Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 22, núm. 2, 2007. Pàg. 153–164. DOI: 10.2436/20.2002.01.7

Carleson, Premi Abel 2006

Resum En aquesta nota presentem tres dels treballs més rellevants de Lennart Carleson amb motiu del Premi Abel que va rebre el 2006, que van ser destacats pel comitè.

Paraules clau: sèries de Fourier, teorema de la corona, atractors estranys.

Classificació MSC2000: 01A70, 30-03, 37-03, 42-03.

1 Carleson el mataproblemes

Lennart Carleson ha estat guardonat amb el Premi Abel per les seves contribucions en diverses branques de les matemàtiques sobretot en anàlisi i sistemes dinàmics. Carleson s'entronca en una fortíssima tradició matemàtica nòrdica. La seva tesi va ser dirigida per Arne Beurling el 1950.

Un dels trets més destacats de Carleson, i així ha estat mencionat pel comitè que atorga el Premi Abel, és la de «solucionador de problemes». En el transcurs de les demostracions de grans problemes en matemàtiques ha desenvolupat noves tècniques que formen part essencial i diària de la caixa d'eines dels matemàtics en els darrers quaranta anys. En particular a Catalunya la seva obra ha estat font d'inspiració de bona part de la recerca en anàlisi que s'ha produït en les últimes dècades.

Abordarem el treball de Carleson a partir de tres dels problemes que va resoldre. El primer, i segurament el més famós dels treballs de Carleson, versa sobre la convergència puntual de les sèries de Fourier i hi va resoldre la conjectura de Luzin. El segon és sobre l'estructura de l'àlgebra de les funcions holomorfes i acotades, i hi va resoldre el problema de la corona, i finalment el tercer que destacarem és un treball conjunt amb Benedicks sobre l'atractor d'Hénon.

Hem triat aquests tres treballs perquè són segurament els que han tingut una influència més gran sobre les matemàtiques actuals i són una pedra de toc sobre la qual molts altres han bastit un gran treball. Aquesta és una característica molt carlesoniana: aborda un problema conegut de fama intractable, introdueix noves eines i demostracions de gran complexitat i trenca el problema. Finalment, abandona el tema mentre que molts altres matemàtics recullen els fruits que produeixen les branques laterals que la descoberta de Carleson ha permès detectar.

2 La conjectura de Luzin

Fourier, el 1802, al seu treball «Théorie Analytique de la Chaleur», va afirmar que tota funció periòdica es pot posar com a combinació d'exponencials, *i. e.*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{|k|<n} \hat{f}(k)e^{ikt} = f(t), \tag{1}$$

on

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

A continuació va utilitzar aquesta representació de les funcions periòdiques per a resoldre l'equació de la calor en una barra i d'altres equacions en derivades parcials provinents de problemes físics. La representació d'una funció com a combinació lineal d'exponencials és molt natural si es treballa amb operadors lineals que commuten amb els desplaçaments en la variable temporal, ja que aquests operadors diagonalitzen en una base d'exponencials. És molt més convenient que d'altres representacions de les funcions com a fraccions contínues o polinomis si es vol estudiar operadors diferencials a coeficients constants, per exemple.

Lagrange i Legendre van ser molt escèptics en la manera que Fourier va abordar aquest problema i van dubtar de la validesa de la descomposició. Tota una sèrie de treballs es van desenvolupar per mirar d'esbrinar per a quines funcions hi havia convergència puntual de la sèrie de Fourier a la funció original. En els punts on la funció és regular la convergència puntual és garantida. Però Du Bois-Reymond el 1876, va trobar una funció contínua en què la sèrie divergia en un punt.

En aquell moment l'opinió majoritària va ser que aviat es trobaria un contraexemple d'una funció contínua amb sèrie de Fourier divergent en tot punt. Luzin tenia una opinió diferent i va conjecturar, el 1913, que si una funció tenia quadrat integrable, la seva sèrie de Fourier convergia a la funció en gairebé tot punt. Aquesta conjectura va semblar poc versemblant vistos els resultats de Kolmogorov el 1926, que va trobar una funció integrable amb sèrie de Fourier divergent en tot punt. Va resultar un cop espectacular quan Carleson, el 1966, va presentar al Congrés Internacional de Matemàtics de Moscou una prova de la conjectura de Luzin. En paraules seves:

> [...] el problema se'm va presentar de manera natural quan jo era estudiant i hi vaig estar rumiant intermitentment, però la situació era molt més interessant que tot això. La gran autoritat en aquells dies era Zygmund, que estava

plenament convençut que no s'havia de donar una demostració sinó trobar un contraexemple. Quan jo era un estudiant jove als Estats Units, vaig trobar-me amb Zygmund i vaig tenir una idea de com produir unes funcions molt complicades per a un possible contraexemple i Zygmund em va animar molt a construir-lo. Vaig estar pensant durant quinze anys de manera intermitent com fer que aquest contraexemple funcionés i la cosa interessant que va succeir és que vaig entendre per què hi havia un contraexemple i com un l'havia de produir. Em pensava que realment entenia quin era el context i aleshores, per gran sorpresa meva, vaig poder demostrar que aquest contraexemple «correcte» no podia existir i de sobte em vaig adonar que el que s'havia de fer era tot just el contrari. S'havia d'intentar demostrar el que no estava de moda, és a dir, demostrar la convergència. La part més important de demostrar un problema matemàtic és la convicció de quin és el resultat correcte. Aleshores em va prendre dos o tres anys resoldre'l usant les tècniques que s'havien desenvolupat en els darrers vint anys.

El resultat de Carleson és, doncs,

1 Teorema (Carleson) *Si $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ és una funció de quadrat integrable, aleshores*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{|k|<n} \hat{f}(k) e^{ikt} = f(t),$$

gairebé per a tot t.

Donarem dos resultats posteriors sobre convergència de sèries de Fourier que complementen el resultat de Carleson i ens mostren per què és tan precís i subtil. El primer és de Kahane i Katznelson, i diu

2 Teorema *Donat un conjunt E de mesura zero a $[0, 2\pi]$ hi ha una funció contínua i 2π-periòdica tal que la seva sèrie de Fourier divergeix en E.*

El segon resultat, més subtil, és de Körner i diu que si sumem la sèrie de Fourier començant pels termes més rellevants (*i. e.* els de valor absolut més gran) podem perdre la convergència:

3 Teorema *Existeix una funció $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de quadrat integrable tal que*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \left| \sum_{|\hat{f}(k)|>\varepsilon} \hat{f}(k) e^{ikt} \right| = +\infty,$$

en gairebé tot punt $t \in [0, 2\pi]$

En aquesta àrea no està tot dit, ni molt menys. Actualment, hi ha tres demostracions diferents del teorema de Carleson: l'original de Carleson, [4], una de Fefferman, [5], i una de més recent de Lacey i Thiele, [9], amb tècniques essencialment diferents que van desenvolupar per estudiar la transformada de Hilbert bilineal, i que ha despertat de nou l'interès en variants d'aquest problema. Una bona exposició d'aquesta nova demostració i els problemes oberts lligats és l'article [10]. L'últim d'aquesta línia que mencionem és el de Muscalu, Tao i Thiele [14], on donen una prova unificada de les estimacions de la transformada de Hilbert bilineal de Lacey i Thiele i del teorema de Carleson.

No volem acabar sense mencionar un dels problemes oberts més notables en la convergència puntual de sèries de Fourier. És el mateix problema en vàries variables: si $f(x,y) : [0,2\pi]^2 \to \mathbb{R}$ és de quadrat integrable, què passa amb la corresponent sèrie de Fourier:

$$\lim_{R\to+\infty} \sum_{m^2+n^2<R} \hat{f}(m,n)e^{i(mx+ny)} \to f(x,y)?$$

3 El teorema de la corona

Una àrea on l'impacte de Carleson ha estat profund és en la teoria de funcions de variable complexa. Els seus resultats no només han resolt vells problemes sinó que han redefinit l'àrea al voltant. Bona part de la recerca actual en aquesta àrea no s'entén sense aquests.

Els resultats de Carleson en teoria de funcions es remunten a la seva tesi sobre conjunts excepcionals de classes de funcions, però els seus resultats més coneguts són al voltant de l'estructura de l'àlgebra de les funcions holomorfes i acotades al disc unitat $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$, que denotem $H^\infty(\mathbb{D})$. És una àlgebra uniforme de funcions amb la norma $\|f\| = \sup_{\mathbb{D}} |f(z)|$. Forma part del folklore matemàtic la dita que en aquesta àlgebra de funcions l'únic senzill és la definició. Un dels problemes que Carleson va resoldre és conegut popularment com a *conjectura de la corona*. La demostració original de Carleson, [3], no és senzilla. Com diu Peter Jones a [8]:

> La construcció de la corona és considerada un dels raonaments més difícils de la teoria de funcions moderna. Aquells que esmercen prou temps per aprendre-la són recompensats amb una de les eines més mal·leables existents. Alguns dels raonaments relatius a varietats hiperbòliques són fàcilment accessibles per a aquells que entenen bé la construcció de la corona.

El problema de la corona tracta sobre els ideals maximals de l'àlgebra. Alguns d'aquests ideals es poden identificar amb els punts del disc, de la manera següent: per a cada $z \in \mathbb{D}$, denotem per

$$I_z = \{f \in H^\infty(\mathbb{D}); f(z) = 0\}.$$

La conjectura de la corona és que aquests ideals maximals I_z són densos dins de l'espai de tots els ideals maximals. Al conjunt de possibles ideals que no són a l'adherència dels I_z amb $z \in \mathbb{D}$ s'anomena *corona*, per analogia visual amb la corona solar. De fet, doncs, la conjectura de la corona diu que $H^\infty(\mathbb{D})$ no té corona.

Aquest problema de caire abstracte sobre l'estructura de l'àlgebra té una reformulació molt concreta.

4 PROBLEMA Donades unes funcions $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ amb la propietat que

$$\inf_{z\in\mathbb{D}}(|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|) > 0, \tag{2}$$

existeixen funcions $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ tals que

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1?$$

Una resposta afirmativa és equivalent a que $H^\infty(\mathbb{D})$ no tingui corona.

Les funcions $|f_i|$ no poden ser simultàniament petites si volem que el problema tingui solució. El 1940 Kakutani va conjecturar que la condició (2) és suficient, i això és el que va demostrar Carleson el 1962.

Encara ara no se sap si el teorema de la corona és cert per a tot domini del pla. Se sap, en canvi, que el resultat és fals en algunes superfícies de Riemann (amb topologia no trivial) i en alguns dominis de $\mathbb{C}^2$. La mateixa conjectura de la corona en dominis molt simples en vàries variables com la bola unitat de $\mathbb{C}^n$ o en el polidisc $\mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ encara resta oberta i en els darrers vint anys s'han fet molts treballs amb resultats parcials en aquesta línia.

En el decurs de la demostració Carleson aborda d'altres problemes que han tingut tanta o més rellevància que el resultat final. Descriu, per exemple, les successions d'interpolació per a funcions holomorfes i acotades al disc. Una successió de punts $\Lambda \subset \mathbb{D}$ es diu *d'interpolació* per $H^\infty(\mathbb{D})$ si per a tots els possibles valors $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbb{C}$ acotats, i. e. $\sup_{\lambda\in\Lambda}|v_\lambda| < \infty$, existeix una funció $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $f(\lambda) = v_\lambda$.

De manera intuïtiva, en una successió d'interpolació els punts no poden estar molt pròxims, els valors v_λ en aquests punts són arbitraris i una funció holomorfa i acotada no pot oscil·lar molt (per les desigualtats de Cauchy) en punts propers. Cal recalcar que les restriccions que poden aparèixer provenen de tractar amb funcions holomorfes i *acotades*. Si traiem el requisit d'acotació els valors que una funció holomorfa pot prendre en una successió discreta són completament arbitraris.

El resultat de Carleson quantifica aquesta separació de manera «geomètrica»:

5 TEOREMA *Una successió $\Lambda \subset \mathbb{D}$ és d'interpolació per a funcions holomorfes i acotades si i només si es satisfan les dues propietats següents:*

- *La successió Λ és uniformement separada.*
- *La mesura $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda}(1-|\delta|)\delta_\lambda$ té una restricció de densitat en la frontera. Ara es coneix com a* mesura de Carleson*.*

La primera de les condicions és una condició de separació i vol dir que $\inf_{\lambda\neq\lambda'} d(\lambda, \lambda') > 0$ on $d(z, w)$ és la distància de z a w *en la mètrica hiperbòlica* del disc. Aquesta condició és molt natural, com havíem comentat, i fàcilment comprovable.

La segona condició és molt més subtil. D'alguna manera controla que els punts de la successió no s'acumulen en cap punt de la frontera de manera excessiva a cap escala. La definició precisa és la següent:

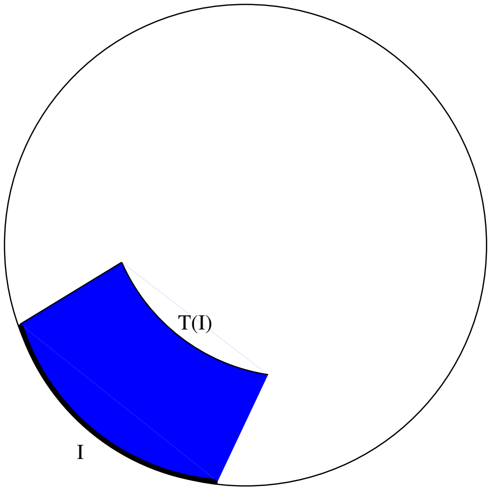

FIGURA 1: Una finestra de Carleson de base I.

6 DEFINICIÓ Una mesura μ és de Carleson si existeix una constant $C > 0$ tal que per a tot arc de la circumferència unitat $I \subset \partial\mathbb{D}$ es compleix que $\mu(T(I)) \leq C|I|$, on $|I|$ és la llargària de I i $T(I)$ és la «finestra» sobre I, *i. e.*, els punts del disc $z \neq 0$ tals que la seva projecció radial $z/|z| \in I$ i són a prop de I: $(1 - |z|) \leq |I|$, com en la figura 1.

Les mesures de Carleson han esdevingut un objecte que forma part natural del paisatge de la matemàtica actual. Una recerca superficial amb el MathSciNet dóna uns cinc-cents articles que tracten sobre aquestes mesures. Carleson les va identificar en aquest treball com les mesures que operen en $H^2(\mathbb{D})$, *i. e.* són les mesures μ tals que hi ha una constant $C > 0$ de manera que

$$\int_{\mathbb{D}} |p|^2 d\mu \leq C \int_{\partial\mathbb{D}} |p|^2$$

per a tot polinomi holomorf p. També són bàsicament els laplacians de les funcions subharmòniques i acotades, i tenen un paper fonamental en la identificació del dual de $H^1(\mathbb{D})$ entre molts d'altres problemes. És un objecte tan natural que estava condemnat a ser trobat, però va ser Carleson qui primer les va identificar i ens va mostrar un petit tresor.

4 L'atractor d'Hénon

Un dels fenòmens que ha captat més atenció en les últimes dècades en l'àrea de sistemes dinàmics és l'existència d'atractors estranys per a sistemes dissipatius. Aquest fenomen està relacionat amb problemes de turbulència. El 1963 E. N. Lorenz [11] va introduir un sistema de tres equacions diferencials de primer ordre depenent de paràmetres (ara anomenat *sistema de Lorenz*) que és un model simplificat d'un sistema hidrodinàmic dissipatiu forçat, usat en meteorologia per a la predicció del temps. El sistema de Lorenz té divergència negativa constant, fet que implica que qualsevol volum es contrau exponencialment amb el temps. A més, existeix una regió on tota trajectòria del sistema queda atrapada al cap d'un temps prou gran. Qualsevulla d'aquestes trajectòries tendeix a un únic conjunt de mesura zero que s'anomena *atractor*. Lorenz va observar que aquest atractor pot ésser un punt d'equilibri o una òrbita periòdica, depenent dels valors considerats dels paràmetres. Però en altres casos l'atractor té una estructura geomètrica molt complexa. És el que actualment s'anomena *atractor de Lorenz*, i és el primer exemple d'atractor estrany de la literatura. Dins d'aquests tipus d'atractors les trajectòries es mouen de manera aparentment desordenada. A més exhibeixen dependència sensible respecte de les condicions inicials: una petita variació en les condicions inicials d'una trajectòria pot fer canviar de manera dràstica la seva evolució futura. Aquesta és l'explicació de l'anomenat *efecte papallona*, tan popular en els últims anys.

D'altra banda, D. Ruelle i F. Takens [17] van proposar el 1971 que un mecanisme de generació de turbulència en el moviment d'un fluid viscós sotmès, per exemple, a un escalfament constant, pot ser l'aparició d'un atractor estrany, en el sentit que li hem donat abans.

Finalment, l'any 1976 M. Hénon va publicar un article, [6] en el qual es descrivia una aplicació en dimensió dos que aparentment tenia un atractor estrany que, segons paraules d'Hénon, era el més simple possible, però exhibia les mateixes propietats essencials del sistema de Lorenz. Més concretament, l'aplicació que actualment anomenem d'Hénon té la forma

$$T_{a,b} : (x, y) \mapsto (1 + y - ax^2, bx),$$

on a i b són paràmetres reals, i $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A més $\det DT(x, y) = -b$, per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la qual cosa implica que $T_{a,b}$ és un difeomorfisme dissipatiu si $|b| < 1$. Mitjançant simulació numèrica, Hénon va trobar un exemple d'atractor estrany per a aquesta aplicació, per valors dels paràmetres $b = 0,3$ i $a = 1,4$ (figura 2). Va observar que, com al cas de Lorenz, aquest atractor tenia una estructura geomètrica molt complexa: semblava localment el producte cartesià d'un conjunt de Cantor i un interval. A més, va conjecturar que, de fet, era l'adherència de la varietat invariant inestable d'un punt fix, com veurem posteriorment. Aquests valors dels paràmetres no són els únics pels quals sembla que hi ha atractor estrany. Per simulació numèrica directa es veu que n'hi ha molts d'altres pels quals també trobem atractors estranys.

Com hem observat, els resultats sobre existència d'atractors estranys es basaven principalment en resultats numèrics. Arran d'un article anterior de Newhouse, de 1974, [16] es va posar en dubte que els resultats d'Hénon fossin realment correctes. Efectivament, suposem que tenim un difeomorfisme en dimensió 2 que posseeix un punt periòdic dissipatiu de tipus sella, amb varietats invariants tangents en una òrbita (és a dir, que el difeomorfisme presenta una tangència homoclínica). Llavors existeixen difeomorfismes tan propers com es

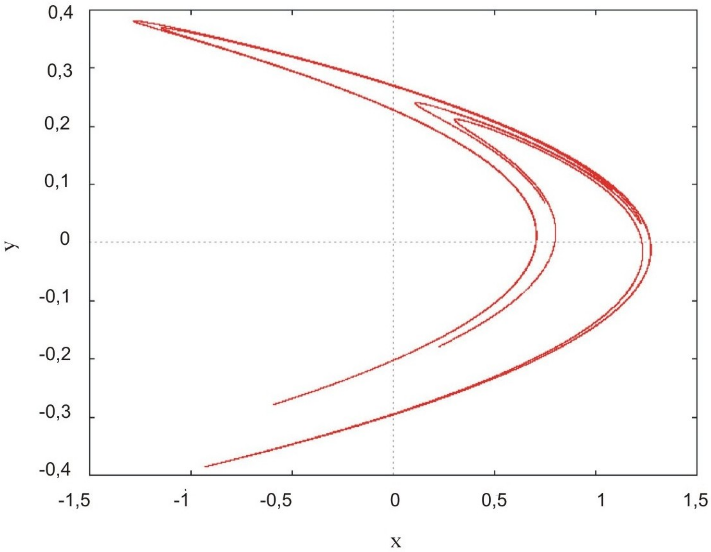

FIGURA 2: Atractor d'Hénon per a $b = 0,3$ i $a = 1,4$. La figura s'ha obtingut iterant 10^6 vegades el punt $(x, y) = (0, 0)$ i dibuixant els següents 10^5 punts.

vulgui al donat que tenen òrbites periòdiques atractores de períodes tan grans com vulguem. A més, poden coexistir un nombre infinit d'aquestes òrbites atractores per a un conjunt *gran* (en un sentit topològic) de difeomorfismes que són pertorbació del donat. Per tant, hom pot pensar que el *presumpte* atractor estrany d'Hénon no seria més que una òrbita periòdica atractora de període gran, que no es podia determinar pels inevitables errors d'arrodoniment causat per l'ús d'aritmètica de punt flotant amb un nombre finit de dígits.

L'objectiu de Benedicks i Carleson va ésser demostrar la veritable existència d'atractors estranys per l'aplicació d'Hénon, i que aquest no era un fenomen excepcional en el sentit de la mesura de Lebesgue. Més concretament, van demostrar el teorema següent [2], que confirmava les conjectures d'Hénon quan $b > 0$ és prou petit.

7 TEOREMA *Sigui*

$$W^u = W^u(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{n\to\infty} T_{a,b}^{-n}(x, y) = (x_0, y_0)\},$$

la varietat invariant inestable del punt fix (x_0, y_0) *de* $T_{a,b}$ *tal que* $x_0 > 0$ *i* $y_0 > 0$. *Aleshores, per a tot* $c < \log 2$ *existeix un* $b_0 > 0$, *tal que, per a tot* $b \in (0, b_0)$ *existeix un conjunt* $E(b) \subset \mathbb{R}$ *de mesura de Lebesgue positiva tal que per a tot* $a \in E(b)$:

1) *Existeix un conjunt obert* $U = U(a,b)$ *tal que per a tot* $z \in U$,

$$\mathrm{dist}(T^{\nu}_{a,b}(z), \overline{W^u}) \to 0 \qquad \textit{quan } \nu \to \infty.$$

2) *Existeix un punt* $z_0 = z_0(a,b) \in W^u$ *tal que*

   a) $\{T^{\nu}_{a,b}(z_0)\}_{\nu=0}^{\infty}$ *és dens en* W^u;

   b) $\|DT^{\nu}_{a,b}(z_0)(0,1)\| \geq e^{c\nu}$.

De manera més planera i, per tant, inacurada, podem dir que el teorema afirma que, fixat un paràmetre $b > 0$ prou petit, existeix un interval acotat que conté $E(b)$, tal que, donat un valor arbitrari del paràmetre a en aquest interval, la probabilitat que l'aplicació $T_{a,b}$ tingui un atractor estrany és estrictament positiva. A més, aquest atractor serà l'adherència de la varietat invariant inestable d'un dels dos punts fixos de $T_{a,b}$.

Notem que la propietat 1) ens diu que $\overline{W^u}$ és atractor, 2*a*) que l'atractor no es pot descompondre en atractors més petits, i la propietat 2*b*) significa que existeix una òrbita densa en l'atractor per la qual hi ha un exponent de Liapunov positiu. L'última propietat és la més simple que s'usa per definir un atractor estrany.

Per acabar, volem comentar una mica la demostració d'aquest teorema. El primer factor que cal tenir en compte és que quan $b = 0$ l'aplicació resultant restringida a la recta $y = 0$ és l'aplicació logística $f_a(x) = 1 - ax^2$. L'estratègia de la demostració va començar demostrant un resultat similar per a aquest cas més simple. Encara que ja l'any 1981 Jakobson [7] el va demostrar, Benedicks i Carleson el van redemostrar usant tècniques diferents. La clau en aquest cas és que per $a = 2$ l'interval $[-1,1]$ és un atractor estrany i, més encara, l'aplicació f_2 és conjugada a l'aplicació tenda $x \mapsto 1 - 2|x|$, resultat ja conegut per von Neumann i Ulam des del llunyà 1947 [15]. L'enunciat concret del teorema demostrat per Benedicks i Carleson, que al seu torn millorava un resultat d'ells mateixos, [1], és el següent:

8 Teorema *Sigui* $c < \log 2$ *donat. Aleshores existeix un conjunt* E *de valors del paràmetre* a *molt proper a* $a = 2$ *i de mesura de Lebesgue positiva tal que l'exponent de Liapunov en* $x = 1$ *per* $a \in E$ *per* $x \mapsto 1 - ax^2$ *és major que* c.

En aquest cas, com a corol·lari d'aquest teorema obtenim un resultat similar a l'enunciat del teorema 7 pel cas $b = 0$. Només hem de canviar l'adherència de la varietat invariant inestable per un interval tancat, que serà l'atractor estrany.

La demostració d'aquest teorema es basa en un procés inductiu en el qual es van excloent valors del paràmetre que no satisfan dues hipòtesis sobre el comportament de l'òrbita de 0. La més simple és:

$$|f_a^n(0)| \geq e^{-\alpha n}, \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots, \quad \text{per } \alpha > 0 \text{ fixada.} \tag{3}$$

La raó de posar aquesta condició és la següent: la derivada de l'iterat enèsim de qualsevol punt té un creixement exponencial quan $n \to \infty$, mentre l'òrbita d'aquest punt no passi a prop de $x = 0$. Això ens pot fer pensar que una condició més simple és demanar que l'òrbita de $x = 0$ passi sempre a una certa distància de 0. Aquesta condició certament assegura que l'exponent de Liapunov de l'òrbita de $x = 1$ és més gran que 0, però només per a un conjunt de paràmetres de mesura zero. En posar la condició donada permetem que l'òrbita de zero es pugui acostar a zero arbitràriament, però d'una manera controlada. Això fa que el pas de l'òrbita prop de zero quedi compensat pel temps (nombre d'iterats) que passa lluny de zero, i així les derivades dels successius iterats de $x = 1$ creixen. Per tal que aquest creixement sigui exponencial (i, per tant, doni lloc a un exponent de Liapunov positiu) cal afegir una segona condició més complexa, que no descriurem.

És important dir que en fer el procés inductiu d'exclusió de paràmetres el que s'obté és un conjunt de Cantor de paràmetres de mesura positiva. De fet, es pot demostrar que E no pot contenir intervals.

Un nombre sorprenent de complicacions sorgeix quan $b > 0$, com diuen els autors. En principi, es tracta d'aprofitar els arguments que s'usen en el cas de l'aplicació logística, per aplicar-los a l'aplicació d'Hénon, per a b prou petit. La clau és el concepte de punt crític. En el cas unidimensional el punt crític de l'aplicació logística és $x = 0$ i correspon al valor de x pel qual $f'_a(x) = 0$. Com hem dit, és essencial que els iterats del punt crític no hi passin massa a prop. En el cas $b \neq 0$ l'aplicació d'Hénon és invertible i, per tant, no és possible definir punts crítics com abans. Tanmateix, Benedicks i Carleson van aconseguir estendre la definició. Per a això, van tenir en compte que la varietat invariant inestable es plega infinites vegades sobre si mateixa, encara que molta part d'aquesta és pràcticament horitzontal (per tenir una idea geomètrica, cal pensar que W^u té la forma de l'atractor de la figura 2, però molt més aplanada). Parlant de manera imprecisa, si l'òrbita d'un punt en la varietat inestable passa per una zona en la qual la varietat és aproximadament horitzontal, les imatges d'un vector aproximadament horitzontal s'expandeixen, mentre que en arribar prop d'un plec aquests vectors passen a ser quasi verticals i es contrauen. Aquests plecs són els que permeten definir punts crítics (que ara seran infinits). El paper d'aquests punts crítics serà el mateix que en el cas $b = 0$: exclourem successivament per a tot n valors dels paràmetres per als quals els n primers iterats del punt que cerquem no verifiquin una condició similar a (3). Un problema que fa encara més complicada la demostració és que, de fet, aquests nous punts crítics no existeixen per a tot valor del paràmetre a, i s'han d'anar aproximant a mesura que es fan noves exclusions de paràmetres.

Voldríem comentar que les idees de Benedicks i Carleson han estat aplicades en altres casos amb força èxit, encara que amb demostracions extraordinàriament tècniques, comparables a la que hem comentat. Una de les primeres aplicacions la van obtenir Mora i Viana [13], que van demostrar l'existència d'atractors estranys per a un conjunt de mesura positiva de paràmetres de famílies de difeomorfismes en el pla que posseeixin una tangència homoclínica no degenerada que es desplegui genèricament. Com a mostra del desenvolupament de les tècniques citades, hom pot consultar també l'article de Luzzatto i Viana ([12]) en el qual es presenta la teoria de Benedicks i Carleson en un context més general i es dóna informació sobre les aplicacions i extensions posteriors d'aquesta teoria.

Finalment, tornant al principi, no hem aclarit si l'aplicació d'Hénon té un atractor estrany per als valors $a = 1,4$ i $b = 0,3$, que són els que va donar Hénon. No hi ha fins ara resposta a aquesta pregunta, no només perquè la demostració de Benedicks i Carleson és només vàlida per a valors molt petits de b, sinó també perquè el conjunt de valors del paràmetre pels quals existeixen atractors estranys és un conjunt de Cantor, del qual no es coneix cap element concret per $b \neq 0$. Tampoc no s'han obtingut gaires resultats en aplicacions en varietats de dimensió més gran que 2. Queda, doncs, encara molta feina per fer.

Referències

[1] Benedicks, M.; Carleson, L. «On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$». *Ann. of Math. (2)*, 122 (1985), 1–25.

[2] Benedicks, M.; Carleson, L. «The dynamics of the Hénon map». *Ann. of Math. (2)*, 133 (1) (1991), 73–169.

[3] Carleson, L. «Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem». *Ann. of Math. (2)*, 76 (1962), 547–559.

[4] Carleson, L. «On convergence and growth of partial sumas of Fourier series». *Acta Math.*, 116 (1966), 135–157.

[5] Fefferman, C. «Pointwise convergence of Fourier series». *Ann. of Math. (2)*, 98 (1973), 551–571.

[6] Hénon, M. «A two-dimensional mapping with a strange attractor». *Comm. Math. Phys.*, 50 (1) (1976), 69–77.

[7] Jakobson, M. V. «Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps». *Comm. Math. Phys.*, 81(1) (1981), 39–88.

[8] Jones, P. W. «Lennart Carleson's work in analysis». A: *Festschrift in honour of Lennart Carleson and Yngve Domar (Uppsala, 1993)*. Vol. 58 de *Acta Univ. Upsaliensis Skr. Uppsala Univ. C Organ. Hist.*, 17–28. Uppsala: Uppsala Univ., 1995.

[9] Lacey, M.; Thiele, C. «A proof of boundedness of the Carleson operator». *Math. Res. Lett.*, 7 (4) (2000), 361–370.

[10] Lacey,M. «Carleson's theorem: proof, complements, variations». *Publ. Mat.*, 48 (2) (2004), 251–307.

[11] Lorenz, E. N. «Deterministic nonperiodic flow». *J. Atmospheric Sci.*, 20 (1963), 130–141.

[12] Luzzatto, S.; Viana, M. «Exclusions of parameter values in Hénon-type systems». *Russian Math. Surveys*, 58 (6) (2003), 1053–1092.

[13] Mora, L.; Viana, M. «Abundance of strange attractors». *Acta Math.*, 171 (1) (1993), 1–71.

[14] Muscalu, C.; Tao, T.; Thiele, C. «The bi-Carleson operator». *Geom. Funct. Anal.*, 16 (1) (2006), 230–277.

[15] Neumann, J. von; Ulam, S. M. «On combination of stochastic and deterministic processes». *Bull. A. M. S.*, 33 (1947), 1120.

[16] Newhouse, S. E. «Diffeomorphisms with infinitely many sinks». *Topology*, 13 (1974), 9–18.

[17] Ruelle, D.; Takens, F. «On the nature of turbulence». *Comm. Math. Phys.*, 20 (1971), 167–192.

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
jortega@ub.edu
jcarlestatjer@ub.edu