Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 22, núm. 2, 2007. Pàg. 117–134. DOI: 10.2436/20.2002.01.5

Sobre una sèrie de Goldbach i Euler*

Lluís Bibiloni, Pelegrí Viader, Jaume Paradís

Resum El teorema 1 de l'article d'Euler «Variae observationes circa series infinitas», publicat el 1737, enuncia un resultat sorprenent: la sèrie dels recíprocs de les potències enteres menys la unitat té suma 1. Euler atribueix el teorema a Goldbach. La demostració que ofereix és un dels exemples —tan freqüents als segles XVII i XVIII— de mal ús d'una sèrie divergent que acaba produint un resultat correcte. Examinem amb detall la demostració d'Euler i, amb l'ajut de les intuïcions que ens proporciona una demostració moderna (i totalment diferent), presentem una reconstrucció racional en termes que es podrien considerar rigorosos per als estàndards *weierstrassians* moderns. Al mateix temps, amb l'ajut d'algunes idees de l'anàlisi no estàndard, veiem com la mateixa reconstrucció també es pot considerar correcta per als estàndards *robinsonians* moderns. Aquest últim enfocament, però, s'adiu completament amb la demostració d'Euler i de Goldbach. Esperem, doncs, convèncer el lector de com unes poques idees d'anàlisi no estàndard són suficients per reivindicar el treball d'Euler.

Paraules clau: història de les matemàtiques, sèries infinites, anàlisi no estàndard.

Classificació MSC2000: 01A50; 26E35.

1 Introducció

L'article d'Euler «Variae observationes circa series infinitas» [6] s'ha de considerar important per diverses raons.[1] Conté la primera versió impresa del producte d'Euler que defineix la funció zeta de Riemann; estableix de manera definitiva el símbol π per a denotar el perímetre del cercle de diàmetre 1, i introdueix una munió de sèries i productes infinits summament interessants.

* Aquest article, publicat originalment en anglès a la revista *American Mathematical Monthly*, 113 (2006), 206–220, va ser guardonat per la «Mathematical Association of America» amb el Premi Lester R. Ford Award per la seva excel·lència expositiva. La traducció al català és dels autors.

1 Vegeu l'interessant article «Variae observationes circa series infinitas. En el 2n centenari de la mort de Leonhard Euler», de Pilar Bayer publicat al *Butlletí de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques*, 2 (4) (1984), segona època, 429–481.

La primera d'aquestes és el teorema 1 que Euler ens diu que Goldbach li va comunicar i demostrar en una carta (ara perduda):

$$\sum_{m,n\geq 2} \frac{1}{m^n - 1} = 1.$$

(Hom ha d'evitar repeticions en aquest sumatori.) Ens referirem a aquest resultat com el «teorema de Goldbach-Euler».

La demostració de Goldbach i d'Euler d'aquest teorema és un exemple típic d'allò que alguns historiadors consideren «un mal ús de les sèries divergents», perquè comença assignant un *valor* a la sèrie harmònica $\sum 1/n$ i continua, tot manipulant-la per substracció i substitució d'altres sèries, fins a aconseguir el resultat desitjat. L'ús indiscriminat de sèries divergents per tal d'obtenir resultats vàlids era un procediment estàndard a la darreria del segle XVII i principi del segle XVIII. Aquesta pràctica ha provocat molta crítica, molta esmena i també, per què no dir-ho, molta admiració per l'audàcia dels matemàtics de l'època. Aquests estaven liderats per Euler, el «Mestre de tots nosaltres», com el va batejar Laplace. Presentem la demostració original de Goldbach-Euler a la secció 2.

Euler, òbviament, estava familiaritzat amb altres demostracions que també feien servir sèries divergents. Potser l'exemple més conegut era la demostració de Jakob Bernoulli de la divergència de la sèrie harmònica.

En aquest cas, però, en lloc d'un resultat positiu la conclusió era una contradicció. Així, sorprenentment, el procediment emprat en les dues demostracions és el mateix i, en canvi, porta a diferents respostes! A desgrat que Euler era plenament conscient d'aquesta paradoxa aparent, no va qüestionar la demostració de Goldbach del seu teorema. Això indica que la seva confiança en la manipulació de la sèrie harmònica, amb la seva suma infinita, es basava en alguna cosa més substancial que no pas la mera audàcia.

Existeixen molts articles dedicats, de manera directa o indirecta, a l'ús que Euler feia d'allò infinitament gran o infinitament petit. Un d'aquests articles, força recent, escrit per Detlef Laugwitz, és especialment rellevant [12]. La primera part d'aquest article porta el títol «The algorithmic thinking of Leibniz and Euler».[2] La paraula algorísmic del títol fa èmfasi en l'opinió que tant Leibniz com Euler feien servir els nombres «infinitament grans» i «infinitament petits» com qualsevol altre nombre real. Laugwitz argumenta que Euler estava «més interessat en aplicacions algorísmiques» que no pas en «arguments conceptuals». Nogensmenys, Euler no era del tot despreocupat perquè en alguns casos és possible verificar els seus resultats de manera «rigorosa» amb l'ajut de les consideracions de límit adients. En paraules de Laugwitz mateix [12, p. 450]:

> No és difícil comprovar «rigorosament» aquestes sumes de sèries mitjançant la consideració de sumes parcials i el pas al límit. Però per Euler *no hi havia consideracions de límit* i el que volem esbrinar és la mena de raonament que feien servir tant ell com els seus contemporanis. Atès aquest objectiu, seria

2 El pensament algorísmic de Leibniz i Euler.

contraproduent tractar aquests problemes fent servir *mitjans perfeccionats ulteriorment.*

Així, en la base del raonament d'Euler hi havia d'haver alguna cosa prou consistent que feia assegurar que molts dels seus resultats eren correctes. Aquests fonaments aparentment sòlids provenien d'un concepte de nombre prou ampli que incloïa de manera harmoniosa allò infinitament gran i allò infinitament petit.

El nostre model per aconseguir això podria ser *l'anàlisi no estàndard* introduïda per Abraham Robinson a la monografia [18]. Proporcionem una descripció molt curta de les idees que hi ha darrera l'anàlisi no estàndard a la secció 3. Malgrat la seva brevetat, aquests pocs conceptes que introduirem bastaran per a revisar la demostració del teorema de Goldbach-Euler i, en el procés, reivindicar el seu treball.

Per tal de dur a terme aquest programa, agafem idees d'una demostració moderna (i totalment diferent) del teorema de Goldbach-Euler. La demostració va aparèixer al *Monthly* [17] com a solució d'un problema proposat anteriorment [19]. Aquesta demostració, reproduïda a la secció 4, és molt curta però molt atractiva.

A la mateixa secció, examinem amb una mica de detall la línia de pensament que hi ha darrere de la demostració. Això no serà només un exercici interessant per mèrit propi sinó que també revelarà alguns resultats senzills però inesperats que seran usats més endavant. Com una referència més recent, citem una altra demostració diferent (però molt més llarga) del teorema de Goldbach-Euler apareguda a [1].

Dediquem la resta de la secció 4 a la reconstrucció de la demostració de Goldbach i Euler. La tornem a refer des del punt de vista del pas al límit i des de la perspectiva no estàndard. Mostrem com els mateixos arguments usats per Euler, modificats lleugerament, esdevenen rigorosos per als estàndards moderns. Fa gràcia veure com, gairebé amb les mateixes paraules, podem considerar la demostració weierstrassiana o no estàndard.

A les conclusions mostrem com en el mateix «Variae observationes» es troben altres resultats als quals s'arriba amb les mateixes tècniques però que no s'adoben tan fàcilment. També discutim com, en algun cas, es cometien errades en l'anàlisi, altrament brillant, d'Euler.

2 El teorema de Goldbach-Euler

El treball 72 de [6], titulat «Variae observationes circa series infinitas», comença d'una manera engrescadora [6, p. 216; la cursiva és nostra] (es pot trobar una traducció completa a l'anglès a [8]):

> Les notes que he decidit presentar aquí es refereixen en general a una mena de sèries que són *absolutament diferents* de les que s'han considerat fins ara.
>
> Fins avui, les úniques sèries que s'han estudiat són aquelles amb terme general conegut o, com a mínim, amb una llei coneguda sota la qual, donats

uns quants termes, la resta es poden trobar. Doncs bé, de la mateixa manera, consideraré aquí majorment sèries que no tenen ni terme general com a tal ni cap mena de llei de continuació sinó aquelles la naturalesa de les quals vingui determinada per *altres condicions*.

Així, la característica més sorprenent d'aquesta mena de sèries serà la possibilitat de sumar-les, atès que els mètodes coneguts fins ara per fer-ho *requereixen necessàriament el terme general* o bé la llei de continuació. Sense aquests requeriments, sembla obvi que no podem trobar cap manera d'obtenir les seves sumes.

Euler es refereix a la classe de sèries de les quals desconeixem el terme general i que, per aquest motiu, mai abans no s'havien considerat. Aquestes sèries són definides per alguna propietat especial dels seus termes i són altrament difícils de caracteritzar. Euler continua, amb el seu primer exemple, el teorema de Goldbach-Euler. Enuncia [6, p. 216]:

Aquestes observacions van sorgir d'una sèrie especial que em va comunicar el Cel. Goldbach i que, amb permís del Mestre Celebrat, presento aquí en primer lloc junt amb la seva sorprenent suma:

1 Teorema *Considereu la sèrie següent, continuada de manera indefinida,*

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+\cdots \tag{1}$$

els denominadors de la qual, incrementats en una unitat, són tots els nombres que siguin potències d'enters, ja siguin quadrats o qualsevol altre grau superior. Així, cada terme es pot expressar per la fórmula $\frac{1}{m^n-1}$*, on* m *i* n *són enters més grans que u. La suma d'aquesta sèrie és 1.*

La demostració que Goldbach i Euler presenten és la següent [6, p. 217–218]:

Sigui

$$x = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots .$$

Com que tenim

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots ,$$

restant aquesta última sèrie de la primera en resultarà

$$x-1 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots ;$$

d'aquesta manera, totes les potències de dos, incloent-hi dos, desapareixen dels denominadors tot deixant els altres nombres.

De la mateixa manera, si d'aquesta sèrie restem aquesta

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\cdots$$

en resultarà

$$x-1-\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots ;$$

i restant-hi novament

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots$$

esdevé

$$x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \cdots .$$

Si procedim de la mateixa manera, esborrant tots els termes que manquen, obtenim finalment

$$x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} - \cdots = 1$$

o bé

$$x - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots$$

els denominadors de la qual, incrementats amb una unitat, són tots els nombres que no són potències. En conseqüència, si restem aquesta sèrie de la que hem considerat al principi

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots ;$$

obtenim

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots ,$$

sèrie els denominadors de la qual, incrementats amb una unitat, són totes les potències dels enters i que té per suma u.

A la demostració que acabem d'oferir hi ha dues qüestions remarcables:

a) l'assignació d'un valor x a $\sum 1/n$;

b) el procediment que consisteix a obtenir una nova sèrie (i, conseqüentment, nous resultats) mitjançant addició i substracció de sèries conegudes i la substitució en una sèrie de determinades expressions per sèries conegudes.

Què és exactament allò que un matemàtic modern trobaria «incorrecte» o «no rigorós» a la demostració que acabem de veure?

Clarament seria el punt *a*), és a dir, el fet que Goldbach i Euler tracten la sèrie harmònica $\sum 1/n$ com si hi tingués assignat un valor real. Si deixem de banda aquesta dificultat, el punt *b*) es pot justificar pel teorema de reordenació de sèries: la suma i resta de sèries amb termes positius és un procediment habitual quan les sèries involucrades són convergents.

Com veurem després, Euler era molt conscient del problema *a*). Atès que la sèrie harmònica és divergent, assignar un valor a la seva suma és tan absurd com pretendre que $x := 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ sigui una quantitat determinada. La motivació real per acceptar l'argument ha d'haver estat el fet que el procediment emprat portava a resultats que eren correctes en el sentit que es podien verificar per mitjans més fiables. Un exemple notable d'això que diem és la deducció per part de Johann Bernoulli de la suma de la sèrie telescòpica (2).

Començant amb

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

i restant-li

$$H - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots ,$$

Johann Bernoulli obtingué

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots ,$$

que constitueix la sèrie telescòpica:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1. \tag{2}$$

En conseqüència, aquest procediment sembla funcionar prou bé i produeix resultats «vàlids». Malauradament, hi ha un contratemps: *en alguns casos, una manipulació similar porta a una contradicció.* Aquest és el cas de la demostració de Jakob Bernoulli de la divergència de la sèrie harmònica. El 1689, esperonat per l'argument del seu germà, Jakob li dóna la volta i en dedueix la contradicció $H = H - 1$, que demostra que H no pot ser una quantitat finita (vegeu [20, p. 316–323] o, per a una exposició més detallada, [2]).

Veiem doncs com, amb manipulacions semblants a les que es fan a la demostració del teorema de Goldbach-Euler, arribem a una contradicció. Això està causat, de manera força òbvia, per l'ús poc curós de les sèries divergents.

Bastant més tard, el 1826, Abel es va fer ressò d'aquest sentiment i va dir, en una carta de gener d'aquell any a Holmböe [9, p. 16]:

> Les sèries divergents són *in toto* una invenció del Dimoni i és una desgràcia que ningú s'arrisqui a fundar-hi la més mínima demostració. [...] Si hom fa excepció dels casos de més extrema senzillesa —per exemple, les sèries geomètriques— no hi ha gairebé en totes les matemàtiques una sola sèrie infinita la suma de la qual es pugui determinar de manera rigorosa. [...] Moltes de les coses són exactes, és veritat, i això és extraordinàriament sorprenent.

Euler sabia de la divergència de la sèrie harmònica. Ho havia reconegut diverses vegades en el «Variae observationes». El 1734 fins i tot va escriure un article sobre aquesta sèrie, en el qual, entre d'altres resultats, obtingué [5]:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma, \tag{3}$$

on γ és la constant gamma d'Euler (de fet, (3) pot ser considerada una definició de γ). Més endavant, en el seu *Introductio in analysin infinitorum* (1748), proporcionà un argument completament diferent per a la divergència de $\sum 1/n$ basat en el desenvolupament de $\log(1 - x)^{-1}$ (vegeu [3, p. 29–31]).

Per tant, Euler era plenament conscient de la fragilitat del mètode que dedueix nous resultats a partir de sèries divergents. Per què, doncs, va acceptar la demostració de Goldbach del teorema de Goldbach-Euler sense manifestar cap escrúpol o objecció a la seva validesa? És que no s'adonava de la diferència entre una sèrie divergent i una de convergent o senzillament no li importava?

No és el cas. Tal com Laugwitz assenyala, Euler coneixia la diferència perfectament [11, p. 14], [12]. En el seu article esmentat abans, dedicat a les diferents sèries harmòniques (sèries de terme general $c/(a+nb)$ per $n = 1, 2, \ldots$), i just abans de deduir (3), Euler havia escrit [5, p. 88]:

> Encara que els termes d'aquestes sèries siguin constantment decreixents, si es prolonguen indefinidament, la suma de la sèrie és sempre infinit. Per tal de demostrar això, no ens cal trobar cap mètode per a sumar aquestes sèries sinó que la veritat sortirà fàcilment del principi següent. *Les sèries que prolongades indefinidament tenen una suma finita no incrementen aquesta suma ni tan sols quan es continuen fins al doble dels seus termes.* La quantitat que s'*incrementa afegint una infinitat de termes* de fet es manté infinitament petita. Si això no fos així, la suma de la sèrie no estaria determinada i, en conseqüència, no seria finita. Com a resultat d'això es dedueix que si allò que queda quan els termes es prolonguen més enllà del lloc on comencen a esdevenir infinitesimals fos una magnitud finita, la suma de la sèrie seria necessàriament infinita. Per aquest principi, doncs, podem jutjar si una sèrie proposada té una suma infinita o finita [traducció i cursiva dels autors].

Aquestes paraules mostren de manera inequívoca que Euler donava crèdit a la consideració de diferents nombres infinitament grans i infinitament petits. També insinuen que podia ser, si volia, molt més explícit i precís d'allò que habitualment era en els temes de convergència. De fet, el fragment en cursiva es pot considerar com un criteri de convergència de sèries (de termes positius).

L'acceptació de la demostració de Goldbach sembla, doncs, raure en el fet que, a l'època, Euler (i molts dels seus contemporanis) tenien un model de nombre real que incloïa nombres infinitament grans i infinitament petits. Molt més tard, Bolzano [11, p. 19–21] intentaria fonamentar aquest model sobre unes bases sòlides. Avui s'anomena *el model no estàndard* dels nombres reals, nom que va encunyar Robinson els anys seixanta del segle XX [18].

3 Unes pinzellades d'anàlisi no estàndard

Per a una introducció curta, però penetrant, de l'anàlisi no estàndard de Robinson recomanem l'excel·lent article de Lightstone aparegut al *Monthly* [13]. Aquí només podrem exposar algunes de les idees més intuïtives sobre el tema.

La noció fonamental de l'anàlisi no estàndard és l'acceptació de l'existència d'un enter positiu infinitament gran, diguem-ne Ω. Amb la seva adjunció obtindrem un sistema numèric ampliat molt semblant a la manera com l'adjunció de $i = \sqrt{-1}$ a $\mathbb{Z}$ porta als enters gaussians o l'adjunció als nombres reals produeix els nombres complexos. En el cas de l'anàlisi no estàndard, però, a banda de l'adjunció de Ω, hem de postular un seguit de relacions

$$0 < \Omega, \quad 1 < \Omega, \quad 2 < \Omega, \quad 3 < \Omega, \quad 4 < \Omega, \ldots$$

en comptes de l'única relació $i = \sqrt{-1}$, i hem de fer la suposició —del tot fonamental— que les lleis de l'aritmètica encara són vàlides.

Això porta immediatament a l'existència d'una miríada de nous enters tals com $-\Omega, \Omega - 1, \Omega + 1, \Omega^2, \Omega^\Omega$, etc. I com que, de fet, l'ordre natural s'ha de mantenir, obtenim una cosa semblant a

$$1, 2, 3, \ldots; \ldots, \Omega - 1, \Omega, \Omega + 1, \ldots, 2\Omega, \ldots, \Omega^2, \ldots. \tag{4}$$

Noteu l'ús del punt i coma per a separar els nombres naturals estàndards dels no estàndards. Si pensem en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, llavors obtenim $\mathbb{Z}(\Omega) \subset \mathbb{Q}(\Omega) \subset \mathbb{R}(\Omega)$, i, al final, acabem tenint els nombres reals no estàndards.

En cada cas, el principi que ens ha de guiar en la construcció del model no estàndard dels nombres reals és el principi de la permanència de les lleis de l'aritmètica, que es remunta a Leibniz. En l'argot de l'anàlisi no estàndard, això es coneix com *el principi de transferència*, i en la nostra descripció intuïtiva —o si voleu, naïf—, es pot enunciar més o menys així: *allò que és veritat per als nombres finits (és a dir, per als nombres reals) ho és també per als nombres infinits*.

L'existència de nombres infinitament grans, ω, i el nostre compromís de mantenir vàlides les operacions usuals de l'aritmètica, impliquen l'existència de nombres $\epsilon = 1/\omega$ que satisfan $\epsilon < 1/n$ per a tots els enters positius n. Aquests nous nombres, més petits que qualsevol nombre positiu, s'anomenen *infinitesimals*. L'existència d'infinitesimals implica que cada nombre real a (i ara entren al reialme dels nombres reals) té un seguici de nombres no estandàrds infinitament propers, a saber $\{a \pm \epsilon : \epsilon \text{ infinitesimal}\}$.

Òbviament, hi pot haver algunes diferències evidents entre els nombres estàndards i no estàndards. Per exemple, entre dos nombres naturals estàndards només hi ha un nombre finit d'altres nombres naturals; en canvi, com es pot veure a (4) amb Ω i 2Ω, entre dos nombres naturals no estàndards hi ha una infinitat d'altres nombres naturals no estàndards.

A $\mathbb{Q}(\Omega)$ o a $\mathbb{R}(\Omega)$ les expressions que admeten una forma algebraica tancada (per exemple, $\sqrt{\Omega}$, $\sqrt[\Omega]{\Omega}$) estan ben definides, però quan tractem amb sèries infinites ens cal donar un significat consistent a una suma que abasta un nombre infinit de sumands. Això només es pot entendre completament després d'una construcció efectiva del model no estàndard dels nombres reals que, per raons òbvies, no podem dur a terme. El lector interessat en la construcció i el concepte de límit en l'anàlisi no estàndard pot consultar l'excel·lent article [14, p. 57–66]. Nogensmenys, el punt essencial és que ara les sumes amb una infinitat de sumands es poden considerar com si fossin sumes «ordinàries».

On abans escrivíem $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ per a denotar el límit —en cas d'existir— de les sumes parcials, ara escrivim $\sum_{k=1}^{\omega} a_k$, on ω és *qualsevol* enter positiu infinitament gran (el significat de a_k quan k és un enter infinit hauria de ser clar si tenim una forma tancada per a_k).

El quid de la qüestió és que ara hem de parlar de diferents *sumes* si es fan servir diferents valors de ω. Si la sèrie $\sum_k a_k$ és convergent en el sentit estàndard, es dedueix del criteri d'Euler (vegeu més endavant) que dues sumes que s'estenen a diferents índexs infinitament grans no són iguals (=) sinó només infinitament properes ($\approx$). Per exemple, si ω_1 i ω_2 són enters positius infinits,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{\omega_1}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{\omega_2}} \approx 2.$$

Si la sèrie és divergent, aquesta diferència ha de ser finita —o fins i tot infinita— depenent dels índexs considerats. Per exemple, si ω és un enter positiu infinit qualsevol, la igualtat

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \omega = \frac{\omega(\omega + 1)}{2}$$

és una identitat vertadera encara que, naturalment, cada membre sigui un nombre infinitament gran.

Amb aquestes idees en ment, el criteri d'Euler per a la convergència que havíem destacat en cursiva a la citació de la secció 2 es pot tornar a escriure així:

Observació (Criteri de convergència d'Euler) La sèrie de terme general a_k, on $a_k \geq 0$, és convergent (té suma finita) si i només si $\sum_{k=\omega}^{2\omega} a_k$ és un infinitesimal per a qualsevol valor infinitament gran d'ω.

Laugwitz reescriu el criteri d'Euler com [11, p. 14]:

> Una sèrie (de nombres reals) té una suma finita (és a dir, real) si i només si els valors de la suma entre nombres infinitament grans és infinitesimal.

Arriba fins i tot a interpretar les paraules d'Euler a com equivalents al criteri de convergència de Cauchy de 1821. Després de la construcció explícita del model no estàndard dels nombres reals, aquests criteris són proposicions demostrables.

Nota Amb la formulació més general de Laugwitz, si considerem la suma $\sum_{k=\omega_1}^{\omega_2} a_k$ per a qualsevol dos nombres infinitament grans ω_1 i ω_2 en comptes de $\sum_{k=\omega}^{2\omega} a_k$, el criteri d'Euler es manté vàlid per a sèries amb termes arbitraris.

L'aplicació del criteri d'Euler a la sèrie harmònica,

$$\sum_{k=\Omega+1}^{2\Omega} \frac{1}{k} = \frac{1}{\Omega + 1} + \frac{1}{\Omega + 2} + \cdots + \frac{1}{2\Omega} > \frac{\Omega}{2\Omega} = \frac{1}{2},$$

en demostra immediatament la divergència. De fet, es pot anar fàcilment una mica més lluny i veure que

$$\sum_{k=\Omega+1}^{2\Omega} \frac{1}{k} \approx \log 2.$$

En efecte, si definim el n-èsim nombre harmònic com

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \tag{5}$$

la versió no estàndard de (3) és

$$H_\Omega \approx \log \Omega + \gamma, \tag{6}$$

(Euler escriu =) i ens porta a

$$\sum_{k=\Omega+1}^{2\Omega} \frac{1}{k} \approx \sum_{k=1}^{2\Omega} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\Omega} \frac{1}{k} \approx \log 2\Omega - \log \Omega \approx \log 2.$$

Totes aquestes consideracions són el resultat del punt de vista modern i rigorós que ens proporciona l'anàlisi no estàndard, però hem d'admetre que sintonitzen bé amb els punts de vista d'Euler!

Malauradament, en aquest article no podem entretenir-nos més amb l'anàlisi no estàndard. Nogensmenys, esperem que les poques pinzellades del tema que hem ofert estimulin l'interès del lector per a aprofundir més en els seus mètodes, tot amb l'esperit de les paraules d'André Weil: [7, p. XII]:

> [E]ls nostres estudiants de matemàtiques aprofitarien molt més l'estudi de la *Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, que no pas dels llibres de text moderns al seu abast.

4 Una nova ullada a la demostració de Goldbach i Euler

El teorema de Goldbach-Euler apareix com el problema 132 a l'excel·lent llibre de Konrad Knopp [10, p. 273]. És aquí on els autors el vàrem trobar per primera vegada i el vàrem proposar en el Fòrum de resolució de problemes de la Societat Catalana de Matemàtiques.[3] Més endavant vàrem descobrir que la demostració que havíem trobat, senzilla i molt elegant, ja existia (com gairebé tot en matemàtiques!). Havia aparegut en el *Monthly* [17, p. 402–403]. La reproduïm aquí per completesa.

Solució del teorema de Goldbach-Euler trobada pel University of South Alabama Problem Group. Sigui S el conjunt dels enters positius que són potències, i sigui T el seu complementari, és a dir, les no-potències. Llavors,

$$\begin{aligned} \sum_{s\in S}(s-1)^{-1} &= \sum_{k\geq 2}\sum_{a\in T}(a^k-1)^{-1} = \sum_{k\geq 2}\sum_{a\in T}\sum_{i\geq 1} a^{-ik} \\ &= \sum_{n\geq 2}\sum_{k\geq 2} n^{-k} = \sum_{n\geq 2}(n(n-1))^{-1} = 1. \end{aligned}$$

3 Vegeu *Fòrum de problemes: Solucions als problemes proposats el curs 1993-1994*, Barcelona: Publicacions de l'IEC, 1996.

Aquesta demostració tan curta es basa en la ben coneguda identitat elemental

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)}, \tag{7}$$

a la qual ens referirem com a *identitat telescòpica*.

Els termes de la sèrie de Goldbach-Euler (1) són de la forma

$$\frac{1}{a^m - 1}. \tag{8}$$

La dificultat a obtenir la suma de la sèries rau en el fet que, tal com Euler comenta, no podem usar (8) com a terme general. Però, si a (8) apliquem la identitat telescòpica (7) amb $n = a^m$, tenim

$$\frac{1}{a^m - 1} = \frac{1}{a^m} + \frac{1}{a^m(a^m - 1)}. \tag{9}$$

D'aquesta manera, (8) es descompon en dos sumands de *formes* diferents: $1/n$ i $1/[n(n-1)]$.

Per tal d'obtenir la nostra suma, permetem a recórrer tots els enters que són no-potències i fem $m \geq 2$:

$$\sum_a \sum_{m\geq 2} \frac{1}{a^m - 1} = \sum_a \sum_{m\geq 2} \frac{1}{a^m} + \sum_a \sum_{m\geq 2} \frac{1}{a^m(a^m - 1)}. \tag{10}$$

Per a un a fixat, la suma interior del primer sumand de (10) dóna peu a una sèrie geomètrica:

$$\sum_{m\geq 2} \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a(a-1)}. \tag{11}$$

Després d'això, de manera gairebé sobtada, els dos sumands de (10) adopten la mateixa forma. Un és

$$\sum_a \frac{1}{a(a-1)},$$

on a recorre els enters que són no-potències, i l'altre és

$$\sum_a \sum_{m\geq 2} \frac{1}{a^m(a^m - 1)} =: \sum_b \frac{1}{b(b-1)},$$

on b recorre els enters que són potències. Després d'aquestes transformacions elementals, la sèrie del teorema de Goldbach-Euler es pot expressar de la manera següent:

$$\sum_a \frac{1}{a(a-1)} + \sum_b \frac{1}{b(b-1)}. \tag{12}$$

Ara, atès que les a i les b ensems comprenen tots els enters més grans que 1 sense cap repetició, (12) es redueix a la sèrie telescòpica de Bernoulli (2), la suma de la qual sabem que és 1.

Per completar la demostració de manera rigorosa, el lector només ha de fer servir el teorema de reordenació de sèries convergents de termes positius i dos fets elementals prou coneguts:

a) la suma de la sèrie geomètrica (11), també feta servir per Goldbach i Euler a la seva demostració,

i

b) la suma de la sèrie telescòpica (2) en l'últim pas.

És molt interessant notar que aquests dos resultats es poden deduir iterant la identitat telescòpica (7) de dues maneres diferents que formen part completament de l'esperit de manipulació formal d'Euler. Aquest fet, a més de tenir un cert valor didàctic per si mateix, es farà servir més endavant.

En primer lloc, si a la identitat telescòpica substituïm $n-1$ per n tenim

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}$$

i, iterant, arribem a

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+m-1)(n+m)}+\frac{1}{n+m}$$

per a qualsevol enter positiu m. Podem llavors formular el lema següent:

2 Lema *Per a qualssevol enters positius,* n *i* k *amb* $2\le n<k$

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(k-1)\,k}+\frac{1}{k}\,.$$

En segon lloc, aplicant el mateix procediment, però ara iterant sobre $1/(n-1)$, arribem a

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2(n-1)},$$

que motiva aquest segon resultat notable:

3 Lema *Per a qualssevol enters positius,* n *i* k *amb* $n\ge 2$

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\frac{1}{n^k(n-1)}.$$

Finalment, estem en condicions de reconsiderar la demostració de Goldbach i Euler del seu teorema. Veurem com, gairebé amb el mateix redactat, la demostració es pot fer rigorosa, tant des del punt de vista estàndard com del no estàndard.

Com ja hem fet a (5), sigui $H_{\boldsymbol{n}}$ l'$\boldsymbol{n}$-èsim nombre harmònic, però ara pensem que $\boldsymbol{n}$ ja sigui com un natural finit o un natural infinit no estàndard.

Sigui k_2 l'enter que és definit per $2^{k_2}\le\boldsymbol{n}<2^{k_2+1}$. L'existència i la unicitat de k_2 és clara, ja sigui pensant en $\boldsymbol{n}$ com un nombre natural finit o com un nombre natural no estàndard: recordeu el principi de transferència! Utilitzant el lema 3, podem escriure

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{k_2}} + \frac{1}{2^{k_2} \cdot 1},$$

i restant aquesta sèrie de (5), obtenim

$$H_{\boldsymbol{n}} - 1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{1}{2^{k_2} \cdot 1}\right). \tag{13}$$

Així doncs, totes les potències de dos, incloent-hi el dos, desapareixen dels denominadors tot deixant la resta dels enters fins a $\boldsymbol{n}$.

Si de (13) restem

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{k_3}} + \frac{1}{3^{k_3} \cdot 2},$$

obtinguda novament del lema 3 amb k_3 definit per $3^{k_3} \leq \boldsymbol{n} < 3^{k_3+1}$, el resultat serà

$$H_{\boldsymbol{n}} - 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{1}{2^{k_2} \cdot 1} + \frac{1}{3^{k_3} \cdot 2}\right).$$

Procedint de manera similar, acabem per esborrar tots els termes que queden i, finalment, ens trobem amb

$$\begin{aligned} H_{\boldsymbol{n}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{10} - \cdots - \frac{1}{\boldsymbol{n}} \\ = 1 - \left(\frac{1}{2^{k_2} \cdot 1} + \frac{1}{3^{k_3} \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n} - 1)}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

(Noteu que $k_2 \geq k_3 \geq \cdots$. De fet, quan $m > \sqrt{\boldsymbol{n}}$ obtenim $k_m = 1$.) Aquesta última expressió s'ha obtingut suposant que $\boldsymbol{n}$ és una no-potència. Si $\boldsymbol{n}$ és una potència, llavors $1/\boldsymbol{n}$ desapareixerà en algun moment del procés i la darrera fracció que s'ha de treure de (13) serà $1/(\boldsymbol{n} - 1)$, una no-potència llevat que $\boldsymbol{n} = 9$. (Aquesta és la conjectura de Catalan que el 8 i el 9 són les úniques potències consecutives que existeixen. La conjectura ha estat demostrada recentment per Mihăilescu [15, 16]. En realitat, però, tant se val si hi ha més potències consecutives o no.) L'expressió corresponent seria, doncs,

$$\begin{aligned} H_{\boldsymbol{n}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{10} - \cdots - \frac{1}{\boldsymbol{n} - 1} \\ = 1 - \left(\frac{1}{2^{k_2} \cdot 1} + \frac{1}{3^{k_3} \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(\boldsymbol{n} - 1) \cdot (\boldsymbol{n} - 2)}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

En conseqüència, si restem (14) de (5) obtenim

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2^{k_2} \cdot 1} + \frac{1}{3^{k_3} \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n} - 1)}\right) \\ = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n} - 1} \end{aligned}$$

o, de la mateixa manera, restant (15) de (5),

$$1 - \left(\frac{1}{2^{k_2}\cdot 1} + \frac{1}{3^{k_3}\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)}\right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}},$$

sumatoris que contenen en els seus denominadors, augmentats en una unitat, totes les potències dels enters fins a $\boldsymbol{n}$. Ara ens hem de preocupar del *residu*, és a dir, de l'expressió de més amunt entre parèntesis o bé del membre dret de (14) (respectivament (15)).

Atès que per a cada $m(\geq 1)$ sabem, per la definició de k_m, que $\boldsymbol{n} < m^{k_m+1} \leq m^{2k_m}$, se'n dedueix que $\sqrt{\boldsymbol{n}} < m^{k_m}$ i

$$\frac{1}{m^{k_m}\cdot(m-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\cdot\frac{1}{m-1}.$$

Això implica que

$$\frac{1}{2^{k_2}\cdot 1} + \frac{1}{3^{k_3}\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}-1)} \leq \frac{H_{\boldsymbol{n}-1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}},$$

o bé, si $\boldsymbol{n}$ és una potència,

$$\frac{1}{2^{k_2}\cdot 1} + \frac{1}{3^{k_3}\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(\boldsymbol{n}-1)\cdot(\boldsymbol{n}-2)} \leq \frac{H_{\boldsymbol{n}-2}}{\sqrt{\boldsymbol{n}-1}}.$$

Si hem escollit considerar $\boldsymbol{n}$ com un enter finit, diguem-ne $\boldsymbol{n} = n$, llavors podem passar al límit i fer servir el valor asimptòtic d'Euler (3) per a H_n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_{n-1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n-1)+\gamma}{\sqrt{n}} = 0.$$

La demostració *estàndard* està, doncs, acabada.

Però si estem disposats a creure en els enters infinits i en els infinitesimals, no ens cal passar al límit. Fem servir novament (3) però ara com una igualtat no estàndard:

$$\frac{H_{\boldsymbol{n}-1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \approx \frac{\log(\boldsymbol{n}-1)+\gamma}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \approx 0,$$

que produeix

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{n}-1} \approx 1.$$

En aquest cas allò que realment obtenim és un nombre no estàndard diferent infinitesimalment pròxim a 1 per a cada $\boldsymbol{n}$ infinit que considerem.

5 A tall de conclusions

Malauradament, no totes les maniobres d'Euler amb nombres infinits i infinitesimals s'adoben tan fàcilment. Aquest és el cas de molts dels resultats de la segona part de les «Variae observationes» (per a totes les referències a les «Variae», vegeu [6]). Aquesta part tracta, principalment, de la fórmula d'Euler del producte per a la funció zeta de Riemann, que apareix al teorema 8 [6, p. 230]:

$$\prod_{p \text{ primer}} \frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots = \zeta(s) \tag{16}$$

si $s > 1$. Euler només tracta el cas en què s és un enter positiu.

La demostració de (16) segueix les mateixes línies que la demostració del cas especial $s = 1$ —que és on rauen els veritables problemes— i constitueix el teorema 7 [6, p. 227]:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = \prod_{p \text{ primer}} \frac{1}{1-p^{-1}}\,. \tag{17}$$

Euler aclareix el significat de (17) fent notar que els dos membres valen infinit. En aquest cas particular, seguir la pista dels residus és molt més complicat (si és que és possible). Aquesta podria ser la raó per la qual Euler és tan ambigu a la primera part de l'article, quan podria haver estat molt més rigorós. Procedeix de la manera següent: a partir de

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

obté

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\,,$$

que, per substracció proporciona

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots\,,$$

una sèrie sense denominadors parells. Multiplicant-la per $1/3$ i restant-ne després el resultat anterior, obté

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots\,,$$

i així fins que tots els termes del membre dret han quedat esborrats. Euler conclou que

$$x \cdot \prod_{p \text{ primer}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1,$$

equació que proporciona (17).

Si ara considerem (6), el corol·lari 1 al teorema 7 estableix el *grau* d'infinitud de la sèrie harmònica [6, p. 229]:

> [S]i denotem l'infinit absolut com a ∞, llavors el valor de l'expressió [$\prod_p \frac{1}{1-p^{-1}}$] és $\log\infty$, que és el mínim entre totes les potències de l'infinit.

Per últim, si traiem logaritmes a (17), Euler dedueix el teorema 19, amb el qual tanca les «Variae»: la divergència de la sèrie els termes de la qual són els recíprocs dels primers [6, p. 242]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots \\ = \log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right) = \log\log\infty. \qquad (18)\end{aligned}$$

Cal remarcar la gran despreocupació d'Euler amb els diferents significats que atribueix al signe d'igualtat. Tal com estan, (17) i (18) són inacceptables. Per a fer-les correctes és necessari substituir les sèries infinites per les corresponents sumes parcials n-èsimes i substituir cada signe d'igualtat amb $\sim$, cal tenir en compte el significat habitual d'aquest símbol, que és que el quocient dels dos membres tendeix a 1 quan n tendeix a infinit. De fet, la forma forta d'aquests dos teoremes és de l'any 1874 i es deu a Mertens (vegeu [4, p. 6, nota al peu]). Es poden enunciar com segueix (amb p primer i ω qualsevol enter infinitament gran):

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{p\le n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot H_n = e^{-\gamma},$$

o bé

$$\prod_{p\le\omega}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot H_\omega \approx e^{-\gamma}$$

i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p\le n}\frac{1}{p}-\log H_n\right) = \gamma + B,$$

o bé

$$\sum_{p\le\omega}\frac{1}{p} \approx \log H_\omega + \gamma + B,$$

on $B = \sum_p \left(\log(1-p^{-1}) + p^{-1}\right)$.

Com a comentari final volem afegir que, de vegades, la despreocupació d'Euler anava massa lluny. Un exemple notable és el teorema 18 [6, p. 241], on diu que ha demostrat que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)/n = 0$. Aquí λ és la funció de Liouville ($\lambda(n) = (-1)^{r(n)}$, en la qual $r(n)$ és el nombre de divisors primers de n comptats amb la seva multiplicitat). Aquest resultat és correcte però és tan profund (i tan difícil de demostrar) com el *Teorema dels nombres primers*![4]

4 Aquest teorema, més conegut pel seu nom en anglès (The prime number theorem), dóna la llei asimptòtica de la funció $\pi(x)$ que compta el nombre de nombres primers més petits que un nombre real x donat: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$.

Agraïments. Estem molt agraïts al nostre col·lega Àngel Gil de la Universitat Pompeu Fabra, per la seva curosa lectura del manuscrit i els seus valuosos comentaris. També agraïm a Isabel Tornero la seva ajuda en corregir el nostre anglès.[5]

Referències

[1] BURDICK, B.; SANDIFER, E. *Fooling with an Euler Series*, 2000; disponible a http://www.southernct.edu/~sandifer/Ed/History/Preprints/Talks/E72/Eulerser.htm.

[2] DUNHAM, W. «The Bernoullis and the harmonic series». *College Math. J.*, 18 (1987), 18–23.

[3] DUNHAM, W. *Euler: The Master of Us All*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1999.

[4] EDWARDS, H. M. *Riemann's Zeta Function*. Boston: Academic Press, 1974.

[5] EULER, L. «De progressionibus harmonicis observationes». A: *Opera Omnia*. Ser. I, vol. 14. Leipzig: Teubner, 1925, 87–100.

[6] EULER, L. «Variae observationes circa series infinitas». A: *Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes. Opera Omnia*. Ser. I, vol. 14. Leipzig: Teubner, 1925, 216–244. L'article original és a *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 9 (1744), 160–188.

[7] EULER, L. *An Introduction to the Analysis of the Infinite*. Vol. 1. Nova York: Springer, 1988. [Traducció de J. D. Blanton]

[8] EULER, L. «Several remarks on infinite series». Traducció de P. VIADER ALEMANY; P. VIADER CANALS; L. BIBILONI, 2000. Disponible a http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E072.html

[9] HOLST, E.; STØRMER, C.; SYLOW, L. [ed.]. *Niels Henrik Abel: Mémorial publié a l'occasion du centenaire de sa naissance*. París: Kristiania, Jacob Dybwad, 1902.

[10] KNOPP, K. *Theory and Application of Infinite Series*. Nova York: Dover, 1990. Reimpressió de la traducció original anglesa, Londres: Blackie, 1951.

[11] LAUGWITZ, D. *Theory of Infinitesimals. An Introduction to Nonstandard Analysis*. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

[12] LAUGWITZ, D. «On the historical development of infinitesimal mathematics Part I». *Amer. Math. Monthly*, 104 (1997), 447–455.

[13] LIGHTSTONE, A. H. «Infinitesimals». *Amer. Math. Monthly*, 79 (1972), 242–251.

[14] LUXEMBURG, W. A. J. «What is nonstandard analysis?». *Amer. Math. Monthly*, 80 (1973), 38–67.

5 També agraïm a l'editor en cap del *Monthly* l'any 2006, Bruce Palka, per les seves múltiples revisions del manuscrit.

[15] METSÄNKYLÄ, T. «Catalan's conjecture: Another old Diophantine problem solved». *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, 41 (2004), 43–57. [Versió electrònica]

[16] MIHĂILESCU, P. «Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture». *J. Reine Angew. Math.*, 572 (2004), 167–195.

[17] UNIVERSITY OF SOUTH ALABAMA PROBLEM GROUP; MELZAK, Z. A. «Solution of problem E2999». *Amer. Math. Monthly*, 93 (1986), 402–403.

[18] ROBINSON, A. *Non-Standard Analysis*. Amsterdam: North Holland, 1966.

[19] SHALLIT, J. D.; ZIKAN, K. «Problem E2999». *Amer. Math. Monthly*, 90 (1983), 334–335.

[20] STRUIK, D. J. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton: Princeton University Press, 1986.

LLUÍS BIBILONI
FACULTAT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA, BARCELONA
lluis.bibiloni@uab.es

PELEGRÍ VIADER, JAUME PARADÍS
DEPARTAMENT D'ECONOMIA I EMPRESA
UNIVERSITAT POMPEU FABRA
RAMON TRIAS FARGAS, 25-27
08005 BARCELONA
pelegri.viader@upf.edu
jaume.paradis@upf.edu