Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 27, núm. 1, 2012. Pàg. 5–38. DOI: 10.2436/20.2002.01.40

Alejandro Luque

> La utopia és a l'horitzó. Quan m'apropo dues passes, ella se n'allunya dues. Quan camino deu passes, l'horitzó es mou deu passes. Per més que camini, mai l'assoliré... per a què serveix doncs la utopia? Per a això mateix: per a caminar.
>
> **Fernando Birri**

Resum: En aquest article presentem una introducció del mètode de la parametrització per a estudiar varietats invariants en sistemes dinàmics. El nostre propòsit és exposar les idees clau de manera «digerible» per al lector que no conegui la matèria. En primer lloc, farem una exposició del problema general de buscar varietats invariants, per després començar a discutir problemes concrets: varietats associades a punts fixos o d'equilibri, varietats normalment hiperbòliques en general i tors invariants amb dinàmica quasiperiòdica. Aquest últim problema s'inclou en l'anomenada *teoria KAM*.

Paraules clau: mètode de la parametrització, varietats invariants, teoria KAM, petits divisors i no tan petits.

Classificació MSC2010: 37C15, 37C20, 34C45, 34D05.

1 Introducció

Conèixer propietats d'objectes invariants (existència, estabilitat, dinàmica interna, connexions entre si, etc.) és molt important a l'hora d'estudiar sistemes dinàmics (algunes referències bàsiques sobre sistemes dinàmics són els llibres [1, 4, 5, 6, 7, 29]). Tot i que l'estudi d'objectes invariants es remunta fins als treballs de Poincaré [55] i de Lyapunov [42], en els últims anys s'han desenvolupat noves tècniques i coneixements més refinats sobre la matèria. Concretament, en aquest treball volem discutir de forma unificada diversos mètodes per a trobar parametritzacions de varietats invariants en diferents contextos.

Atès que les varietats invariants organitzen el comportament global d'un sistema dinàmic, aquestes tenen una gran importància, tant des del punt de vista teòric com pràctic. Per exemple, les varietats de codimensió 1 esdevenen barreres en l'espai de fase i, per tant, són molt útils per a descriure fenòmens de transport o delimitar regions amb diferent estabilitat. Alguns contextos concrets són els següents:

- En alguns sistemes plans, les varietats estables i inestables associades a punts fixos s'han fet servir per a estudiar l'estructura geomètrica d'atractors [61] o mecanismes de destrucció de corbes invariants [54], així com per a descriure fenòmens de transport en zones caòtiques [49].
- En el cas d'aplicacions simplèctiques de dimensió 4, podem fer servir les varietats estables i inestables associades a un punt fix de tipus hiperbòlic-el·líptic [31] per a fitar la regió d'estabilitat d'un punt fix totalment el·líptic.
- En sistemes hamiltonians de més de 2 graus de llibertat, els tors invariants maximals no són varietats de codimensió 1 i, per tant, no actuen com a barrera de les solucions. Aquest fet produeix un fenomen d'inestabilitat global que es coneix com a *difusió d'Arnold* [3] i que encara estem lluny d'entendre. Les varietats invariants associades a tors quasiperiòdics (normalment hiperbòlics) permeten establir un mecanisme de difusió clar en el cas dels anomenats *sistemes* a priori *inestables* [16].
- En mecànica celeste, podem estudiar la dinàmica associada als cossos celestes [25, 26, 27]. En astrodinàmica, les varietats estables i inestables associades a diversos objectes (punts fixos, òrbites periòdiques, tors quasiperiòdics, etc.) són útils per a dissenyar missions espacials mitjançant òrbites que permetin el moviment lliure (sense consum de combustible) en una gran regió de l'espai. Recomanem al lector l'article [48] que va aparèixer en aquest mateix butlletí.
- Finalment, a dia d'avui podem trobar moltes altres aplicacions de l'estudi d'objectes invariants a problemes reals, ja que caracteritzar i entendre el comportament global (estabilitats/inestabilitats) de sistemes dinàmics ha aconseguit l'atenció d'un conjunt ampli de comunitats científiques. Per exemple, a l'hora de dissenyar acceleradors de partícules o aparells confinadors de plasma [50] cal evitar l'efecte d'inestabilitats. Les varietats invariants permeten també estudiar com tenen lloc reaccions químiques [24]. Un context també interessant és l'estudi de configuracions d'estrelles en galàxies [56].

Al llarg de les pàgines següents volem presentar el mètode de la parametrització de varietats invariants per la dinàmica, tot exposant les idees clau de manera «digerible» per al lector que no conegui la matèria. En altres paraules, volem recollir una petita (i no exhaustiva) discussió autocontinguda i elemental sobre aquest camp.

L'estudi de varietats invariants comprèn una enorme quantitat de contextos diferents, cadascun dels quals presenta una sèrie de dificultats tècniques molt particulars. Per aquest motiu no resulta fàcil establir connexions entre problemes propers. Així, ens plantegem abordar diferents contextos de manera unificada, intentant mantenir la línia argumental i notació comuna quan sigui possible. Esperem així que aquest petit resum sigui de l'interès d'un gran espectre de lectors.

Cal emfasitzar que el mètode de la parametrització és un mètode constructiu que es pot implementar de manera eficient, per a obtenir algoritmes per al càlcul efectiu d'objectes invariants [13, 32, 39, 46, 47]. Aquest és un motiu més pel qual és important que investigadors fora de l'àmbit dels sistemes dinàmics coneguin aquestes tècniques. Per qüestió d'espai no abordarem aquí les explicacions relacionades amb la implementació efectiva dels diferents mètodes, però donarem al lector referències adequades en cada cas.

Volem fer ara un aclariment relatiu al nivell de detall de la discussió. En primer lloc, tot i que busquem una visió àmplia, seria incorrecte dir que aquest és un article de divulgació. En la mesura de les possibilitats donades pel quocient «quantitat de material a tractar / extensió de l'article», volem arribar al màxim detall possible. Nogensmenys, no volem esgotar el lector discutint detalls tècnics com ara temes de regularitat, espais de funcions o dependència respecte a paràmetres (tot i que procurarem indicar les respostes a aquestes qüestions en la bibliografia). En qualsevol cas, sovint evitarem enunciar teoremes i resultats precisos, ja que hauríem de tenir en compte massa detalls tècnics, en forma d'hipòtesis quantitatives, formulació d'espais de Banach concrets, etc. Cal remarcar també que al llarg d'aquesta discussió no presentem cap resultat original que no es pugui trobar a la bibliografia indicada.

Així doncs, és el moment de comentar el material escollit (en forma de menú) per a aquest article. En primer lloc, en la secció 2 exposem el problema general de buscar varietats invariants, per després passar a discutir problemes concrets. Com a aperitiu, presentem en la secció 3 el cas més fàcil possible, que correspon a l'estudi de varietats associades a punts fixos o d'equilibri. Com a plats principals, en les seccions 4 i 5, discutim el cas general de varietats normalment hiperbòliques i el cas d'objectes quasiperiòdics. Aquest últim problema s'inclou en l'anomenada *teoria KAM*. Un tutorial molt complet sobre teoria KAM és [43], el qual conté una font enorme de bibliografia. Sobre aquest tema, volem recomanar també un article divulgatiu molt interessant que es pot trobar en aquest butlletí [8]. Finalment, si encara queda espai per a les postres, citarem una sèrie de treballs en la secció 6 que recullen aspectes que no hem pogut considerar en aquest article introductori.

2 Descripció general del menú

Sigui $\mathcal{M}$ una varietat de dimensió m i considerem una varietat $\mathcal{N} = P(N)$ de dimensió r inclosa en $\mathcal{M}$ a través d'una immersió $P\colon N \to \mathcal{M}$. Sovint es diu que N és la varietat de referència per a $\mathcal{N}$. Aleshores, donada una aplicació F sobre

$\mathcal{M}$, direm que $\mathcal{N}$ és invariant per a F si existeix una aplicació $f\colon N \to N$ tal que

$$F \circ P = P \circ f\,. \tag{1}$$

Notem que el punt $P(x)$ de $\mathcal{N}$, parametritzat per $x \in N$, té imatge $F(P(x)) = P(f(x))$ i pertany, doncs, a $\mathcal{N}$ (el nou punt està parametritzat per $f(x)$). Dit en altres paraules, P és una parametrització de la subvarietat $\mathcal{N}$ i f correspon a la dinàmica sobre la subvarietat en les coordenades escollides sobre la varietat de referència N.

Observem que a l'equació d'invariància tenim P i f com a incògnites, que corresponen a la «forma» de la varietat i a la seva dinàmica interna. Així doncs, hem de determinar $m+r$ funcions tot i que tenim únicament m equacions. Això és clar si observem el fet que si (P, f) és solució de (1), aleshores $(P \circ h, h^{-1} \circ f \circ h)$ també ho és per a qualsevol automorfisme de N. Aquesta llibertat recull la possibilitat de triar coordenades a N, com hem comentat al començament.

Seguint el fil argumental de [30], entre les infinites tries de coordenades que permeten abordar aquesta ambigüitat, distingim dues filosofies oposades:

- Buscar la P més «simple»: per exemple, suposant que P és un graf respecte a certes coordenades (en la literatura s'acostuma a conèixer com a *graph transform method*). Aquesta decisió determina la dinàmica f. Aquesta metodologia fou introduïda per Hadamard per a estudiar l'existència de les varietats estables i inestables.
- Buscar la f més «simple»: l'expressió més simple de la dinàmica correspon a escollir la forma normal de f. Aquest mètode dóna molta llibertat a la forma de la varietat $\mathcal{N}$ en el sentit que sovint aquestes presenten plegaments que no permeten que siguin estudiades com a grafs.

Nota. Sovint la varietat $\mathcal{M}$ està dotada d'alguna estructura (mètrica, forma simplèctica, etc.) i també l'aplicació F és compatible amb aquesta estructura (simplèctica, dissipativa, preserva volum, reversible, etc.). Aleshores, aquesta estructura pot imposar restriccions al tipus de varietats invariants que podem trobar i al seu comportament. Per exemple, en presència d'estructures simplèctiques (cas que considerem en la secció 5) trobarem objectes invariants com els tors amb dinàmica quasiperiòdica.

Observem que l'equació d'invariància (1) es pot reformular en termes de trobar zeros de l'operador

$$\mathcal{F}(P, f) = F \circ P - P \circ f\,. \tag{2}$$

Per aquest motiu, la forma natural d'abordar aquest problema és fer servir mètodes de punt fix en espais de Banach adequats. Aquesta idea es pot dur a terme amb èxit en una gran quantitat de casos, com ara en l'estudi de varietats invariants de punts fixos (secció 3) o de varietats normalment hiperbòliques en general (secció 4). D'altra banda, quan l'objecte invariant que volem estudiar presenta dinàmica quasiperiòdica, el mètode de punt fix (o el teorema de la funció implícita) no és suficient per a demostrar l'existència de zeros de (2).

Què entenem per *dinàmica quasiperiòdica*? Una funció quasiperiòdica és una funció que depèn de diverses freqüències. En els problemes que discutirem en aquest article, parlem de dinàmica quasiperiòdica quan la dinàmica interna f correspon a una rotació rígida sobre el tor estàndard $\mathbb{T}^r = \mathbb{R}^r/(2\pi\mathbb{Z})^r$, amb $r \geq 1$. És a dir, donat un vector de freqüències $\omega \in \mathbb{R}^r$ i suposant que $N = \mathbb{T}^r$, tenim que

$$f(\theta) = R_\omega(\theta) = \theta + \omega, \text{ mòdul } (2\pi\mathbb{Z})^r,$$

per a tot $\theta \in \mathbb{T}^r$. És fàcil veure que si ω és racionalment independent, és a dir, si $\langle k, \omega \rangle \neq 0$ per a tot $k \in \mathbb{Z}^r \backslash \{0\}$, aleshores $f^n(\theta) \neq \theta$ per a tot $\theta \in \mathbb{T}^r$ i per a tot $n \geq 1$. Nogensmenys, per a tot $\varepsilon > 0$ i per a tot $\theta \in \mathbb{T}^r$ existeix un $n \geq 1$ tal que $|f^n(\theta) - \theta| < \varepsilon$. Per aquest motiu, parlem de dinàmica quasiperiòdica.

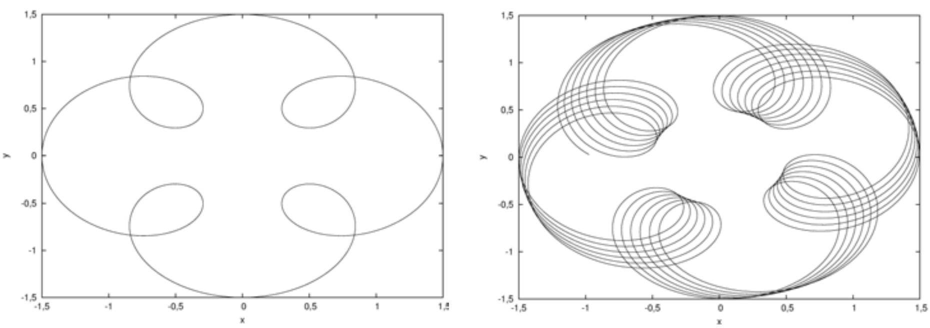

FIGURA 1: Il·lustració d'una funció dependent de dues freqüències. A l'esquerra mostrem el cas de freqüències racionalment dependents, on resulta que la funció és periòdica. A la dreta mostrem el cas de freqüències racionalment independents, on obtenim una trajectòria densa en l'anell.

En el cas continu la idea de quasiperiodicitat és molt més intuïtiva. Ho il·lustrarem prenent com a exemple la parametrització $P\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ següent:

$$P(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta_1) + 0,5\cos(2\pi\theta_2) \\ \sin(2\pi\theta_2) + 0,5\sin(2\pi\theta_2) \end{pmatrix}.$$

En aquest exemple, la trajectòria $t \mapsto P(\omega_1 t, \omega_2 t)$ descriu el moviment d'un cos (satèl·lit) que gira amb freqüència constant ω_2 al voltant d'un cos que gira amb freqüència constant ω_1 al voltant de l'origen. Si prenem $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = 5$ aleshores observem que la trajectòria és periòdica (vegeu el gràfic de l'esquerra de la figura 1), ja que $5\omega_1 = \omega_2$. En canvi, si prenem $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = 4(\sqrt{5} - 1) \simeq 4{,}944$ observem que la trajectòria deixa de ser periòdica (vegeu el gràfic de la dreta de la figura 1), ja que depèn de dues freqüències independents. De fet, la trajectòria omple densament l'anell de radis 0,5 i 1,5.

Com veurem en la secció 5, els problemes de conjugació amb dinàmica quasiperiòdica presenten una dificultat afegida, anomenada *problema dels petits divisors*. Aquests són nombres que apareixen dividint en totes les estimacions (en particular a les constants de Lipschitz) i que s'acumulen asimptòticament en el zero. Aquest fet dificulta l'anàlisi del problema, i impossibilita l'ús de mètodes de punt fix, de manera que hem de fer servir mètodes amb convergència quadràtica. Aquesta és la idea central en l'anomenada *teoria KAM* (secció 5).

3 Aperitiu: varietats invariants associades a un punt fix

L'estudi de varietats invariants regulars associades a un punt fix d'una aplicació és un problema clàssic en sistemes dinàmics, de manera que podem trobar molta bibliografia que el tracta, com per exemple els treballs [33, 35, 36] o els llibres [7, 29, 63]. Com a nota històrica, ja hem comentat que resultats relatius a varietats estables analítiques apareixen en els treballs de Poincaré [55] i Lyapunov [42].

La presentació que farem en aquesta secció serà molt propera a les explicacions donades a [30], perquè creiem que es tracta d'una exposició molt sintètica i elegant. El lector trobarà allà detalls de com implementar adequadament les idees exposades fent servir un manipulador algebraic. Confiem que, després de llegir [30, 37], el lector trobi aquesta tasca molt més fàcil i apassionant del que podria pensar *a priori*. Volem remarcar que les tècniques algebraiques que presentem en aquesta secció estan íntimament relacionades amb el càlcul de formes normals [4, 29].

Abans d'entrar en matèria, és convenient introduir una mica de notació relacionada amb polinomis i sèries de potències de diverses variables, que serà d'utilitat. Considerem una sèrie (formal) de potències f en les variables $x = (x_1, \ldots, x_r)$ amb coeficients en un cert anell commutatiu:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k\geq 0} f_k(x),$$

on $f_k(x)$ és un polinomi homogeni de grau k en les variables $(x_1, \ldots, x_r)$. Aleshores, escrivim

$$f_{\leq n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad [f(x)]_n = f_n(x) \tag{3}$$

per denotar els polinomis que corresponen a la sèrie truncada fins a grau n i a la part homogènia de grau n respectivament. Aquesta notació s'estén de manera evident per a escriure $f_{\geq n}(x)$, $f_{<n}(x)$ i $f_{>n}(x)$.

Considerem una aplicació F de classe C^d sobre $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$ que compleix $F(0) = 0$ (punt fix o d'equilibri). Si volem estudiar el comportament de la dinàmica entorn de l'origen és natural pensar que aquest serà «proper» al de l'aplicació linealitzada en aquest punt. En particular, donat qualsevol subespai invariant de $DF(0)$ volem trobar una varietat invariant per a F tangent a aquest subespai.

Sense cap pèrdua de generalitat, podem suposar que la matriu $DF(0)$ es pot escriure en forma de blocs com

$$DF(0) = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

respecte a les variables $(x, y) = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{m-r})$, on r és la dimensió del subespai invariant escollit, $r \leq m$. El que sí que suposarem d'ara endavant és que les matrius A_1 i A_2 són diagonals. Concretament:

$$A_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \qquad A_2 = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{m-r}).$$

Això simplificarà els càlculs corresponents a la part lineal (altrament hauríem de considerar formes de Jordan).

Considerem $P\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ una parametrització de la varietat invariant $\mathcal{N} = P(\mathbb{R}^r)$ en coordenades $(s_1, \dots, s_r)$. La dinàmica sobre aquesta varietat serà donada per una aplicació $f\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$. Observem que és convenient escollir la parametrització de manera que $P(0) = 0$ (la dinàmica passa per l'origen), i això implica que $f(0) = 0$ (l'origen també és un punt fix per la dinàmica interna).

Per a expandir l'equació d'invariància (1) en sèrie de Taylor cal escriure l'aplicació $F = (F^x, F^y)$ com

$$F^x(x, y) = A_1 x + By + \sum_{k \geq 2} F_k^x(x, y), \qquad F^y(x, y) = A_2 y + \sum_{k \geq 2} F_k^y(x, y),$$

la parametrització $P = (P^x, P^y)$ com

$$P^x(s) = s + \sum_{k \geq 2} \phi_k(s), \qquad P^y(s) = \sum_{k \geq 2} \psi_k(s),$$

i la dinàmica interna com

$$f(s) = A_1 s + \sum_{k \geq 2} f_k(s).$$

Ara ataquem el problema de forma inductiva, suposant que coneixem els termes homogenis fins a grau $k-1$ de $P(s)$ i de $f(s)$. En altres paraules, segons la notació introduïda a (3), estem suposant que hem determinat els polinomis $P_{<k}(s)$ i $f_{<k}(s)$. Observem que podem avaluar els polinomis homogenis $[P_{<k}(f_{<k}(s))]_k$ i $[F(P_{<k}(s))]_k$.

Escollint només els termes homogenis d'ordre k de l'equació d'invariància

$$\begin{aligned}
[F(P(s))]_k &= [F(P_{<k}(s) + P_k(s) + P_{>k}(s))]_k = [F(P_{<k}(s) + P_k(s))]_k = \\
&= [F(P_{<k}(s))]_k + DF(0)P_k(s), \\
[P(f(s))]_k &= [P(f_{<k}(s) + f_k(s))]_k = [P(f_{<k}(s)]_k + DP(0)f_k(s) = \\
&= [P_{<k}(f_{<k}(s))]_k + P_k(A_1 s) + DP(0)f_k(s),
\end{aligned}$$

obtenim un sistema triangular d'equacions per trobar els polinomis homogenis $\phi_k(s)$, $\psi_k(s)$ i $f_k(s)$:

$$A_1\phi_k(s) - \phi_k(A_1 s) + B\psi_k(s) = f_k(s) + [\phi_{<k}(f_{<k}(s))]_k - [F^x(P_{<k}(s))]_k\,, \quad (4)$$

$$A_2\psi_k(s) - \psi_k(A_1 s) = [\psi_{<k}(f_{<k}(s))]_k - [F^y(P_{<k}(s))]_k\,. \quad (5)$$

Aquest tipus d'equació sovint s'anomena *equació cohomològica* (a coeficients constants), i trobar la solució formal és immediat. El lema següent, que el lector podrà verificar sense problemes, ens ajudarà a obtenir solucions de (4)–(5).

LEMA 1. *Sigui $\eta(s)$ un polinomi homogeni de grau k i r variables. Considerem $\lambda \in \mathbb{C}$ i $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, amb tots els $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Aleshores, si per a tot $l \in \mathbb{N}^r$ tal que $l_1 + \cdots + l_r = k$ es compleix que*

$$\lambda_1^{l_1} \cdots \lambda_r^{l_r} \neq \lambda, \quad \text{o bé que} \quad \eta_{l_1,\ldots,l_r} = 0,$$

l'equació $\lambda\xi(s) - \xi(\Lambda s) = \eta(s)$ té una única solució $\xi(s)$ donada per

$$\xi(s) = \sum_{l_1+\cdots+l_r=k} \xi_{l_1,\ldots,l_k} s_1^{l_1} \cdots s_r^{l_r}, \qquad \xi_{l_1,\ldots,l_k} = \begin{cases} \frac{\eta_{l_1,\ldots,l_k}}{\lambda - \lambda_1^{l_1}\cdots\lambda_r^{l_r}} & \text{si } \eta_{l_1,\ldots,l_k} \neq 0, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Fent servir el lema 1 podem resoldre (5) si per a tota combinació de coeficients $l_1 + \cdots + l_r = k$ i per a tot índex $j = 1, \ldots, m - r$ es compleix que $\lambda_1^{l_1} \cdots \lambda_r^{l_r} \neq \mu_j$. Les parelles $(l, j) \in \mathbb{N}^r \times \{1, \ldots, m - r\}$ que no compleixen aquesta condició s'anomenen *ressonàncies primàries*. En general, no tenim cap informació que ens permeti afirmar que el monomi associat a una ressonància primària s'anul·li, és a dir, que en general una ressonància primària és una obstrucció per a resoldre l'equació cohomològica (5) i, en conseqüència, per a trobar l'expansió de la parametrització.

Si ara ens plantegem resoldre (4) trobem que, com ja hem comentat en la secció 2, el sistema és indeterminat i tenim certa llibertat per a escollir la solució. Entre les moltes opcions intermèdies que podríem triar, en destaquem:

- Parametrització simple: podem escollir a cada pas $\phi_k = 0$ i aleshores triar $f_k(s) = B\psi_k(s) - [\phi_{<k}(f_{<k}(s))]_k - [\phi(P_{<k}(s))]_k$. Això correspon a parametritzar $\mathcal{N}$ fent servir el graf $y = \psi(x)$.
- Dinàmica interna simple: alternativament, podem demanar que $f_k(s) = 0$ i usar de nou el lema 1 per a trobar $\phi_k(s)$. Això requereix que per a tota combinació de coeficients $l_1 + \cdots + l_{m-r} = k$ i per a tot índex $j = 1, \ldots, m - r$ es compleixi que $\lambda_1^{l_1} \cdots \lambda_{m-r}^{l_{m-r}} \neq \lambda_j$. Les parelles $(l, j) \in \mathbb{N}^{m-r} \times \{1, \ldots, m - r\}$ que no compleixen aquesta condició s'anomenen *ressonàncies secundàries*.

Observem que les ressonàncies secundàries no són cap obstrucció per a trobar la parametrització, només ho són a l'hora de simplificar l'expressió de la dinàmica interna. Així, demanar que $f_k(s) = 0$ llevat dels índexs que corresponen a ressonàncies secundàries equival a trobar la forma normal de la dinàmica interna.

A continuació distingim alguns casos clàssics, on el problema de trobar una varietat invariant té solució atès que no apareixen les anomenades *ressonàncies primàries*:

- Varietat estable/inestable: quan $|\lambda_i| < 1$ i $|\mu_j| \geq 1$ o quan $|\lambda_i| > 1$ i $|\mu_j| \leq 1$, respectivament.
- Varietat central: quan $|\lambda_i| = 1$ i $|\mu_j| \neq 1$.
- Varietat central estable/inestable: quan $|\lambda_i| \leq 1$ i $|\mu_j| > 1$ o quan $|\lambda_i| \geq 1$ i $|\mu_j| < 1$, respectivament.
- Varietat fortament estable/inestable: quan $|\lambda_i| < 1$ i $|\lambda_i| < |\mu_j|$ o $|\lambda_i| > 1$ i $|\lambda_i| > |\mu_j|$, respectivament.

Fins ara només hem considerat l'estudi formal de la parametrització. Recordem novament que aquest esquema formal es pot implementar numèricament fent servir un manipulador algebraic [30, 37]. Per terminar la discussió d'aquesta secció, presentem un resultat d'existència de parametrització en un cas concret. El resultat següent es troba a [12].

Teorema 2. *Sigui F una aplicació $F\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ analítica en un entorn de l'origen, que satisfà $F(0) = 0$. Suposem que la matriu $DF(0)$ està escrita en forma de blocs com*

$$DF(0) = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \quad A_2 = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{m-r}),$$

respecte a les variables $(x, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$. Suposem que

- H_1 *Busquem una subvarietat estable, és a dir, $|\lambda_i| < 1$ per a tot $i = 1, \dots, r$.*
- H_2 *No tenim ressonàncies primàries fins a ordre L, és a dir, per a tota combinació de coeficients $2 \leq l_1 + \cdots + l_r \leq L$ i per a tot índex $j = 1, \dots, m-r$ es compleix $\lambda_1^{l_1} \cdots \lambda_r^{l_r} \neq \mu_j$.*
- H_3 *La matriu $DF(0)$ és invertible.*
- H_4 *Per a tota combinació de coeficients $l_1 + \cdots + l_r = L + 1$ i per a tot valor propi λ de $DF(0)$ es compleix que*

$$\lambda_1^{l_1} \cdots \lambda_r^{l_r} \lambda^{-1} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Aleshores, existeix una parametrització $P\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$, analítica en un entorn de l'origen, i un polinomi $f\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ de grau com a molt L que satisfà (1) *amb*

$$P(0) = 0, \qquad DP(0) = \mathrm{Id}, \qquad f(0) = 0, \qquad Df(0) = A_1.$$

El procediment formal descrit anteriorment ens permet aproximar la parametrització P per un polinomi de grau L (gràcies a la hipòtesi H_2). Tenim així $P = P_{\leq L} + P_{>L}$, on $P_{\leq L} = (P^x_{\leq L}, P^y_{\leq L})$ s'obté explícitament resolent les equacions (4) i (5). Per construcció, la funció $P_{>L}$ comença per termes d'ordre $L+1$, de manera que la podem considerar petita en un entorn de l'origen. D'altra banda, observem que podem reformular l'equació (1) en notació funcional com $\mathcal{P}(F_{>1}, P_{>L}) = 0$, on $\mathcal{P}$ és l'operador

$$\mathcal{P}(F_{>1}, P_{>L}) = F_0(P_{\leq L} + P_{>L}) + F_{>1} \circ (P_{\leq L} + P_{>L}) - (P_{\leq L} + P_{>L}) \circ f \tag{6}$$

que també podem escriure (fent servir que $F_{\leq L} \circ P_{\leq L} = P_{\leq L} \circ f$) de la manera següent:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(F_{>1}, P_{>L}) = F_0 P_{>L} + F_{>L} \circ P_{\leq L} + F_{>1} \circ (P_{\leq L} + P_{>L}) - \\ - F_{>1} \circ P_{\leq L} - P_{\geq L} \circ f. \end{aligned}$$

Ara notem que per a $F_{>1} = 0$ l'equació d'invariància es compleix si $P_{>1} = 0$, és a dir, $\mathcal{P}(0,0) = 0$. El nostre objectiu és veure que per a $F_{>1}$ petita, podem continuar aquesta solució i trobar una parametrització analítica per a aquest problema. Així, per a aplicar el teorema de la funció implícita hem de veure que l'aplicació $D_2\mathcal{P}(0,0)$ és invertible en els espais de funcions adequats. Tal com hem dit en la introducció, en aquesta discussió preferim no especificar detalls quantitatius relatius a l'espai de funcions analítiques on l'operador $\mathcal{P}$ queda perfectament definit (aquests detalls estan especificats a [12]). Usarem $\|\cdot\|$ per a denotar la norma amb què dotem aquest espai.

Nota. D'ara endavant suposarem que $F_{>1}$ és petita i definida en una bola de radi unitat entorn de l'origen. Això és equivalent a estudiar una bola de radi petit. En efecte, només cal considerar l'escalat $F^\delta(x) = \frac{1}{\delta}F(\delta x)$ i el nou problema $F^\delta \circ P^\delta = P^\delta \circ f^\delta$. Per traslladar els objectes obtinguts a les coordenades originals considerem $P(x) = \delta P^\delta(x/\delta)$ i $f(x) = \delta f^\delta(x/\delta)$.

Veiem primer que l'operador $\mathcal{P}$ és analític. Per això ens fixem en els diferents termes que apareixen a (6). En primer lloc, és clar que les funcions $P_{\leq L}$ i $f = f_{\leq L}$ són analítiques, ja que s'obtenen a partir d'expressions algebraiques que involucren un nombre finit de coeficients de $F_{>1}$. Així, és clar que el terme $F_0(P_{\leq L} + P_{>L})$ és analític. El terme següent també és analític, ja que en una àlgebra de Banach es compleix que

$$\|F_{>1} \circ (P_{\leq L} + P_{>L})\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |F_i| \, \|P_{\leq L} + P_{>L}\|^i .$$

Finalment, per a veure que la resta de termes estan ben definits, fem servir que f és una contracció (aquest fet es deriva de la hipòtesi H_1).

D'altra banda, la linealització de (6) a l'origen és donada per

$$D_2\mathcal{P}(0,0)\Delta = F_0\Delta - \Delta \circ A_1 .$$

Per veure que aquest operador lineal és invertible considerem

$$F_0\Delta - \Delta \circ A_1 = \eta, \qquad \text{on} \qquad \Delta = \sum_{i=L+1}^{\infty} \Delta_i, \qquad \eta = \sum_{i=L+1}^{\infty} \eta_i \,.$$

Aleshores, l'expressió per a cada monomi $\Delta_{l_1,\dots,l_r}$ de Δ_i és donada per (fem servir la hipòtesi H_3)

$$\Delta_{l_1,\dots,l_r} = \left(\mathrm{Id} - F_0^{-1}\mathrm{diag}\,(\lambda_1^{l_1},\dots,\lambda_r^{l_r})\right)^{-1} F_0^{-1}\eta_{l_1,\dots,l_r},$$

on $\eta_{l_1,\dots,l_r}$ és el corresponent monomi de η_i. Ara, fent servir les hipòtesis H_1 i H_4 en aquesta expressió, trobem que $\|\Delta\|$ es pot controlar per $\|\eta\|$.

Nota. El resultat presentat en aquesta secció es pot estendre sense problemes a sistemes de dimensió infinita [11]. Concretament, considerem una aplicació F de classe C^d sobre un espai de Banach $\mathcal{M}$ tal que $F(0) = 0$. Aleshores, a tot subespai X_1 de $\mathcal{M}$ invariant per l'aplicació linealitzada (i que compleix unes propietats anàlogues a les discutides anteriorment) li podem associar una varietat invariant per F tangent a X_1 a l'origen.

Nota. En aplicacions numèriques, el càlcul de $P_{\le L}$ i f es pot realitzar fins a ordre alt, de tal manera que obtenim una aproximació de la solució arbitràriament bona. Aleshores, la demostració del teorema 2 es pot adaptar per a concloure que a prop de l'aproximació obtinguda existeix una varietat invariant. A més, la distància d'aquesta varietat es pot controlar en termes d'error d'invariància de l'aproximació.

4 Primer plat: varietats invariants normalment hiperbòliques

En aquesta secció farem una breu presentació d'un tipus d'objecte anomenat *varietat invariant normalment hiperbòlica*, que generalitza el paper que tenia el punt fix a la secció anterior.

4.1 Descripció del problema i alguns comentaris

En primer lloc, recordarem algunes definicions i resultats relacionats amb varietats normalment hiperbòliques. Algunes referències estàndard sobre el tema són [19, 33, 34, 64]. Sigui $\mathcal{M}$ una varietat de dimensió m i sigui $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ una aplicació de classe C^d, $d \ge 1$.

Definició 3. Es diu que $\Lambda \subset \mathcal{M}$ és una varietat invariant normalment hiperbòlica si $F(\Lambda) = \Lambda$ i existeixen constants $C > 0$, $0 < \lambda < \mu^{-1} < 1$ de manera que per a tot $x \in \Lambda$ es pot trobar la descomposició següent de l'espai tangent

$$T_x\mathcal{M} = E_x^s \oplus E_x^u \oplus T_x\Lambda,$$

on

$$
\begin{aligned}
v \in E^s_x &\quad\Leftrightarrow\quad |DF^n(x)v| \le C\lambda^n|v|, \quad n \ge 0,\\
v \in E^u_x &\quad\Leftrightarrow\quad |DF^n(x)v| \le C\lambda^{|n|}|v|, \quad n \le 0\text{i}\\
v \in T_x\Lambda &\quad\Leftrightarrow\quad |DF^n(x)v| \le C\mu^{|n|}|v|, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Per tradició, farem servir el símbol Λ per a denotar una varietat normalment hiperbòlica, tot i que en relació amb l'explicació general de la secció 2, Λ fa el paper de la subvarietat $\mathcal{N}$.

Donada una varietat normalment hiperbòlica, es defineixen les seves varietats estable i inestable associades com (la constant C_y depèn del punt y)

$$
\begin{aligned}
W^s_\Lambda &= \{y \in \mathcal{M} : d(\Lambda, F^n(y)) \le C_y\lambda^n, n \ge 0\},\\
W^u_\Lambda &= \{y \in \mathcal{M} : d(\Lambda, F^n(y)) \le C_y\lambda^{|n|}, n \le 0\}.
\end{aligned}
$$

De manera similar, per a tot $x \in \Lambda$ definim (la constant $C_{x,y}$ depèn dels punts x i y)

$$
\begin{aligned}
W^s_x &= \{y \in \mathcal{M} : d(F^n(x), F^n(y)) \le C_{x,y}\lambda^n, n \ge 0\},\\
W^u_x &= \{y \in \mathcal{M} : d(F^n(x), F^n(y)) \le C_{x,y}\lambda^{|n|}, n \le 0\}
\end{aligned}
$$

i observem que $E^s_x = T_xW^s_x$ i $E^u_x = T_xW^u_x$. Aleshores, tenim

$$
W^s_\Lambda = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s_x, \qquad W^u_\Lambda = \bigcup_{x\in\Lambda} W^u_x,
$$

és a dir, tenim una foliació de W^s_Λ i W^u_Λ donada per $\{W^s_x\}_{x\in\Lambda}$ i $\{W^u_x\}_{x\in\Lambda}$, respectivament. Notem que si $x \ne y$, aleshores $W^s_x \cap W^s_y = \emptyset$ i $W^u_x \cap W^u_y = \emptyset$. En aquest context, es pot demostrar el següent:

- La varietat Λ és una varietat C^{l-1}, on l satisfà $l < \min\left\{d, \frac{|\log\lambda|}{\log\mu}\right\}$.
- Les descomposicions E^s_x i E^u_x, així com les varietats W^s_Λ i W^u_Λ, són C^{l-1}.
- Les varietats W^s_x i W^u_x són de classe C^d.

Remarquem que, a més de la regularitat de l'aplicació F, els exponents $|\log\lambda|$ i $\log\mu$ imposen limitacions a la regularitat d'aquestes varietats [20].

4.2 Persistència de varietats normalment hiperbòliques

La teoria de pertorbacions de varietats normalment hiperbòliques és un tema clàssic en la literatura de sistemes dinàmics (novament, recomanem les referències [19, 33, 34, 64]). En aquesta secció simplement volem posar de manifest algunes peculiaritats del mètode de la parametrització en aquest context. El nostre objectiu, més que demostrar un resultat concret, és il·lustrar com el mètode de la parametrització pot ser implementat per a trobar aquestes varietats de forma constructiva. Presentarem els càlculs des de dos punts de vista diferents. En primer lloc, farem una construcció en coordenades (seguint la línia de [16]) molt similar a la presentada en la secció 3. D'altra banda, discutirem una construcció més geomètrica del problema que té alguns avantatges afegits [18].

Suposem que $\Lambda_0 = P_0(N)$, on $P_0 \colon N \to \Lambda_0 \subset \mathcal{M}$ és una varietat normalment hiperbòlica d'una aplicació F_0. Aleshores (sense entrar en qüestions de regularitat), existeix un entorn d'aplicacions de F_0 tota aplicació del qual té una varietat normalment hiperbòlica. Aquestes varietats són properes a Λ_0.

Més concretament, donada una aplicació F propera a F_0, busquem una parametrització $P \colon N \to \mathcal{M}$, amb $\Lambda = P(N)$, tal que

$$F \circ P = P \circ f, \tag{7}$$

on novament $f \colon N \to N$ correspon a la dinàmica interna de la varietat normalment hiperbòlica per F. Més concretament, tenim el resultat clàssic següent:

Teorema 4. *Sigui $F_\varepsilon \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ una família de classe C^d de difeomorfismes, amb $d \geq 2$. Suposem que $\Lambda_0 \subset \mathcal{M}$ és una varietat normalment hiperbòlica de F_0 amb velocitats λ, μ com a la definició 3. Aleshores, per a tot $l < \min\left\{d, \frac{|\log \lambda|}{\log \mu}\right\}$ existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que per a $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ existeixen famílies P_ε, f_ε (de classe C^{l-1}) que compleixen el diagrama* (7)*. És a dir, $\Lambda_\varepsilon = P_\varepsilon(N)$ és una varietat normalment hiperbòlica.*

Anàlogament a la secció 3, l'objectiu és plantejar un esquema inductiu per a construir la parametrització P_ε del teorema 4 ordre a ordre, tot i que no discutirem els detalls de la demostració d'aquest resultat. D'altra banda, considerem interessant adaptar l'explicació a un exemple, de cara a il·lustrar millor la idea que hi ha darrere de la construcció.

Considerem, doncs, la varietat $\mathcal{M} = \mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u}$, amb $r, n_s, n_u \in \mathbb{N}$, i denotem per $z = (q, p, x, y)$ els punts sobre $\mathcal{M}$. Considerem una família d'aplicacions $F_\varepsilon \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, analítica respecte a ε, amb l'expansió següent:

$$F(z) = F_0(z) + \sum_{k \geq 2} F_k(z) \varepsilon^k,$$

on

$$F_0(q, p, x, y) = (q + \omega(p), p, G(x, y)), \tag{8}$$

i on les aplicacions $\omega \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ i $G \colon \mathbb{R}^{n_s+n_u} \to \mathbb{R}^{n_s+n_u}$ són difeomorfismes. Suposem que G té un punt fix hiperbòlic a l'origen. Per simplificar els càlculs de l'exposició, suposarem que

$$G(0,0) = (0,0) \quad \text{i} \quad DG(0,0) = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^u \end{pmatrix},$$

on $A^s = \operatorname{diag}(\lambda_1^s, \ldots, \lambda_{n_s}^s)$ i $A^u = \operatorname{diag}(\lambda_1^u, \ldots, \lambda_{n_u}^u)$. Finalment, farem servir la notació Π_q, Π_p, Π_x i Π_y per a indicar les projeccions sobre $\mathbb{T}^r$, $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^{n_s}$ i $\mathbb{R}^{n_u}$, respectivament.

Aleshores, observem que tenim una varietat normalment hiperbòlica donada per $\Lambda_0 = P_0(N)$ amb $N = \mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^r$ i

$$\begin{array}{rcl} P_0\colon N & \longrightarrow & N \times \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u} \\ (q,p) & \longmapsto & (q,p,0,0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_0\colon N & \longrightarrow & N \\ (q,p) & \longmapsto & (q+\omega(p),p). \end{array} \tag{9}$$

Volem estudiar com es deforma aquesta varietat (i la seva dinàmica interna) respecte al paràmetre ε. Així, busquem la parametrització corregida de la manera següent:

$$P(z) = P_0(z) + \sum_{k\geq 2} P_k(z)\varepsilon^k, \quad f(z) = f_0(z) + \sum_{k\geq 2} f_k(z)\varepsilon^k .$$

Per trobar les funcions $P_k(z)$ i $f_k(z)$ plantegem ordre a ordre l'equació d'invariància (7). Concretament, si expandim respecte a ε l'equació d'invariància, obtenim (en notació tensorial, el superíndex $2\otimes$ indica els termes quadràtics en el desenvolupament de Taylor)

$$\begin{aligned}
&\text{ordre 0: } F_0 \circ P_0 = P_0 \circ f_0,\\
&\text{ordre 1: } (DF_0 \circ P_0)P_1 - P_1 \circ f_0 - (DP_0 \circ f_0)f_1 = -F_1 \circ f_0,\\
&\text{ordre 2: } (DF_0 \circ P_0)P_2 - P_2 \circ f_0 - (DP_0 \circ f_0)f_2 = -F_2 \circ f_0\\
&\qquad + \frac{1}{2}(D^2P_0 \circ f_0)f_1^{2\otimes} - \frac{1}{2}(D^2F_0 \circ P_0)P_1^{2\otimes} + (DP_1 \circ f_0)f_1 - (DF_1 \circ P_0)P_1,\\
&\text{ordre } n\text{: } (DF_0 \circ P_0)P_n - P_n \circ f_0 - (DP_0 \circ f_0)f_n = H_n,
\end{aligned}$$

on H_n és una funció que depèn de $F_0,\dots,F_n$, $f_0,\dots,f_{n-1}$ i $P_0,\dots,P_{n-1}$. Observem que la primera equació, que correspon als termes d'ordre 0, té (9) com a solució. La resta d'equacions es poden resoldre iterativament fent servir el lema següent:

Lema 5. *Considerem F_0, P_0 i f_0 donats a* (8) *i* (9). *Aleshores, donada una funció $\eta\colon N \to \mathcal{M} = N \times \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u}$ de classe C^l l'equació*

$$(DF_0 \circ P_0)\xi - \xi \circ f_0 - (DP_0 \circ f_0)\rho = \eta$$

té una única solució $\xi\colon N \to \mathcal{M}$, $\rho\colon N \to N$ de classe C^l tal que $\Pi_q\xi = 0$ i $\Pi_p\xi = 0$.

Prova. La resolubilitat de l'equació és evident si escrivim l'equació per a cada component matricialment. En concret, notem que

$$DF_0 \circ P_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & D\omega & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^u \end{pmatrix}, \quad DP_0 \circ f_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i així podem descompondre les equacions com

$$
\begin{aligned}
\Pi_q\xi + D\omega\Pi_p\xi - \Pi_q\xi \circ f_0 - \Pi_q\rho &= \Pi_q\eta, && (10)\\
\Pi_p\xi - \Pi_p\xi \circ f_0 - \Pi_p\rho &= \Pi_p\eta, && (11)\\
A^s\Pi_x\xi - \Pi_x\xi \circ f_0 &= \Pi_x\eta, && (12)\\
A^u\Pi_y\xi - \Pi_y\xi \circ f_0 &= \Pi_y\eta\,. && (13)
\end{aligned}
$$

Per resoldre (10) i (11) podem fixar

$$\Pi_q\xi = 0, \quad \Pi_p\xi = 0, \quad \Pi_q\rho = -\Pi_q\eta, \quad \Pi_p\rho = -\Pi_p\eta. \tag{14}$$

Per resoldre la resta d'equacions, fem servir sèries de Fourier respecte a les variables angulars $q \in \mathbb{T}^r$ i sèries de Taylor respecte a les variables $p \in \mathbb{R}^r$. Concretament, escrivim

$$\Pi_x\xi(q,p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Pi_x\hat{\xi}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}, \qquad \Pi_x\eta(q,p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Pi_x\hat{\eta}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} \tag{15}$$

i el mateix per al component Π_y. Aleshores, si introduïm formalment l'expressió (15) a (12) obtenim

$$\left(\lambda_i^s - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k,\omega(p)\rangle}\right)\Pi_x\hat{\xi}_k(p) = \Pi_x\hat{\eta}_k(p),$$

que podem resoldre sempre, ja que els divisors $\lambda_i^s - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k,\omega(p)\rangle}$ no s'anul·len mai. Recordem que la solució construïda és merament formal. Per a donar sentit a la construcció, cal veure que la sèrie de Fourier obtinguda defineix una funció de classe C^l. Això resulta del fet que $\max_{1\le i\le r}|\lambda_i^s| < 1$, ja que podem fitar inferiorment els divisors de manera uniforme. És a dir, tenim

$$\|\xi\|_{C^l} \le \frac{1}{1-\max_{1\le i\le r}|\lambda_i^s|}\|\eta\|_{C^l}.$$

□

Nota. Tal com hem discutit en la secció 2, la solució així obtinguda no és única, però és l'única que compleix la condició de normalització (14). Concretament, aquesta solució correspon a la parametrització més simple de Λ_ε.

De manera anàloga a la discussió de la secció 2, per a demostrar el teorema 4, cal aplicar el teorema de la funció implícita (o qualsevol esquema de tipus punt fix). Un argument d'aquest tipus, amb tot luxe de detalls, es troba a [17]. Tanmateix, recomanem al lector els treballs clàssics [19, 33, 34, 64]. El motiu per a no allargar la discussió en aquesta direcció és que les idees essencials que volíem fer arribar al lector ja han estat discutides en la secció 2 i l'adaptació a aquest context requereix tractar una sèrie de qüestions tècniques que van més enllà de l'objectiu d'aquesta exposició.

NOTA. Parem atenció als divisors $\lambda_i^s - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k,\omega(p)\rangle}$. Si aquests s'acumulessin en el zero, no seria tan fàcil veure que la sèrie de Fourier obtinguda defineix una funció. Quan això passa, parlem del *problema dels petits divisors*. Una de les conseqüències associades a la presència de petits divisors és que no és possible estudiar aquests objectes amb un esquema del tipus punt fix, ja que l'efecte dels divisors impossibilita controlar les constants de Lipschitz associades. Així, en presència de petits divisors, cal implementar un esquema quadràtic (tipus Newton). Aquest fenomen està associat a l'estudi d'objectes amb dinàmica quasiperiòdica, dels quals en parlarem una mica en la secció 5.

Una alternativa interessant als càlculs que hem exposat és l'ús de deformacions descrit a [18]. Això permet abordar el problema d'una forma geomètrica natural, de manera que les propietats geomètriques es poden estudiar fàcilment. Només comentarem breument la idea que hi ha darrere de la construcció. Sigui F_ε una família d'aplicacions injectives de classe C^d (també en el paràmetre). Aleshores existeix una família de camps vectorials X_{F_ε} de manera que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F_\varepsilon = X_{F_\varepsilon} \circ F_\varepsilon \,. \tag{16}$$

Observem que aquest camp es pot calcular gràcies a la injectivitat de F_ε, ja que basta expandir $X_{F_\varepsilon} = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F_\varepsilon) \circ F_\varepsilon^{-1}$. El camp X_{F_ε} s'anomena la *deformació infinitesimal de* F_ε. Aquest llenguatge permet reescriure l'equació (7) de la forma següent (només cal derivar respecte a ε els dos costats de (7) i fer servir (16)):

$$X_{F_\varepsilon} + (F_\varepsilon)_* X_{P_\varepsilon} = X_{P_\varepsilon} + (P_\varepsilon)_* X_{f_\varepsilon}, \tag{17}$$

on X_{F_ε}, X_{P_ε} i X_{f_ε} són les deformacions de F_ε, P_ε i f_ε, respectivament. Per a resoldre aquesta equació cal prendre projeccions sobre els diferents subespais (tangent, normal estable i normal inestable) i resoldre les equacions resultants. Concretament, si $x \in \Lambda_\varepsilon$ aleshores tenim $T_x\mathcal{M} = E^s_{x,\varepsilon} \oplus E^u_{x,\varepsilon} \oplus T_x\Lambda_\varepsilon$ i definim les projeccions $\Pi^\sigma_{x,\varepsilon}$, amb $\sigma = s,u,c$, associades a aquesta descomposició. Aleshores (17) és equivalent a (aquesta afirmació es justifica usant que $\Pi^\sigma \circ (f_\varepsilon)_* = (f_\varepsilon)_* \circ \Pi^\sigma$ i que $(P_\varepsilon)_* X_{f_\varepsilon}$ és tangent a Λ_ε)

$$X^s_{F_\varepsilon} = X^s_{P_\varepsilon} - (F_\varepsilon)_* X^s_{P_\varepsilon}, \tag{18}$$
$$X^u_{F_\varepsilon} = X^u_{P_\varepsilon} - (F_\varepsilon)_* X^u_{P_\varepsilon}, \tag{19}$$
$$X^c_{F_\varepsilon} = X^c_{P_\varepsilon} - (F_\varepsilon)_* X^c_{P_\varepsilon} + (P_\varepsilon)_* X_{f_\varepsilon}, \tag{20}$$

on $X^\sigma_{F_\varepsilon} = \Pi^\sigma X_{F_\varepsilon}$ i $X^\sigma_{P_\varepsilon} = \Pi^\sigma X_{P_\varepsilon}$.

Aquestes tres equacions corresponen a les equacions (10)–(13) escrites de forma natural. Aleshores, podem trobar una solució formal de (18) i (19) en termes de $X^s_{F_\varepsilon}$ i $X^u_{F_\varepsilon}$, respectivament.

Per a veure que la solució formal obtinguda és convergent cal fer servir les propietats asimptòtiques de Λ_ε. D'altra banda, és clar que la solució de (20) admet una indeterminació, que en aquest cas fixem escollint la deformació que satisfà $X^c_{P_\varepsilon} = 0$. Aleshores, tenim $X^c_{F_\varepsilon} = (P_\varepsilon)_* X_{f_\varepsilon}$. La condició de normalització $X^c_{P_\varepsilon} = 0$ és molt interessant perquè té conseqüències geomètriques importants. Per exemple, si F és simplèctica respecte a una 2-forma Ω (vegeu la definició en la secció 5) aleshores $P_\varepsilon^*\Omega$ és una forma simplèctica sobre N. El lector en pot trobar una discussió detallada a [18].

5 Segon plat: tors invariants amb dinàmica quasiperiòdica

L'estudi de solucions amb dinàmica quasiperiòdica és des de fa temps un tema de remarcable importància en sistemes dinàmics. De forma *naïve* podríem dir que la teoria KAM (que rep aquest nom en honor a A. N. Kolmogorov [40], V. I. Arnold [2] i J. K. Moser [51]) estudia l'efecte de petites pertorbacions sobre aquest tipus d'objectes, sovint anomenats simplement *tors invariants*. A dia d'avui, la teoria KAM abraça una àrea de recerca enorme, i recull una llarga col·lecció de mètodes i moltes aplicacions a diversos contextos (vegeu el tutorial [43]). Segons la línia adoptada en aquest resum, ens centrarem en l'estudi d'aplicacions sobre varietats, que dotarem d'estructura simplèctica per a garantir l'existència dels objectes invariants que busquem.

Els mètodes clàssics per a estudiar tors invariants estan basats a realitzar transformacions (canvis de variable) que preservin l'estructura simplèctica del problema. Els contextos estudiats amb aquests mètodes es limiten a considerar pertorbacions de problemes «integrables». A més, cal suposar que podem escriure el problema no pertorbat en unes coordenades especials, anomenades *acció-angle*, de manera que la dinàmica dels tors invariants és explícita. Per exemple, considerem el cas de l'anomenada *aplicació estàndard*

$$F\colon (x,y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \mapsto \big(x + y + \varepsilon \sin(x), y + \varepsilon \sin(x)\big) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}\,.$$

En aquest cas, per $\varepsilon = 0$ tenim un sistema dinàmic molt senzill. Les òrbites es poden escriure com $F^n(x,y) = (x + ny, y)$, és a dir, que són tors invariants de freqüència y. Per tradició i analogia amb problemes de mecànica, la variable y s'anomena *acció* (es preserva) i la variable x s'anomena *angle* (manifesta la dinàmica quasiperiòdica).

Tot i que ja hem comentat que la teoria KAM té un llarga tradició, els mètodes clàssics tenen una sèrie de limitacions, relacionades d'una manera o altra amb el fet que cal plantejar un context pertorbatiu i cal tenir molta informació del problema no pertorbat. Per exemple:

- En moltes aplicacions pràctiques (per exemple, en els contextos que hem assenyalat en la introducció) cal considerar problemes no pertorbatius. Per a aquests problemes podem obtenir aproximacions de tors invariants mitjançant càlculs numèrics o expansions asimptòtiques, però en general no podem aplicar els resultats clàssics de teoria KAM. A més, tot i que en alguns casos sigui possible identificar una aproximació integrable d'un problema donat, en la pràctica no es pot considerar que la pertorbació sigui arbitràriament petita.

- Encara que el problema que estem estudiant sigui pertorbatiu, en general és molt complicat establir coordenades *acció-angle* per al problema integrable. En alguns casos, fins i tot poden no ser explícites.
- Des del punt de vista computacional, els mètodes basats en transformacions són costosos i fins i tot ineficients. Aquesta és una dificultat seriosa a l'hora d'aproximar tors invariants en aplicacions concretes i a l'hora de fer demostracions assistides per ordinador.

El mètode de la parametrització es presenta com una alternativa per a superar les dificultats anteriors, ja que no cal que el problema estudiat sigui pertorbació d'un sistema integrable ni tampoc cal fer servir coordenades *acció-angle*. El lector trobarà discussions addicionals sobre els avantatges del mètode de la parametrització a les referències [32, 38, 41, 45].

A continuació introduirem una sèrie de conceptes elementals. Una estructura simplèctica sobre una varietat $\mathcal{M}$ és una 2-forma Ω tancada i no degenerada (vegeu [1, 43]). Recordem que una forma és tancada si $\mathrm{d}\Omega = 0$, on d és la derivada exterior, i recordem també que una forma és no degenerada si per a qualsevol $z \in \mathcal{M}$ tenim

$$\forall \xi \in T_z\mathcal{M}, \text{ amb } \xi \neq 0, \ \exists \eta \in T_z\mathcal{M}, \text{ tal que } \Omega_z(\xi, \eta) \neq 0.$$

Aquesta estructura és compatible si i només si $\mathcal{M}$ té dimensió parella, que denotarem per $2m$. D'altra banda, es diu que una varietat simplèctica és exacta si Ω és exacta, és a dir, si $\Omega = \mathrm{d}\alpha$ per a alguna 1-forma α.

Una subvarietat $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ és isotròpica si la forma simplèctica s'anul·la sobre l'espai tangent de $\mathcal{L}$, és a dir, si $\Omega_z(\xi, \eta) = 0$, per a tot $\xi, \eta \in T_z\mathcal{L}$ i per a tot $z \in \mathcal{L}$. És fàcil veure que, per compatibilitat, $0 \leq \dim(\mathcal{L}) \leq m$. Una subvarietat es diu *lagrangiana* si és isotròpica i de dimensió maximal, és a dir, $\dim(\mathcal{L}) = m$.

Donada una varietat simplèctica, es diu que $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ és simplèctica si preserva l'estructura simplèctica, és a dir, si $F^*\Omega = \Omega$. Direm que F és simplèctica exacta si existeix una funció $b\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que $F^*\alpha = \alpha + db$, on $\Omega = \mathrm{d}\alpha$.

Nota. Com a motivació dels resultats que discutirem en aquesta secció, recordem que les aplicacions simplèctiques estan relacionades de forma natural amb els camps vectorials d'estructura hamiltoniana. Aquests apareixen en problemes de mecànica [1, 5, 6]. Per exemple, donat un camp hamiltonià sobre $\mathcal{M}$, l'aplicació flux $\varphi_t\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ és simplèctica exacta per a qualsevol t fixat. Altrament, donat un camp hamiltonià es pot considerar una secció de Poincaré, és a dir, una varietat transversal al flux i continguda en un cert nivell d'energia. L'aplicació de Poincaré així definida és simplèctica exacta respecte a una 2-forma que depèn de la secció escollida [1].

Sigui $\mathcal{M}$ una varietat de dimensió $2m$ i sigui $\Omega = \mathrm{d}\alpha$ una forma simplèctica exacta sobre $\mathcal{M}$, amb $\alpha_z = a(z)\mathrm{d}z$ per a tot $z \in \mathcal{M}$. Aleshores, per a tot $z \in \mathcal{M}$ tenim un isomorfisme lineal $J(z)$ donat per

$$\Omega_z(u, v) = \langle u, J(z)v \rangle,$$

on $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és el producte escalar. És clar que $J(z)$ és una matriu antisimètrica, és a dir, la seva transposada compleix $J(z)^\top = -J(z)$. El fet que Ω és no degenerada implica que $\det J(z) \neq 0$ a tot punt z. Aleshores, la condició perquè una aplicació $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ sigui simplèctica es tradueix per

$$DF(z)^\top J\big(F(z)\big)DF(z) = J(z). \tag{21}$$

Considerem $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ una subvarietat de dimensió r inclosa en $\mathcal{M}$ a través d'una immersió $P\colon \mathbb{T}^r \to \mathcal{M}$ tal que $P(\mathbb{T}^r) = \mathcal{T}$. Donada una aplicació $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, direm que $\mathcal{T}$ és un tor invariant per F si $F(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$. A més, direm que $\mathcal{T}$ és un tor invariant quasiperiòdic amb vector de freqüències $\omega \in \mathbb{R}^r$ si

$$F \circ P = P \circ R_\omega, \tag{22}$$

on $R_\omega\colon \mathbb{T}^r \to \mathbb{T}^r$ és una rotació rígida donada per $R_\omega(\theta) = \theta + \omega$, mòdul $(2\pi\mathbb{Z})^r$. Aleshores, el problema que aquí presentem es pot formular de la manera següent: donada una aplicació simplèctica F i donat $\omega \subset \mathbb{R}^r$ volem una parametrització P que compleixi (22). Notem que en aquest cas la imatge per F d'un punt en el rang de P també es troba en el rang de P i com que $\mathcal{T}$ és una varietat immersa, el rang de P serà un tor invariant.

En general, donada una aplicació F, un tor $\mathcal{T}$ immers en $\mathcal{M}$ i un vector de freqüències ω podem mesurar l'error d'invariància com

$$e = F \circ P - P \circ R_\omega \tag{23}$$

i podem caracteritzar la invariància de $\mathcal{T}$ pel fet que la funció d'error e sigui idènticament nul·la. Direm que $\mathcal{T}$ és aproximadament invariant si la funció e és petita en una certa norma. De fet, aquesta caracterització d'invariància es pot reformular buscant zeros de l'operador

$$\mathcal{F}(P) = F \circ P - P \circ R_\omega\,. \tag{24}$$

En aquest cas, a causa de l'efecte dels petits divisors, no es pot plantejar un esquema lineal per a trobar tors invariants i per això buscarem els zeros de $\mathcal{F}$ mitjançant un esquema de tipus Newton. Així, donat P tal que $\mathcal{F}(P) = e$, busquem una correcció $\bar{P} = P + \Delta_P$ tal que

$$\mathcal{F}(\bar{P}) = \mathcal{F}(P) + D\mathcal{F}(P)\Delta_P + O_2(\Delta_P) = 0\,.$$

Si negligim els termes $O_2(\Delta_P)$, aleshores obtenim l'equació lineal

$$D\mathcal{F}(P)\Delta_P = (DF \circ P)\Delta_P - \Delta_P \circ R_\omega = -e\,, \tag{25}$$

que ens proporcionarà una millor aproximació de la solució (amb un error quadràtic en e). Així doncs, la clau serà invertir l'operador lineal $D\mathcal{F}(P)$. De fet, només caldrà aproximar aquesta inversa amb un error quadràtic ja que és ben conegut que el mètode de Newton encara convergeix quadràticament en aquest cas. Aquesta convergència quadràtica és suficient per a compensar l'efecte dels petits divisors.

De manera informal, el teorema KAM (fent servir el mètode de la parametrització) que discutirem en aquesta secció es pot enunciar de la manera següent:

Teorema 6. *Sigui F una aplicació simplèctica exacta sobre una varitat $\mathcal{M}$ de dimensió $2m$. Sigui $P\colon \mathbb{T}^m \to \mathcal{M}$ una aproximació d'un tor invariant quasiperiòdic de freqüència $\omega \in \mathbb{R}^m$, en el sentit que compleix* (23)*. Aleshores, si ω satisfà certes condicions de no-ressonància i P satisfà certes condicions de no-degeneració, existeix un tor invariant molt a prop.*

Aquest resultat es va demostrar a [45] i correspon al cas lagrangià, on $r = m$. La idea consisteix a fer servir propietats geomètriques per a reescriure l'equació (25) en forma triangular (llevat de termes quadràtics). Alguns dels treballs que van motivar la construcció, i on el lector trobarà bibliografia rellevant, són [15, 38, 52, 53, 58, 59, 65]. En la secció 6 recollirem altres contextos on es poden establir resultats similars.

Presentem ara un fet que té un paper important en la demostració del teorema 6. Considerem una aplicació simplèctica F sobre $\mathcal{M}$. Siqui $\mathscr{T}$ un tor de dimensió r inclòs en $\mathcal{M}$ mitjançant una immersió $P\colon \mathbb{T}^r \to \mathcal{M}$ i considerem la 2-forma sobre el tor $P^*\Omega$, que podem escriure com

$$(P^*\Omega)_\theta(\xi,\eta) = \langle \xi, \Omega_{DP}(\theta)\eta\rangle, \qquad \Omega_{DP}(\theta) = DP(\theta)^\top J(P(\theta))DP(\theta),$$

per a tot $\xi,\eta \in \mathbb{R}^{2m}$, $\theta \in \mathbb{T}^r$. Amb aquesta notació, $\mathscr{T}$ és isotròpic si i només si $\Omega_{DP}(\theta) = 0$, per a tot punt $\theta \in \mathbb{T}^r$. També farem servir sovint la notació següent relativa a la mètrica sobre el tor

$$G_{DP}(\theta) = DP(\theta)^\top DP(\theta).$$

Notem que la matriu $G_{DP}(\theta)$ és invertible per a tot $\theta \in \mathbb{T}^r$.

El lema clàssic següent estableix que qualsevol tor invariant de dinàmica quasiperiòdica és isotròpic si la forma simplèctica és exacta.

Lema 7. *Sigui $\mathcal{M}$ una varietat simplèctica exacta. Aleshores qualsevol tor invariant quasiperiòdic d'una aplicació simplèctica exacta és isotròpic.*

Prova. Com que F és simplèctica tenim $F^*\Omega = \Omega$ i com que $\mathscr{T}$ és invariant tenim $F \circ P = P \circ R_\omega$. Aleshores, deduïm que

$$P^*\Omega = P^*(F^*\Omega) = (F\circ P)^*\Omega = (P\circ R_\omega)^*\Omega, \tag{26}$$

o equivalentment $P^*\Omega - (P\circ R_\omega)^*\Omega = 0$. Aquesta equació, amb el fet que la dinàmica és quasiperiòdica, implica que Ω_{DP} és una funció constant (basta fer els càlculs en una base de Fourier).

Finalment, fem servir que $\Omega = \mathrm{d}\alpha$ per a veure que aquesta constant val zero. Si escrivim $\Omega = \mathrm{d}\alpha$, on $\alpha_z = a(z)\,\mathrm{d}z$, aleshores $P^*\Omega = \mathrm{d}(P^*\alpha)$, on

$$(P^*\alpha)_\theta = \sum_{j=1}^{r} c_j(\theta)\,\mathrm{d}\theta_j, \qquad c_j(\theta) = \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial P_i(\theta)}{\partial \theta_j} a_i(P(\theta)).$$

Aleshores es compleix que $\Omega_{DP}(\theta) = Dc(\theta)^\top - Dc(\theta)$, i com que la mitjana de $Dc(\theta)$ s'anul·la, també ho fa Ω_{DP}. □

En la resta de la secció, sovint apareixen llargues expressions que depenen de θ. De cara a reduir l'espai ocupat per aquestes expressions, ometrem la dependència en θ quan sigui necessari.

Com ja hem comentat, per demostrar el teorema 6 desenvoluparem un mètode de Newton per a l'operador funcional (24), així que tot es redueix a estudiar la invertibilitat de l'operador linealitzat $D\mathcal{F}(P)$ que apareix a l'equació (25).

Fent servir el caràcter simplèctic de F i certes propietats aritmètiques de ω, es pot veure que les columnes de les matrius $DP(\theta)$ i $J\big(P(\theta)\big)^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1}$ formen una base de $T_{P(\theta)}\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^{2m}$. Farem servir aquestes coordenades per a escriure l'equació (25) de manera que sigui fàcil aproximar la solució en una base de Fourier. Aquesta idea es va desenvolupar a [45] i posteriorment es va adaptar a altres contextos com als tors isotròpics normalment hiperbòlics [22], als tors isotròpics normalment el·líptics [41] o als tors lagrangians sense torsió [28].

5.1 Propietats geomètriques de tors invariants lagrangians

Amb l'objectiu d'aproximar la solució de l'equació (25), busquem una funció matricial $M(\theta)$ tal que

$$DF\big(P(\theta)\big)M(\theta) = M(\theta+\omega)C(\theta), \tag{27}$$

on $C(\theta)$ és una matriu triangular. Com veurem, aquesta matriu permet introduir un canvi de coordenades en $T_{P(\theta)}\mathcal{M}$ de manera que l'equació (25) sigui fàcil d'estudiar. Si P és una parametrització d'un tor invariant, aleshores és clar que (prenent derivades a l'equació d'invariància)

$$DF\big(P(\theta)\big)DP(\theta) = DP(\theta+\omega). \tag{28}$$

Aleshores, si prenem les primeres m columnes de $M(\theta)$ com $DP(\theta)$, la matriu $C(\theta)$ pren la forma

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m & A(\theta) \\ 0 & B(\theta) \end{pmatrix}.$$

Considerem ara la matriu $J\big(P(\theta)\big)^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1}$, les columnes de la qual corresponen a les direccions simplèctiques conjugades de $DP(\theta)$ (vegeu [1, 5]) normalitzades de forma adient. Aleshores, si prenem

$$M(\theta) = \Big[DP(\theta),\ J\big(P(\theta)\big)^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1}\Big] \tag{29}$$

i introduïm aquesta expressió a (27) obtenim

$$\begin{aligned} &DF(P(\theta))J(P(\theta))^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1} = \\ &\quad = DP(\theta+\omega)A(\theta) + J\big(P(\theta+\omega)\big)^{-1}DP(\theta+\omega)G_{DP}(\theta+\omega)^{-1}B(\theta). \end{aligned} \tag{30}$$

Ara resulta que com que P és una parametrització d'un tor invariant i F és simplèctica, la matriu $B(\theta)$ és la identitat. Per veure això multipliquem a ambdós costats de (30) per $DP(\theta+\omega)^\top J(P(\theta+\omega))$ i fem servir el caràcter lagrangià de $\mathscr{T}$. Obtenim així

$$B(\theta) = DP(\theta+\omega)^\top J(P(\theta+\omega))DF(P(\theta))J(P(\theta))^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1}.$$

A continuació, recordant que P és invariant i que F compleix (21) tenim

$$J(P(\theta+\omega))DF(P(\theta)) = J\big(F(P(\theta))\big)DF(P(\theta)) = DF(P(\theta))^{-\top}J(P(\theta)).$$

Aleshores, si fem servir (28) obtenim

$$B(\theta) = DP(\theta+\omega)DF\big(P(\theta)\big)^{-\top}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1} = \mathrm{Id}_m.$$

Per aconseguir una expressió per a $A(\theta)$ en termes dels objectes coneguts P, F i J (i les seves derivades), multipliquem a ambdós costats de (30) per $DP(\theta+\omega)^\top$ i obtenim

$$\begin{aligned} A(\theta) = G_{DP}(\theta+\omega)^{-1}DP(\theta+\omega)^\top\Big[&DF(P(\theta))J(P(\theta))^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1} - \\ &- J(P(\theta+\omega))DP(\theta+\omega)G_{DP}(\theta+\omega)^{-1}\Big]. \end{aligned} \tag{31}$$

Nota. Tot i que no traurem cap avantatge d'aquest fet, cal remarcar que aquesta construcció es pot modificar una mica per a obtenir una matriu C independent de θ. Si prenem

$$M(\theta) = \Big[DP(\theta),\ J(P(\theta))^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1} + DP(\theta)H(\theta)\Big],$$

aleshores podem escollir $H(\theta)$ de manera que la matriu $A(\theta)$ sigui constant (deixem com a exercici comprovar que l'equació cohomològica que ha de complir $H(\theta)$ és $H(\theta) - H(\theta+\omega) = [A]_{\mathbb{T}^m} - A(\theta)$).

A continuació, mostrem que la matriu $M(\theta)$ definida per (29) és invertible. Un càlcul directe ens porta a

$$M(\theta)^\top J(P(\theta))M(\theta) = V(\theta) + R(\theta), \tag{32}$$

on

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_m \\ -\mathrm{Id}_m & G_{DP}^{-\top}DP^\top J(P)^{-\top}DPG_{DP}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} \Omega_{DP} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Recordem que estem suposant que $\mathscr{T}$ és lagrangià, *i. e.* $\Omega_{DP} = 0$. Aleshores $R = 0$ i la inversa de la matriu $M(\theta)$ és donada per

$$M^{-1} = V^{-1}M^\top J(P) = \begin{pmatrix} G_{DP}^{-\top} DP^\top [\mathrm{Id}_m - J(P)^{-1} DP G_{DP}^{-1} DP^\top J(P)] \\ DP^\top J(P) \end{pmatrix}. \qquad (33)$$

Observem que aquest càlcul implica també que $M(\theta)$ té rang màxim i les seves columnes formen una base de $T_{P(\theta)}\mathcal{M}$.

Després d'aquest parèntesi dedicat a la base que farem servir sobre $T_{P(\theta)}\mathcal{M}$, recordem que el nostre objectiu és invertir l'operador (25). Donada una funció η sobre $\mathbb{T}^m$ busquem Δ_P tal que

$$DF(P(\theta))\Delta_P(\theta) - \Delta_P(\theta + \omega) = -\eta(\theta). \qquad (34)$$

Per a això, introduïm la transformació $\Delta_P(\theta) = M(\theta)\xi(\theta)$ en aquesta expressió i multipliquem per $M(\theta + \omega)^{-1}$ tots els termes. Obtenim així

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m & A(\theta) \\ 0 & \mathrm{Id}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(\theta) \\ \xi_2(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1(\theta + \omega) \\ \xi_2(\theta + \omega) \end{pmatrix} = -M(\theta + \omega)^{-1}\eta(\theta), \qquad (35)$$

on la matriu $A(\theta)$ és donada per (31) i $M(\theta + \omega)^{-1}$ és donada per (33). Aquesta equació es pot resoldre fàcilment sota certes condicions de compatibilitat que discutirem més endavant. Com que aquest sistema té forma triangular, el problema es redueix a resoldre (dos cops) una equació cohomològica amb coeficients constants. Al lema següent discutim la resolució (formal) d'aquesta equació.

LEMA 8. *Sigui η una funció definida sobre $\mathbb{T}^m$ i sigui ω un vector de freqüències no ressonant. Considerem l'equació*

$$\xi - \xi \circ R_\omega = \eta. \qquad (36)$$

Aleshores, si $[\eta]_{\mathbb{T}^m} = 0$, aquesta equació té solució (formal) única llevat de fixar la seva mitjana $[\xi]_{\mathbb{T}^m}$.

PROVA. Com hem fet en contextos anteriors, busquem una solució formal escrivint les funcions involucrades en una base de Fourier. Així

$$\eta(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\eta}_k e^{i\langle k, \theta \rangle}, \qquad \xi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \hat{\xi}_k e^{i\langle k, \theta \rangle}.$$

Aleshores, si introduïm aquestes expressions a (36) trobem la fórmula següent per als coeficients $\hat{\xi}_k$:

$$\hat{\xi}_k = \frac{\hat{\eta}_k}{1 - e^{i\langle k, \omega \rangle}}. \qquad (37)$$

Atès que ω és no ressonant, el divisor no s'anul·la mai i aquests coeficients estan ben definits llevat del cas $k = 0$. Però resulta que $\hat{\eta}_0 = [\eta]_{\mathbb{T}^m} = 0$ i, per tant, l'equació és compatible. □

Usem ara el lema 8 per a resoldre l'equació (35). Com que aquesta té forma triangular, podem començar per

$$\xi_2 - \xi_2 \circ R_\omega = -DP^\top J(P)\eta\,.$$

Suposem per un moment que η compleix $[DP^\top J(P)\eta]_{\mathbb{T}} = 0$ (més endavant comprovarem aquesta hipòtesi en cas que η correspongui a l'error d'invariància de P) de manera que podem aplicar el lema 8 per a obtenir una solució $\xi_2(\theta) = [\xi_2]_{\mathbb{T}^m} + \tilde{\xi}_2(\theta)$, on tenim la llibertat de triar la mitjana $[\xi_2]_{\mathbb{T}^m}$ i on $\tilde{\xi}_2$ està determinada unívocament segons (37).

Aleshores, l'equació per a ξ_1 queda

$$\xi_1 - \xi_1 \circ R_\omega = -A\xi_1 - G_{DP}^{-\top} DP^\top [\mathrm{Id}_m - J(P)^{-1} DP G_{DP}^{-1} DP^\top J(P)]\eta\,. \tag{38}$$

Recordem que per a aplicar el lema 8 cal que la funció de la dreta tingui mitjana nul·la. Per a obtenir aquesta condició fem servir la llibertat que tenim per a escollir la mitjana de ξ_2. Deixem per al lector la comprovació del fet següent: si la mitjana de la matriu $A(\theta)$ (donada per (31)) és una matriu no singular, aleshores podem escollir $[\xi_2]_{\mathbb{T}^m}$ de manera que la part dreta de (38) tingui mitjana nul·la (aquest procediment es troba explicat amb detall a [45, 62]). Aquesta condició sobre la mitjana de la matriu $A(\theta)$ és la condició de no-degeneració que es pot llegir a l'enunciat del teorema 6.

En resum, considerem una parametrització P d'un tor invariant de freqüència ω, és a dir, una solució de l'equació funcional $\mathcal{F}(P) = F \circ P - P \circ R_\omega = 0$. Aleshores, l'operador lineal $D\mathcal{F}(P)$ és invertible. Notem a més que obtenim una expressió explícita de la seva inversa.

A continuació veurem que si tenim una parametrització d'un tor aproximadament invariant podem invertir de forma aproximada l'operador $D\mathcal{F}(P)$. La idea és que la construcció que acabem de discutir continua sent vàlida, llevat d'un error que podem controlar en termes de l'error d'invariància.

5.2 Correcció de tors aproximadament invariants

Suposem que tenim un tor aproximadament invariant de vector de freqüències ω, és a dir,

$$F\big(P(\theta)\big) - P(\theta + \omega) = e(\theta).$$

Aleshores, si derivem als dos costats d'aquesta igualtat, obtenim

$$DF\big(P(\theta)\big)DP(\theta) = DP(\theta + \omega) + De(\theta), \tag{39}$$

de manera que les columnes de DP compleixen la propietat (28), llevat d'un error que podem controlar per la mida de e. Així, es fa evident la necessitat d'introduir una norma. D'ara endavant treballarem amb funcions analítiques en una extensió de $\mathbb{T}^m$ en $\mathbb{C}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m$. En concret, introduïm la banda complexa d'amplada ρ com

$$\Delta(\rho) = \{\theta \in \mathbb{C}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m \,:\, |\mathrm{Im}(\theta)| \le \rho\},$$

i considerarem l'espai de Banach de funcions analítiques $f\colon \Delta(\rho) \to \mathbb{C}$ equipat amb la norma del suprem $\|f\|_\rho := \sup_{\theta\in\Delta(\rho)} |f(\theta)|$. Aquesta norma es pot estendre de manera natural a vectors i matrius els components dels quals són funcions analítiques. Com hem dit en la introducció, no ens volem aturar en els detalls d'estimacions concretes, perquè el que volem en aquesta exposició és presentar les idees de la construcció.

Formularem (sense demostració) una versió del lema 8 en el context de funcions analítiques. Notem que el resultat següent recull l'anomenat *problema dels petits divisors*. Per a comprendre aquest lema, recomanem de nou l'article introductori [8] així com [4, 6, 7, 43]. Bàsicament, es tracta de seleccionar freqüències que satisfacin la propietat (40). Aquesta propietat permet controlar l'acumulació dels divisors al valor zero. El conjunt de freqüències ω que satisfà aquesta propietat s'anomena *nombres diofantins* i el complementari d'aquest conjunt té mesura de Lebesgue zero. Aquesta condició sobre ω és la condició de no-ressonància que es pot llegir a l'enunciat del teorema 6.

Lema 9 (Estimacions de Rüssmann [57]). *Sigui η una funció analítica sobre $\Delta(\rho)$ i sigui ω un vector de freqüències que compleix la condició diofantina següent: donat $\gamma > 0$, $\nu \geq m$ tenim*

$$|\langle k,\omega\rangle - l| \geq \frac{\gamma}{|k|_1^\nu}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^m\backslash\{0\}, \qquad \forall l \in \mathbb{Z}, \tag{40}$$

on $|k|_1 = |k_1| + \ldots + |k_m|$. Considerem l'equació $\xi - \xi\circ R_\omega = \eta$. Si $[\eta]_{\mathbb{T}^m} = 0$, aleshores es compleix que per a tot $0 < \delta < \rho$ aquesta equació té solució analítica en $\Delta(\rho-\delta)$, única llevat de fixar la seva mitjana $[\xi]_{\mathbb{T}^m}$. A més,

$$\|\xi\|_{\rho-\delta} \leq \frac{c}{\gamma\delta^\nu}\|\eta\|_\rho. \tag{41}$$

Un fet remarcable és que si $\mathscr{T} = P(\mathbb{T}^m)$ és aproximadament invariant, aleshores és també aproximadament lagrangià. Un càlcul anàleg a (26) ens porta a

$$P^*\Omega - (P\circ R_\omega)^*\Omega = e^*\Omega. \tag{42}$$

Si representem la 2-forma $e^*\Omega$ per $(e^*\Omega)_\theta(\xi,\eta) = \langle \xi, L(\theta)\eta\rangle$, és fàcil veure que (fem servir que F és simplèctica)

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= DP(\theta)^\top DF(P(\theta))^\top J\Big(F(P(\theta))\Big)DF(P(\theta))DP(\theta) - \Omega_{DP}(\theta+\omega) = \\
&= DP(\theta+\omega)^\top\Big[\Big(F(P(\theta))\Big) - J(P(\theta+\omega))\Big]DP(\theta+\omega) + \\
&\quad + DP(\theta+\omega)^\top J\Big(F(P(\theta))\Big)De(\theta) + De(\theta)^\top J\Big(F(P(\theta))\Big)DF(P(\theta))DP(\theta).
\end{aligned}$$

És clar que aquesta expressió es pot controlar per $\|e\|_\rho$ (basta fer servir el teorema del valor mitjà). En concret, fent servir estimacions de Cauchy podem fitar $\|L\|_{\rho-\delta}$ en termes de $\|e\|_\rho$. Aleshores, fent servir el lema 9 a l'equació (42) podem fitar $\|\Omega_{DP}\|_{\rho-2\delta}$ (la matriu associada a $P^*\Omega$) en termes de $\|e\|_\rho$, és a dir, el nostre tor aproximadament invariant és aproximadament lagrangià.

A continuació veurem que la matriu $M(\theta)$ (definida a (29)) ara satisfà una expressió similar a (35) però amb termes d'error que podem controlar també per $\|e\|_\rho$. La presència d'aquest error és inevitable, com es pot veure a l'equació (39). Més concretament, un càlcul directe similar als de la secció 5.1 dóna

$$DF(P(\theta))M(\theta) = M(\theta+\omega)\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_m & A(\theta)\\ 0 & \mathrm{Id}_m\end{pmatrix} + E(\theta), \quad E(\theta) = \begin{pmatrix}De(\theta)\\ E_1(\theta)\end{pmatrix}, \tag{43}$$

on la matriu $E_1(\theta)$ és donada per

$$\begin{aligned}E_1(\theta) = DF(P(\theta))J(P(\theta))^{-1}DP(\theta) - DP(\theta+\omega)A(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1}-\\ -J(P(\theta+\omega))^{-1}DP(\theta+\omega)G_{DP}(\theta+\omega)^{-1}.\end{aligned} \tag{44}$$

D'altra banda, per a garantir que $M(\theta)$ defineix un canvi de coordenades sobre $T_{P(\theta)}\mathcal{M}$ cal veure que $M(\theta)$ és invertible si l'error d'invariància, mesurat com $\|e\|_\rho$, és prou petit. Això és clar, ja que hem vist que $\|\Omega_{DP}\|_{\rho-\delta}$ es pot fitar en termes de $\|e\|_\rho$ i, per tant, la matriu $R(\theta)$ a (32) és petita. Això fa que puguem escriure la inversa de $M(\theta)$ com

$$M(\theta)^{-1} = V(\theta)^{-1}M(\theta)^\top J(P(\theta)) + M_e(\theta), \tag{45}$$

on la matriu $M_e(\theta)$, donada per

$$M_e(\theta) = -[\mathrm{Id}_{2m} + V(\theta)^{-1}R(\theta)]^{-1}V(\theta)^{-1}R(\theta)V(\theta)^{-1}M(\theta)^\top J(P(\theta)),$$

és petita en el sentit que la seva norma es pot controlar per $\|e\|_\rho$.

Ara ja estem en condicions de resoldre aproximadament l'equació (34) on $e(\theta)$ és l'error d'invariància. Per a això, introduïm el canvi $\Delta_P(\theta) = M(\theta)\xi(\theta)$ a (34) i fem servir l'expressió (43) per a obtenir

$$\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_m & A(\theta)\\ 0 & \mathrm{Id}_m\end{pmatrix} - M(\theta+\omega)^{-1}E(\theta)\right)\xi(\theta) - \xi(\theta+\omega) = -M(\theta+\omega)^{-1}e(\theta), \tag{46}$$

on recordem que $E(\theta)$ és l'error que apareix a (43). Ara controlarem la matriu $M(\theta+\omega)^{-1}E(\theta)$ fent servir (45):

$$\begin{aligned}\|M(R_\omega)^{-1}E\|_{\rho-2\delta} &\le \|V(R_\omega)^{-1}M(R_\omega)^\top J(P(R_\omega))E + M_e(R_\omega)E\|_{\rho-2\delta},\\ &\le \|V^{-1}\|_\rho \|M(R_\omega)^\top J(P(R_\omega))E\|_{\rho-2\delta} + \|M_e\|_{\rho-2\delta}\|E\|_{\rho-2\delta}.\end{aligned} \tag{47}$$

Atès que ja hem vist que $\|M_e\|_{\rho-2\delta}$ es pot controlar per $\|e\|_\rho$, només caldrà preocupar-se del primer terme, que expressem com

$$\begin{aligned}&M(\theta+\omega)^\top J(P(\theta+\omega))E(\theta) =\\ &= \begin{pmatrix} DP(\theta+\omega)^\top J(P(\theta+\omega))De(\theta) & DP(\theta+\omega)^\top J(P(\theta+\omega))E_1(\theta)-\\ -G_{DP}(\theta+\omega)^{-1}DP(\theta+\omega)^\top De(\theta) & -G_{DP}(\theta+\omega)^{-1}DP(\theta+\omega)^\top E_1(\theta)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

on podem veure fàcilment que $E_1(\theta)$, definit a (44), satisfà

$$G_{DP}(\theta+\omega)^{-1}DP(\theta+\omega)^\top E_1(\theta)=0$$

i també

$$\begin{aligned}DP(\theta+\omega)^\top J(P(\theta+\omega))E_1(\theta) &= -\Omega_{DP}(\theta+\omega)A(\theta)\\ &DP(\theta)^\top DF(P(\theta))^\top \phi(\theta)DF(P(\theta))J(P(\theta))^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1}-\\ &-De(\theta)^\top J(P(\theta+\omega))DF(P(\theta))J(P(\theta))^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1},\end{aligned}$$

on $\phi(\theta)=J(P(\theta+\omega))-J\big(F(P(\theta))\big)$. Ara ja és immediat veure que tots els termes d'aquesta última expressió es poden controlar per $\|e\|_\rho$, i, en conseqüència, podem controlar també (47).

A continuació trobem una solució aproximada de l'equació (46) invertint de forma aproximada l'operador $DF(P(\theta))$ en les coordenades donades per $M(\theta)$. Concretament, la solució aproximada de (46) correspon a la solució de l'equació

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_m & A(\theta)\\ 0 & \mathrm{Id}_m\end{pmatrix}\xi(\theta)-\xi(\theta+\omega)=\begin{pmatrix}\eta_1(\theta)\\ \eta_2(\theta)\end{pmatrix}, \tag{48}$$

on

$$\begin{aligned}\eta_1(\theta)&=G_{DP}(\theta)^{-\top}DP^\top(\theta)\Big[\mathrm{Id}_m-J(P(\theta))^{-1}DP(\theta)G_{DP}(\theta)^{-1}DP(\theta)^\top J(P(\theta))\Big]e(\theta),\\ \eta_2(\theta)&=DP(\theta)^\top J(P(\theta))e(\theta)-\Big[DP(\theta)^\top J(P(\theta))e(\theta)\Big]_{\mathbb{T}^m}.\end{aligned}$$

És clar que podem trobar una solució de l'equació (48) si seguim el procediment desenvolupat en la secció 5.1, però usant el lema 9. Per a fer això només cal que la matriu $[A(\theta)]_{\mathbb{T}^m}$ sigui no singular. Per acabar, només cal veure que la solució de (48) així obtinguda ens dóna una solució aproximada de (46). Per a això considerem la diferència d'aquestes dues equacions

$$(46)-(48)=M(\theta+\omega)^{-1}E(\theta)\xi(\theta)-M_e(\theta)\eta(\theta)+\begin{pmatrix}0\\ \Big[DP(\theta)^\top J(P(\theta))e(\theta)\Big]_{\mathbb{T}^m}\end{pmatrix}$$

on hem fet servir les expressions (33) i (48). Els càlculs anteriors permeten afirmar que els dos primers termes d'aquesta expressió es poden controlar per $\|e\|_\rho^2$. Com enuncia el lema següent, l'últim terme es controla també per un terme quadràtic:

LEMA 10. *Si F és simplèctica exacta, llavors $[DP^\top J(P)e]_{\mathbb{T}^m}$ es controla per $\|e\|_\rho^2$.*

La demostració d'aquest resultat, que fa servir propietats geomètriques, es desvia de la línia argumental d'aquesta exposició. El lector trobarà tots els detalls a [45].

Donada una parametrització P d'un tor aproximadament invariant, amb error d'invariància controlat per $\|e\|_\rho$, hem construït una correcció Δ_P tal que la nova parametrització $P + \Delta_P$ dóna un nou tor aproximadament invariant, amb error d'invariància controlat per $\|e\|_\rho^2$. Això ens permet implementar un esquema iteratiu per a trobar una sèrie d'aproximacions amb errors $\|e\|_\rho^4$, $\|e\|_\rho^8, \ldots$, que convergeix quadràticament, de manera que s'evita l'efecte dels petits divisors i també de la reducció del domini d'analiticitat. Aquest efecte es manifesta quantitativament mitjançant les constants γ i δ de l'expressió (41). Aquesta és la idea essencial de tots els esquemes en teoria KAM.

NOTA. Observem que en corregir el tor estem modificant tots els objectes de la construcció. En particular, la matriu $A(\theta)$ canvia a cada pas de l'esquema una quantitat que es pot controlar per $\|e\|_\rho$. Per a donar sentit a la construcció i demostrar la convergència de l'esquema iteratiu, cal veure que a cada pas la matriu $[A(\theta)]_{\mathbb{T}^m}$ és no singular. Aquest fet es complirà suposant que l'error d'invariància inicial és prou petit.

6 Postres: altres contextos

Esperem haver assolit l'objectiu inicial de presentar una introducció del mètode de la parametrització en diversos contextos de sistemes dinàmics. Hem intentat presentar les particularitats de cada problema seguint una dificultat creixent i des d'un punt de vista comú. Per qüestions d'espai només hem recollit una petita mostra dels resultats que es poden trobar a la literatura. Altres treballs interessants que no hem pogut tractar al llarg de la nostra exposició són els següents (de nou, la llista dista molt de ser exhaustiva):

- Sistemes dinàmics en reticles. Aquests apareixen en problemes de física de l'estat sòlid, per exemple, a l'hora de descriure dislocacions d'àtoms en cristalls. Als treballs [13, 14, 23, 44] trobareu una descripció d'aquests models i resultats en la línia dels aquí discutits. Un tractament més abstracte de conjunts hiperbòlics en sistemes dinàmics sobre reticles es troba a [21].
- Llengües d'Arnold. Considerem $\mathcal{M} = \mathbb{T}^1$, és a dir, el cas d'aplicacions sobre el cercle. Un invariant topològic molt important en aquest cas és el nombre de rotació (que correspon al nombre mitjà de voltes dels iterats). Aleshores, donada una família d'aplicacions del cercle que depèn de dos paràmetres, es defineix una *llengua d'Arnold* com el subconjunt de paràmetres que dóna el mateix nombre de rotació. A [47] es fa servir el mètode de la parametrització per a estudiar aquestes llengües, i s'obté informació important sobre el seu comportament en valors crítics dels paràmetres.
- Teoria KAM per a tors sense torsió. A [28] es presenta un mètode de la parametrització per a tors invariants que no compleixen la condició de no-degeneració discutida en la secció 5, és a dir, tals que la matriu $[A(\theta)]_{\mathbb{T}^m}$ és singular.

- Teoria KAM per a tors isotròpics normalment hiperbòlics. El mètode de la parametrització es va adaptar a [22] per a obtenir un resultat anàleg al teorema 6 en aquest cas. A cada punt del tor tenim un subespai central de dimensió $2r$ i la resta de direccions contrauen exponencialment en el futur o en el passat, de forma similar a les propietats asimptòtiques de varietats normalment hiperbòliques que hem descrit en la secció 4.1. Per a estudiar aquest problema cal projectar sobre els subespais hiperbòlics i central. Sobre l'espai central, les equacions es poden resoldre fent servir la construcció presentada en la secció 5, ja que a efectes pràctics el tor es comporta com a lagrangià sobre aquest subespai. D'altra banda, la resolució sobre els espais hiperbòlics es pot tractar fent servir estimacions sobre les condicions de creixement asimptòtic.

- Teoria KAM per a tors isotròpics normalment el·líptics. En aquest cas, les direccions normals al tor corresponen a oscil·lacions entorn de l'objecte invariant. El lector pot trobar una adaptació del mètode de la parametrització a [41]. Una manera de caracteritzar aquestes direccions és resoldre (juntament amb l'equació d'invariància) una equació addicional que assegura una expressió com (27). La font principal de dificultat que cal afegir en presència de direccions normals el·líptiques és l'anomenat fenomen de *manca de paràmetres* (vegeu [9, 10, 60]). Bàsicament, atès que tenim tants paràmetres com el nombre de freqüències internes del tor, no podem controlar simultàniament totes les freqüències. Això provoca que en general no puguem evitar «caure en ressonància» en corregir el tor.

- Implementació de mètodes numèrics. Al llarg de l'exposició hem remarcat que les construccions presentades teòricament es poden implementar per a aproximar objectes invariants en problemes concrets. Diverses implementacions dels mètodes que hem inclòs en aquest resum poden trobar-se a [30, 32, 39, 46, 47]. En el cas quasiperiòdic, potser la implementació més senzilla és la presentada a [47], ja que no cal tenir present cap construcció geomètrica.

Agraïments

Aquest treball ha estat parcialment finançat pel projecte MCyT-FEDER amb referència MTM2009-06973, pel projecte CUR-DIUE amb referència 2009SGR859 i per la beca cofinançada PTA2008-1693-P. D'altra banda, vull afegir que em sento en deute amb tots els membres (i col·laboradors) dels diferents grups de sistemes dinàmics de les universitats de Barcelona i amb els companys del Departament de Matemàtica Aplicada I del qual era membre quan vaig escriure aquest article. Són moltes les coses que he après d'ells. Especialment, vull agrair a en Francesc Planas per animar-me a fer aquest treball i també a en Jordi Villanueva pels seus consells.

Referències

[1] Abraham, R.; Marsden, J. *Foundations of mechanics*. Reading, Mass.: Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, 1978.

[2] Arnold, V. «Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasiperiodic motions under small perturbations». *Russian Math. Surveys*, 18 (5) (1963), 9–36.

[3] Arnold, V. «Instability of dynamical systems with several degrees of freedom». *Sov. Math. Doklady*, 5 (1964), 581–585.

[4] Arnold, V. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. 2a ed. Nova York: Springer, 1988.

[5] Arnold, V. *Mathematical methods of classical mechanics*. Nova York: Springer, 1989. (Grad. Texts in Math.; 60)

[6] Arnold, V.; Kozlov, V.; Neishtadt, A. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. 3a ed. Berlín: Springer, 2006. (Encyclopaedia Math. Sci.; 3)

[7] Arrowsmith, D.; Place, C. *An introduction to dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[8] Broer, H. «Kolmogorov: la "K" de KAM». *Butlletí de la SCM*, 18 (2) (2003), 39–57.

[9] Broer, H.; Huitema, G.; Sevryuk, M. *Quasiperiodic motions in families of dynamical systems. Order amidst chaos*. Nova York: Springer, 1996. (Lecture Notes in Math.; 1645)

[10] Broer, H.; Huitema, G.; Takens, F. «Unfoldings of quasiperiodic tori». *Mem. Amer. Math. Soc.*, 83 (421) (1990), 1–81, 171–175.

[11] Cabré, X.; Fontich, E.; de la Llave, R. «The parameterization method for invariant manifolds. I. Manifolds associated to non-resonant subspaces». *Indiana Univ. Math. J.*, 52 (2) (2003), 283–328.

[12] Cabré, X.; Fontich, E.; Llave, R. de la. «The parameterization method for invariant manifolds. III. Overview and applications». *J. Differential Equations*, 218 (2) (2005), 444–515.

[13] Calleja, R.; Llave, R. de la. «Fast numerical computation of quasiperiodic equilibrium states in 1-D statistical mechanics, including twist maps». *Nonlinearity*, 22 (6) (2009), 1311–1336.

[14] Candel, A.; Llave, R. de la. «On the Aubry-Mather theory in statistical mechanics». *Comm. Math. Phys.*, 192 (3) (1998), 649–669.

[15] Celletti, A.; Chierchia, L. «On the stability of realistic three-body problems». *Comm. Math. Phys.*, 186 (2) (1997), 413–449.

[16] Delshams, A.; Llave, R. de la; Seara, T. «A geometric mechanism for diffusion in Hamiltonian systems overcoming the large gap problem: heuristics and rigorous verification on a model». *Mem. Amer. Math. Soc.*, 179 (844) (2006), viii+141.

[17] Delshams, A.; Llave, R. de la; Seara, T. «Orbits of unbounded energy in quasiperiodic perturbations of geodesic flows». *Adv. Math.*, 202 (2006), 64–188.

[18] Delshams, A.; Llave, R. de la; Seara, T. «Geometric properties of the scattering map of a normally hyperbolic invariant manifold». *Adv. Math.*, 217 (2008), 1096–1153.

[19] Fenichel, N. «Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows». *Indiana Univ. Math. J.*, 21 (1972), 193–226.

[20] Fenichel, N. «Asymptotic stability with rate conditions». *Indiana Univ. Math. J.*, 23 (1973–1974), 1109–1137.

[21] Fontich, E.; Llave, R. de la; Martín, P. «Dynamical systems on lattices with decaying interaction II: hyperbolic sets and their invariant manifolds». *J. Differential Equations*, 250 (6) (2011), 2887–2926.

[22] Fontich, E.; Llave, R. de la; Sire, Y. «Construction of invariant whiskered tori by a parameterization method. Part I: Maps and flows in finite dimensions.» *J. Differential Equations*, 246 (2009), 3136–3213.

[23] Fontich, E.; Llave, R. de la; Sire, Y. «A method for the study of whiskered quasiperiodic and almost-periodic solutions in finite and infinite dimensional Hamiltonian systems». *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 16 (2009), 9–22.

[24] Gabern, F.; Koon, W.; Marsden, J.; Ross, S. «Theory and computation of non-RRKM lifetime distributions and rates in chemical systems with three or more degrees of freedom». *Phys. D*, 211 (3-4) (2005), 391–406.

[25] Gómez, G.; Jorba, À.; Masdemont, J.; Simó, C. *Study of Poincaré maps for orbits near Lagrangian points*. Contracte ESA-ESOC 8711/91/D/IM/(SC). Darmstadt, Alemanya, 1993.

[26] Gómez, G.; Jorba, À.; Simó, C.; Masdemont, J. *Dynamics and mission design near libration points*. Vol. III. *Advanced methods for collinear points*. River Edge, N. J.: World Scientific Publishing Co. Inc., 2001. (World Sci. Monogr. Ser. Math.; 4)

[27] Gómez, G.; Jorba, À.; Simó, C.; Masdemont, J. *Dynamics and mission design near libration points*. Vol. IV. *Advanced methods for triangular points*. River Edge, N. J.: World Scientific Publishing Co. Inc., 2001. (World Sci. Monogr. Ser. Math.; 5)

[28] González, A.; Llave, R. de la; Haro, A. «Singularity theory for non-twist KAM tori». *Preprint* disponible a `http://www.ma.utexas.edu/mp_arc`.

[29] Guckenheimer, J.; Holmes, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Nova York: Springer, 1983. (Appl. Math. Sci.; 42)

[30] Haro, A. «Automatic differentiation tools in computational dynamical systems». *Preprint* disponible a `http://www.maia.ub.es/dsg/2008/`.

[31] Haro, A. «Center and center-(un)stable manifolds of elliptic-hyperbolic fixed points of 4D-symplectic maps. An example: the Froeschlé map». A: *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.; 533), 403–407.

[32] Haro, A.; Llave, R. de la. «A parameterization method for the computation of invariant tori and their whiskers in quasiperiodic maps: explorations and mechanisms for the breakdown of hyperbolicity». *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* [en línia], 6 (1) (2007), 142–207.

[33] Hirsch, M.; Pugh, C. «Stable manifolds and hyperbolic sets». A: *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1970, 133–163.

[34] Hirsch, M.; Pugh, C.; Shub, M. *Invariant manifolds*. Berlín: Springer, 1977. (Lecture Notes in Math.; 583)

[35] Irwin, M. «On the stable manifold theorem». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2 (1970), 196–198.

[36] Irwin, M. «A new proof of the pseudostable manifold theorem». *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 21 (3) (1980), 557–566.

[37] Jorba, À. «A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of Hamiltonian systems». *Experiment. Math.*, 8 (2) (1999), 155–195.

[38] Jorba, À.; Llave, R. de la; Zou, M. «Lindstedt series for lower-dimensional tori». A: *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.; 533), 151–167.

[39] Jorba, À.; Olmedo, E. «On the computation of reducible invariant tori on a parallel computer». *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* [en línia], 8 (4) (2009), 1382–1404.

[40] Kolmogorov, A. «On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function» [en rus]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 98 (1954), 527–530. [Traducció a l'anglès a Casati G.; Ford, J. (ed.). *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Como 1977*. Berlín: Springer 1979. (Lecture Notes Phys.; 93), 51–56]

[41] Luque, A.; Villanueva, J. «A KAM theorem without action-angle variables for elliptic lower dimensional tori». *Nonlinearity*, 24 (4) (2011), 1033–1080.

[42] Lyapunov, A. M. *The general problem of the stability of motion*. Londres: Taylor & Francis Ltd., 1992. [Traduït a l'anglès per A. T. Fuller a partir de la traducció francesa d'Edouard Davaux de 1907 de l'original rus de 1892. Reimpresió de *Internat. J. Control*, 55 (3) (1992)]

[43] Llave, R. de la. «A tutorial on KAM theory». A: *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2001. (Proc. Sympos. Pure Math.; 69), 175–292.

[44] Llave, R. de la. «KAM theory for equilibrium states in 1-D statistical mechanics models». *Ann. Henri Poincaré*, 9 (5) (2008), 835–880.

[45] Llave, R. de la; González, A.; Jorba, À.; Villanueva, J. «KAM theory without action-angle variables». *Nonlinearity*, 18 (2) (2005), 855–895.

[46] Llave, R. de la; Huguet, G.; Sire, Y. «Fast numerical algorithms for the computation of invariant tori in Hamiltonian systems». *Preprint* disponible a `http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=09-2`.

[47] Llave, R. de la; Luque, A. «Differentiability at the tip of Arnold tongues for diophantine rotations: Numerical studies and renormalization group explanations». *J. Stat. Phys.*, 143 (6) (2011), 1154–1188.

[48] Martínez, R. «Aplicació dels sistemes dinàmics a l'estudi d'òrbites de cometes i de naus espacials». *Butlletí de la SCM*, 16 (1) (2001), 87–100.

[49] Meiss, J. D. «Symplectic maps, variational principles, and transport». *Rev. Modern Phys.*, 64 (3) (1992), 795–848.

[50] Michelotti, L. *Intermediate classical dynamics with applications to beam physics*. Nova York: John Wiley & Sons Inc., 1995. (Wiley Series in Beam Physics and Accelerator Technology)

[51] Moser, J. «On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus». *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, (1962), 1–20.

[52] Moser, J. «A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations. II». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, 20 (3) (1966), 499–535.

[53] Moser, J. «A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations. I». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, 20 (2) (1966), 265–315.

[54] Olvera, A.; Simó, C. «An obstruction method for the destruction of invariant curves». *Phys. D*, 26 (1-3) (1987), 181–192.

[55] Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*. París: Blanchard, 1987. (Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard) [Reimpressió de l'original, París: Gauthier-Villars, 1892]

[56] Romero-Gómez, M.; Masdemont, J.; García-Gómez, C.; Athanassoula, E. «The role of the unstable equilibrium points in the transfer of matter in galactic potentials». *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14 (12) (2009), 4123–4138.

[57] Rüssmann, H. «On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus». A: *Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974)*. Berlín: Springer, 1975. (Lecture Notes in Phys.; 38), 598–624.

[58] Rüssmann, H. «On a new proof of Moser's twist mapping theorem». *Celestial Mech.*, 14 (1) (1976): *Proceedings of the Fifth Conference on Mathematical Methods in Celestial Mechanics (Oberwolfach, 1975), Part I*, 19–31.

[59] SALAMON, D.; ZEHNDER, E. «KAM theory in configuration space». *Comment. Math. Helv.*, 64 (1) (1989), 84–132.

[60] SEVRYUK, M. «The lack-of-parameters problem in the KAM theory revisited». A: *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.; 533), 568–572.

[61] SIMÓ, C. «On the Hénon-Pomeau attractor». *J. Stat. Phys.*, 21 (4) (1979), 465–494.

[62] VILLANUEVA, J., «Kolmogorov theorem revisited». *J. Differential Equations*, 244 (9) (2008), 2251–2276.

[63] WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.* Berlín: Springer, 1990. (Texts Appl. Math.; 2)

[64] WIGGINS, S. *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems.* Nova York: Springer, 1994. (Appl. Math. Sci.; 105)

[65] ZEHNDER, E. «Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems. II». *Comm. Pure Appl. Math.*, 29 (1) (1976), 49–111.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I ANÀLISI
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
luque@maia.ub.es