol. 2: *(Keszthely, 1993)*. Budapest: János Bolyai Math. Soc., 1996. (Bolyai Soc. Math. Stud.; 2), 295–352.

[37] Král, D.; Serra, O.; Vena, L. «A combinatorial proof of the removal lemma for groups». *J. Combin. Theory Ser. A*, 116 (4) (2009), 971–978.

[38] Král, D.; Serra, O.; Vena, L. «A removal lemma for systems of linear equations over finite fields». *Israel J. Math.*, 187 (2012), 193–207.

[39] Král, D.; Serra, O.; Vena, L. «On the removal lemma for linear systems over Abelian groups». *European J. Combin.*, 34 (2) (2013), 248–259.

[40] Lovász, L.; Szegedy, B. «Limits of dense graph sequences». *J. Combin. Theory Ser. B*, 96 (6) (2006), 933–957.

[41] Lovász, L.; Szegedy, B. «Testing properties of graphs and functions». *Israel J. Math.*, 178 (2010), 113–156.

[42] Mundet i Riera, I. «Progressions aritmètiques de tots colors». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 26 (1) (2011), 69–95.

[43] Nguyen, H. H.; Szemerédi, E.; Vu, V. H. «Subset sums modulo a prime». *Acta Arith.*, 131 (4) (2008), 303–316.

[44] Ramsey, F. P. «On a problem of formal logic». *Proc. London Math. Soc.*, S2-30 (1) (1930), 264–286.

[45] Rödl, V.; Skokan, J. «Regularity lemma for k-uniform hypergraphs». *Random Structures Algorithms*, 25 (1) (2004), 1–42.

[46] Rödl, V.; Skokan, J. «Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs». *Random Structures Algorithms*, 28 (2) (2006), 180–194.

[47] Ron, D. «Algorithmic and analysis techniques in property testing». *Found. Trends Theor. Comput. Sci.*, 5 (2) (2009), 73–205.

[48] Ruzsa, I. Z.; Szemerédi, E. «Triple systems with no six points carrying three triangles». A: *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976)*. Vol. II. Amsterdam; Nova York: North-Holland, 1978. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; 18), 939–945.

[49] Solymosi, J. «Note on a generalization of Roth's theorem». A: *Discrete and computational geometry*. Berlín: Springer, 2003. (Algorithms Combin.; 25), 825–827.

[50] Solymosi, J. «Sumas contra productos». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 12 (4) (2009), 707–719.

[51] Szegedy, B. «The symmetry preserving removal lemma». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138 (2) (2010), 405–408.

[52] Szemerédi, E. «On a conjecture of Erdős and Heilbronn». *Acta Arith.*, 17 (1970), 227–229.

[53] Szemerédi, E. «On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression». *Acta Arith.*, 27 (1975), 199–245.

[54] Szemerédi, E. «Regular partitions of graphs». A: *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*. París: CNRS, 1978. (Colloq. Internat. CNRS; 260), 399–401.

[55] Szemerédi, E.; Trotter, W. T., Jr. «Extremal problems in discrete geometry». *Combinatorica*, 3 (3–4) (1983), 381–392.

[56] Szemerédi, E.; Vu, V. H. «Finite and infinite arithmetic progressions in sumsets». *Ann. of Math. (2)*, 163 (1) (2006), 1–35.

[57] Tao, T. «A variant of the hypergraph removal lemma». *J. Combin. Theory Ser. A*, 113 (7) (2006), 1257–1280.

[58] Tao, T. «Szemerédi's regularity lemma revisited». *Contrib. Discrete Math.*, 1 (1) (2006), 8–28.

[59] Tao, T. «The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes». A: *International Congress of Mathematicians*. Vol. I. Zuric: European Mathematical Society, 2007, 581–608.

[60] Turán, P. «On an extremal problem in graph theory». *Mat. Fiz. Lapok*, 48 (1941), 436–452.

Departament d'Economia i Empresa
Universitat Pompeu Fabra
Ramon Trias i Fargas, 25-27
08005 Barcelona
gabor.lugosi@gmail.com

Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona, 1
08034 Barcelona
oserra@ma4.upc.edu