Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 29, núm. 2, 2014. Pàg. 167–197. DOI: 10.2436/20.2002.01.57

Matemàtica financera en temps de crisi

Sovint es pregunta què fa que un tema matemàtic sigui interessant. Algunes de les qualitats que vénen a la ment són la utilitat, la bellesa, la profunditat i la fertilitat. La utilitat sol mesurar-se per l'aplicació del tema fora de les matemàtiques. La bellesa és una qualitat atractiva que tenen moltes matemàtiques, tot i que sovint només un ull entrenat la pot veure. La profunditat ve a través de la vinculació amb múltiples idees i temes que sovint semblen fora del context original. I la fertilitat significa que, amb un esforç raonable, s'aconsegueixen resultats nous, alguns d'útils, alguns de bonics, i potser d'altres més profunds, que esperen ser descoberts.

Peter Forrester

El preu que els homes bons paguen per la seva indiferència vers els assumptes públics és el de ser governats per homes malvats.

Plató

Resum: En aquest treball es presenten alguns dels processos i càlculs estocàstics importants per a la teoria quantitativa del risc creditici. Aquesta branca de la matemàtica financera té com a objecte d'estudi els contractes amb risc de fallida, és a dir, contractes en els quals existeix el risc de patir una pèrdua econòmica a causa de l'incompliment —intencionat o no— de les obligacions adquirides per alguna de les parts que signen el contracte. Aquest tipus de contractes és omnipresent en la crisi econòmica actual; per això, en aquests temps de crisi mundial, ens interessa discutir-los des de la matemàtica financera.

Paraules clau: càlcul estocàstic, matemàtiques financeres, modelització estocàstica, processos estocàstics, risc creditici.

Classificació MSC2010: 60-01, 60H30, 60G05.

Aquest treball fou el guanyador del Premi Albert Dou de l'any 2012.

1 Introducció

Bella, *fèrtil*, *profunda* i *útil* són potser alguns dels adjectius usuals que faria servir un matemàtic a l'hora de referir-se a una fórmula, o bé a qualsevol altre objecte matemàtic. No obstant això, fora del gremi científic, la —mala— experiència ens diu que els adjectius més freqüents sobre una equació solen ser senzillament *complicada* i *incomprensible*. El que sembla increïble, almenys fins a cert punt, és que una fórmula pugui ser *culpable* de destruir l'economia mundial, tal com anunciava el titular d'un article publicat recentment per la BBC (vegeu [25]). L'equació acusada és la *fórmula de Black-Merton-Scholes* perquè estima el preu del contracte financer conegut per *opció europea de venda*.[1] Sense entrar ara com ara en detalls, heus aquí la fórmula sentenciada:

$$Ke^{-r(t-T)}\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-S_t\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \quad (1)$$

Aquesta fórmula, que va merèixer el Premi Nobel d'Economia el 1997, va ser obtinguda a l'inici dels anys setanta per Fischer Black (1938–1995), Robert C. Merton i Myron S. Scholes (vegeu [8] i [43]).

D'esquerra a dreta, Black, Merton i Scholes.

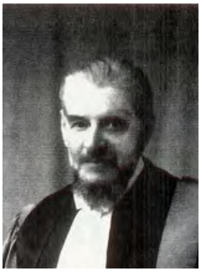
En el model de mercat considerat per a obtenir la fórmula se segueix la proposta de Paul Samuelson (1915–2009) —guanyador del Premi Nobel d'Economia de 1970— de modelar l'evolució del preu dels actius en termes de l'exponencial d'un *moviment brownià*.[2] Aquesta proposta prové de l'evidència empírica segons la qual els increments del logaritme del preu són independents; una característica que posa de manifest justament el moviment brownià. De fet, la idea original d'usar un model probabilístic per modelar el mercat de valors és habitualment atribuïda a Luis Bachelier (1870–1946), el qual, el 1900, i com

1 Aquest contracte es formalitza entre dues parts, el *comprador de l'opció* i el *venedor de l'opció*. En signar el contracte, el comprador de l'opció adquireix el dret —però no l'obligació— de vendre un cert producte al venedor de l'opció, per un preu predeterminat a l'hora de signar el contracte. En el contracte es determina també la data en la qual serà possible exercir el dret de venda.

2 El procés conegut com a *moviment brownià* és anomenat així en honor al botànic Robert Brown (1773–1858), el qual va observar el moviment molt irregular de partícules de pol·len dins de l'aigua.

a part del seu treball doctoral [1], va fer un dels primers estudis matemàtics sobre el moviment brownià.[3] És per aquestes relacions que Robert A. Jarrow, un alumne de Merton de qui parlarem també més endavant, anomena *pare*, *avi* i *besavi* de la matemàtica financera en temps continu Merton, Samuelson i Bachelier, respectivament (vegeu [29]).

D'altra banda, en els càlculs que porten finalment a l'obtenció de la fórmula (1) es fa ús del lema d'Itô, resultat clau[4] del càlcul estocàstic desenvolupat per Kiyoshi Itô (1915–2008), guanyador dels premis Gauss 2006 i Wolf 1987. D'acord amb Jarrow, abans del treball de Merton ningú en la professió financera tenia coneixement del lema d'Itô; avui, en canvi, és una eina fonamental.

D'esquerra a dreta, Bachelier, Itô i Samuelson.

La fórmula de Black-Merton-Scholes és, per tant, un exemple que els resultats de matemàtiques financeres es basen fortament en els processos i els càlculs estocàstics usats per modelar el fenomen objecte d'estudi.

El treball de Black, Merton i Scholes va posar ordre a una situació més aviat caòtica, on la valoració d'opcions —les quals eren productes habituals des d'almenys el segle XVII— es basava en la simple intuïció respecte a un mercat la dinàmica del qual no estava ben definida (vegeu [52]). Cal preguntar-se, doncs, si hauríem pogut evitar la destrucció de l'economia mundial prenent decisions a partir de la intuïció, en lloc d'emprar la fórmula de Black-Merton-Scholes.

Independentment de si un model matemàtic és *bo* o *dolent*, la responsabilitat del seu ús, i la interpretació posterior dels seus resultats, recau en les persones. Per tant, culpar de la crisi una equació sembla igual d'absurd que culpar l'aritmètica de tots els fraus fiscals. En qualsevol cas, tal acusació ens recorda que l'objectiu de la divulgació de la ciència rau a informar el públic i capacitar-lo perquè aprofiti el coneixement científic quan jutgi, per exemple, la legitimitat

3 Després, el 1905 —o *Annus Mirabilis*— Albert Einstein (1879–1955) va treballar també en el tema. No obstant això, va ser Norbert Wiener (1894–1964) el primer a precisar la formulació matemàtica del moviment brownià —que en conseqüència és també conegut com a *procés de Wiener*.

4 Un comentari sobre aquest tema per part de l'Acadèmia Nacional de Ciències dels Estats Units: Sense tenir en compte el teorema de Pitàgores en la contesa, és difícil pensar en un resultat matemàtic que avui dia sigui més ben entès i més àmpliament aplicat al món que el *lema d'Itô*. Aquest resultat té el mateix paper en el càlcul estocàstic que el teorema fonamental del càlcul en el càlcul clàssic. És a dir, és el *sine qua non* del tema.

d'un deute o les veritables implicacions derivades d'emprar, correctament o incorrectament, una fórmula matemàtica o una altra en qualsevol àmbit, no només en el financer. Sense aquest coneixement, o sense la capacitat d'usar-lo, no és possible diferenciar entre la fórmula que apareix a (1) i la que apareix a la figura 1. La primera és producte d'un treball seriós, producte de l'evolució d'un model científic que combina l'esforç i el coneixement d'especialistes de diverses disciplines de la matemàtica i altres ciències. La segona fórmula és simplement un disbarat.

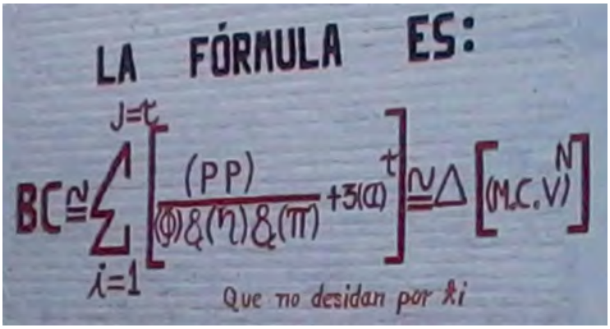


FIGURA 1: Com és possible decidir sense coneixement? I, sense la divulgació adequada, com és possible usar el coneixement generat per la comunitat científica?

Usem el terme *risc creditici* quan ens referim al risc de patir una pèrdua econòmica a causa de l'incompliment —intencional o no— de les obligacions contretes per alguna de les parts que signen un contracte. Com que aquest tipus de contractes és omnipresent en la crisi econòmica actual, s'estudien des de diferents àrees del coneixement. Aquest article té com a objectiu presentar algunes de les idees bàsiques relacionades amb l'estudi del risc creditici des de la *teoria quantitativa del risc creditici*, que és una branca de la matemàtica financera. Mostrarem alguns dels conceptes i tècniques més significatius de les tendències actuals d'aquesta teoria.

En la primera part presentarem els processos (vegeu la secció 2) i els càlculs estocàstics (vegeu la secció 3) necessaris per a la modelització del risc creditici. Estudiarem alguns dels processos estocàstics clàssics (cadenes de Markov, processos de Lévy, de Poisson i de Wiener), d'altres d'interès recent (processos de memòria llarga i processos d'àmbit) i motivarem la integració estocàstica respecte a alguns d'aquests processos. En la segona part explicarem algunes idees bàsiques de la matemàtica financera i presentarem els dos punts de vista tradicionals de la teoria quantitativa del risc creditici, que són el *punt de vista estructural* i el *punt de vista de forma reduïda*. Finalment, discutirem alguns aspectes del paper que exerceix la matemàtica financera actualment; amb això destacarem la necessitat que la comunitat matemàtica, en general, s'interessi pel tema i reinterpreti amb nous ulls l'epígraf de Plató que obre aquest article.

2 Processos estocàstics en la modelització del risc

Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, anomenarem *procés estocàstic* $(X_t)_{t\in\mathcal{I}}$ una família de variables aleatòries $X_t\colon \Omega \to S$, on $\mathcal{I}$ és un *conjunt d'índexs* i S l'anomenat *espai d'estats* o *espai de valors*. En els casos més habituals $\mathcal{I}$ es pren com a $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $[0, T]$, o bé $\mathbb{R}$, de manera que l'índex t se sol interpretar com el temps. Exemples de S, com veurem a continuació, són conjunts finits, $\mathbb{Z}^n$, o bé $\mathbb{R}^n$.

Intuïtivament, un procés estocàstic es pot pensar com una manera de representar l'evolució d'un fenomen el comportament del qual sigui tan irregular que convingui considerar-lo aleatori. Aquests processos són un dels objectes centrals de la probabilitat moderna, i els escenaris en els quals poden ser aplicats inclouen diverses àrees de les ciències experimentals i les ciències socials. De fet, un mateix procés estocàstic pot servir per a modelar fenòmens diferents que, almenys a primera vista, semblarien desconnectats. Aquest fet estén la noció d'*universalitat* que dóna el teorema central del límit i ens fa evocar la frase d'Eliakim H. Moore, amb la qual Samuelson obre el seu llibre [57]:

> L'existència d'analogies entre els components centrals de diverses teories implica l'existència d'una teoria general subjacent, la qual unifica les teories particulars pel que fa a aquests components centrals.

Alguns dels exemples clàssics d'aplicació provenen de l'estudi del canvi climàtic, creixement de tumors, epidèmies, expansió de rumors en una xarxa social, evolució del preu dels actius en la borsa, detecció d'emissió de partícules, dinàmica de poblacions, filtratge de senyals, hidrologia, lingüística, optimització, recurrència de terratrèmols, teoria del control, teoria de cues i turbulència de fluids (vegeu [3, 56, 61]). No obstant això, la metodologia de fons permet abordar també problemes de la matemàtica bàsica. Un dels exemples favorits relacionats amb això és l'estudi dels *grafs aleatoris*, concepte introduït per Paul Erdős i Alfréd Rényi al final dels anys cinquanta (vegeu [23]). En aquest escenari, es poden fer servir tècniques probabilístiques per a donar exemples de l'existència de grafs amb característiques específiques.

A continuació, presentem alguns processos estocàstics relacionats amb la modelització en matemàtiques financeres, d'alguns dels quals se n'ha consolidat la pràctica. Aquest és el cas de les cadenes de Markov, el procés de Poisson, el procés de Wiener i altres processos de Lévy. Altres processos que presentem tenen un interès més recent i els models corresponents encara estan en discussió. Ens referim als processos d'àmbit i als processos fraccionaris. Ens centrarem en els processos amb conjunts d'índexs continus, i ens referim a [51, 63, 62] per a la discussió de la matemàtica financera a temps discret.

2.1 Processos de Lévy i l'evolució dels preus

Com s'ha esmentat ja en la introducció, el model de Samuelson proposa modelar l'evolució del preu dels actius utilitzant l'exponencial d'un moviment brownià.

L'evidència empírica relacionada amb aquesta proposta és que el logaritme dels preus té increments independents.

Un altre fet empíric que es pot considerar és la possibilitat que el preu tingui una caiguda o pujada sobtades. En altres paraules, que l'evolució del preu sigui discontínua. Aquestes discontinuïtats es poden donar després de l'aparició inesperada d'un esdeveniment significatiu, com pot ser un fenomen climàtic, un canvi legislatiu, una demanda, un descobriment científic, etc.

El procés de Wiener, o moviment brownià, té trajectòries contínues, de manera que no pot posar de manifest la discontinuïtat en l'evolució del preu suggerida per l'evidència empírica. Una manera de resoldre això és agregant un procés de Poisson, el qual modelitza els *salts* i dóna lloc a discontinuïtats. Més generalment, la idea és modelar l'evolució dels preus utilitzant un procés de Lévy. Precisem la definició d'aquests processos.

D'esquerra a dreta, Lévy, Poisson i Wiener.

Definició 1. Un procés estocàstic $(L_t)_{t\in[0,T]}$ s'anomena *procés de Lévy* si satisfà les condicions següents:[5]

1. $L_0 = 0$.
2. Té *increments estacionaris*, és a dir, la distribució dels increments $L_{t+s} - L_t$ depèn només de $t - s$, i no de t.
3. Té *increments independents*, és a dir, si $r < s \le t < u$ llavors $L_u - L_t$ i $L_s - L_r$ són variables aleatòries independents.

Una característica important dels processos de Lévy és que per a tot $t \in [0, T]$, L_t té una distribució infinitament divisible. Recordem que una distribució F es diu *infinitament divisible* si per a tot enter $n > 1$ existeixen variables aleatòries $\xi_1, \dots, \xi_n$ independents i idènticament distribuïdes tals que $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ té distribució F. Aquest és el cas de les distribucions normal i de Poisson. Per a veure que L_t té efectivament una distribució infinitament divisible n'hi ha prou

5 Per excloure processos que inclouen salts en moments predeterminats (no aleatoris) s'ha d'imposar també la condició $\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|L_{t+h} - L_t| \ge \varepsilon) = 0$ per a tot $\varepsilon > 0$. Referències clàssiques sobre processos de Lévy i les seves aplicacions en finances es poden trobar a [58, 12, 59, 60].

amb considerar la suma telescòpica

$$L_t = \sum_{k=0}^{n-1} \left(L_{(k+1)\Delta} - L_{k\Delta}\right), \quad n > 1, \quad \Delta := t/n. \tag{2}$$

Aquesta suma mostra que L_t es pot escriure com la suma arbitrària de variables independents $L_{(k+1)\Delta} - L_{k\Delta}$, amb distribució igual a la de L_Δ. El resultat recíproc també és cert: tota distribució infinitament divisible defineix un procés de Lévy.[6]

Definició 2. El *moviment brownià*, o *procés de Wiener*, és un procés de Lévy $(W_t)_{t\in[0,T]}$ en el qual, per a tots s, t: $0 \le s < t \le T$, els increments $W_t - W_s$ tenen una distribució normal $N(0, t-s)$.

Definició 3. El *procés de Poisson* és un procés de Lévy $(N_t)_{t\in[0,T]}$ en el qual, per a tots s, t: $0 \le s < t \le T$, els increments $N_t - N_s$ tenen una distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda(t-s)$.

2.1.1 Salts i teoria de la ruïna. El procés de Poisson $(N_t)_{t\ge 0}$ pot utilitzar-se per modelar els temps en què ocorren determinats esdeveniments. Per exemple, com veurem en la secció 4, la fallida en una empresa es pot modelar com el primer moment en què un determinat paràmetre econòmic experimenta un *salt* —*i. e.*, increment o decrement. Per exemple, si definim que un esdeveniment tindrà lloc en el primer moment en què $(N_t)_{t\ge 0}$ tingui un salt, *i. e.*,

$$\tau := \inf\{t \in [0,T] : N_t = 1\} = \inf\{t \in [0,T] : N_t > 0\}, \tag{3}$$

llavors podem demostrar que τ té distribució exponencial, *i. e.*, $\mathbb{P}(\tau > t) = \exp(-\lambda t)$. En efecte,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > t+s) &= \mathbb{P}(N_{t+s} = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0, N_{t+s} - N_s = 0) = \\ &= \mathbb{P}(N_s = 0)\mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0)\mathbb{P}(N_t = 0).\end{aligned}$$

Les primeres identitats se segueixen de que els increments de $(N_t)_{t\ge 0}$ són independents i estacionaris.

Observeu que en un procés de Poisson tots els increments són de grandària 1. Això es pot generalitzar de manera que la grandària dels salts tingui una distribució donada.

Definició 4. Sigui $(N_t)_{t\ge 0}$ un procés de Poisson amb intensitat λ, i sigui $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successió de variables independents i idènticament distribuïdes amb llei F. Suposem que $(N_t)_{t\ge 0}$ i $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ són independents. Un *procés de Poisson compost* amb *intensitat* $\lambda > 0$ i *distribució de la grandària dels salts* F és un procés estocàstic $(J_t)_{t\ge 0}$ definit per

$$J_t := \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, \quad t \ge 0.$$

6 Vegeu, per exemple, el corol·lari 11.6 a [58].

El procés de Poisson compost es pot utilitzar per donar un model clàssic en la teoria de la ruïna (vegeu [17]). En efecte, podem modelar el capital d'una asseguradora de la manera següent:

$$C_t := C_0 + ct - J_t = C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, \quad t \geq 0,$$

on C_0 és una constant que representa el capital inicial de l'asseguradora i ct representa el capital que paguen en conjunt tots els assegurats. Finalment, ξ_k representa els imports que perd o que guanya l'asseguradora quan un dels clients té un accident. Aquest model correspon a la intuïció que els accidents van ocorrent en moments aleatoris (modelats pels salts de $(N_t)_{t\in[0,T]}$), i que l'import de cadascun d'aquells ascendeix a ξ_k, $k \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Trajectòries i simulació d'un procés estocàstic. Si fixem un escenari $\omega \in \Omega$, podem considerar l'aplicació $\alpha \mapsto X(\omega, \alpha)$. Anomenarem *trajectòria de* ω aquesta aplicació i la denotarem per $X(\omega)$. La simulació de processos estocàstics s'entén com la simulació de trajectòries. En la figura 2 es mostra la simulació de dues trajectòries. Com hem esmentat abans, les trajectòries del procés de Wiener $(W_t)_{t\in[0,T]}$ són contínues.[7]

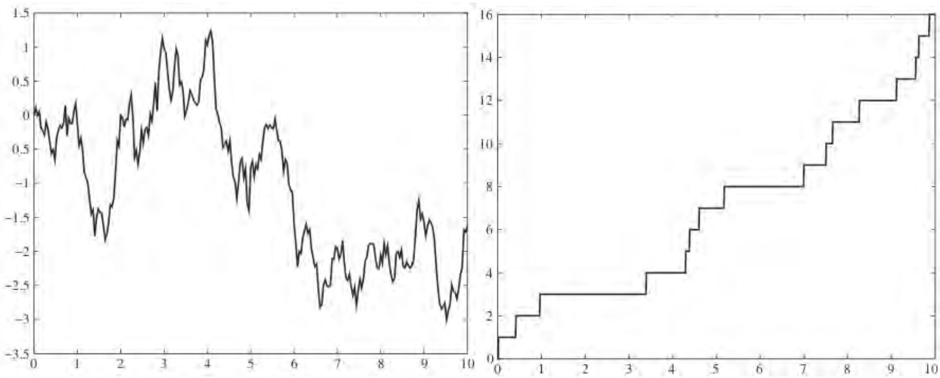


FIGURA 2: Es mostra una trajectòria del procés de Wiener (esquerra) i una del procés de Poisson (dreta).

La suma telescòpica de (2), i la propietat que els increments $W_{t+\Delta} - W_t$ són independents i tenen distribució $N(0, \Delta)$, ens suggereixen l'algoritme següent per a simular una trajectòria d'un procés de Wiener en una partició de $[0, T]$ amb N punts equidistants $\{t_k := kT/N,\ 0 \leq k \leq N\}$ de temps:

7 Una presentació dels nous desenvolupaments en l'àrea de simulació es pot trobar a [54].

Algoritme 1: Simulació d'una trajectòria d'un procés de Wiener en una partició de $[0, T]$ amb N punts equidistants $\{t_k := kT/N,\ 0 \leq k \leq N\}$ de temps.

1. `Definir` $W_0 := 0$.
2. `Des de` $k = 1$ `fins a` N
   a) `Generar la variable aleatòria` X `amb distribució` $N(0, \frac{T}{N})$.
   b) `Definir` $W_{t_k} := W_{t_{k-1}} + X$.

De manera similar tenim un algoritme per a simular un procés de Poisson. Com que aquest procés és esglaonat, només hem de simular els moments en què es produeixen els salts. Recordem que si U és una variable aleatòria amb una distribució uniforme en $(0, 1)$, llavors $X := -\ln(U)/\lambda$ té una distribució exponencial amb paràmetre λ.

Algoritme 2: Simulació dels salts d'un procés de Poisson.

1. `Definir` $t := 0$, `i definir un vector` S.
2. `Generar` U `amb distribució uniforme a` $(0, 1)$.
3. `Actualitzar el valor de` t `amb` $t - \ln(U)/\lambda$.
4. `Mentre` $t < T$
   a) `Agregar` t `al vector` S.
   b) `Generar` U `amb distribució uniforme en` $(0, 1)$.
   c) `Actualitzar el valor de` t `amb` $t - \ln(U)/\lambda$.

2.2 Cadenes de Markov i les agències de qualificació

Una *agència de qualificació de risc* és una empresa dedicada a avaluar el risc creditici al qual estan exposats determinats productes financers oferts per empreses, per governs regionals o per estats. La qualificació —o *rating*— assignada descriu fins a quin punt té risc el producte d'acord amb els criteris de cada agència. Els inversors utilitzen aquestes qualificacions per a obtenir informació sobre els productes financers en els quals desitgen invertir.

Alguns exemples[8] d'agències de qualificació que podem trobar últimament en els mitjans són Dun & Bradstreet, Fitch, Moody's i Standard & Poor's. Arran de les crítiques i sospites sobre el funcionament d'aquestes agències, han aparegut algunes iniciatives per tal d'estructurar comunitats —no empreses!— de qualificació.[9]

8 Es pot trobar una llista extensa d'agències de qualificació a `http://www.defaultrisk.com`.
9 Una idea interessant sobre aquest tema es pot trobar a `http://www.wikirating.org`.

Els productes financers són monitoritzats i requalificats constantment. En conseqüència, una cadena de Markov dóna un model per als canvis de qualificació —o *migració creditícia*— que experimenta un producte a través del temps (vegeu [30]). Precisem aquest concepte.

DEFINICIÓ 5. Sigui $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ un espai de valors amb una quantitat finita d'elements, els quals anomenarem *estats*. Una *cadena de Markov* és un procés estocàstic $C\colon \Omega \times \mathbb{N}_0 \to S$ amb la propietat que

$$\mathbb{P}(C_k = s \mid C_{k-1}, \ldots, C_0) = \mathbb{P}(C_k = s \mid C_{k-1}), \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0,\ s \in S. \tag{4}$$

Un estat s_i es diu *absorbent* si $\mathbb{P}(C_k = s_j \mid C_{k-1} = s_i) = \delta_{ij}$ per a tot $k \in \mathbb{N}_0$.

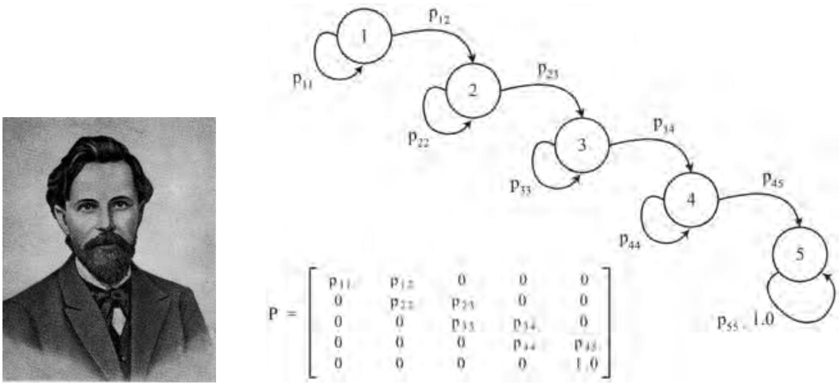


FIGURA 3: Andrej Markov (1856–1922) i un exemple d'una cadena de Markov.

Les qualificacions que aplica Standard & Poor's són, de millor a pitjor, *AAA*, *AA+*, *AA*, *AA−*, *A+*, *A*, *A−*, *BBB+*, *BBB*, *BBB−*, *BB+*, *BB*, *BB−*, *B+*, *B*, *B−*, *CCC+*, *CCC*, *CCC−*, *CC*, *C*, i *D*. De manera que els estats de la cadena de Markov associada serien

$$S = \{AAA, AA+, AA, AA-, \ldots, CCC-, CC, C, D\}.$$

L'estat D s'entén com l'estat de fallida —o *default*, en anglès. Suposarem que una vegada que s'arriba a l'estat de fallida ja no és possible sortir-ne, és a dir, que l'estat de fallida és un estat absorbent de la cadena de Markov.

Un dels problemes més importants en aquest model és calcular la probabilitat d'arribar a l'estat de fallida abans d'un temps $T \in \mathbb{N}$ o, equivalentment, calcular la distribució del temps aleatori (cf. (3))

$$\tau := \inf\{k \in \{0, 1, 2, \ldots, T\} : C_k = D\}. \tag{5}$$

Vegem com es pot calcular aquesta distribució. Considerem la matriu definida per

$$P := \Big(p_{ij} = \mathbb{P}(C_1 = s_j \mid C_0 = s_i)\Big)_{i,j=1}^{n}.$$

L'entrada p_{ij} és igual a la probabilitat de passar a l'estat s_j, atès que l'estat actual és s_i. Aquesta matriu es denomina *matriu de transició*. Les seves potències descriuen els canvis d'estat —o *transicions*— de la cadena. Més específicament, si $p_{ij}^{(k)}$ és la probabilitat que, partint de l'estat s_i, s'arribi a l'estat s_j després d'exactament k passos, llavors es demostra que

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & \cdots & p_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & \cdots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}^{k}.$$

Per tant, la probabilitat que partint de l'estat $s_0 = AAA$ no arribem a l'estat de fallida $s_n = D$ abans de T passos és igual a

$$\mathbb{P}(\tau > T) = \sum_{j \neq n} p_{1j}^{(T)} = 1 - p_{in}^{(T)}.$$

2.3 Espiral de Wiener, moviment brownià fraccionari

El procés de Poisson i el de Wiener satisfan una condició anàloga a l'expressada a (4), és a dir, donat el valor actual, l'evolució futura del procés és independent del seu passat. Direm que un procés és *markovià* si compleix aquesta condició. Veurem a continuació una generalització del moviment brownià —el *moviment brownià fraccionari*— que pot deixar de ser markovià i exhibir, en canvi, una *memòria llarga*, és a dir, que valors futurs del procés estiguin correlacionats amb els seus valors passats.

El moviment brownià fraccionari va ser introduït per Andrej Kolmogorov (1903–1987) quan estudiava les anomenades *espirals de Wiener*, mentre que Benoît Mandelbrot (1924–2010) i John Van Ness van desenvolupar diverses propietats d'aquest procés (vegeu [42, 18]).

Definició 6. Sigui A un conjunt d'índexs igual a $[0, T]$ o a $\mathbb{R}$. Direm que el procés estocàstic $(B_t^H)_{t\in A}$ és un *moviment brownià fraccionari de paràmetre* $H \in (0,1)$ si satisfà les condicions següents:

1. $B_0^H = 0$.
2. És un *procés gaussià*, *i. e.*, per a tot conjunt finit d'índexs $t_1, \dots, t_k$ es compleix que $(B_{t_1}^H, \dots, B_{t_k}^H)$ té una distribució normal multivariada.
3. B_t té una esperança igual a 0, per a tot $t \in A$.
4. Per a cada $s, t \in A$ es compleix que

$$\mathbb{E}[B_s^H B_t^H] = \tfrac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}). \tag{6}$$

Mandelbrot va denominar el paràmetre H *paràmetre de Hurst*, en honor a Harold Hurst (1880–1978), el qual amb els seus estudis estadístics sobre els desbordaments del riu Nil va trobar que dades molt llunyanes en el temps estaven correlacionades. Aquesta característica de memòria llarga es modela bé amb el moviment brownià fraccionari.

D'esquerra a dreta, Kolmogorov i Mandelbrot.

Actualment, l'aplicació d'aquest procés en matemàtiques financeres s'estudia en diverses direccions. Per exemple, com una generalització de la modelització de l'evolució dels preus dels actius, reemplaçant el moviment brownià per un moviment brownià fraccionari (vegeu [47]). També, com un model per a l'evolució de variables macroeconòmiques, com els tipus d'interès, els quals, segons l'evidència empírica, no són markovians (vegeu [5]).

Les estructures fractals[10] tenen una característica important coneguda com a *autosimilitud*, que intuïtivament podem pensar com la invariància en l'estructura en *fer zoom* en una de les parts. El moviment brownià fraccionari és també autosimilar en el sentit estadístic precisat per la proposició següent.[11]

Proposició 7. *Si $(B_t^H)_{t\in\mathcal{I}}$ és un movimient brownià fraccionari de paràmetre $H \in (0,1)$, aleshores*[12]

$$(s^{-H}B_{st}^H)_{t\in\mathcal{I}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (B_t^H)_{t\in\mathcal{I}}, \quad s > 0.$$

Si fixem $H = \frac{1}{2}$ i $A = [0,T]$ llavors obtenim el moviment brownià estàndard que hem vist abans. De manera que el moviment brownià també és autosimilar. Cal destacar que $H = 1/2$ és l'únic valor per al qual $(B_t^H)_{t\in\mathcal{I}}$ té increments independents.

10 Benoît Mandelbrot és ben conegut pel seu llibre titulat *La geometria fractal de la natura* (vegeu [39]). En [40] i [41] es poden trobar algunes idees de característiques fractals associades amb la matemàtica financera.

11 La demostració d'aquest resultat és una conseqüència immediata del fet que la funció de covariància de (6) és homogènia d'ordre $2H$.

12 El símbol $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ denota igualtat en distribució.

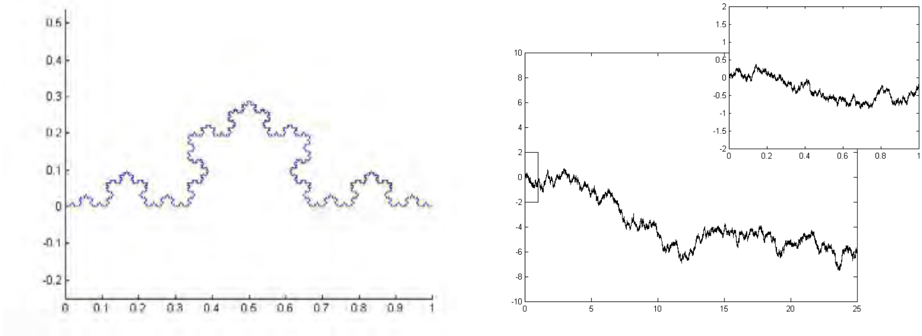


FIGURA 4: A l'esquerra apareix el fractal conegut com a *floc de neu de Koch*, i a la dreta una trajectòria d'un moviment brownià fraccionari amb una secció ampliada per a mostrar autosimilitud.

2.4 Camps estocàstics i processos d'àmbit

En la definició de *procés estocàstic* que hem establert a l'inici de la secció 2 esmentem que el conjunt d'índexs $\mathcal{I}$ sol ser un subconjunt de $\mathbb{R}$. Una extensió natural consisteix a prendre un conjunt d'índexs en temps i espai, és a dir, de la forma $\mathcal{J} := \mathbb{R} \times \mathcal{X}$, on la nova component *espacial* pot ser, per exemple, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Anomenarem *camp estocàstic* aquesta extensió i la denotarem per $(I(t,x))_{(t,x)\in\mathcal{J}}$.

Un *camp d'àmbit* és un camp estocàstic $(I(t,x))_{(t,x)\in\mathcal{J}}$ tal que, per a cada $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{X}$, el valor de $I(t,x)$ depèn d'un cert conjunt $A(t,x) \subset (-\infty,t]\times\mathcal{X}$, el qual denominem *àmbit associat a* (t,x). Un àmbit $A(t,x)$ pot ser bastant general, però és usual triar-lo de manera que sigui homogeni en espai i en temps, és a dir, fixat $A(0,0) \subset (-\infty,0) \times \mathcal{X}$, es defineix per a cada $(t,x) \in \mathcal{J}$ l'àmbit $A(t,x) := \{(s,i) \in \mathcal{J} : (s-t, i-x) \in A(0,0)\}$. El rol d'un àmbit $A(t,x)$ és establir un con de causalitat, definint quins esdeveniments passats tenen efecte en el valor present del camp estocàstic. Pensarem, doncs, que $I(t,x)$ és donat per

$$I(t,x) = \int_{A(t,x)} g_{(t,x)}(s,\xi)\sigma(s,\xi)L(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\xi), \tag{7}$$

on g és una funció determinista, la *volatilitat* σ és un altre camp estocàstic i la integral s'ha d'entendre com una integral estocàstica (tipus Walsh [66]) respecte de la mesura aleatòria L. Per a més detalls sobre la definició precisa de *camp d'àmbit* ens referim a [3, 2, 14]. No obstant això, esmentem que una manera de motivar (7) és considerar equacions en derivades parcials perturbades per un *soroll blanc en espai i temps* (cf. [46]). Usarem una heurística similar en la secció 3.3 per motivar les equacions diferencials estocàstiques en el sentit d'Itô.

Un *procés d'àmbit* $(X_\theta)_{\theta\in\mathcal{I}}$ és la restricció d'un camp d'àmbit $(I(t,x))_{(t,x)\in\mathcal{J}}$ al llarg d'una corba α, és a dir, donat un subconjunt de $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}$, i una corba $\alpha\colon \mathcal{I} \to \mathcal{J}$, $(X_\theta)_{\theta\in\mathcal{I}}$ és donat per $X_\theta := I(\alpha(\theta))$. Aquests processos van ser introduïts a mitjan de la dècada passada per Barndorff-Nielsen, Schmiegel i col·laboradors (vegeu [3]), amb l'objectiu de modelar la turbulència en fluids i el creixement de tumors. Actualment s'estudien les propietats teòriques i les possibles aplicacions d'aquests processos. En particular, quant a l'estudi teòric, una línia de recerca tracta del desenvolupament d'un càlcul estocàstic associat. Pel que fa a les aplicacions financeres, s'estudia, per exemple, la viabilitat de modelar variables macroeconòmiques i preus de derivats fent servir processos d'àmbit (vegeu [14]), així com la seva aplicació en problemes de risc creditici (vegeu la secció 4). Més encara, s'estudia la possibilitat de modelar directament el valor de derivats financers sense necessitat d'imposar una dinàmica específica per als preus dels actius, contrastant això amb els enfocaments clàssics que obtenen el valor dels derivats a partir del supòsit d'una dinàmica específica per a l'evolució dels preus dels actius.

3 Càlcul estocàstic

Comencem per fixar un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i considerem un procés de Wiener $(W_t)_{t\in[0,T]}$. Anomenarem *filtració* tota successió creixent de σ-àlgebres $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Donat un procés estocàstic $(X_t)_{t\in[0,T]}$, anomenarem *filtració natural generada per X* la filtració definida per

$$\mathbb{F}^X := (\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s,\ s \le t))_{t\in[0,T]}.$$

En les aplicacions, les filtracions representen la informació disponible sobre el fenomen estudiat. Més específicament, $\mathcal{F}_{t_0}^X$ representa la informació disponible que prové d'observar el fenomen —modelat per $(X_t)_{t\in[0,T]}$— fins a un temps t_0.

3.1 La integral estocàstica

La integral estocàstica es defineix en dos passos. Primer, es construeix la integral com una isometria $I_0\colon \mathcal{E}_T \to L^2([0,T]\times\Omega)$, sent $\mathcal{E}_T$ una classe de *processos esglaonats*, és a dir, processos de la forma

$$u_t := \sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

on $0 =: t_0 \le \cdots \le t_n := T$ i, per a cada $j = 1,\ldots,n$, u_j pertany a $L^2(\Omega)$ i és $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mesurable. Sigui Λ_T l'adherència de $\mathcal{E}_T$ a $L^2([0,T]\times\Omega)$. El segon pas de la construcció és estendre I_0 a una isometria $I\colon \Lambda_T \to L^2(\Omega)$. De manera que si $u^n \to u$ a $L^2([0,T]\times\Omega)$, aleshores $I(u) := \lim I_0(u^n)$, en el sentit de $L^2(\Omega)$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_T \arrow[d] \arrow[dr, "I_0"] & \\ \Lambda_T \arrow[r, "I"] & L^2(\Omega). \end{tikzcd}$$

Per al primer pas de la construcció definim la integral de $u = (u_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{E}_T$ com a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_T & \xrightarrow{I_0} & L^2(\Omega) \\ \sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t) & \mapsto & I_0(u) := \int_0^T u_t \, \mathrm{d}W_t := \sum_{j=1}^{n} u_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \end{array}$$

Vegem-ne un exemple. Si considerem el procés esglaonat següent:

$$u_t^n := \sum_{j=1}^{n} W_{t_{j-1}} \mathbf{1}_{(t_{j-1},t_j]}(t), \quad n \geq 1,\, t \geq 0,$$

es pot veure que $u^n \to W$ i que es compleix la igualtat següent:

$$\begin{aligned} \int_0^T W_t \, \mathrm{d}W_t &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} W_{t_{j-1}} \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \right) = \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2 \right) - \frac{1}{2} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T. \end{aligned}$$

Això contradiu la intuïció que tindríem en el càlcul determinista: si $x\colon\ [0,T] \to \mathbb{R}$ és una funció determinista diferenciable tal que $x_0 = 0$ (escrivint x_t en lloc del clàssic $x(t)$), llavors

$$\int_0^T x_t \, \mathrm{d}x_t = \frac{1}{2} x_t^2 \Big|_0^T = \frac{1}{2} x_T^2. \tag{9}$$

Fixeu-vos que la integral estocàstica no es comporta com la integral de Riemann-Stieltjes en el sentit següent. Considerem una successió de particions $\Pi_n := (t_0^n := 0 \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{r_n}^n := T)$ tal que el pas de la partició tendeixi a 0. Sigui $\lambda \in [0,1]$ i definim $\tau_k^n := (1-\lambda) t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$. Es pot demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r_n} W_{\tau_k^n} \left(W_{t_k^n} - W_{t_{k-1}^n} \right) = \frac{1}{2} B_T^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) T,$$

on el límit és en el sentit de $L^2(\Omega)$. És a dir, per a cada λ tenim una integral diferent. Si prenem $\lambda = 0$ recuperem la definició de la integral d'Itô. Mentre que si prenem $\lambda = \frac{1}{2}$ tenim l'anomenada *integral estocàstica de Fisk-Stratonovich*.

El segon pas de la construcció és més tècnic i l'ometem per simplicitat en l'exposició. Per a una exposició més detallada sobre aquestes idees ens referim a [36, 53, 65].

3.2 Processos i lema d'Itô

Un *procés d'Itô* és un procés estocàstic de la forma

$$X_t := x + \int_0^t u_s \, \mathrm{d}W_s + \int_0^t v_s \, \mathrm{d}s, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

on els processos $(u_s)_{s\in[0,T]}$ i $(v_s)_{s\in[0,T]}$ satisfan determinades condicions. Per conveni, una forma alternativa d'escriure el procés és en la seva *forma diferencial*

$$\mathrm{d}X_t = u_t\,\mathrm{d}W_t + v_t\,\mathrm{d}t.$$

La integral estocàstica respecte de $(W_t)_{t\in[0,T]}$ que hem definit es pot estendre a una integral estocàstica respecte del procés d'Itô $(X_t)_{t\in[0,T]}$ com a

$$\int_0^T f_s\,\mathrm{d}X_s = \int_0^T f_s u_s\,\mathrm{d}W_s + \int_0^T f_s v_s\,\mathrm{d}s.$$

Considerem ara n processos de Wiener independents $(W_t^{(k)})_{t\in[0,T]}$, $k = 1,\dots,n$. Definim un *procés d'Itô n-dimensional* com un procés

$$X = (X_t := (X_t^{(1)},\dots,X_t^{(n)}))_{t\in[0,T]}$$

en què cada component és un procés d'Itô

$$\mathrm{d}X_t^{(k)} = \sum_{j=1}^n u_t^{(k,j)}\,\mathrm{d}W_t^{(j)} + v_t^{(k,j)}\,\mathrm{d}t, \quad k = 1,\dots,n,\ t \in [0,T].$$

El lema d'Itô ens diu si f és una funció $f\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$, llavors es compleix que

$$f(t,X_t^{(1)},\dots,X_t^{(n)}) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s,X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s,X_s)\,\mathrm{d}X_s + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n \int \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} f(t,X_t)(\mathrm{d}X_t^{(k)})(\mathrm{d}X_t^{(j)}),$$

on $(\mathrm{d}X_t)^2$ es calcula d'acord amb les regles següents: $\mathrm{d}W_t^{(k)} \times \mathrm{d}W_t^{(j)} = \delta_{kj}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}W_t^{(k)} \times \mathrm{d}t = \mathrm{d}t \times \mathrm{d}W_t^{(k)} = \mathrm{d}t \times \mathrm{d}t = 0$.

En particular, si prenem la funció $(t,(x^{(1)},x^{(2)})) \mapsto x^{(1)}x^{(2)}$, obtenim la fórmula següent d'integració per parts:

$$X_t^{(2)}X_t^{(1)} = X_0^{(2)}X_0^{(1)} - \int_0^t X_s^{(2)}\,\mathrm{d}X_s^{(1)} - \int_0^t X_s^{(1)}\,\mathrm{d}X_s^{(2)} + \int_0^t u_s^{(1)}u_s^{(2)}\,\mathrm{d}s.$$

3.3 Equacions diferencials estocàstiques

El moviment brownià és tan irregular que no és possible definir-ne, en el sentit ordinari, la derivada respecte del temps. En efecte, una trajectòria típica del moviment brownià, encara que contínua, no és diferenciable en cap punt. No obstant això, sí que és possible donar un sentit a la derivada (vegeu [26, 27]) i això dóna lloc a l'anomenat *soroll blanc* $\dot W(t) := \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t}$ (vegeu [46, definició 1] o [35, exemple 3.13]). Sense entrar en més detalls, pensem ara formalment en $\dot W$ per tal de desenvolupar l'heurística següent: si l'equació diferencial determinista[13]

$$\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = f(t,x_t) \tag{11}$$

13 Com en (9) aquí hem escrit x_t en comptes de $x(t)$.

és pertorbada additivament mitjançant el soroll blanc, obtenim una equació nova de la forma

$$\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = f(t, x_t) + \dot{W}(t). \tag{12}$$

Ara bé, d'una banda, en el càlcul determinista l'equació diferencial (11) es pot plantejar com l'equació integral

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s)\,\mathrm{d}s.$$

Mentre que, d'altra banda, en el càlcul d'Itô $\dot{W}(t)$ i $\mathrm{d}t$ es combinen per formar el diferencial brownià $\mathrm{d}W_t$, de manera que l'equació pertorbada (12) pren l'expressió formal

$$\mathrm{d}x_t = f(t, x_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t,$$

la qual ha d'entendre's estrictament com el procés d'Itô

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s)\,\mathrm{d}s + W_t. \tag{13}$$

Més generalment, per *equació diferencial estocàstica* (*EDE*)

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

entendrem una manera d'escriure formalment el procés d'Itô:

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s.$$

Amb determinades hipòtesis sobre els coeficients f i σ és possible establir l'existència i unicitat de la solució d'una EDE (vegeu [53, capítol 9.2] i [48, capítol 5.2]). No obstant això, el lema d'Itô pot servir per a resoldre una EDE quan es conjectura com podria ser-ne la solució. Per exemple, l'estructura de l'EDE següent

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = Y_t(\mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t), \\ Y_0 = 1, \end{cases}$$

ens suggereix considerar una solució de forma exponencial i, en efecte, si apliquem el lema d'Itô a la funció $F(t,x) := \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma x\right)$ podem comprovar que la solució d'aquesta EDE és $(I_t := F(t, W_t))_{t\geq 0}$.

Les EDE van ser inicialment estudiades per Itô, amb la finalitat de construir determinats processos markovians a partir dels seus generadors infinitesimals (cf. [36]). Des de llavors, les EDE han estat aplicades extensivament a diverses àrees; el lector interessat en podrà trobar un tractat complet a [48]. Cal esmentar que també és possible definir EDE en les quals el paper del moviment brownià és reemplaçat per un procés de Lévy general. Aquestes EDE dirigides per processos de Lévy tenen aplicacions a la matemàtica financera, per exemple per modelar *intensitats de fallida* (vegeu la secció 4.1.2 i [60, capítol 5]). Sobre aplicacions en altres disciplines, esmentem que una equació com ara (13), però en la qual canviem el moviment brownià per un altre procés de Lévy, pot servir per a modelar l'evolució de les temperatures de la Terra en els últims 250 000 anys (vegeu [64, secció 12.4]).

3.4 Integració estocàstica respecte d'un moviment brownià fraccionari

El 1969 Molchan i Golosov [44] van representar el moviment brownià fraccionari $(B_t^H)_{t\in[0,T]}$ amb paràmetre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ com a

$$B_t^H = \int_0^T \mathbf{K}[\mathbf{1}_{[0,t)}](s)\,\mathrm{d}W_s, \tag{14}$$

on $\mathbf{K}$ és un nucli determinista de quadrat integrable que actua a $L^2[0,T]$ per[14]

$$\mathbf{K}[f](s) := \left(\frac{2H\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(2-2H)}\right)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^T f(u)u^{H-\frac{1}{2}}(u-s)^{H-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u,$$

on Γ és la funció gamma d'Euler.

En el cas d'integrands deterministes es pot construir una integral estocàstica respecte de $(B_t^H)_{t\in[0,T]}$ seguint les idees de la construcció de la integral d'Itô (vegeu [47]). Primer es defineix la integral per a la classe $\mathcal{E}$ de funcions esglaonades, és a dir, funcions $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ de la forma

$$u(t) := \sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t), \quad t \in [0,T],$$

on $0 =: t_0 \le \cdots \le t_n := T$ i $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{R}$. Com a segon pas, considerem inicialment l'espai de Hilbert $\mathcal{H}$ definit com la completació de $\mathcal{E}$ respecte de la norma donada per (cf. (6))

$$\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]}\rangle_{\mathcal{H}} := \tfrac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Es pot demostrar (vegeu [50, 49]) que $\mathcal{H}$ és *massa gran*, en el sentit que no és necessàriament un espai de funcions, sinó de distribucions d'ordre negatiu. De manera que hem de restringir-nos a un subespai $\mathcal{H}$, el qual identificarem amb

$$|\mathcal{H}| := \left\{ f\colon [0,T] \to \mathbb{R} \;\middle|\; H(2H-1)\int_0^T\int_0^T |f(u)||f(v)||u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v < \infty \right\}.$$

14 Fixeu-vos que aquest nucli es pot expressar en termes del càlcul fraccionari de Riemann-Liouville (vegeu [55]).

D'aquesta manera tenim la inclusió $L^2[0,T] \subset |\mathcal{H}| \subset \mathcal{H}$, i la integral obtinguda satisfà

$$\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}B_s^H = \int_0^t \mathbf{K}[f](s)\, \mathrm{d}W_s.$$

Encara que en aquesta secció hem partit de la caracterització de (14) per fer front a la integració respecte del moviment fraccionari, també és possible considerar una caracterització diferent, habitualment anomenada *representació de mitjanes mòbils* de Mandelbrot i Van Ness [42]; vegeu, per exemple [16]. No obstant això, és important destacar que amb ambdues caracteritzacions es pot construir una integral estocàstica (pel que fa al moviment brownià fraccionari) seguint les mateixes idees. Algunes relacions entre ambdues caracteritzacions es poden trobar a [34].

4 Teoria quantitativa del risc creditici

Podríem dir, *grosso modo*, que un *contracte financer* és un acord per a intercanviar diners segons unes regles determinades. Generalment, l'acord se signa entre dues parts (persones o institucions) que podem anomenar *comprador* i *venedor*. L'opció europea de venda que hem esmentat en la introducció és un exemple de contracte financer. Anomenarem *benefici* —o *payoff*, en anglès— el pagament que el venedor promet al comprador, i el *preu del contracte* serà la quantitat de diners que el comprador ha de donar al venedor a canvi de rebre el benefici promès.

Com s'ha esmentat ja en la introducció, el risc creditici es refereix al risc de patir una pèrdua econòmica a causa de l'incompliment —intencionat o no—[15] de les obligacions d'alguna de les parts que signen el contracte. Quan es dóna aquest incompliment es diu que ha succeït l'*esdeveniment de fallida*. El temps en què aquest esdeveniment succeeix es diu *temps de fallida*.[16] L'estudi de contractes amb fallida es pot fer des de diferents punts de vista. Nosaltres considerem el problema des de la branca de la matemàtica financera denominada *teoria quantitativa del risc creditici*.

Subjacent al nostre mercat considerarem un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i una filtració $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que s'interpretarà com la informació disponible al mercat. Suposarem que totes les variables aleatòries i els processos estocàstics considerats estan definits a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Considerarem contractes financers amb risc de fallida que tinguin un benefici de la forma[17]

$$X\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \tilde{X}\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}},$$

15 Un exemple d'incompliment intencionat és quan l'obligació constitueix un *deute il·legítim* (vegeu [19]). D'altra banda, l'incompliment pot ser no intencionat, per exemple, quan una de les parts no té els recursos econòmics necessaris per a mantenir les seves obligacions.

16 En anglès, els termes *esdeveniment de fallida* i *temps de fallida* es tradueixen com *default event* i *default time*, respectivament.

17 Aquest benefici es pot fer més complex, per exemple, agregant un sumand $Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$ en el qual $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ representa el *procés de recuperació*, el qual determina un pagament de recuperació que rep el comprador just en el moment en què es produeix la fallida. Vegeu, per exemple, la secció 2 de [6].

on τ és la variable aleatòria que modela el temps de fallida, $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ és el pagament promès en cas que no hi hagi fallida i $\tilde{X} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ és el pagament promès en cas de fallida. Un dels problemes principals de la matemàtica financera consisteix a definir i calcular el *preu adequat*[18] d'un derivat. En general, el preu adequat és de la forma[19]

$$\pi_t(X) := \mathbb{E}^*\left[X \exp\left(-\int_t^T r_s \, \mathrm{d}s \right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T], \tag{15}$$

on el benefici X pertany a $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$, el procés estocàstic $(r_t)_{t \in [0,T]}$ modela el tipus d'interès al nostre mercat, $\mathbb{P}^*$ és una probabilitat equivalent[20] a $\mathbb{P}$ —de vegades denominada *probabilitat neutral*— i $\mathbb{E}^*$ és l'esperança respecte de $\mathbb{P}^*$.

En conseqüència, un dels problemes principals en el risc creditici és calcular expressions del tipus

$$\mathbb{E}^*\left[(X\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \tilde{X}\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}) \exp\left(-\int_t^T r_s \, \mathrm{d}s \right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T]. \tag{16}$$

La major part dels estudis dedicats al risc creditici té a veure amb la modelització del temps de fallida. La literatura sobre aquest tema se sol dividir segons dos tipus d'enfocaments coneguts com l'*enfocament estructural* i l'*enfocament de forma reduïda*. Els orígens del primer es poden basar en els treballs de Black, Merton i Scholes, mentre que els del segon es basen en el treball de Jarrow[21] i Turnbull [32] i les extensions fetes a [33, 21] (vegeu [10, 31]). Aquests dos enfocaments se solen considerar competitius i aïllats l'un de l'altre, i la informació disponible és una de les principals diferències entre tots dos punts de vista (vegeu [31]). No obstant això, diversos estudis han mostrat escenaris en els quals es pot passar de l'un a l'altre (*e. g.*, [20, 24, 11]) o bé en els quals tots dos enfocaments hi juguen un paper (*e. g.*, [10]). Fins i tot s'han proposat punts de vista unificats (*e. g.*, [4, 67]) en els quals el temps de fallida és modelat com el primer moment en què un cert procés estocàstic creua una barrera.

4.1 El preu d'un bo amb fallida

Els bons són un objecte d'estudi central en matemàtica financera ja que a través d'ells és possible estructurar contractes més complexos.

18 Per *preu adequat* s'ha d'entendre un preu que no doni lloc a *oportunitats d'arbitratge*. Intuïtivament, es pot pensar que, quan el mercat és lliure d'oportunitats d'arbitratge, per guanyar diners necessàriament hom ha d'exposar-se al risc. Per a un estudi detallat sobre l'arbitratge referim el lector interessat a [7].

19 Per a l'obtenció de l'equació (15) el lector interessat pot consultar [6, 22, 37, 52, 65]. Per a una presentació detallada sobre l'operador $\mathbb{E}^*[\cdot|\mathcal{F}_t]$, vegeu [28].

20 Dues mesures de probabilitat definides sobre el mateix espai de mesura $(\Omega, \mathcal{F})$, ν_1 i ν_2, són equivalents si per a cada $A \in \mathcal{F}$, es compleix que $\nu_1(A) = 0 \iff \nu_2(A) = 0$.

21 Com s'ha esmentat en la introducció, Jarrow és un dels estudiants de Merton.

DEFINICIÓ 8. Un *bo* amb *estructura de cupons* $(c_i, t_i)_{i=1,\ldots,n}$, *valor nominal* $N > 0$ i *maduresa* $T > 0$ és un contracte financer amb benefici

$$N + \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{\{t=t_i\}},$$

en què $c_1, \ldots, c_n \geq 0$ i $0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq T$ són unes quantitats i dates, respectivament, fixades en el contracte. Quan $c_1 = \cdots = c_n = 0$, es diu que el bo és un *bo sense cupons*.

Estudiarem a continuació el problema de valorar bons amb fallida, des dels dos enfocaments de la teoria quantitativa del risc creditici. En el cas del model estructural, seguim el model de Merton, ja que, si bé és un model simplista, permet presentar les complicacions i tècniques de càlcul que apareixen típicament dins del model estructural. Obtindrem, en particular, la fórmula de Black-Merton-Scholes.

4.1.1 Enfocament estructural. Aquest és l'escenari:

1. Una empresa ven un bo sense cupons, amb valor nominal N i maduresa T.
2. Les polítiques de reestructuració de l'empresa estableixen que es declararà la fallida si el capital cau per sota d'un nivell crític.
3. En cas de fallida es pagarà, com a recuperació, una fracció $\alpha \in [0, 1]$ del capital de l'empresa al temps de la maduresa.

Suposem que el capital d'una empresa i el nivell crític estan modelats pels processos estocàstics $(S_t)_{t\in[0,T]}$ i $(\ell_t)_{t\in[0,T]}$.

Llavors aquest bo té risc de fallida i el temps de fallida està modelat per

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : S_t \leq \ell_t\}, \tag{17}$$

amb el conveni que $\inf \emptyset = \infty$. Per tant, aquest bo amb fallida té un benefici

$$N\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} + \alpha S_T \mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}.$$

En virtut de la fórmula (16) i la linealitat de l'esperança, el preu d'aquest contracte és

$$D(t,T) := N\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] + \alpha\mathbb{E}^*\left[S_T \mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} e^{-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]. \tag{18}$$

El model de Merton. Sigui $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ un $\mathbb{P}^*$-moviment brownià estàndard. En el model de Merton el tipus d'interès es considera constant, diguem-n'hi r. El capital de l'empresa es modela com el moviment brownià geomètric, *i. e.*, com la solució[22] de l'equació diferencial estocàstica (EDE)

$$\mathrm{d}S_t = S_t((r-\kappa)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t^*), \tag{19}$$

22 Vegeu la secció 3.3.

on els paràmetres κ i $\sigma > 0$ són interpretats com els dividends i la volatilitat del capital, respectivament. Finalment, la barrera que dispara la fallida es defineix, només en la maduresa del bo, com a $\ell_T = N$, de tal manera que $\tau = \mathbf{1}_{\{S_T<N\}}$. Així podem reescriure el preu a (18) com a

$$D(t,T) = Ne^{-r(T-t)}\mathbb{P}^*\left(S_T \geq N \mid \mathcal{F}_t\right) + \alpha e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*\left[S_T\mathbf{1}_{\{S_T<N\}} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

El primer sumand es calcula directament en resoldre l'EDE de (19) i usar les propietats bàsiques del moviment brownià. En efecte,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(S_T \geq N \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}^*\left(S_t e^{\left(r-\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)} \geq N \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = &(20)\\ &= \mathbb{P}^*\left(-\sigma(W_T^*-W_t^*) \leq \ln\tfrac{S_t}{N} + (r-\kappa-\tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r-\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), &(21)\end{aligned}$$

on Φ representa la funció de distribució gaussiana estàndard. L'equació (20) se segueix del fet que, com hem vist en la secció 3.3, la solució a l'EDE de (19) és

$$S_t = S_0 \exp\left((r-\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^*\right).$$

Així mateix, (21) es dedueix del fet que, condicionat a $\mathcal{F}_t$, $-\sigma(W_T^*-W_t^*)$ és una variable aleatòria amb distribució $N(0,\sigma^2(T-t))$.

El càlcul del segon sumand es pot fer de manera anàloga si fem primer un canvi de probabilitat. Sigui $\mathbb{P}^{(S)}$ la probabilitat definida en termes de la seva derivada de Radon-Nikodým $\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} := \exp\left(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$, $\mathbb{P}^*$-quasi segurament. Denotem per $\mathbb{E}^{(S)}$ l'esperança respecte de la probabilitat $\mathbb{P}^{(S)}$. Pel teorema de Girsanov[23] sabem que $\mathbb{P}^{(S)}$ és equivalent a $\mathbb{P}^*$, així que podem aplicar la regla de Bayes[24] per obtenir la relació següent:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\left[S_T\mathbf{1}_{\{S_T<N\}} \mid \mathcal{F}_t\right] &= e^{(r-\kappa)T}\mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*}\mathbf{1}_{\{S_T<N\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \\ &= e^{(r-\kappa)T}\mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]\mathbb{P}^{(S)}(S_T < N \mid \mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Amb arguments similars als utilitzats en l'obtenció de (21) es pot mostrar que

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[e^{\sigma(W_T^*-W_t^*)+W_t^*-\frac{1}{2}\sigma^2 T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = e^{\sigma W_t^*-\frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_t e^{(r-\kappa)t},$$

23 Vegeu, per exemple, la secció A.15 de [45].

24 En general, per a $Y \in \mathcal{F}$, obtenim

$$\mathbb{E}^*\left[Y\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]\mathbb{E}^{(S)}\left[Y \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Vegeu, per exemple, el lema A.1.4 de [45].

ja que, condicionat a $\mathcal{F}_t$, $\sigma(W_T^* - W_t^*)$ és una variable aleatòria amb distribució log-normal, amb mitjana $\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ i variància $\sigma^2(T-t)$.

D'altra banda, el teorema de Girsanov també ens assegura que $(W^{(S)} := W_t^* - \sigma t)_{t\in[0,T]}$ segueix un $\mathbb{P}^{(S)}$-moviment brownià estàndard, de manera que, tal com hem fet amb el primer sumand, podem calcular que

$$\mathbb{P}^{(S)}\left(S_T < N \mid \mathcal{F}_t\right) = \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r - \kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Com a conclusió obtenim

$$\begin{aligned} D(t,T) &= Ne^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \\ &\quad + \alpha S_t e^{-\kappa(T-t)}\Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r - \kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

La fórmula acusada de destruir l'economia mundial. De la fórmula (22), prenent $\alpha = 1$ i $\kappa = 0$, podem obtenir la fórmula de Black-Merton-Scholes (1). Per a veure-ho, recordem que una *opció europea de venda* amb maduresa al temps T i preu d'exercici N és un contracte financer mitjançant el qual el comprador de l'opció adquireix el dret —però no l'obligació— de vendre determinat producte al venedor de l'opció, i T és el moment en el qual es pot fer la venda, i N el preu que cal pagar per aquest producte. Si S_T és el preu al mercat del producte en el temps T, llavors el benefici de l'opció de venda és

$$(N - S_T)_+ := \max\{N - S_T, 0\}.$$

Aleshores n'hi ha prou amb veure que

$$N\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + S_T\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} = N\mathbf{1}_{\{S_T \geq N\}} + S_T\mathbf{1}_{\{S_T < N\}} = N - (N - S_T)_+.$$

Per tant, és suficient combinar les expressions (16) i (22) per a obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(N - S_T)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] &= Ne^{-r(T-t)} - D(t,T) = \\ &= Ne^{-r(t-T)}\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{N} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \\ &\quad - S_t\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{N} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned}$$

Extensions del model de Merton. El model considerat abans es pot estendre considerant:

- Barreres estocàstiques per a definir la fallida.
- Tipus d'interès estocàstics.
- Altres dinàmiques per al capital de l'empresa i el tipus d'interès (*e. g.*, modelar usant l'exponencial d'un procés de Lévy o d'un moviment brownià fraccionari).

Cadascuna d'aquestes extensions respon al desig de modelar característiques específiques del fenomen que s'observen en la pràctica. Òbviament, cadascuna dóna lloc a problemes nous i, per tant, al desenvolupament d'eines matemàtiques noves. Per exemple, el fet de considerar barreres estocàstiques porta a l'estudi del temps de xoc d'un brownià pel que fa a una barrera estocàstica. Aquest és un problema del qual només es tenen solucions parcials, i no és fàcil trobar fórmules explícites quan la barrera deixa de ser una recta.[25] Modelar els tipus d'interès de manera estocàstica complica clarament els càlculs de la fórmula (16). D'altra banda, modelar l'evolució del capital mitjançant processos diferents comporta la necessitat de desenvolupar el càlcul estocàstic i el càlcul numèric corresponents. La complexitat d'estendre el model simultàniament en aquestes tres direccions és evident.

4.1.2 L'enfocament de forma reduïda per al risc creditici. Com hem vist, en l'enfocament estructural, l'esdeveniment de fallida és endogen i la modelització recau sobre la dinàmica assumida per als processos que descriuen l'evolució del capital de l'empresa i la barrera crítica. En contrast, en l'enfocament de forma reduïda, es considera que l'esdeveniment de fallida és exogen i la modelització recau sobre la dinàmica assumida per a la *intensitat de fallida* $(\gamma_t)_{t\in[0,T]}$ i el *procés de risc*

$$\Gamma_t := \int_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T].$$

En l'enfocament de forma reduïda se suposa que la probabilitat de fallida està descrita per $(\gamma_t)_{t\in[0,T]}$ segons la relació següent:

$$\mathbb{P}^*(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) = e^{-\Gamma_t} = \exp\left(-\int_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s\right). \tag{23}$$

A [60, capítol 5] es pot trobar una descripció d'alguns models usuals per a processos de risc i de tècniques per a calibrar la intensitat de fallida a partir d'altres contractes amb el risc de fallida com les denominades *permutes d'incompliment creditici* —o bé, *credit default swaps*. Cal esmentar que, donat un model per al procés de risc, sempre és possible construir un temps d'aturada que satisfaci (23), per exemple, prenent τ com el primer salt d'un procés de Poisson (cf. (3)) al qual hem canviat el temps fent servir $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$; vegeu-ne els detalls a [38].

25 El lector interessat pot trobar un recull de resultats relacionats a [9].

Una altra diferència substancial entre ambdós enfocaments és que en l'enfocament estructural la informació de referència ($\mathbb{F}$) és suficientment rica per a saber si l'esdeveniment de fallida ha ocorregut[26] o no. Mentre que això no passa en l'enfocament d'intensitat, a causa de la naturalesa exògena de l'esdeveniment de fallida. En canvi, la informació disponible al mercat queda modelada per la *filtració engrandida*[27] $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$ definida com a

$$\mathcal{G}_t := (\mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge s),\, s \le t).$$

Per construcció, amb la informació donada per $\mathbb{G}$ sí que podem saber si l'esdeveniment de fallida ha ocorregut o no. Denotarem per $\mathbb{H} := (\mathcal{H}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtració natural generada pel procés $(H_t := \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}})_{t\in[0,T]}$. Amb aquesta notació escriurem $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$.

El càlcul dels preus de derivats es basa en el resultat següent, habitualment denominat *el lema clau de l'enfocament de forma reduïda.*[28]

Lema 9. *Siguin* $0 \le t < s \le T$. *Si* X *és* $\mathcal{G}_T$*-mesurable aleshores tenim que*

$$\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\tau>s\}}X \mid \mathcal{G}_t\right] = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{\mathbb{E}^*\left[X\mathbf{1}_{\{\tau>s\}} \mid \mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{P}^*(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)}. \tag{24}$$

La importància d'aquest resultat és deguda al fet següent. Per a calcular el terme de l'esquerra de (24), en principi, hauríem de comptar la informació continguda a $\mathcal{G}_t$; no obstant això, la nostra filtració de referència és més petita, *i. e.*, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Malgrat això, aquest lema clau ens permet expressar aquest càlcul en termes d'esperances condicionades a la informació de $\mathcal{F}_t$, que sí que coneixem.

Usant el lema clau podem donar l'expressió general del preu d'un bo sense cupons, amb valor nominal N i maduresa T. En efecte, fent servir (15) i (24), el preu d'aquest bo és

$$\begin{aligned} D(t,T) &= N\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\exp\left(-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s\right)\,\middle|\, \mathcal{G}_t\right] = \\ &= N\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\exp\left(-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{P}^*(\tau>t\mid\mathcal{F}_t)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^*\left[\exp\left(-\int_t^T r_s+\lambda_s\,\mathrm{d}s\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Com hem esmentat abans, una part de la importància que té l'estudi dels bons rau en el fet que contractes més complexos es poden expressar en termes de bons. En conseqüència, el càlcul del preu d'aquests contractes està relacionat amb el càlcul d'expressions com la que apareix a (25). El càlcul explícit d'aquesta

26 És a dir, $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$ per a tot t, o sigui, τ és un *temps d'aturada* respecte de la filtració $\mathbb{F}$.
27 A [15] es pot trobar una exposició sobre el tema de l'engrandiment de les filtracions.
28 Vegeu la secció 5 de [6] i la secció 8 de [37].

expressió depèn del model que suposem per al tipus d'interès i per a la intensitat de fallida. Observem, no obstant això, que el preu del bo amb fallida equival al preu d'un bo sense fallida en el qual el tipus d'interès no és $(r_t)_{t\geq 0}$ sinó $(r_t + \lambda_t)_{t\geq 0}$.

Un exemple recent és el que s'ocupa de modelar el tipus d'interès i el procés de risc per mitjà de processos fraccionaris o processos d'àmbit. Tot i que les tècniques, la complexitat de càlcul i les implicacions de cadascuna d'aquestes opcions són significativament diferents, en tots dos casos es pot obtenir una expressió tancada per a (25). En el cas d'un model que fa servir processos fraccionaris (vegeu [5]), aquesta expressió és de la forma

$$D(t,T) = e^{A(t,T)} \exp\left(- \int f(s,t,T)\, \mathrm{d}B_s^H \right),$$

on A i f són funcions deterministes que depenen només dels paràmetres del model, i la integral és respecte d'un brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$. En el cas del model que fa servir un procés d'àmbit, es pot obtenir una expressió amb la mateixa estructura però en la qual, com esmentem en la secció 2.4, la integral estocàstica s'ha de prendre en el sentit de Walsh [66] i respecte a una *mesura aleatòria de Wiener* (vegeu [13]).

5 Conclusions

En aquest article hem presentat algunes de les idees, dels models i de les tècniques bàsics de la teoria quantitativa del risc creditici. La llista de referències bibliogràfiques —clàssiques i recents— que hem citat al llarg del text permetrà al lector aprofundir en la matèria i trobar tot un univers de temes que no han estat tractats aquí.

Hem intentat mostrar exemples clàssics juntament amb propostes de discussió i recerca actuals, amb la finalitat de posar de manifest que l'estudi de la matemàtica financera és un camp actiu i en desenvolupament constant. Més encara, hem procurat també fer veure que els problemes tractats en aquesta branca de les matemàtiques tenen una gran complexitat teòrica i que les seves aplicacions comprenen escenaris en diverses branques de la ciència.

Quin tipus de matemàtiques es fan en la branca de matemàtiques financeres? És una pregunta recurrent avui en dia, per part dels matemàtics i també dels científics i del públic en general. Esperem que aquest article hagi servit per a donar una resposta parcial a aquesta pregunta i, amb sort, haver convençut el lector de la necessitat de participar en aquesta branca bella, fèrtil, profunda i útil de les matemàtiques.

Agraïments

L'autor agraeix a la doctora Marta Sanz-Solé que l'hagi encoratjat a fer aquest treball en el marc del Premi Albert Dou. Agraeix també al revisor anònim la seva lectura detallada i els suggeriments pertinents que van permetre millorar la versió preliminar d'aquest article.

Referències

[1] Bachelier, L. «Théorie de la spéculation». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 17 (1900), 21–86.

[2] Barndorff-Nielsen, O. E.; Benth, F. E.; Veraart, A. E. D. «Ambit processes and stochastic partial differential equations». A: *Advanced mathematical methods for finance*. Heidelberg: Springer, 2011, 35–74.

[3] Barndorff-Nielsen, O. E.; Schmiegel, J. «Ambit processes: with applications to turbulence and tumour growth». A: *Stochastic analysis and applications*. Berlín: Springer, 2007, 93–124. (Abel Symp.; 2)

[4] Bélanger, A.; Shreve, S. E.; Wong, D. «A general framework for pricing credit risk». *Math. Finance*, 14 (3) (2004), 317–350.

[5] Biagini, F.; Fink, H.; Klüppelberg, C. «A fractional credit model with long range dependent default rate». *Stochastic Process. Appl.*, 123 (4) (2013), 1319–1347.

[6] Bielecki, T. R.; Rutkowski, M. *Credit risk: modelling, valuation and hedging*. Berlín: Springer-Verlag, 2002. (Springer Finance)

[7] Björk, T. *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford: Oxford University Press, 1998.

[8] Black, F.; Scholes, M. «The pricing of options and corporate liabilities». *J. Polit. Econ.*, 81 (1973), 637–654.

[9] Borodin, A. N.; Salminen, P. *Handbook of Brownian motion-facts and formulae*. 2a ed. Basilea: Birkhäuser Verlag, 2002. (Probability and its Applications)

[10] Campi, L.; Çetin, U. «Insider trading in an equilibrium model with default: a passage from reduced-form to structural modelling». *Finance Stoch.*, 11 (4) (2007), 591–602.

[11] Çetin, U.; Jarrow, R.; Protter, P.; Yildirim, Y. «Modeling credit risk with partial information». *Ann. Appl. Probab.*, 14 (3) (2004), 1167–1178.

[12] Cont, R.; Tankov, P. *Financial modelling with jump processes*. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall / CRC, 2004. (Chapman & Hall / CRC Financial Mathematics Series)

[13] Corcuera, J. M.; Farkas, G.; Schoutens, W.; Valkeila, E. «A short rate model using ambit processes». A: *Malliavin calculus and stochastic analysis*. Nova York: Springer, 2013, 525–553. (Springer Proc. Math. Stat.; 34)

[14] Corcuera, J. M.; Farkas, G.; Valdivia, A. «Ambit processes, their volatility determination and their applications». A: Korolyuk, V.; Limnios, N.; Mishura, Y.; Sakhno, L.; Shevchenko, G. (ed.). *Modern stochastics and applications*. Springer, 2014.

[15] Corcuera, J. M.; Valdivia, A. «Enlargements of filtrations and applications» (Preprint 2011), disponible a `http://arxiv.org/abs/1201.5870`.

[16] Delgado, R.; Jolis, M.; Utzet, F. «Mandelbrot i l'atzar». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 27 (2) (2012), 121–160.

[17] Dickson, D. C. M.; Waters, H. R. «The distribution of the time to ruin in the classical risk model». *Astin Bull.*, 32 (2) (2002), 299–313.

[18] Doukhan, P.; Oppenheim, G.; Taqqu, M. S. *Theory and applications of long-range dependence*. Boston: Birkhäuser, 2003.

[19] Duch Guillot, G. [*et al.*]. *Vivir en deudocracia*. Icaria editorial, 2011.

[20] Duffie, D.; Lando, D. «Term structure of credit spreads with incomplete accounting information». *Econometrica*, 69 (2001), 633–664.

[21] Duffie, D.; Singleton, K. J. «Modeling term structures of defaultable bonds». *Rev. Financ. Stud.*, 12 (4) (1999), 197–226.

[22] Elliot, R. J.; Kopp, P. E. *Mathematics of financial markets*. 2a ed. Nova York: Springer, 2005. (Springer Finance / Springer Finance Textbooks)

[23] Erdős, P.; Rényi, A. «On random graphs. I». *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 290–297.

[24] Guo, X.; Jarrow, R. A.; Zeng, Y. «Credit risk models with incomplete information». *Math. Oper. Res.*, 34 (2) (2009), 320–332.

[25] Harford, T. «Black-Scholes: The maths formula linked to the financial crash». BBC News Magazine, 27 abril 2012, disponible a `http://www.bbc.com/news/magazine-17866646`.

[26] Hida, T. *Brownian motion*. Nova York; Berlín: Springer-Verlag, 1980 [Traduït del japonès per l'autor i T. P. Speed.] (Applications of Mathematics; 11)

[27] Hida, T.; Kuo, H.-H.; Potthoff, J.; Streit, L. *White noise. An infinite-dimensional calculus*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993. (Mathematics and its Applications; 253)

[28] Jacod, J.; Protter, P. *Probability essentials*. Berlín: Springer-Verlag, 2000. (Universitext)

[29] Jarrow, R. A. «Speech in honor of Robert C. Merton». Mathematical Finance Day Lifetime Achievement Award, 1999.

[30] Jarrow, R. A.; Lando, D.; Turnbull, S. M. «A Markov model for the term structure of credit risk spreads». *Rev. Financ. Stud.*, 10 (2) (1997), 481–523.

[31] Jarrow, R. A.; Protter, P. «Structural versus reduced form models: a new information based perspective». *Journal of Investment Management*, 2 (2) (2004), 1–10.

[32] Jarrow, R. A.; Turnbull, S. M. «Credit risk: drawing the analogy». *Risk Magazine*, 5 (9) (1992).

[33] Jarrow, R. A.; Turnbull, S. M. «Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk». *J. Finance*, 50 (1995), 53–85.

[34] JOST, C. «Transformation formulas for fractional Brownian motion». *Stochastic Process. Appl.*, 116 (10) (2006), 1341–1357.

[35] KHOSHNEVISAN, D. «A primer on stochastic partial differential equations». A: *A minicourse on stochastic partial differential equations*. Berlín: Springer, 2009, 1–38. (Lecture Notes in Math.; 1962)

[36] KUO, H.-H. *Introduction to stochastic integration*. Nova York: Springer, 2006. (Universitext)

[37] LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. 2a ed. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall / CRC, 2008. (Chapman & Hall / CRC Financial Mathematics Series)

[38] LANDO, D. «On Cox processes and credit risky securities». *Rev. Derivatives Res.*, 2 (1998), 99–120.

[39] MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco, Calif.: W. H. Freeman and Co., 1982.

[40] MANDELBROT, B. B. «How fractals can explain what's wrong with Wall Street». *Sci. Am.*, 15 setembre 2008, disponible a `http://www.scientificamerican.com/article/multifractals-explain-wall-street/`.

[41] MANDELBROT, B. B.; HUDSON, R. L. *The (mis)behavior of markets. A fractal view of risk, ruin, and reward*. Nova York: Basic Books, 2004.

[42] MANDELBROT, B. B.; VAN NESS, J. W. «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications». *SIAM Rev.*, 10 (4) (1968), 422–437.

[43] MERTON, R. «Theory of rational option pricing». *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1973), 141–183.

[44] MOLCHAN, G. M.; GOLOSOV, J. «Gaussian stationary processes with asymptotically a power spectrum». *Soviet. Math. Dokl.*, 10 (1969), 134–137.

[45] MUSIELA, M.; RUTKOWSKI, M. *Martingale methods in financial modelling*. 2a ed. Berlín: Springer-Verlag, 2005. (Stochastic Modelling and Applied Probability; 36)

[46] NUALART, D. «Equacions en derivades parcials estocàstiques pertorbades per un soroll blanc». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 14 (1) (1999), 85–98.

[47] NUALART, D. «Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications». A: *Stochastic models*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2003, 3–39. (Contemp. Math.; 336)

[48] ØKSENDAL, B. K. *Stochastic differential equations; an introduction with applications*. 6a ed. Heidelberg: Springer, 2013. (Universitext)

[49] PIPIRAS, V.; TAQQU, M. S. «Integration questions related to fractional Brownian motion». *Probab. Theory Related Fields*, 118 (2) (2000), 251–291.

[50] Pipiras, V.; Taqqu, M. S. «Are classes of deterministic integrands for fractional Brownian motion on an interval complete?» *Bernoulli*, 7 (6) (2001), 873–897.

[51] Pliska, S. *Introduction to mathematical finance: discrete time models*. Malden: Blackwell Publishers, 1997.

[52] Protter, P. «A partial introduction to financial asset pricing theory». *Stochastic Process. Appl.*, 91 (2) (2001), 169–203.

[53] Revuz, D.; Yor, M. *Continuous martingales and Brownian motion*. 3a ed. Berlín: Springer-Verlag, 1999. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 293)

[54] Rubinstein, R. Y.; Kroese, D. P. *Simulation and the Monte Carlo method*. 2a ed. Hoboken, N. J.: Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 2008. (Wiley Series in Probability and Statistics)

[55] Samko, S. G.; Kilbas, A. A.; Marichev, O. I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[56] Samorodnitsky, G. «Long range dependence». *Found. Trends Stoch. Syst.*, 1 (3) (2006), 163–257.

[57] Samuelson, P. A. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1947.

[58] Sato, K. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 68)

[59] Schoutens, W. *Lévy processes in finance: pricing financial derivatives*. Nova York: John Wiley & Sons, 2003.

[60] Schoutens, W.; Cariboni, J. *Lévy processes in credit risk*. Chichester: John Wiley & Sons, 2009.

[61] Schuss, Z. *Theory and applications of stochastic processes. An analytical approach*. Nova York: Springer, 2010. (Applied Mathematical Sciences; 170)

[62] Shiryaev, A. N. *Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory*. River Edge, N. J.: World Scientific Publishing Co., 1999. (Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability; 3)

[63] Shreve, S. E. *Stochastic calculus for finance. I. The binomial asset pricing model*. Nova York: Springer-Verlag, 2004. (Springer Finance)

[64] Solé, J. Ll. «El món de les variables sense moments finits de tots els ordres: de la paradoxa de Sant Petersburg als processos de Lévy». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 27 (1) (2012), 63–113.

[65] Steele, J. M. *Stochastic calculus and financial applications*. Nova York: Springer-Verlag, 2001. (Applications of Mathematics (New York); 45)

[66] WALSH, J. B. «An introduction to stochastic partial differential equations». A: *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, XIV-1984*. Berlín: Springer, 1986, 265–439. (Lecture Notes in Math.; 1180)

[67] WONG, D. «A unifying credit model». *Capital Markes Group Technical Report* (1998).

UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA, ESPANYA
arturo.valdivia@ub.edu