Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 26, núm. 1, 2011. Pàg. 57–68. DOI: 10.2436/20.2002.01.34

Com repartir punts uniformement en esferes?

Resum: El teorema de Whittaker-Kotel'nikov-Shannon permet reconstruir de manera estable una funció de banda limitada i energia finita a partir dels valors de la funció als enters. Així doncs, els enters són un exemple de conjunt de mostreig estable però són, a més, un conjunt de punts ben distribuïts a la recta. En aquest article tractarem de la relació entre l'existència de conjunts de punts ben distribuïts i el mostreig estable de funcions a diferents dominis (la recta, el cercle i l'esfera).

Paraules clau: successions de mostreig, desigualtats de Marcinkiewicz-Zygmund, harmònics esfèrics, punts de Fekete.

Classificació MSC2010: 65D32, 33C55, 65T40, 11K36.

1 Introducció

Considerem una funció (senyal) f definida en un conjunt S amb valors als nombres complexos $\mathbb{C}$. Volem estudiar els conjunts discrets $\{s_n\}_n \subset S$, de manera que puguem reconstruir la funció $f(s)$ a qualsevol punt $s \in S$, a partir només dels valors $\{f(s_n)\}_n$. A més, voldrem que la reconstrucció sigui estable. Amb això volem dir que, si en comptes de reconstruir la funció a partir dels valors $f(s_n)$, tenim un cert error $f(s_n) + \epsilon_n$, i els errors ϵ_n són petits, aleshores l'error en la funció reconstruïda també volem que sigui petit.

Per tal de mesurar la grandària de les funcions, considerarem que la nostra funció f pertany a un cert espai de Hilbert $(H, \|\cdot\|_H)$ de funcions definides a S. La grandària de f serà, doncs, el valor $\|f\|_H = \langle f, f\rangle^{1/2}$. Si per a tot punt $s \in S$ l'avaluació puntual és fitada, o sigui $|f(s)| \lesssim \|f\|_H$, el teorema de Riesz ens assegura que existeix una funció $K_s \in H$ tal que

$$f(s) = \langle f, K_s\rangle\,. \tag{1}$$

Aquest article està basat en la conferència «Digitalització del senyal i punts ben distribuïts» de la Tretzena Trobada Matemàtica «Joves matemàtics catalans al món» de la SCM, que va tenir lloc l'11 de juny de 2010 a Barcelona.

Aquesta funció K_s és l'anomenat *nucli reproductor* de l'espai H en el punt $s \in S$. Els espais que considerarem tenen tots aquesta propietat i tindrem definit, per tant, un nucli reproductor.

Es pot establir una relació entre les propietats de la successió de punts de mostreig $\{s_n\}_n$ i les de la successió de funcions $\{K_{s_n}\}_n$. En efecte, suposem que existeix $\{s_n\}_n \subset S$ tal que els nuclis normalitzats $\{K_{s_n}\}_n$ són una base ortonormal de H (suposem per simplificar la notació que $\|K_{s_n}\|_H = 1$). Sabem que per a tota funció $f \in H$

$$f = \sum_n \langle f, K_{s_n} \rangle K_{s_n}, \quad \text{amb} \quad \|f\|_H^2 = \sum_n |\langle f, K_{s_n} \rangle|^2 \tag{2}$$

o utilitzant (1)

$$f = \sum_n f(s_n) K_{s_n}, \quad \text{amb} \quad \|f\|_H^2 = \sum_n |f(s_n)|^2 .$$

O sigui, la funció f es pot reconstruir a partir dels seus valors en $\{s_n\}_n$ i la norma de la funció $\|f\|_H$ és igual a la norma ℓ^2 de la successió $\{f(s_n)\}_n$. A més, la reconstrucció és estable, ja que si en comptes de $f(s_n)$ utilitzem $f(s_n) + \epsilon_n$ amb $\sum |\epsilon_n|^2 < \epsilon^2$ obtenim

$$\tilde{f} = \sum (f(s_n) + \epsilon_n) K_{s_n} = f + E ,$$

però

$$\|f - \tilde{f}\|_H = \|E\|_H = \left(\sum |\epsilon_n|^2\right)^{1/2} < \epsilon .$$

La primera qüestió que podem plantejar-nos és, doncs, si existeixen successions de punts $\{s_n\}_n \subset S$ tals que els nuclis $\{K_{s_n}\}_n$ formen una base ortogonal de H.

2 Bases ortogonals de nuclis reproductors

2.1 El cercle

Considerem l'espai de les restriccions a $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dels polinomis trigonomètrics de grau com a màxim $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n = \left\{ P(z) = \sum_{|k| \le n} a_k z^k : a_k \in \mathbb{C} \right\} .$$

Si en aquest espai prenem la norma L^2

$$\|P\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} ,$$

obtenim espais de Hilbert de dimensió finita $\dim \mathcal{P}_n = 2n + 1$. El nucli reproductor de l'espai $\mathcal{P}_n$ és donat pel nucli de Dirichlet

$$K_\eta(\theta) = D_n(\theta - \eta) = \frac{\sin((n + 1/2)(\theta - \eta))}{\sin((\theta - \eta)/2)} ,$$

on $\eta, \theta \in (0, 2\pi]$. Observem que en aquest cas $\|K_\eta\|_2^2 = 2n + 1$.

Si volem discretitzar la norma dels polinomis de $\mathcal{P}_n$, amb $2n+1$ punts a $\mathbb{S}^1$, sembla natural prendre les arrels de la unitat

$$\left\{e^{\frac{2\pi ik}{2n+1}}; \quad k=0,\ldots,2n\right\}.$$

I, en efecte, és fàcil demostrar que els polinomis $\{K_{\frac{2\pi ik}{2n+1}}\}_{k=0,\ldots,2n}$ són una base ortogonal de $\mathcal{P}_n$ i tenim, doncs, que

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}|\langle P, K_{\frac{2\pi ik}{2n+1}}\rangle|^2 = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}|P(e^{\frac{2\pi ik}{2n+1}})|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

per a tot $P \in \mathcal{P}_n$.

2.2 L'esfera

Quan augmenta la dimensió la situació canvia. Per començar, no és gens clar quina família de punts ben distribuïts, anàloga a les arrels de la unitat, podem agafar a l'esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$. Per exemple, els únics poliedres convexos regulars són els cinc sòlids platònics que poden arribar a tenir només fins a vint vèrtexs (el dodecaedre).

A l'esfera considerarem espais d'harmònics esfèrics, que són la generalització natural dels espais de polinomis trigonomètrics.

Definició 1. L'espai d'harmònics esfèrics de grau com a màxim $L \in \mathbb{N}$ a $\mathbb{S}^2$, que denotem Π_L, és l'espai de les restriccions a $\mathbb{S}^2$ dels polinomis (de tres variables) de grau com a màxim L a $\mathbb{R}^3$.

Amb la norma

$$\|P\|_2 = \left(\int_{\mathbb{S}^2}|P(z)|^2 d\sigma(z)\right)^{1/2},$$

on $d\sigma$ és la mesura normalitzada de superfície a $\mathbb{S}^2$, l'espai Π_L és un espai de Hilbert amb nucli reproductor. Observem que la dimensió de Π_L és $(L+1)^2$. El nucli reproductor és donat, mòdul constants independents del grau, en termes dels polinomis de Jacobi amb índex $(1,0)$

$$K_L(z,w) \sim LP_L^{(1,0)}(\langle z,w\rangle), \quad z,w \in \mathbb{S}^2,$$

on

$$P_L^{(1,0)}(t) = \frac{(-1)^L}{2^L L!(1-t)}\frac{d^L}{dt^L}((1-t)^{L+1}(1+t)^L),$$

vegeu [26].

El teorema següent demostra que, a diferència del cas anterior, per a graus suficientment grans no hi ha cap conjunt de punts que doni una base ortogonal de nuclis reproductors. La demostració que presentem està basada en idees de Fuglede [8].

Teorema 2. *Donat* $L \in \mathbb{N}$, *sigui*

$$\mathcal{Z}(L) = \{z_{L,1}, \dots, z_{L,(L+1)^2}\} \subset \mathbb{S}^2$$

un conjunt de $(L+1)^2$ *punts a l'esfera. Per a* L *suficientment gran*

$$\{K_L(\cdot, z) : z \in \mathcal{Z}(L)\}$$

no és una base ortogonal de Π_L.

Prova. Suposem que $\{K_L(\cdot, z_{L,1}), \dots, K_L(\cdot, z_{L,(L+1)^2})\}$ és una base ortogonal de Π_L. Com que $K_L(z,w) \sim LP_L^{(1,0)}(\langle z, w\rangle)$, tenim

$$\langle K_L(\cdot, z_{Lk}), K_L(\cdot, z_{Lj})\rangle \sim LP_L^{(1,0)}(\langle z_{Lj}, z_{Lk}\rangle) = 0\,,$$

per a $j \neq k$. Així doncs, $\{\langle z_{Lj}, z_{Lk}\rangle\}_{j\neq k} \subset [-1,1]$ són zeros del polinomi $P_L^{(1,0)}(t)$.

Sigui Z_L el zero més gran de $P_L^{(1,0)}(t)$ a $[-1,1]$. Se sap que

$$\lim_{L\to\infty} L \arccos Z_L = j_1 = 3{,}8317\dots,$$

on j_1 és el primer zero positiu de la funció de Bessel $J_1(t)$, [26].

Un resultat clàssic de Fejes-Tóth [7] ens assegura que, donats N punts a $\mathbb{S}^2$, n'existeix un parell a distància (geodèsica) menor que d_N, on

$$d_N \leq \arccos \frac{\cot^2 \omega_N - 1}{2}\,, \quad \text{i} \quad \omega_L = \frac{N}{N-2}\frac{\pi}{6}\,.$$

Tenim, doncs, que existeix un parell $j \neq k$ tal que

$$\arccos Z_L \leq d(z_{Lj}, z_{Lk}) \leq d_{(L+1)^2}\,.$$

Prenent límits arribem a una contradicció

$$3{,}8317\ldots = \lim_{L\to\infty} L \arccos Z_L \leq \lim_{L\to\infty} L \arccos \frac{\cot^2 \omega_{(L+1)^2} - 1}{2} = 3{,}80925\ldots \qquad \square$$

Dins del domini dels anomenats *dissenys esfèrics* (*spherical designs*), Bannai i Damerell van demostrar un resultat més fort [1]. La demostració, que funciona per a tot L, és força més complicada.

3 Successions de mostreig i desigualtats de Marcinkiewicz-Zygmund

Acabem de veure, doncs, que no sempre podem trobar successions ortogonals de nuclis reproductors, atès que no sempre hi ha conjunts de punts prou ben distribuïts. Però per a reconstruir de manera estable és suficient (i fins i tot de vegades un avantatge) suposar que la successió de nuclis $\{K_{s_n}\}_n$ té propietats menys rígides que les d'una base ortogonal. El concepte apropiat és el de marc (*frame* en anglès) que definim tot seguit.

DEFINICIÓ 3. Direm que la successió de nuclis reproductors $\{K_{s_n}\}_n$ a un espai de Hilbert $(H, \|\cdot\|_H)$ és un *marc* si existeixen constants $A, B > 0$ tals que, per a tota $f \in H$,

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_n |f(s_n)|^2 \leq B\|f\|_H^2 .$$

DEFINICIÓ 4. Si $\{K_{s_n}\}_n$ és un *marc* a $(H, \|\cdot\|_H)$, la successió $\{s_n\}_n$ es diu *de mostreig estable per a* H.

Si $\{s_n\}_n$ és de mostreig estable, es pot demostrar que la funció original es pot reconstruir de manera estable d'una manera semblant a la que hem vist abans a (2). Es pot demostrar també que, si afegim punts a una successió de mostreig estable (mantenint una separació mínima entre els punts), la successió resultant també és de mostreig estable. Resulta natural, per tant, intentar obtenir successions de mostreig estable $\{s_n\}_n$ de grandària minimal. Una successió de mostreig estable minimal $\{s_n\}_n$ dóna lloc a un marc minimal $\{K_{s_n}\}_n$. Els marcs minimals són de fet bases molt properes per les seves propietats a les bases ortonormals. Són les anomenades *bases de Riesz*. Així com les bases ortonormals a H són les imatges d'una de fixada per operadors unitaris, les bases de Riesz ho són per operadors invertibles. Bones referències sobre aquests conceptes són [24, 27].

Farem ara un breu recull de resultats sobre successions de mostreig a l'espai de funcions d'energia finita i banda limitada (Paley-Wiener). Això servirà per a entendre resultats anàlegs en el context del cercle i l'esfera.

3.1 L'espai de Paley-Wiener PW^2

L'espai de Paley-Wiener, PW^2, és l'espai de funcions enteres f amb energia finita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty ,$$

i banda limitada

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset (-\pi, \pi) , \text{ on } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx .$$

És un espai de Hilbert amb la norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} ,$$

i té nucli reproductor

$$K_y(x) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} , \quad x, y \in \mathbb{R} .$$

Dins de la teoria del senyal aquest espai de funcions té un paper central.

Si volem una successió de punts ben distribuïts a $\mathbb{R}$ sembla natural prendre punts equiespaiats. El teorema següent ens diu que efectivament és l'opció correcta.

Teorema 5 (Whittaker-Kotel'nikov-Shannon). *Tota $f \in PW^2$ admet una representació*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin\pi(z-n)}{\pi(z-n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)K_n(z) \tag{3}$$

i

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 .$$

Per a tota successió $\{c_n\} \in \ell^2$, l'equació (3) (amb coeficients c_n), defineix una funció $f \in PW^2$ tal que

$$f(n) = c_n .$$

En termes de les propietats de la successió dels nuclis reproductors, el que diu el teorema és que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de PW^2. En termes de mostreig el teorema ens diu que hi ha correspondència entre les funcions $f \in PW^2$ (senyal analògic) i els valors als enters $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (senyal digital). Sobre el mostreig a l'espai de Paley-Wiener es coneixen molts resultats:

- Hi ha un resultat anàleg al teorema anterior considerant normes $L^p(\mathbb{R})$ (per a $1 < p < \infty$). Plancherel-Pólya [12].
- Una pertorbació *petita* dels enters és també una successió de mostreig minimal. De fet es pot arribar fins i tot a $|n - s_n| < 1/4$. Kadec [10].
- Es poden definir unes densitats que mesuren la distribució geomètrica asimptòtica de les successions. En funció d'aquestes densitats, anomenades *de Beurling*, es pot donar gairebé una caracterització: tota successió $\{s_n\}_n \subset \mathbb{R}$ que sigui de mostreig és més densa que $\mathbb{Z}$ (que té densitat 1). I en l'altre sentit, si una successió té densitat més gran que 1, serà de mostreig. Beurling, Jaffard, Seip [23].
- Hi ha una caracterització de les successions de mostreig minimals en termes dels anomenats *pesos de Muckenhoupt*. Pavlov [21].

Tornem ara a l'exemple de polinomis al cercle, on els resultats són propers als de l'espai de Paley-Wiener.

3.2 Desigualtats de Marcinkiewicz-Zygmund al cercle

Recordem que $\mathcal{P}_n$ és l'espai dels polinomis trigonomètrics de grau com a màxim $n \in \mathbb{N}$. El teorema clàssic següent diu que les arrels de la unitat

$$\omega_{n,k} = e^{\frac{2\pi i k}{2n+1}}; \quad k = 0, \dots, 2n ,$$

no només donen una base ortogonal de nuclis reproductors, sinó que la discretització és vàlida també amb altres normes; per a una demostració vegeu [13, 28]. Aquest resultat es pot veure com a l'anàleg al teorema de Plancherel-Pólya que acabem de mencionar, on les arrels de la unitat tenen el mateix paper que tenien els enters a $\mathbb{R}$.

Teorema 6 (Marcinkiewicz-Zygmund 1937). *Donat* $1 < p < \infty$, *existeixen constants* $A, B > 0$ *(independents de* n*) tals que*

$$A \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} |P(\omega_{n,k})|^p \leq B \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^p d\theta \,,$$

per a tot $P \in \mathcal{P}_n$.

En comptes de les arrels de la unitat, podem plantejar-nos ara prendre altres conjunts de punts al cercle de manera que es compleixin les desigualtats del teorema anterior.

Definició 7 (família de Marcinkiewicz-Zygmund). Sigui

$$\mathcal{Z}(n) = \{z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}\} \subset \mathbb{S}^1 \,,$$

amb $m_n \geq 2n+1$. Direm que la família $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}(n)\}_{n \geq 1}$ és de Marcinkiewicz-Zygmund si existeixen constants $A, B > 0$ (independents de n) tals que per a tot $P \in \mathcal{P}_n$

$$A \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{m_n} |P(z_{n,k})|^2 \leq B \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \,.$$

Les desigualtats anteriors són equivalents a dir que els nuclis reproductors normalitzats, als punts de $\mathcal{Z}(n)$, formen un marc de $\mathcal{P}_n$ (amb constants independents del grau). Els resultats que mencionem tot seguit són semblants als obtinguts per a l'espai de Paley-Wiener:

- Una pertorbació *petita* de les arrels de la unitat és també un conjunt de Marcinkiewicz-Zygmund minimal (de fet la pertorbació màxima és també $1/4$ en la mètrica apropiada). Marzo, Seip [16].
- En aquest context també es poden definir unes densitats de Beurling, que mesuren la distribució geomètrica asimptòtica de les famílies de punts. Es pot demostrar que tota família $\mathcal{Z}$ que sigui de Marcinkiewicz-Zygmund és més densa que la formada per les successives arrels de la unitat (que té densitat 1). També tindrem que si és prou densa serà de Marcinkiewicz-Zygmund. Ortega-Cerdà, Saludes [20].
- Hi ha una caracterització de les famílies de Marcinkiewicz-Zygmund minimals en termes dels pesos de Muckenhoupt. Chui, Zhong, Shen [5, 6].

La raó d'aquesta similitud en els resultats es pot justificar amb el fet que l'espai de polinomis és en un cert sentit de banda limitada. On ara la banda és donada pel grau. Això es reflecteix en la desigualtat de Bernstein,

$$\sup_{z\in\mathbb{T}} \left|P'(z)\right| \leq n \sup_{z\in\mathbb{T}} \left|P(z)\right| ,$$

on $P \in \mathcal{P}_n$.

3.3 Desigualtats de Marcinkiewicz-Zygmund a l'esfera

La situació canvia quan passem a estudiar polinomis a l'esfera. Un primer problema és com obtenir punts ben distribuïts. Sabem que ara no tenim una família canònica similar a la formada per les arrels de la unitat. Tanmateix, hi ha diverses maneres d'obtenir punts a l'esfera que gaudeixen de bones propietats. En aquesta secció en mencionaré dos: els punts que minimitzen un cert potencial i els punts de Fekete. En el primer cas Carleson va demostrar que els punts estan asimptòticament ben distribuïts. Per al segon veurem com es pot deduir aquesta propietat dels nostres resultats sobre les desigualtats de Marcinkiewicz-Zygmund a l'esfera [15].

Definició 8. Donats n punts a l'esfera $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathbb{S}^2$ i $0 < s < \infty$, direm que es troben en configuració extremal s, si fan mínima l'energia

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{|z_i - z_j|^s} .$$

Diferents valors del paràmetre s donen lloc a diferents configuracions. Per a $s = 1$ obtenim el problema de minimitzar l'energia de n electrons que es repel·leixen d'acord amb la llei de Coulomb. Aquest problema es coneix com a problema de Thomson. El cas límit $s \to +\infty$ és el problema de Tammes o dels dictadors hostils, on els punts representen n dictadors que volen situar-se tan lluny com poden els uns dels altres. L'altre cas límit $s \to 0$ (on obtenim un potencial logarítmic) ens dóna els punts (el·líptics) de Fekete.

No donarem una bibliografia completa però mencionarem uns quants treballs importants en aquets camp: Mhaskar [17], Narcowich, Ward, Filbir [18, 19], Hardin, Saff [9], Kuijlaars [11] i Reimer [22]. Sobre punts en configuració extremal és especialment remarcable el treball del grup VARIDIS de la UPC [2].

Ja hem vist que a l'esfera no hi ha bases ortonormals de nuclis reproductors per als espais d'harmònics esfèrics Π_L. Però, com ja hem comentat, de cara a obtenir bones propietats de discretització no cal tenir bases ortogonals. En tindríem prou amb bases de Riesz o equivalentment famílies de Marcinkiewicz-Zygmund minimals. La definició següent és del tot anàloga a la que hem donat per a polinomis al cercle.

Definició 9 (família de Marcinkiewicz-Zygmund). Sigui

$$\mathcal{Z}(L) = \{z_{L,1}, \dots, z_{L,m_L}\} \subset \mathbb{S}^2$$

amb $m_L \geq (L+1)^2 = \dim \Pi_L$. Direm que $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}(L)\}_{L\geq 1}$ és una família de Marcinkiewicz-Zygmund si existeixen constants $A, B > 0$ tals que per a tot $L \geq 1$ i $Q \in \Pi_L$,

$$A \int_{\mathbb{S}^2} |Q(z)|^2 d\sigma(z) \leq \frac{1}{(L+1)^2} \sum_{j=1}^{m_L} |Q(z_{Lj})|^2 \leq B \int_{\mathbb{S}^2} |Q(z)|^2 d\sigma(z).$$

Direm que $\mathcal{Z}$ és de Marcinkiewicz-Zygmund minimal si $m_L = (L+1)^2$.

Ara bé, existeix alguna família de Marcinkiewicz-Zygmund minimal? O sigui, existeix $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}(L)\}_{L\geq 0}$ i $A, B > 0$ (independents de L) tals que

$$A \int_{\mathbb{S}^2} |Q(z)|^2 d\sigma(z) \leq \frac{1}{(L+1)^2} \sum_{j=1}^{(L+1)^2} |Q(z_{Lj})|^2 \leq B \int_{\mathbb{S}^2} |Q(z)|^2 d\sigma(z)$$

per a tot $Q \in \Pi_L$?

El problema està obert. El que se sap és que la resposta és negativa si considerem normes $1 < p < \infty$ amb $p \neq 2$, o sigui,

$$A \int_{\mathbb{S}^2} |Q(z)|^p d\sigma(z) \leq \frac{1}{(L+1)^2} \sum_{j=1}^{(L+1)^2} |Q(z_{Lj})|^p \leq B \int_{\mathbb{S}^2} |Q(z)|^p d\sigma(z);$$

per a una demostració vegeu [14].

3.3.1 Els punts de Fekete Hi ha però famílies de punts a l'esfera que semblen bons candidats per a poder formar una família de Marcinkiewicz-Zygmund minimal, les famílies de punts de Fekete [22, 25]. Aquests punts es poden entendre com aquells que fan que els vectors de les avaluacions dels elements d'una base, siguin tan linealment independents com sigui possible. Això ho podem mesurar dient que el determinant d'aquests vectors és màxim.

Definició 10 (punts de Fekete). Donada una base $\{Q_1, \ldots, Q_{(L+1)^2}\}$ de Π_L sigui

$$V(z_1, \ldots, z_{(L+1)^2}) = \det\big(Q_j(z_k)\big)_{j,k}, \quad z_1, \ldots, z_{(L+1)^2} \in \mathbb{S}^2.$$

Els punts $z_1^*, \ldots, z_{(L+1)^2}^* \in \mathbb{S}^2$ són un conjunt de $(L+1)^2$ punts de Fekete quan

$$\left|V(z_1^*, \ldots, z_{(L+1)^2}^*)\right| = \max_{z_1, \ldots, z_{(L+1)^2} \in \mathbb{S}^2} \left|V(z_1, \ldots, z_{(L+1)^2})\right|.$$

L'evidència numèrica que els punts de Fekete són bons candidats com a punts de mostreig a l'esfera, es fa palesa en el darrer resultat que presentarem sobre equidistribució asimptòtica [15].

Teorema 11. *Si $z_{L,1}^*, \ldots, z_{L,(L+1)^2}^* \in \mathbb{S}^2$ són de Fekete, aleshores estan asimptòticament ben distribuïts. Això vol dir que, per a tota funció f contínua a $\mathbb{S}^2$, tenim*

$$\frac{1}{(L+1)^2} \sum_{j=1}^{(L+1)^2} f(z_{L,j}^*) \longrightarrow \int_{\mathbb{S}^2} f(z) d\sigma(z), \quad L \to \infty.$$

Per a demostrar aquest resultat utilitzem bàsicament dos elements. Primer veiem que efectivament una família de punts de Fekete és gairebé de Marcinkiewicz-Zygmund minimal [15]. En segon lloc utilitzem un resultat sobre densitats de Beurling a l'esfera que vam demostrar a [14]. El resultat diu que si una família de punts és de Marcinkiewicz-Zygmund, aleshores té densitat més gran que un valor de referència (que correspondria a la densitat d'una família de Marcinkiewicz-Zygmund minimal). Aplicant el resultat de densitat a la família de punts de Fekete obtenim el resultat.

Demostrar que els conjunts de punts de Fekete a l'esfera estan asimptòticament equidistribuïts era un problema obert fins fa ben poc. Independentment Berman, Boucksom i Witt Nystrom han obtingut el mateix, com a conseqüència d'un resultat més general, amb mètodes diferents dels nostres [3].

Agraïments

Voldria agrair a la Societat Catalana de Matemàtiques haver estat proposat com a conferenciant a la Tretzena Trobada Matemàtica, «Joves matemàtics catalans al món», l'any 2010. També voldria agrair els comentaris del revisor anònim que han ajudat a millorar aquest article.

Referències

[1] Bannai, E.; Damerell, R. M. «Tight spherical designs». *J. Math. Soc. Japan*, 31 (1) (1979), 199–207.

[2] Bendito, E.; Carmona, A.; Encinas, A. M.; Gesto, J. M. «Estimation of Fekete points». *J. Comput. Phys.*, 225 (2007), 2.354–2.376.

[3] Berman, R. J.; Boucksom, S.; Witt Nystrom, D. *Fekete points and convergence towards equilibrium measures on complex manifolds. Preprint*, arXiv: 0907.2820. [Apareixerà a *Acta Math.*]

[4] Beurling, A. «The collected works Arne Beurling». A: Carleson, L.; Malliavin, P.; Neuberger, J.; Wermer, J. (ed.). *Complex analysis*. Boston Mass.: Birkhäuser, 1989. (Contemporary Mathematicians; vol. 2)

[5] Chui, C. K.; Shen, X. C.; Zhong, L. «On Lagrange interpolation at disturbed roots of unity». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 336 (2) (1993), 817–830.

[6] Chui, C. K.; Zhong, L. «Polynomial interpolation and Marcinkiewicz-Zygmund inequalities on the unit circle». *J. Math. Anal. Appl.*, 233 (1) (1999), 387–405.

[7] Fejes Tóth, L. «On the densest packing of spherical caps». *Amer. Math. Monthly*, 56 (1949), 330–331.

[8] Fuglede, B. «Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem». *J. Funct. Anal.*, 16 (1974), 101–121.

[9] Hardin, D. P.; Saff, E. B. «Discretizing manifolds via minimum energy points». *Notices Amer. Math. Soc.*, 51 (10) (2004), 1.186–1.194.

[10] Kadec, M. I. «The exact value of the Paley-Wiener constant». *Sov. Math. Dokl.*, 5 (1964), 559–561.

[11] Kuijlaars, A. B. J.; Saff, E. B. «Distributing many points on a sphere». *Math. Intelligencer*, 19 (1) (1997), 5–11.

[12] Levin, B. Ya. *Lectures on Entire Functions*. Providence, R. I: American Mathematical Society, 1996. (Translations of Mathematical Monographs; 150)

[13] Marcinkiewicz, J.; Zygmund, A. «Mean values of trigonometrical polynomials». *Fund. Math.*, 28 (1937), 131–166.

[14] Marzo, J. «Marcinkiewicz-Zygmund inequalities and interpolation by spherical harmonics». *J. Funct. Anal.*, 250 (2) (2007), 559–587.

[15] Marzo, J.; Ortega-Cerdà, J. «Equidistribution of the Fekete points on the sphere». *Constr. Approx.*, 32 (3) (2010), 513–521.

[16] Marzo, J.; Seip, K. «The Kadets 1/4 theorem for polynomials». *Math. Scand.*, 104 (2) (2009), 311–318.

[17] Mhaskar, H. N. «Weighted quadrature formulas and approximation by zonal function networks on the sphere». *J. Complexity*, 22 (3), 348–370, 2006.

[18] Mhaskar, H. N.; Narcowich, F. J.; Ward, J. D. «Spherical Marcinkiewicz-Zygmund Inequalities and positive quadrature». *Math. Comp.*, 70 (2000), 1.113–1.130.

[19] Mhaskar, H. N.; Narcowich, F. J.; Sivakumar, N.; Ward, J. D. «Approximation with interpolatory constraints». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130 (5) (2002), 1.355–1.364.

[20] Ortega-Cerdà, J.; Saludes, J. «Marcinkiewicz-Zygmund inequalities». *J. Approx. Theory*, 145 (2) (2007), 237–252.

[21] Pavlov, B. S. «The basis property of a system of exponentials and the condition of Muckenhoupt». *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 247 (1) (1979), 37–40.

[22] Reimer, M. *Constructive theory of multivariate functions*. Mannheim: B. I.-Wissenschaftsverlag, 1990.

[23] Seip, K. «On the connection between exponential bases and certain related sequences in $L^2(-\pi,\pi)$». *J. Funct. Anal.*, 130 (1995), 131–160.

[24] Seip, K. *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions*. Providence, R. I: American Mathematical Society, 2004. (University Lecture Series; 33)

[25] Sloan, I. H.; Womersley, R. S. «Extremal systems of points and numerical integration on the sphere». *Adv. Comput. Math.*, 21 (1-2) (2004), 107–125.

[26] Szegö, G. *Orthogonal polynomials*. Providence, R. I: American Mathematical Society, 1991. (Colloquium Publications; 23)

[27] Young, R. «An introduction to nonharmonic Fourier series». Nova York: Academic Press, 1980. [Primera edició revisada, 2001]

[28] Zygmund, A. *Trigonometric series.* 2a ed. Londres; Nova York: Cambridge University Press, 1968.

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585, 08007 Barcelona
jmarzo@ub.edu