Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 20, núm. 2, 2005. Pàg. 91–127

Inestabilitats numèriques i turbulència: l'efecte de les subescales en mecànica de fluids*

Ramon Codina i Oriol Guasch

Resum En aquest treball descrivim dos enfocaments per a l'estudi de les equacions de Navier-Stokes que tradicionalment s'han analitzat de manera independent però per als quals hi ha un nexe d'unió: la descripció matemàtica de la turbulència en problemes de mecànica de fluids i les inestabilitats numèriques que s'observen quan les equacions que regeixen el fenomen s'aproximen amb algun mètode numèric. En ambdós casos, l'objectiu és plantejar un problema aproximat no per a la velocitat i pressió del problema continu, sinó per a una certa component «capturable» en sentit numèric d'aquestes incògnites.

Paraules clau: equacions de Navier-Stokes, LES, inestabilitats numèriques.

Classificació MSC2000: 76D03, 65M12.

1 Introducció

En aquest article presentarem dos temes que tradicionalment s'han estudiat de manera independent però per als quals recentment s'ha plantejat un possible nexe d'unió: la descripció matemàtica de la turbulència en problemes de mecànica de fluids i les inestabilitats numèriques que s'observen quan les equacions que regeixen el fenomen s'aproximen amb algun mètode numèric.

La turbulència dels fluids és sens dubte un problema pendent de la física clàssica. Malgrat que les equacions de Navier-Stokes de la mecànica de fluids s'accepten com a model matemàtic, no es coneix encara un teorema complet d'existència i unicitat de solució per al problema d'evolució. El que sí que

* Aquest article correspon a la conferència de Ramon Codina a la Trobada conjunta de la Societat Catalana de Matemàtiques i la Societat Catalana de Física, que va tenir lloc el 3 de juny de 2005 a l'IEC.

se sap (per abundant experiència numèrica i diversos resultats analítics parcials) és que admeten solucions «caòtiques». El problema, des del punt de vista físic, és tenir controlades aquestes solucions, per exemple, calculant-ne (o fitant-ne) paràmetres estadístics o coneixent-ne el comportament qualitatiu.

Des del punt de vista numèric, l'aproximació de les equacions de Navier-Stokes presenta diversos tipus d'inestabilitats. De fet, l'únic terme sobre el qual es pot tenir control numèric és sobre el viscós, i si aquest terme és petit per comparació al convectiu (o al de rotació, si n'hi ha), la solució numèrica és molt dolenta.

En els darrers anys s'han seguit dues línies de recerca paral·leles en el desenvolupament de models matemàtics de turbulència i d'aproximació numèrica que tenen una arrel comuna, la qual cosa indica que ambdues línies podrien arribar a unificar-se. Per un costat, els models anomenats de «large eddy simulation» (LES) es basen a descompondre la incògnita (la velocitat) en una escala macroscòpica i una de microscòpica i obtenir una equació només per a la primera, però tenint en compte l'efecte de les escales microscòpiques, tradicionalment anomenades *subescales*. Però justament en la mateixa idea es fonamenten els anomenats *mètodes d'estabilització* numèrics, essent ara les subescales les components de la solució no capturables per la discretització numèrica. L'objectiu d'aquest article és precisament descriure aquestes dues línies paral·leles i comentar les possibles diferències i semblances. Així mateix, aprofitarem la necessitat de plantejar el problema de les equacions de Navier-Stokes per descriure'n l'estructura matemàtica i explicar els resultats coneguts (i els que queden per conèixer) de la teoria d'existència.

2 Les equacions de Navier-Stokes

2.1 Plantejament del problema

Forma diferencial. El problema matemàtic amb què ens enfrontem és el de resoldre les equacions de Navier-Stokes pel moviment d'un fluid en un domini fitat, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, sota les hipòtesis de flux incompressible. Aquestes equacions s'obtenen a partir de les equacions generals de la mecànica de fluids, en concret, a partir de l'equació de continuïtat i de l'equació de conservació de la quantitat de moviment (segona llei de Newton) considerant la densitat del fluid, ρ, constant i fent servir la hipòtesi de fluid newtonià a l'equació constitutiva.[1] Aquesta darrera equació ens relaciona, pel cas d'un fluid, el tensor de tensions de Cauchy amb el tensor de velocitat de deformació. Les equacions resultants són (vegeu e. g., [59, 21])

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T) \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T)\,, \tag{2}$$

1 L'equació de conservació de l'energia està desacoplada de les equacions de continuïtat i de conservació de la quantitat de moviment pel cas d'un fluid incompressible.

on $\boldsymbol{u}$ representa el vector velocitat, p és la pressió,[2] ν és la viscositat cinemàtica i $\boldsymbol{f}$ és una força externa aplicada al fluid. L'equació (2), corresponent a l'equació de continuïtat, es sol conèixer amb el nom de *lligam d'incompressibilitat*. L'equació (1) (conservació de la quantitat de moviment) conjuntament amb el lligam (2) presenta una gran varietat i riquesa de solucions donada la presència del terme no lineal $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$. Això es tradueix en una física extremadament complexa com l'exhibida pels fluxos turbulents.

Les equacions (1) i (2) s'han de completar amb unes condicions inicials i de contorn apropiades. En aquest article tan sols considerarem el cas de condicions de contorn de Dirichlet homogènies per simplicitat i, en el cas que el domini Ω sigui el cub $\mathcal{T} := (0, 2\pi)^d$, també condicions periòdiques. Així, tindrem

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{a} \;\; \Gamma \equiv \partial\Omega \quad \text{Condicions de Dirichlet} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}, p \;\text{periòdiques} \quad \text{a} \quad \Omega = \mathcal{T} := (0, 2\pi)^d \quad \text{Condicions periòdiques} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{a} \quad \Omega \quad \text{Condicions inicials.} \tag{5}$$

El sistema d'equacions (1)-(2) amb les condicions de contorn (3) o (4) i la condició inicial (5) constitueixen la formulació *clàssica* o *forta* del problema de Navier-Stokes, en contraposició a la formulació *feble* o *variacional* que mostrarem a continuació. Tanmateix, abans de presentar la versió feble del problema introduirem part de la notació que farem servir al llarg de l'article.

Marc funcional. Denotarem per $L^p(\Omega)$ amb $1 \leq p < \infty$ els espais de funcions reals definides a Ω tals que la seva potència p-èsima és absolutament integrable respecte a la mesura de Lebesgue. Els espais $L^p(\Omega)$ són espais de Banach amb norma associada

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty. \tag{6}$$

En el cas $p = \infty$ la norma ve donada pel suprem essencial de les funcions fitades a Ω i. e., $\|\boldsymbol{u}\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_\Omega |\boldsymbol{u}(x)|$. Per a $1 < p < \infty$, els espais $L^p(\Omega)$ són reflexius amb duals $L^q(\Omega)$, essent $1/p + 1/q = 1$. Un cas d'especial interès és el de $L^2(\Omega)$, que és un espai de Hilbert amb producte escalar

$$(u, v) := \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\, v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{7}$$

i norma induïda $\|u\|_2 = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. La generalització de $L^p(\Omega)$ a funcions d-dimensionals la denotarem per $\boldsymbol{L}^p(\Omega) \equiv (L^p(\Omega))^d$. Des d'un punt de vista físic, i

2 De fet, en el cas de (1)-(2) la pressió satisfà a cada instant de temps l'equació de Poisson, $\Delta p = -\rho\partial_j u_i \partial_i u_j$, que és una condició necessària i suficient perquè es compleixi el lligam d'incompressibilitat, i que determina el valor de ∇p independentment de l'evolució prèvia del flux. Altrament dit, a cada instant de temps la pressió es determina directament del camp de velocitats.

pel problema que ens ocupa, $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ es pot identificar amb l'espai de camps de velocitat amb energia cinètica finita ja que $\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = 2E(\boldsymbol{u})$, on $E(\boldsymbol{u})$ és l'energia cinètica per unitat de massa.

Els espais de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ representen espais de funcions de $L^p(\Omega)$ tals que les seves derivades fins a ordre $m \in \mathbb{N}$ també pertanyen a $L^p(\Omega)$. $W^{m,p}(\Omega)$ són espais de Banach i la seva norma la denotarem per $\|\cdot\|_{m,p}$. Per a $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ són a més espais de Hilbert i farem servir la notació $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$ per designar-los, alhora que utilitzarem $H_0^m(\Omega)$ per indicar el subespai de $H^m(\Omega)$ amb funcions tals que aquestes i les seves derivades fins a l'ordre $m-1$ s'anul·len a $\partial\Omega$. L'espai dual de $H_0^1(\Omega)$ l'indicarem per $H^{-1}(\Omega)$ i l'aparellament dual entre $H_0^1(\Omega)$ i $H^{-1}(\Omega)$ mitjançant el símbol $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La versió vectorial d'aquests espais també la indicarem amb negreta.

Un cas d'especial interès és $m = 1$, el qual té associats el producte escalar

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H^1} := \frac{1}{L^2}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}) \tag{8}$$

i la norma $\|\boldsymbol{u}\|_{H^1} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{H^1}^{1/2}$. A (8), L representa una longitud característica (per exemple, $L = \operatorname{diam}(\Omega)$) de valor $L = 1$ per a variables adimensionals.

Hem vist que, per al nostre problema, quan $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ el primer terme de l'equació (8) equival a dues vegades l'energia cinètica. Pel que fa al segon terme, correspon a l'arrel quadrada de l'enstrofia. L'enstrofia, $\mathcal{E}(\boldsymbol{u})$, és una quantitat important ja que determina la velocitat de dissipació de l'energia cinètica. A $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{E}(\boldsymbol{u})$ admet una representació en termes de la vorticitat, $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{u}$, donada per $\mathcal{E}(\boldsymbol{u}) := \|\boldsymbol{\omega}\|_2^2$. Veiem, per tant, que físicament l'espai $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ es pot identificar amb l'espai dels camps de velocitat i vorticitat d'energia cinètica i enstrofia finites.

Incorporem a continuació el lligam d'incompressibilitat (2) i les condicions de contorn al marc funcional que hem presentat. Siguin $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ i $\boldsymbol{H}_{\mathrm{per}}^1(\Omega)$ els subespais de funcions de $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ que compleixen respectivament les condicions de contorn de Dirichlet (3) i periòdiques (4) del problema (1)-(2). Definim aleshores els espais funcionals següents:

$$\boldsymbol{X}(\Omega) := \begin{cases} \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) & \text{per condicions de Dirichlet} \\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{per}}^1(\Omega) & \text{per condicions periòdiques} \end{cases} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{V}(\Omega) := \{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{X}(\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{H}(\Omega) := \overline{\boldsymbol{V}}(\Omega)^{L^2} \quad (\text{Clausura de } \boldsymbol{V}(\Omega) \text{ a } L^2(\Omega)). \tag{11}$$

Considerarem també l'espai de funcions d-dimensionals inifinitament diferenciables i de suport compacte a Ω, $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega) \equiv (C_0^\infty(\Omega))^d$. Amb aquest espai construirem l'espai de *funcions de test* $\mathcal{V} := \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0\}$. Finalment, i per tal de tractar amb l'evolució temporal de la velocitat i la pressió introduïm els espais $L^p(0,T;Z(\Omega))$ definits per

$$L^p(0,T;Z(\Omega)) := \left\{ f : (0,T) \longrightarrow Z(\Omega) \mid \int_0^T \|f(\boldsymbol{x})\|_Z^p \, dt < \infty \right\}, \tag{12}$$

on $Z(\Omega)$ representa qualsevol dels espais de funcions espacials que hem definit anteriorment.

Forma feble. Un cop presentat el marc funcional que necessitarem, ja estem en disposició d'introduir la forma feble associada al problema de Navier-Stokes (1)-(2) amb condicions de contorn (3) o (4) i condició inicial (5). La forma feble s'obté multiplicant (1)-(2) per una funció de test i integrant a tot el domini Ω. Després d'integrar per parts el terme viscós, el problema es pot formular de la manera següent: trobar $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \in \boldsymbol{V}(\Omega)$ per tot $t > 0$ tal que es compleixi

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \ \forall \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V} \ (\text{o } \boldsymbol{V}), \tag{13}$$

en el sentit de les distribucions a $(0,T)$ o $(0,\infty)$ i la condició inicial $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$. A (13), $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ representa la forma trilineal donada per

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{w}) d\boldsymbol{x}. \tag{14}$$

Fem notar que amb aquesta formulació la pressió desapareix com a variable explícita del problema i que s'exigeix que $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ satisfaci directament el lligam d'incompressibilitat.

També és possible formular el problema feble mantenint explícitament la pressió i el lligam d'incompressibilitat a la forma feble. En aquest cas haurem de trobar e. g., $[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), p(\boldsymbol{x},t)] \in L^2(0,T;\boldsymbol{X}(\Omega)) \times L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ tal que

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}) - (p,\nabla\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \tag{15}$$

$$(q,\nabla\boldsymbol{u}) = 0,$$

$\forall [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), q(\boldsymbol{x})] \in \boldsymbol{X}(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ i tal que es satisfaci la condició inicial $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ en el sentit feble.

2.2 Teoremes d'existència i unicitat

Els resultats clàssics d'existència i unicitat de solucions per als problemes (1)-(2) i la seva versió feble (13) en el cas tridimensional ($d = 3$) vénen donats pels dos teoremes següents (vegeu per exemple [21, 66]):

1 Teorema (Existència de solucions febles) *Per a qualssevol* $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}(\Omega)$, $\boldsymbol{f} \in L^2\left(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ *i* $T > 0$, *el problema* (13) *té almenys una solució feble*

tal que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nabla u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega \times (0,T))$ *i* $\boldsymbol{u}$ *és feblement contínua de* $[0,T]$ *en* $\boldsymbol{H}(\Omega)$ *(és a dir,* $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$*,* $t \mapsto (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))$ *és una funció escalar contínua). A més a més es satisfà la desigualtat següent de l'energia* (desigualtat de Leray)*:*

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\|_2^2 + \nu\int_0^t \|\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\|_2^2\,ds \le \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)\|_2^2 + \int_0^t \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},s), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\rangle ds, \quad (16)$$

de la qual es deriva que $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}(\Omega))$*.*

2 Teorema (Existència local i unicitat de solucions clàssiques) *Per a qualssevol* $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{V}(\Omega)$*,* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{H}(\Omega))$ *i* $T > 0$*, existeix un* T_* $(0 < T_* < T)$*, depenent de les dades* $(\Omega, \nu, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_0$ *i* $T)$*, tal que existeix una solució única al problema* (1)-(2) *a l'interval* $[0,T_*)$ *que compleix* $\boldsymbol{u}$*,* $\partial_t \boldsymbol{u}$*,* $\boldsymbol{\nabla u}$*,* $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla u}) \in \boldsymbol{L}^2(\Omega \times (0,T))$ *i a més* $\boldsymbol{u}$ *és contínua de* $[0,T_*)$ *en* $\boldsymbol{V}$*.*

La demostració d'existència i unicitat de solucions clàssiques en un interval $[0,T_*)$ es deu a Leray ([50]; cf. [67]) que fou el primer a començar a desenvolupar la teoria matemàtica de les equacions de Navier-Stokes. Leray també demostrà, en els seus treballs pioners, l'existència de solucions febles a $\mathbb{R}^3$ ([50]). De fet, fou el primer a introduir el concepte de forma feble d'una equació en derivades parcials, molt abans que es desenvolupés la teoria de distribucions, o que es formalitzés el marc funcional dels espais de Sobolev. Leray basà les seves demostracions en la construcció de solucions aproximades d'una equació de Navier-Stokes modificada mitjançant la convolució del terme convectiu amb una funció de classe $\boldsymbol{C}_0^\infty$ (vegeu la secció 2.4). Posteriorment, Hopf ([36]; cf. [67]) utilitzà el mètode de Galerkin per demostrar l'existència de solucions febles a Ω fitat en $\mathbb{R}^3$.

El teorema 1 prediu l'existència de solucions febles que compleixen la desigualtat de l'energia (16). De fet, podrien existir solucions febles que no complissin aquesta desigualtat i és per això que a les que ho fan se les sol anomenar solucions febles de Leray-Hopf. En contraposició, per a les solucions clàssiques (16) esdevé una igualtat. Aquesta és fàcilment derivable manipulant directament les equacions de Navier-Stokes i simplement estableix la conservació de l'energia en el fluid. Val la pena remarcar que el terme convectiu s'anul·la en el balanç global d'energia. La seva influència es manifesta en el fet que és el responsable de la transferència d'energia entre remolins de diferents grandàries (entre modes del flux en la representació de Fourier). Detallarem una mica més aquest punt a l'apartat de turbulència.

En el cas de fluxos en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ la situació és molt més satisfactòria que en tres dimensions. El problema està ben posat en el sentit que es pot establir existència i unicitat de solucions febles, i existència i unicitat de solucions clàssiques si les dades del problema són prou regulars. Es pot trobar una explicació física al fons d'aquesta diferència entre els casos bidimensional i tridimensional. En efecte, si prenem el rotacional de l'equació (1) i fem ús d'algunes identitats vectorials estàndards, obtenim l'equació d'evolució de la vorticitat, $\boldsymbol{\omega}$,

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \nu \Delta \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{f} \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T) \,, \tag{17}$$

on el terme $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$ és el responsable del fenòmen que es coneix com a *estirament de vòrtexs* (*vortex stretching*). En dues dimensions aquest terme és identicament zero, però en tres dimensions això no és així i el terme actua com un amplificador de la vorticitat. Fent ús de l'anomenat *teorema d'escala* (*ladder theorem*) per les equacions de Navier-Stokes, es pot veure que és precisament la presència extra del terme d'estirament de vòrtexs el que no permet obtenir una prova de regularitat acceptable en tres dimensions ([15]).

Els teoremes d'existència i unicitat que hem presentat, juntament amb els seus equivalents en dues dimensions, conformen el nucli central de la teoria clàssica de les equacions de Navier-Stokes. En aquest context, és clar que encara manca resoldre dos problemes fonamentals: la unicitat de les solucions febles i l'existència de solucions clàssiques per a qualsevol instant de temps. La importància d'aquestes qüestions s'ha vist reflectida amb la seva consideració com un dels set «problemes del mil·leni» proposats pel Clay Mathematics Institute ([10]).

Existeixen molts resultats addicionals de regularitat en altres espais que tanmateix no presentarem aquí (el lector interessat pot trobar una extensa bibliografia a [67]). A la pròxima secció ens limitarem a exposar breument aquells resultats de regularitat parcial que tinguin una relació més directa amb el tema que ens ocupa en aquest article, és a dir, la simulació numèrica de fluxos turbulents mitjançant LES.

2.3 Regularitat parcial i solucions admissibles

Conjunt de singularitats. Tot i que Leray en els seus treballs pioners ja va iniciar l'estudi sobre la grandària del conjunt de singularitats temporals de les solucions febles de les equacions de Navier-Stokes, no fou fins als anys setanta que Scheffer ([64]) plantejà l'estudi del conjunt de singularitats espacio temporals de les solucions. S'entén que $(\boldsymbol{x}, t)$ és un punt *singular* de la solució $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ si, i només si, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \notin L^\infty(D)$ per qualsevol entorn D de $(\boldsymbol{x}, t)$ ([7]) (la resta de punts s'anomenen *regulars*). Probablement, el resultat més destacable de Scheffer fou demostrar que existeix una solució feble de (1) tal que, sota certes condicions, el seu conjunt de punts singulars, $S := \{(\boldsymbol{x}, t) \subset \Omega \times (0, T) \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \notin L^\infty(D) \; \forall \, D \mid (\boldsymbol{x}, t) \in D\}$, satisfà $\mathcal{H}^{\frac{5}{3}}(S) = 0$, on $\mathcal{H}^k$ denota la mesura k-dimensional de Hausdorff.[3] Recordem que la me-

3 De fet, Scheffer demostrà $D_{\mathcal{H}}^{\frac{5}{3}}(S) < \infty$ tot i que una lleugera modificació dels seus arguments porta a $D_{\mathcal{H}}^{\frac{5}{3}}(S) = 0$ (vegeu e. g., [22]).

sura k-dimensional de Hausdorff d'un conjunt A es defineix com

$$\mathcal{H}^k(A) := \lim_{r \to 0} \left(\inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} r_n^k \,\middle|\, A \subset \cup_{n=1}^{N} B_n, \right.\right.$$
$$\left.\left. \text{amb } B_n \text{ una bola oberta de radi } r_n \leq r \right\} \right) \tag{18}$$

i que ens permet definir la dimensió de Hausdorff de A (que és una de les possibles dimensions fractals) com

$$D_{\mathcal{H}}(A) := \inf \left\{ d > 0 \,|\, \mathcal{H}^d(A) = 0 \right\}. \tag{19}$$

Caffarelli, Kohn i Nirenberg ([7]; vegeu també Lin, [51]) milloraren l'estimació de Scheffer i obtingueren el millor resultat de regularitat parcial que es coneix fins al moment, $\mathcal{H}^1(S) = 0$. Dit d'una manera planera, el resultat estableix que el conjunt de singularitats espacio temporals S d'una solució feble de les equacions de Navier-Stokes ha de tenir una «grandària» menor a la d'una corba suau.

Solucions admissibles o dissipatives. Deixant de banda les hipòtesis de regularitat sobre les condicions inicials i el terme de força, la condició principal que tan Scheffer com Caffarelli *et al.* requeriren a les seves demostracions fou el compliment d'una condició local d'energia que motivà la definició de solucions *admissibles* de les equacions de Navier-Stokes ([64, 7]). Conseqüentment, el resultat $\mathcal{H}^1(S) = 0$ en principi no és vàlid per a qualsevol tipus de solució feble, sinó tan sols per a aquelles que satisfan la condició d'admissibilitat que es defineix a continuació (val a dir que He, [34], ha demostrat molt recentment que això no és necessàriament així i que el resultat $\mathcal{H}^1(S) = 0$ és ampliable a solucions febles més generals del tipus Leray-Hopf).

3 Definició *Donada una solució feble de les equacions de Navier-Stokes,* $[\boldsymbol{u}, p]$*, direm que aquesta és* admissible *si* $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; \boldsymbol{X}(\Omega)) \cap L^\infty\left(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right)$, $p \in L^{\frac{5}{4}}(\Omega \times (0, T))$ *i es compleix la desigualtat següent local de l'energia en el sentit distribucional*

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{u}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 + p\right)\right) - \nu\Delta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) + \nu\,(\nabla\boldsymbol{u})^2 + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \leq 0. \tag{20}$$

La demostració d'existència de solucions admissibles per a les equacions de Navier-Stokes a $\mathbb{R}^3$ i a Ω fitat es pot trobar respectivament a [64] i a [7]. Hi ha una certa esperança en el fet que les solucions admissibles puguin jugar un paper més o menys rellevant en la resolució de l'entrellat que avui en dia comporta la manca d'unicitat de les solucions febles i l'explosió de les solucions clàssiques per a intervals de temps finits. Tot i que la relació entre solucions admissibles, febles i clàssiques no és clara en absolut (són úniques les solucions admissibles?, si és així, són solucions en el sentit clàssic?, les solucions febles Leray-Hopf són admissibles?), s'espera que almenys les primeres ajudin a discernir entre aquelles solucions febles *físicament acceptables* i aquelles que no ho són ([17, 29, 31]). En aquest sentit, Duchon i Robert ([17]) analitzaren la forma explícita de la distribució $D(\boldsymbol{u})$ que manca a (20) per tal d'assolir la igualtat, i. e., van considerar l'equació local de l'energia en el sentit de les distribucions

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right)+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{u}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2+p\right)\right)-\nu\Delta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right)+\nu\left(\nabla\boldsymbol{u}\right)^2+D\left(\boldsymbol{u}\right)=0,$$

i observaren que $D(\boldsymbol{u})$ s'anul·la per a fluxos suaus però que adquireix una expressió no trivial si la solució no és prou regular. Per tant, la falta de conservació local de l'energia cinética és deguda en part a la dissipació viscosa i en part a la falta de regularitat de la solució. Les solucions que satisfan $D(\boldsymbol{u}) \geq 0$ foren considerades físicament acceptables per Duchon i Robert, car no permeten la creació local d'energia, i proposaren anomenar-les solucions *dissipatives*. Aquestes solucions coincideixen, per tant, amb la noció de solucions admissibles de Scheffer i Caffarelli *et al.*, i és d'esperar que siguin més regulars que les solucions febles més generals de Leray-Hopf, que, com hem vist, compleixen la desigualtat global de l'energia (16). Aquest punt sembla confirmar-se pel fet que les solucions de versions regularitzades de les equacions de Navier-Stokes, com ara la proposada per Leray, compleixen $D(\boldsymbol{u}) \geq 0$ (vegeu la secció següent). Duchon i Robert utilitzaren condicions de contorn periòdiques en la seva anàlisi i no inclogueren el terme de força per simplicitat.

Veurem més endavant que el concepte de solucions admissibles es troba a la base dels intents actuals de dotar la LES d'una base matemàtica més rigorosa i que donen peu a la definició d'*aproximacions admissibles* de les equacions de Navier-Stokes.

2.4 Cercant unicitat: modificació de les equacions originals

Hom es podria plantejar a continuació què caldria fer per tal d'aconseguir que les solucions febles de les equacions de Navier-Stokes fossin úniques, de manera que aquestes constituïssin un sistema dinàmic determinista clàssic. Per una banda, ens podríem preguntar què fóra necessari demostrar per tal que les equacions originals (1) tinguessin solució única, i per l'altra, ens podríem plantejar (en part prenent com a base la resposta a la primera qüestió) si modificant lleugerament les equacions originals és possible obtenir unicitat. La resposta al primer plantejament és sorprenent en el sentit que, malgrat el fet que la diferència entre el que cal provar per obtenir unicitat i el que ja s'ha demostrat és certament petita, de moment aquesta diferència ha resultat insalvable. Per exemple, fent servir el teorema d'escala de les equacions de Navier-Stokes és possible veure que, en el cas de (1) amb condicions de contorn periòdiques, n'hi hauria prou amb demostrar que $\boldsymbol{u} \in L^2\left(0,T;\boldsymbol{H}^1_{\text{per}}(\Omega)\right)\cap L^\infty\left(0,T;\boldsymbol{L}^{3+\varepsilon}(\Omega)\right)$ per ε tan petit com vulguem ([15]), mentre que el que se sap fins ara és que

$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1_{\text{per}}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$ (vegeu el teorema 1). Pel cas de condicions de Dirichlet a Ω fitat n'hi hauria prou amb veure que $\boldsymbol{u} \in L^2\left(0, T; \boldsymbol{H}^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0, T; \boldsymbol{L}^4(\Omega)\right)$, o que $\boldsymbol{u} \in L^2\left(0, T; \boldsymbol{H}^2(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right)$ (vegeu e. g., [66]).

Pel que fa al segon plantejament, hi ha diverses tècniques de regularització que han donat lloc a variants o models de les equacions de Navier-Stokes amb la propietat de tenir solució feble única i a més a més admissible. Alguns dels exemples més coneguts d'aquests models són els de convolució de Leray, el d'hiperviscositat de Lions o el de viscositat no lineal de Ladyženskaja i Kaniel, que presentem tot seguit.

Model de convolució de Leray. Leray ([50]; cf. e. g., [31]) va proposar un model consistent a regularitzar les equacions (1)-(2) mitjançant la convolució d'alguns termes (en especial el convectiu) amb una funció infinitament diferenciable, no negativa i de suport compacte a $\mathbb{R}^3$. Sigui $B\,(\mathbf{0}, \varepsilon)$ la bola de radi ε centrada a $\mathbf{0}$ i ψ_ε una funció tal que

$$\psi_\varepsilon \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right), \ \text{supp}\,(\psi_\varepsilon) \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon), \ \psi_\varepsilon > 0,$$
$$\int_\Omega \psi_\varepsilon\,(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 1 \quad \text{i} \quad \psi_\varepsilon\,(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon}\psi_\varepsilon\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right).$$

Si denotem per $*$ el producte de convolució, $\psi_\varepsilon * \omega\,(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \psi_\varepsilon\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\,\omega\,(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$, i considerem el cas del tor tridimensional $\mathcal{T} = (0, 2\pi)^3$, el model regularitzat proposat per Leray es pot escriure com

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t \boldsymbol{u}_\varepsilon + (\psi_\varepsilon * \boldsymbol{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon - \nu\Delta\boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \psi_\varepsilon * \boldsymbol{f} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0 \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon \ \text{periòdica} \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon|_{t=0} = \psi_\varepsilon * \boldsymbol{u}_0 \end{array}\right\}. \tag{22}$$

Es satisfà el teorema següent ([31]; vegeu també [17, 50]):

4 Teorema *Per a qualssevol $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}(\Omega)$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ i per a tot $\varepsilon > 0$, el problema (22) té solució única a $\boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ per a cada t. La velocitat està uniformement fitada a $L^2\,(0, T; \boldsymbol{V}(\Omega)) \cap L^\infty\,(0, T; \boldsymbol{H}(\Omega))$ i existeix una subsuccessió que convergeix a $L^2\,(0, T; \boldsymbol{V}(\Omega))$ feblement. A més, el límit de la solució per $\varepsilon \to 0$ és una solució feble admissible de les equacions de Navier-Stokes.*

Model d'hiperviscositat de Lions. Lions ([52, 53]; cf. [31]) proposà pertorbar les equacions de Navier-Stokes afegint un terme de viscositat addicional, de manera que aquestes esdevenen

$$\left.\begin{array}{l}\partial_t \boldsymbol{u}_\varepsilon + \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon - \nu \Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon + \varepsilon^{2\alpha} (-\Delta)^\alpha \boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \boldsymbol{f} \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T) \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon|_\Gamma,\ \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_\varepsilon|_\Gamma,\ \partial_{\boldsymbol{n}}^{\alpha-1} \boldsymbol{u}_\varepsilon\Big|_\Gamma = 0 \quad \text{o} \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon \ \text{periòdica} \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \end{array}\right\}. \tag{23}$$

Es pot veure que es satisfà el teorema següent ([31]; vegeu també [52, 53, 30]):

5 Teorema *Siguin $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}(\Omega))$ i $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}^\alpha(\Omega) \cap \boldsymbol{X}(\Omega)$. Aleshores el problema (23) té una solució única $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{H}^\alpha(\Omega) \cap \boldsymbol{X}(\Omega))$ per tot $T > 0$ si $\alpha \geq \frac{d+2}{4}$. A més, existeix una subsuccessió tal que $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ convergeix feblement a $L^2(0, T; \boldsymbol{X}(\Omega))$ cap a una solució feble $\boldsymbol{u}$ de (1). En el cas de condicions de contorn periòdiques, la solució és admissible.*

Model de viscositat no lineal de Ladyženskaja i Kaniel. Ladyženskaja i Kaniel ([44, 45, 41]; cf. [31]) proposaren regularitzar les equacions de Navier-Stokes considerant una viscositat no lineal, en contraposició a la hipòtesi lineal de fluid newtonià, per tal de poder tractar amb gradients grans de velocitat.

Sigui $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ una funció tensorial que satisfà les condicions següents:

a) $\boldsymbol{T}$ és continu i existeix $\mu \geq \frac{1}{4}$ tal que $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es compleix $|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})| \leq c\left(1 + |\boldsymbol{\xi}|^{2\mu}\right)|\boldsymbol{\xi}|$.

b) $\boldsymbol{T}$ és coerciu en el sentit següent: $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ es compleix que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\xi} \geq c\,|\boldsymbol{\xi}|^2 (1 + c'\,|\boldsymbol{\xi}|^{2\mu})$, on el símbol : indica la doble contracció de dos tensors.

c) $\boldsymbol{T}$ té la propietat de monotonia següent: existeix una constant $c > 0$ tal que, per a qualssevol camps vectorials solenoidals $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \in W^{1,2+2\mu}(\Omega)$ amb idèntiques condicions a Γ o essent periòdics, es compleix

$$\int_\Omega (\boldsymbol{T}(\nabla\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{T}(\nabla\boldsymbol{\eta})) : (\nabla\boldsymbol{\xi} - \nabla\boldsymbol{\eta}) \geq \boldsymbol{c} \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{\xi} - \nabla\boldsymbol{\eta}|^2 .$$

Una forma explícita per al tensor $\boldsymbol{T}$ que compleix les condicions anteriors ve donada per

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}) = \beta\left(|\boldsymbol{\xi}|^2\right)\boldsymbol{\xi} \tag{24}$$

essent $\beta(\tau)$ una funció monòtona creixent de $\tau \geq 0$, tal que per valors grans de τ satisfà $c\tau^\mu \leq \beta(\tau) \leq c'\tau^\mu$ per $\mu \geq \frac{1}{4}$ i $c, c' > 0$.

El model de Ladyženskaja i Kaniel s'obté prenent $\boldsymbol{\xi} = \nabla\boldsymbol{u}$ a (24) i afegint el tensor $\boldsymbol{T}(\nabla\boldsymbol{u})$ al terme viscós. Així arribem a (vegeu [31, 44, 45] i [41]):

$$\left.\begin{array}{l}\partial_t\boldsymbol{u}_\varepsilon+\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon-\left(\nu+\varepsilon^{2\mu+1}\beta\left(|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2\right)\right)\Delta\boldsymbol{u}_\varepsilon+\nabla p_\varepsilon=\boldsymbol{f}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_\varepsilon=0\\ \boldsymbol{u}_\varepsilon|_\Gamma=0\quad\text{o}\quad\boldsymbol{u}_\varepsilon\ \text{periòdica}\\ \boldsymbol{u}_\varepsilon|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0\end{array}\right\}. \tag{25}$$

6 Teorema *Siguin* $\boldsymbol{f}\in L^2\left(0,\infty;\boldsymbol{L}^2(\Omega)\right)$ *i* $\boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{H}(\Omega)$. *Si es satisfan les condicions a, b i c anteriors, el problema* (25) *té una solució feble única per a tot* $T>0$ *a l'espai* $L^{2+2\mu}\left(]0,T[\,;\boldsymbol{W}^{1,2+2\mu}(\Omega)\cap\boldsymbol{V}(\Omega)\right)\cap C^0([0,T];\boldsymbol{H}(\Omega))$. *En el cas de condicions de contorn periòdiques, existeix una subsuccessió tal que* $(\boldsymbol{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)$ *tendeix a una solució admissible de* (1).

En resum, mitjançant els tres exemples precedents acabem de constatar com una lleu modificació de les equacions originals (1)-(2), bé sigui «suavitzant» el terme convectiu, afegint un terme d'hiperviscositat o bé afegint una viscositat amb dependència no lineal amb el gradient de velocitat, comporta la unicitat i admissibilitat de les solucions (amb alguna restricció en la regularitat de les dades, com es veu dels teoremes 4, 5 i 6). Aquesta circumstància ha fet plantejar dubtes sobre si realment les equacions de Navier-Stokes són un model vàlid per a la descripció de fluxos turbulents o si, per contra, algun dels models regularitzats que hem presentat en constitueixen una millor descripció física. Tot i que aquesta és una possibilitat a considerar, el corrent d'opinió més generalitzat actualment no segueix aquesta línia de pensament. Al contrari, es tendeix a creure que les equacions de Navier-Stokes originals són suficients per descriure tota la fenomenologia física d'un fluid, incloent-hi la turbulència.

3 Les «grans» escales del flux: LES (Large Eddy Simulation)

3.1 Transició a la turbulència: dependència amb Re

Hem comentat, a la introducció, que les equacions de Navier-Stokes posseeixen una gran varietat i riquesa de solucions i acabem d'explicar que es creu que són suficients per descriure la fenomenologia d'un flux turbulent. El procés pel qual un sistema dinàmic, com el que ens ocupa (1), passa d'exhibir una solució senzilla (e. g., el flux laminar al voltant d'un cos) a exhibir una solució altament complexa (e. g., flux turbulent al voltant del mateix cos) ve descrit qualitativament per la *teoria de bifurcacions*. Descriurem breument i per mitjà d'un exemple el funcionament d'aquest procés.

Equacions adimensionals. En primer lloc, i per facilitar les coses, adimensionalitzarem les equacions de Navier-Stokes. Siguin U_0 i L una velocitat i una longitud característiques del problema. Aleshores definim les variables adimensionals independents de longitud ($\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}/L$) i temps ($t' = U_0 t/L$), i les variables adimensionals dependents de velocitat ($\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}), t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)/U_0$) i pressió $\left(p'(\boldsymbol{x}, t) = p(\boldsymbol{x}, t) / \left(\rho U_0^2\right)\right)$, i les substituïm a (1). Obtenim

$$\partial_t \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}' \cdot \nabla \boldsymbol{u}' - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p' = \boldsymbol{f}' \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T), \tag{26}$$

on $\mathrm{Re} := U_0 L/\nu$ és el nombre de Reynolds que expressa quan un flux està dominat per la convecció (Re alt) o per la viscositat (Re baix). El nombre de Reynolds és una mesura de la importància relativa entre els termes d'inèrcia i els viscosos. Notem que amb aquest procediment hem aconseguit simplificar la dependència paramètrica de les equacions a un sol paràmetre, Re, de manera que fluxos amb diferents combinacions de U_0, L i ν però igual Re es comportaran de manera idèntica. A aquesta propietat se l'anomena *similaritat* respecte el nombre de Reynolds.

Estabilitat i nombre de Reynolds. La naturalesa de les solucions que presenta el sistema (26) varia en funció del valor de Re. Per valors d'aquest nombre en determinats intervals, aquestes no canvien significativament en modificar lleugerament el valor de Re, i diem que el sistema (26) és *estructuralment estable*. Tanmateix, per certs valors de Re això no es compleix i es produeixen canvis substancials. En aquest cas el sistema esdevé *estructuralment inestable* i pateix una *bifurcació*. Sense entrar en detalls tècnics, veurem amb un exemple com un fluid pot passar d'un estat laminar a un de turbulent a través d'un procés de bifurcacions successives.

Considerem el cas del pas d'un fluid al voltant d'un cilindre ([16]). Per a $\mathrm{Re} \simeq 0$ tenim un flux dit de Stokes i la configuració és totalment simètrica. El flux és estacionari, reversible en el temps i presenta simetria especular respecte al pla definit per l'eix del cilindre i la velocitat d'incidència (simetria dalt/baix), i simetria especular respecte al pla perpendicular a l'anterior (simetria davant/darrere). Per a $\mathrm{Re} \simeq 10$ aquesta última simetria es trenca i es formen un parell de vòrtexs de recirculació estacionaris darrere del cilindre. Aquests vòrtexs van creixent a mesura que augmenta Re i el sistema roman estructuralment estable fins que s'arriba a valors de $\mathrm{Re} \simeq 45$. Aleshores té lloc una bifurcació de Hopf[4] i el sistema deixa de ser estacionari, al mateix temps que perd la seva simetria dalt/baix. Per un punt del fluid, la solució ha passat de ser un punt fix a un cicle límit a l'espai de fases i la seva transformada de Fourier mostra una sola freqüència diferent de zero. Darrere el cilindre, es genera una estela de vòrtexs que es van desprenent alternativament formant el que es coneix com a *camí de Von Kármán* (*Von Kármán vortex street*). El sistema es manté estructuralment estable per a Re creixent fins que s'arriba a valors de l'ordre de $\mathrm{Re} \simeq 200$. Aleshores té lloc una altra bifurcació de Hopf

4 Un parell de valors propis complexos del sistema linealitzat associat a (26) creuen l'eix imaginari.

corresponent a una inestabilitat tridimensional a l'estela del cilindre. L'espectre de la solució en un punt presenta dues freqüències discretes i la dinàmica a l'espai de fases té lloc en un tor bidimensional (flux quasiperiòdic). Per a Re $\simeq 260$ es produeix una altra bifurcació i, finalment, si seguim augmentant el nombre de Reynolds el flux esdevé caòtic, la qual cosa definim com a *turbulència*, havent passat per un total de tres o quatre bifurcacions. L'espectre de la solució en un punt passa de ser discret a continu i el tor de l'espai de fases es «trenca» i passa a ser un *atractor estrany*. Les seccions de Poincaré corresponents passen a tenir dimensió de Hausdorff $D_{\mathcal{H}} > 1$.

Aquest comportament descrit per al cas d'un cilindre és completament generalitzable. Si considerem un punt $\boldsymbol{x} \in \Omega$ i estudiem el vector de velocitats $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ quan $t \to \infty$ per a Re *creixent* es distingeixen les fases següents:

1. $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ convergeix a $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$.
2. $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ convergeix (amb t) a un *estat periòdic*, caracteritzat per una transformada de Fourier en t amb una única freqüència d'amplitud no nul·la.
3. La transformada de Fourier en t de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ té l'espectre discret, amb més d'una freqüència (*flux quasiperiòdic*).
4. La transformada de Fourier en t de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ té l'espectre continu i les seccions de Poincaré tenen dimensió (de Haussdorf) > 1 (*flux caòtic*).

La situació que acabem de descriure correspon a un dels possibles *escenaris* o *rutes* de transició al caos i a la turbulència. En concret correspon a la ruta de Ruelle-Takens-Newhouse ([62, 55]; cf. [18, 16]). Tanmateix, són possibles altres escenaris de transició a la turbulència en què el procés successiu de bifurcacions no involucra bifurcacions de Hopf, sinó d'altres tipus. Destaquem l'escenari de *duplicació de període,* o de Feigenbaum, associat a bifurcacions de forca (*pitchfork*) (vegeu [19]; cf. [18, 16]), l'escenari d'*intermitència*, associat a bifurcacions de punts de sella (vegeu [58]; cf. [18, 16]) i l'escenari d'*inestabilitat subcrítica* ([16]). Gran part de la dificultat de la teoria de bifurcacions rau en el fet que els detalls del procés de transició a la turbulència varien notablement d'un flux a l'altre i resulta molt complicat generalitzar resultats. De fet, la teoria presenta un marc matemàtic que permet explicar de manera qualitativa la transició a la turbulència ([16]).

3.2 Fluxos turbulents: Navier-Stokes i teoria de Kolmogorov

Ens centrarem ara en els fluxos amb *turbulència plenament desenvolupada*, és a dir, a la fase 4 de la ruta al caos descrita anteriorment. Sens dubte, la teoria més coneguda i amb més èxit que descriu el comportament d'un flux turbulent és la que Kolmogorov formulà l'any 1941 ([42]; cf. [59]), a la qual ens referirem de forma abreujada com a K41. Aquesta teoria es pot trobar descrita en un gran nombre de referències bibliogràfiques (e. g., [59, 15, 21]) i aquí tan sols n'introduirem els fonaments i els resultats més importants.

Teoria de Kolmogorov (K41). El flux turbulent es considera format per remolins (vòrtexs) de diferents grandàries, tenint en compte que la regió ocupada per un remolí gran en pot contenir també de menors. Els diferents remolins es caracteritzen per una longitud l i una velocitat u. Per a un fluid amb nombre de Reynolds $\mathrm{Re} := U_0 L/\nu$, els remolins més grans del flux tenen una longitud característica $l \sim L$, i una velocitat característica $u \sim U_0$. Aquí i en el que segueix, fem servir el símbol $\sim$ per indicar «de l'ordre de».

L'energia es transmet dels remolins grans als petits seguint un procés que es coneix amb el nom de *cascada d'energia*, proposat per primera vegada per Richardson ([60]; cf. [59]). Segons aquest procés, els remolins grans esdevenen inestables i es trenquen, i transfereixen energia als remolins de menor magnitud. Per la seva banda, aquests també s'acaben tornant inestables, es desfan i lliuren la seva energia a remolins més petits. S'estableix, doncs, una cascada de transferència d'energia cap a remolins d'escala cada cop menor, fins que s'arriba a remolins amb un nombre de Reynolds $\mathrm{Re}(l) := ul/\nu$ prou petit per ser estables, i tals que la viscositat sigui capaç de dissipar energia cinètica. Aquest mecanisme de transferència i dissipació d'energia cinètica es manté gràcies a l'energia que les forces externes del fluid subministren a les escales grans[5] de manera contínua. La cascada d'energia es produeix sense pèrdues, d'on resulta que la mitjana temporal del ritme d'injecció d'energia al fluid ha de ser igual a la mitjana temporal del ritme de dissipació d'energia, ε, a les escales petites. De l'anàlisi dimensional es deriva que $\varepsilon \sim U_0^3/L$.

Podem concloure de la descripció anterior que existeix un determinat interval d'escales, SI, tal que els remolins amb $l \in SI$ no es veuen afectats ni per l'anisotropia dels remolins més grans del flux, ni per la dissipació de les escales més petites. Aquest interval es coneix amb el nom de *subrang inercial* i a efectes pràctics l'experimentació indica que ve donat per $SI \simeq [l_{DI}, l_{EI}] := [60\lambda_K, L/6]$, on λ_K és la denominada *escala de Kolmogorov,* o *longitud de dissipació de Kolmogorov,* que definirem en breu. Al subrang inercial, l'espectre de la densitat d'energia, $E(k,t)$, definit com la funció d'energia cinètica a l'espai de Fourier

$$E(k,t) := \frac{L}{2\pi} \sum_{|\boldsymbol{k}|_\infty = k} \frac{1}{2} |\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t)|^2,$$

només pot dependre de ε i k, i. e., $E(k,t) \sim \varepsilon^a k^b$. Fent servir l'anàlisi dimensional és immediat comprovar que $a = 2/3$ i $b = -5/3$, de manera que obtenim el famós espectre de Kolmogorov per a la turbulència homogènia i isòtropa

$$E(k,t) \sim C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{27}$$

essent C_K una constant adimensional i universal (i. e., vàlida per a qualsevol flux turbulent). D'altra banda, la longitud de dissipació de Kolmogorov λ_K

5 De fet, la força externa pot subministrar energia a totes les escales, però per facilitar l'explicació suposarem que el seu suport es limita a les escales grans del flux.

correspon a aquella escala en què es compleix $\mathrm{Re}\,(\lambda_K) = 1$ (la convecció es tan important com la dissipació). A partir d'aquesta relació i utilitzant (27) per obtenir la velocitat, arribem a

$$\lambda_K = c_K \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{28}$$

que és de fet l'única escala de longitud que es pot formar a partir de ν i ε. Es compleix que $c_K = 2\pi\,(3C_K/2)^{3/4}$. Fent servir novament l'anàlisi dimensional podem relacionar λ_K amb el nombre de Reynolds del fluid. Emprant (28) i observant que ε s'ha de comportar com $L^{-1}U^3$ s'arriba a

$$\frac{\lambda_K}{L} \sim \mathrm{Re}^{-\frac{3}{4}}. \tag{29}$$

Siguin k_{EI} i k_{DI} els nombres d'ona associats a les longituds l_{EI} i l_{DI}, respectivament, les quals defineixen el subrang inercial. En funció de la descripció que acabem de fer, l'espectre de densitat d'energia en funció del nombre d'ona k ha de tenir tres zones rellevants:

1. Per a $k < k_{EI}$, $E(k,t)$ correspon a l'energia dels patrons de flux «macroscòpics» (vòrtexs).
2. Per a $k_{EI} \le k \le k_{DI}$, es compleix $E(k,t) \propto k^{-5/3}$.
3. Per a $k > k_{DI}$, encara que Re sigui molt gran (ν molt petita) els efectes viscosos dissipen aquestes escales de flux (les quals més endavant anomenarem *no capturables*).

L'any 1962, el mateix Kolmogorov va modificar la teoria K41 que acabem d'esquematitzar per tal d'ajustar algunes diferències detectades entre les prediccions i les mesures dels moments d'ordre elevat del camp de velocitats del flux ([43, 56] cf. [59].). Aquestes discrepàncies s'associen a estranyes i poc probables concentracions intenses o «explosions» de vorticitat lluny del seu valor mitjà. El fenomen es coneix amb el nom d'*intermitència interna* (vegeu la secció anterior) i considera la possibilitat que, durant aquestes explosions, hi hagi longituds característiques del flux menors que l'escala de Kolmogorov ([15]).

Relació entre K41 i les equacions de Navier-Stokes. A part del fet que la teoria K41 duu a prediccions experimentals notables, un dels aspectes més sorprenents d'aquesta és que no fa ús de les equacions de Navier-Stokes. Kolmogorov construeix la seva teoria basant-se en raonaments heurístics sobre la isotropia i similaritat del flux, i utilitzant l'anàlisi dimensional com a eina de treball. Si com hem assegurat en seccions precedents, acceptem que les equacions de Navier-Stokes són vàlides per a descriure el comportament de qualsevol flux, és evident que a partir d'aquestes s'haurien de poder reproduir els resultats de la teoria de Kolmogorov. Tanmateix, aquesta no és una tasca fàcil i només començar ja toparem amb una dificultat, que es deu al caràcter local de l'existència de solucions clàssiques en tres dimensions (teorema 2). Recordem que estem considerant què passa en el cas de turbulència desenvolupada (pas 4 dels esmentats a la subsecció 3.1), i que, per tant, estem considerant el comportament temporal a llarg termini.

Una primera aproximació a l'objectiu de relacionar les teories de Kolmogorov i de Navier-Stokes es pot obtenir a partir de la transformada espacial de (1)-(2):

$$\begin{aligned} &\partial_t \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t) - \frac{\mathrm{i}}{L^3}\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{k^2}\right) \cdot \sum_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{k}} \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}',t)\cdot \boldsymbol{k}''\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}'',t) \\ &\qquad\qquad + \nu k^2 \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t) = \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k}), \qquad (30) \\ &\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t) = 0, \end{aligned}$$

on $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{I}$ és el tensor unitat i $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}/k^2$ el projector a camps vectorials de divergència nul·la. Podem observar que (30) ens il·lustra més clarament el fet que el terme convectiu és el responsable de l'acoblament entre modes i, per tant, de la transferència d'energia entre ells d'acord amb la imatge de la cascada d'energia. Aquest terme no intervé en el balanç global de l'energia (16). Per la seva banda, aquest balanç (desigualtat de Leray) ens suggereix definir la mitjana temporal del ritme de dissipació d'energia per unitat de massa, $\varepsilon \equiv \varepsilon^{t2}$, com

$$\varepsilon^{t2} := \frac{\nu}{L^3}\left\langle \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2^2 \right\rangle. \qquad (31)$$

Sabem que l'energia cinètica del flux és finita i, per tant, la desigualtat de Leray ens garanteix que ε^{t2} definit segons (31) també ho serà. D'altra banda, observem que a (30) la presència de k^2 fa que el terme viscós $\nu k^2 \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t)$ sigui major per a nombres d'ona elevats (longituds petites) d'acord també amb la idea de Kolmogorov que la dissipació es produeix a les escales petites del flux. Tanmateix, per a recuperar de manera rigorosa els resultats de K41 no n'hi ha prou amb aquesta visió global que intuïm a partir de (30) i s'ha de recórrer a nous enfocaments. Recentment, Foias, Manley, Rosa i Temam ([20]; vegeu també [21]) han demostrat de manera rigorosa i partint de les equacions de Navier-Stokes el funcionament de la cascada d'energia de Richardson-Kolmogorov que hem descrit.

D'altra banda, un paper central a K41 el juga precisament la longitud de dissipació de Kolmogorov λ_K. Aquesta escala s'ha intentat deduir a partir de la recerca de la dimensió de l'*atractor global* o *universal*[6] de les equacions de Navier-Stokes. La idea és la següent: per un flux tridimensional d'escala carac-

6 Una possible definició per a l'atractor global, $\mathcal{A}$, és el conjunt de punts de l'espai de fases als quals es pot arribar des d'una condició inicial en un temps arbitràriament gran del passat, i. e., $\mathcal{A} = \cup_{\rho>0} \cap_{t>0} B_\rho(t)$, essent $B_\rho(t)$ una bola de radi ρ de condicions inicials a l'espai de fases.

terística L, necessitarem, d'acord amb K41 (vegeu (29)),

$$\mathcal{N} \sim \left(\frac{L}{\lambda_K}\right)^3 \sim \mathrm{Re}^{\frac{9}{4}} \tag{32}$$

graus de llibertat per tal de resoldre'l, ja que no hi ha vòrtexs actius per a $l < \lambda_K$ i, per tant, podem pensar que el flux es podrà representar, per exemple, per les components de la transformada de Fourier de nombre d'ona des de $1/L$ fins a $1/\lambda_K$ escalats cada $1/L$. D'altra banda, podem identificar el nombre de graus de llibertat d'un sistema, $\mathcal{N}$, amb la dimensió del seu atractor global ([15]). Si (32) representa la dimensió de l'atractor del flux turbulent segons la teoria de Kolmogorov, el que cal fer es trobar la dimensió de l'atractor global de les equacions de Navier-Stokes i veure si s'en dedueix la mateixa escala característica, λ_K.

El primer problema amb què ens trobem es deu novament al caràcter local de les solucions clàssiques (teorema 2), fet que, com hem comentat anteriorment, no ens assegura l'existència d'un atractor global. Per tant, les anàlisis que s'han fet pressuposen l'existència d'aquest atractor. De moment no s'ha arribat a la fita (32), però sí a algunes que s'hi acosten. Els resultats més precisos que s'han aconseguit fins al moment es deuen a Gibbon i Titi ([25]), que han demostrat en essència que la dimensió de l'atractor es pot fitar per $(L/\lambda_K)^{4,8}$ (de fet, a la seva fita no apareix la longitud λ_K, però sí una que s'hi pot relacionar). Es pot aconseguir el valor 3 per a l'exponent si assumim més regularitat espacial i suposem $\nabla \boldsymbol{u} \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ ([14]). La descripció del problema de fitar la dimensió de l'atractor es pot trobar, per exemple, a [15, 25].

3.3 LES: Large Eddy Simulation

Fins ara hem fet un breu repàs d'alguns aspectes de la teoria matemàtica de les equacions de Navier-Stokes i de la seva relació amb la teoria estàndard de la turbulència. Òbviament, en general no és possible resoldre analíticament aquestes equacions i, per tant, cal plantejar-se la possibilitat de resoldre-les numèricament. Això ens permetria, d'una banda, disposar d'una eina addicional molt útil per a ajudar a entendre tant els processos de transició a la turbulència com la intricada física que presenten els fluids amb turbulència plenament desenvolupada. D'altra banda, la resolució numèrica de les equacions també ens permetria abordar tota una sèrie de problemes d'enginyeria de gran interès.

La branca de les matemàtiques dedicada a la simulació numèrica del comportament dinàmic dels fluids es coneix amb el nom de *fluidodinàmica computacional* (CFD: Computational Fluid Dynamics). Per al cas de fluxos turbulents existeixen bàsicament tres possibilitats d'actuació en CFD (vegeu, e. g., [63, 59]). Aquestes són la utilització dels anomenats models RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), la simulació directa DNS (Direct Numerical Simulation) i la simulació de les grans escales del flux, dita de remolins grans, LES

(Large Eddy Simulation). La simulació RANS pot ser d'una gran utilitat a l'hora de trobar quantitats mitjanes (e. g., el coeficient de sustentació d'un cos) però té el problema de no capturar les fluctuacions temporals del flux, amb la qual cosa deixa de ser d'utilitat en molts casos (e. g., els característics de l'aeroacústica). La DNS es basa a resoldre directament les equacions de Navier-Stokes (1)-(2) sense fer-hi cap tipus de modificació o mitjana. Ara bé, hem vist que la dimensió de l'atractor global és de l'ordre de $\mathrm{Re}^{\frac{9}{4}}$ (32), segons la teoria K41, de manera que necessitarem $\mathrm{Re}^{\frac{9}{4}}$ graus de llibertat per a capturar tota la fenomenologia del flux. Si tenim en compte que la majoria de problemes industrials d'interès tenen nombres de Reynolds de l'ordre de 10^6-10^9, la simulació DNS resulta ser una tasca inassequible per als ordinadors actuals. Finalment, la simulació LES es pot considerar una via intermèdia entre les dues anteriors. La idea és fer una descomposició dels camps de velocitat i pressió en la forma $[\boldsymbol{u}, p\,] = [\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}\,] + [\boldsymbol{u}', p'\,]$, on $[\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}\,]$ representa les escales «grans» del flux, i per tant computables, mentre que $[\boldsymbol{u}', p'\,]$ correspon a les escales petites, no resolubles. El punt clau de la LES consistirà precisament a trobar un bon model que representi l'efecte de les escales petites (no capturables) sobre les grans.

Equacions de Navier-Stokes filtrades. La separació entre escales grans i petites del flux s'ha realitzat tradicionalment mitjançant un procés de filtració ([49]; cf. [59]). Sense entrar en detalls pel que fa a la forma particular de les funcions de filtre passa-baix que es solen utilitzar (vegeu, e. g., [63, 59]), i suposant que l'operador filtre $\overline{(\cdot)} : v \longmapsto \overline{v}$ commuta amb els operadors diferencials, podem filtrar les equacions de Navier-Stokes (1)-(2), amb condicions de contorn (3) o (4) i condició inicial (5), i obtenir el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \overline{\boldsymbol{u}} - \nu \Delta \overline{\boldsymbol{u}} + \nabla \overline{p} &= \boldsymbol{f} - \nabla \cdot \mathcal{R} \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{u}} &= 0 \quad \text{a} \quad \Omega \times (0, T) \\ \overline{\boldsymbol{u}} &= 0 \ \text{ o } \ \overline{\boldsymbol{u}} \ \text{ periòdica a } \ \Gamma \\ \overline{\boldsymbol{u}}\,(\boldsymbol{x}, 0) &= \overline{\boldsymbol{u}}_0\,(\boldsymbol{x}) \quad \text{a} \quad \Omega\,. \end{aligned} \tag{33}$$

A (33), el tensor $\mathcal{R} := \overline{\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{u}} \otimes \overline{\boldsymbol{u}}$ es coneix amb el nom de *tensor de tensions residuals, tensor de subescales* o *tensor d'escales de submalla* (subgrid scale tensor). Per tal que (33) sigui un sistema tancat d'equacions per a $[\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}\,]$, és evident que cal expressar $\mathcal{R}$ en funció de $\overline{\boldsymbol{u}}$ solament, fet conegut com a *problema de clausura*. Els diferents models per a $\mathcal{R}$ dónen lloc als diversos models de LES. Un cop n'hem escollit un, el pas final de la LES consisteix a discretitzar (33) i resoldre el sistema numèricament.

Hom podria plantejar-se la possibilitat de trobar una clausura exacta per les equacions (33) de manera que $\mathcal{R}$ es pogués expressar en funció de $\overline{\boldsymbol{u}}$, sense haver de realitzar cap tipus d'aproximació. Això efectivament és possible si considerem, e. g., el filtre de Helmholtz, que ens dóna $\overline{\boldsymbol{u}}$ a partir de la solució de l'equació de Helmholtz $\overline{\boldsymbol{u}} - \varepsilon^2 \nabla^2 \overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}$. Per tant, $\overline{\boldsymbol{u}} := \left(\boldsymbol{I} - \varepsilon^2 \nabla^2\right)^{-1} \boldsymbol{u}$, amb $\varepsilon > 0$ representant l'escala de tall [23, 24, 29]. Tenint en compte que $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} = (\overline{\boldsymbol{u}} - \varepsilon^2 \nabla^2 \overline{\boldsymbol{u}}) \otimes (\overline{\boldsymbol{u}} - \varepsilon^2 \nabla^2 \overline{\boldsymbol{u}})$ i que aplicant el filtre a $\overline{\boldsymbol{u}} \otimes \overline{\boldsymbol{u}}$ obtenim $\overline{\boldsymbol{u}} \otimes \overline{\boldsymbol{u}} = \overline{\overline{\boldsymbol{u}} \otimes \overline{\boldsymbol{u}}} - \varepsilon^2 \nabla^2 \overline{\overline{\boldsymbol{u}} \otimes \overline{\boldsymbol{u}}}$, podem introduir aquestes relacions al tensor de subescales i obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij} &= \overline{(\overline{u}_i - \varepsilon^2 \nabla^2 \overline{u}_i)\left(\overline{u}_j - \varepsilon^2 \nabla^2 \overline{u}_j\right)} - \overline{u}_i \overline{u}_j \\
&= \overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \varepsilon^2 \overline{\overline{u}_j \nabla^2 \overline{u}_i} - \varepsilon^2 \overline{\overline{u}_i \nabla^2 \overline{u}_j} + \varepsilon^4 \overline{\nabla^2 \overline{u}_i \nabla^2 \overline{u}_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \\
&= \varepsilon^2 \nabla^2 \overline{\left(\overline{u}_i \overline{u}_j\right)} - \varepsilon^2 \overline{\overline{u}_j \nabla^2 \overline{u}_i} - \varepsilon^2 \overline{\overline{u}_i \nabla^2 \overline{u}_j} + \varepsilon^4 \overline{\nabla^2 \overline{u}_i \nabla^2 \overline{u}_j} \\
&= 2\varepsilon^2 \overline{\nabla \overline{u}_i \cdot \nabla \overline{u}_j} + \varepsilon^4 \overline{\nabla^2 \overline{u}_i \nabla^2 \overline{u}_j}. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Aquesta expressió[7] ens permet, efectivament, escriure $\mathcal{R}$ en funció de $\overline{\boldsymbol{u}}$ sense haver de fer cap tipus d'aproximació o hipòtesi *ad hoc*. Ara bé, notem que el filtre de Helmholtz el que fa és establir un isomorfisme entre els espais $L^\infty(0, T; \boldsymbol{H}(\Omega))$ i $L^\infty(0, T; \boldsymbol{H}(\Omega) \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega))$, i entre $L^2(0, T; \boldsymbol{V}(\Omega))$ i $L^2(0, T; \boldsymbol{V}(\Omega) \cap \boldsymbol{H}^3(\Omega))$, de manera que l'única cosa que realment hem aconseguit amb la clausura exacta (34) és establir un isomorfisme entre les solucions febles de (1)-(2) i les solucions febles de (33) ([29]). Per tant, el nombre de graus de llibertat necessaris per a resoldre ambdós problemes és el mateix. Aquest resultat es generalitzable a qualsevol clausura exacta de les equacions (33) i ens ve a dir que fer LES en aquestes circumstàncies es tan complicat com fer directament DNS. Això no deixa de ser un fet paradoxal, ja que a primer cop d'ull, hom podria pensar que buscar una clausura com més precisa millor és un objectiu raonable a aconseguir. En canvi, sembla clar que fer LES només té sentit si la clausura no és exacta i es perd part de la informació de les subescales en el procés.

Problemes de la LES. La LES presenta nombrosos problemes o qüestions que manca resoldre. El tema clau segueix sent, sens dubte, trobar un bon model pel tensor de subescales. Acabem de veure que fer-ho amb la intenció d'aconseguir una clausura exacta és paradoxal i que, per tant, aquesta no pot ser una motivació per a construir models de subescales. Val a dir que molts dels models existents de LES estan basats en aproximacions i arguments heurístics, tant físics com numèrics, que funcionen més o menys bé segons el tipus de problema a resoldre. Tanmateix, es difícil arribar a generalitzacions i, tot i que és recomanable que les subescales compleixin algunes propietats, com conservar la invariància sota algunes transformacions que poseeixen les equacions de Navier-Stokes originals, no és clar quines són les regles que un bon model de LES hauria de complir (a part de l'obvietat d'haver de reproduir correctament els resultats experimentals). Una altra qüestió important no resolta

7 En primera aproximació $\mathcal{R}_{ij} \simeq 2\varepsilon^2 \overline{\nabla \overline{u}_i \cdot \nabla \overline{u}_j}$, que és l'aproximació del model de Clark *et al.* ([9]) per la suma de les *tensions de Leonard* més les *tensions creuades* en què es pot descompondre el tensor de subescales ([23]).

de la LES és la relació/interacció entre els errors comesos a causa de la inexactitud del model de subescales i els errors deguts a la discretització i al mètode numèric utilitzat. Tampoc és clara, per exemple, quina ha de ser la relació entre la grandària del suport del filtre, ε, i la grandària de la discretització a l'espai, diguem-ne, h (diàmetre dels elements en una aproximació d'elements finits o distància entre nodes en una aproximació de diferències finites). En definitiva, podem dir que la situació actual és, per dir-ho d'alguna manera, més aviat dispersa i no existeix una teoria matemàtica satisfactòria de la LES, tot i que ja s'han fet alguns passos en aquesta direcció [47, 46, 48, 40].

Aproximacions admissibles. Recentment, Guermond, Oden i Prudhomme ([29]) han fet una anàlisi detallada de diversos models de LES amb la intenció d'aclarir una mica la situació. De la seva anàlisi es deriven diverses conclusions interessants. Per exemple, podem observar que els models que presenten unicitat de les solucions introduïts a la secció 2.4 es poden escriure en la forma característica de les equacions LES. En efecte, tenim:

Model de convolució de Leray. Sense considerar les condicions inicials i de contorn, el model de Leray (22) es pot reordenar en la forma (33):

$$\begin{aligned}
&\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = (\boldsymbol{\psi}_\varepsilon * \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\mathcal{R}_{Le}\,,\\
&\mathcal{R}_{Le} := \boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{\psi}_\varepsilon * \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\,.
\end{aligned}$$

Aquest model té l'inconvenient de no ser invariant sota transformacions del sistema de coordenades, però es pot modificar per tal que així sigui ([29]). El model resultant es coneix amb el nom de *model alpha de Navier-Stokes* (NS-α) ([28]).

Model d'hiperviscositat de Lions. En aquest cas tenim

$$\begin{aligned}
&\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} - \nabla\cdot\mathcal{R}_{Li}\,,\\
&\mathcal{R}_{Li} := \varepsilon^{2\alpha}\,(-\nabla)^{2\alpha-1}\,\boldsymbol{u}\,.
\end{aligned}$$

Model de viscositat no lineal de Ladyženskaja i Kaniel. En aquest model ens queda

$$\begin{aligned}
&\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} - \nabla\cdot\mathcal{R}_{La}\,, \qquad (35)\\
&\mathcal{R}_{La} := -\varepsilon^{2\mu+1}\beta\,|\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\nabla\boldsymbol{u}\,.
\end{aligned}$$

Val a dir que el model de LES més conegut, el model de Smagorinsky ([65]; cf. [59]), correspon a la mateixa estructura que (35) prenent $\mu = 1/2$, $\beta(\tau) = \tau^\mu$, i $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{S}$ a (24), amb $\boldsymbol{S} := 1/2\,(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T)$. Ens queda, per tant, $\mathcal{R}_{Sm} := -\varepsilon^2\,|\boldsymbol{S}|\,\boldsymbol{S}$.

Podem concloure, per tant, que és possible tenir models de LES construïts segons el procés estàndard de filtració amb «l'apreciable» propietat matemàtica de dur a problemes ben posats (e. g., model de Leray). D'altra banda, filtrar no és l'única manera d'aconseguir models de LES, com ho demostra el model de Ladyženskaja i Kaniel. Fins i tot el cèlebre model de Smagorinsky es pot obtenir sense cap necessitat de filtrar, contràriament al que se sol fer a la literatura. A part dels casos anteriors, Guermond *et al.* ([29]) analitzen en el seu estudi diversos models més, incloent-hi models de viscositat espectral, models de viscositat de submalla, el mètode variacional de multiescales, models de similaritat, etc. Tot i que no és possible trobar un marc matemàtic general on englobar tots aquests models, la seva conclusió principal és que un model LES hauria de complir dos requisits bàsics: primerament, hauria de ser capaç de regularitzar les equacions de Navier-Stokes i donar lloc a un sistema d'equacions diferencials ben posat. En segon terme, el model LES hauria de seleccionar solucions físicament rellevants, és a dir, admissibles en el sentit especificat a la secció 2.3 (vegeu la definició 3).

Prenent com a base les consideracions anteriors, Guermond i Prudhomme ([31]) han proposat el concepte d'*aproximacions admissibles* de les equacions de Navier-Stokes, com un primer pas vers a una definicó matemàtica de la LES.

7 Definició *Direm que una successió* $[\boldsymbol{u}_\gamma, p_\gamma]$*, amb* $\gamma > 0$ *i* $\boldsymbol{u}_\gamma \in L^2(0,T;\boldsymbol{X}(\Omega)) \cap L^\infty\left(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)\right)$ *i* $p_\gamma \in \mathcal{D}'(]0,T[\,, L^2(\Omega)/\mathbb{R})$*, és una aproximació admissible de les equacions de Navier-Stokes* (1)-(5) *si, i només si,*

1. *Existeixen dos espais vectorials de dimensió finita* $\boldsymbol{X}_\gamma(\Omega) \subset \boldsymbol{X}(\Omega)$ *i* $M_\gamma(\Omega) \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}$ *tals que* $\boldsymbol{u}_\gamma \in C^0\left([0,T];\boldsymbol{X}_\gamma(\Omega)\right)$ *i* $p_\gamma \in \boldsymbol{L}^2\left(]0,T[\,, M_\gamma(\Omega)\right)$.
2. *La successió* $\{\boldsymbol{u}_\gamma, p_\gamma\}$ *(o una subsuccessió d'aquesta) convergeix a una solució feble de* (1)-(5)*, és a dir,* $\boldsymbol{u}_\gamma \rightharpoonup \boldsymbol{u}$ *(convergència feble) a* $L^2(0,T;\boldsymbol{X}(\Omega))$ *i* $p_\gamma \to p$ *a* $\mathcal{D}'(]0,T[\,, L^2(\Omega)/\mathbb{R})$.
3. *La solució feble* $[\boldsymbol{u}, p]$ *és admissible.*

Notem que en aquesta definició hi ha involucrats dos paràmetres: el paràmetre h, associat a la grandària de l'escala més petita representable en $\boldsymbol{X}_\gamma(\Omega)$ (la dimensió de $\boldsymbol{X}_\gamma(\Omega)$ serà de l'ordre de $(L/h)^3$), i el paràmetre ε, associat a l'escala de tall (o al diàmetre del suport del filtre) del model d'equacions utilitzat. Aquest paràmetre correspon a la grandària dels remolins actius més petits del flux. El paràmetre γ de la definició serà una combinació de h i ε a determinar en cada cas, i s'entén que $\gamma \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$ i $h \to 0$.

Guermond i Prudhomme proposen seguir la següent estratègia de tres passos per tal de construir a la pràctica aproximacions admissibles:

1. Elaboració d'un model pre-LES. Aquest pas consisteix a regularitzar les equacions de Navier-Stokes per tal d'obtenir un problema ben posat i introdueix el paràmetre ε. Per a $\varepsilon \to 0$ el model pre-LES ha de convergir

cap a una solució admissible de les equacions de Navier-Stokes. És a dir, el model pre-LES equival al procés d'obtenció de les equacions filtrades (33) de la LES estàndard, però amb l'exigència que, un cop establerta la clausura de les equacions, el problema resultant estigui ben posat de manera que la seva única solució convergeixi a una solució feble admissible de les equacions de Navier-Stokes.

2. Discretització del model pre-LES. Amb aquest pas introduïm les funcions d'aproximació per a la velocitat i la pressió, els espais de dimensió finita $\boldsymbol{X}_\gamma(\Omega)$ i $M_\gamma(\Omega)$, i el paràmetre h.
3. Determinació de la relació entre ε i h. La relació entre ε i h no pot ser qualsevol, ja que en prendre els límits $\varepsilon \to 0$ i $h \to 0$ s'ha de convergir cap a una solució admissible de les equacions de Navier-Stokes.

Es pot comprovar que els models de Leray, (NS-α), Lions i Ladyženskaja-Kaniel comporten aproximacions admissibles de les equacions de Navier-Stokes ([31]). Ara bé, tot i que el concepte d'aproximacions admissibles constitueix un primer pas important per tal de construir una teoria matemàtica de la LES, encara queden pendents algunes de les qüestions no resoltes de la LES estàndard, com ara la relació entre els errors del model pre-LES i els errors de la discretització numèrica. En aquest sentit val la pena preguntar-se quin paper juga la simulació directa, DNS, en aquest context. És a dir, donats $\boldsymbol{X}_\gamma(\Omega) \subset \boldsymbol{X}(\Omega)$ i $M_\gamma(\Omega) \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}$, ens preguntem si $\forall t \in [0,T]$ l'aproximació de Galerkin

$$\begin{aligned} (\partial_t \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + b\,(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + \nu\,(\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}) - (p_h, \nabla \boldsymbol{v}) &= \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_\gamma(\Omega) \\ (q, \nabla \boldsymbol{u}_h) &= 0 \quad \forall q \in M_\gamma(\Omega) \\ (\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, 0), \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_\gamma(\Omega) \end{aligned} \tag{36}$$

és admissible. Guermond ([27]) ha demostrat que per al cas de condicions periòdiques, fent servir elements finits de baix ordre que satisfacin una propietat de commutació discreta i amb la condició inf-sup adequada, la solució de (36) és efectivament una aproximació admissible de les equacions de Navier-Stokes. Aquest punt és important, ja que pot justificar el fet que tot sovint en les simulacions computacionals (fent servir mètodes de baix-ordre) s'obtenen millors resultats sense emprar el model LES i deixant que la difusió numèrica faci el paper estabilitzant de les equacions. Aquesta idea enllaça directament amb el contingut de la propera secció.

4 El problema per a les subescales numèriques: VMF (Variational Multiscale Formulations)

En aquesta secció ens plantegem el problema de les equacions de Navier-Stokes des d'un punt de vista en principi diferent de l'adoptat fins ara: l'exclusivament numèric. Començarem aquesta secció descrivint de manera breu en què consisteix una aproximació numèrica basada en el mètode dels elements finits des del punt de vista abstracte, sense descriure òbviament com es construeixen els espais aproximants (la qual cosa es pot consultar, per exemple, a [6, 8, 26, 32, 57, 61, 66], entre molts altres llibres). En aquesta descripció posarem èmfasi en les mancances d'estabilitat dels mètodes «clàssics», en el sentit que descriurem més endavant. L'intent de resoldre aquestes mancances ens durà a la introducció del concepte de subescala i la seva aproximació numèrica. El nostre objectiu és justament posar de manifest la relació entre les subescales pensades des d'aquest punt de vista i les que hom pretén «filtrar» en els models LES.

4.1 Inestabilitats numèriques

Comencem plantejant l'aproximació del problema (1)-(2). Primer considerarem l'aproximació en el temps mitjançant un esquema simple de diferències finites, i a continuació introduirem la discretització a l'espai.

Una de les possibles fonts d'inestabilitat numèrica apareix quan les equacions de Navier-Stokes s'escriuen en un sistema no inercial i les forces de Coriolis són importants. Malgrat que no hem introduït aquest terme a (1)-(2) perquè no aportava res a la discussió de les seccions precedents, a partir d'ara el tindrem el compte.

Aproximació temporal. Considerem una partició de l'interval temporal $[0, T]$ en N subintervals de grandària δt, per simplificar la notació, tots iguals. Farem servir el mètode més simple d'integració en el temps: l'esquema d'Euler enrere. Donada la solució a $t^n = n\delta t$, $n = 0, 1, 2, ...$, la solució a t^{n+1} es troba resolent:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}\left(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n\right) + \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}^{n+1} & \\ - \nu \Delta \boldsymbol{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \boldsymbol{f}^{n+1}, & \qquad (37) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{n+1} = 0, \qquad (38)$$

on $2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}^{n+1}$ és la força de Coriolis causada per la rotació del sistema de referència, el qual se suposa que gira amb velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$ (la força centrífuga i la de l'acceleració del sistema de referència les considerem incloses a $\boldsymbol{f}$).

L'esquema d'integració temporal (37)-(38) és de primer ordre en el pas de temps i incondicionalment estable, és a dir, l'error en el temps (en una certa norma esmentada més endavant) és d'ordre δt i la solució està fitada per les dades independentment de quin sigui aquest pas de temps.

Forma variacional i discretització espacial. Considerem en el que segueix que les condicions de contorn són de Dirichlet i homogènies, és a dir, (3), encara que el que segueix és també aplicable a condicions periòdiques. Per al problema semidiscret (37)-(38) tindrem que $\boldsymbol{u}^n = 0$ a $\partial\Omega$, $n = 1, 2, ...$.

Si $\boldsymbol{v}$ és una funció de test vectorial que s'anul·la a $\partial\Omega$, multiplicant per aquesta funció les equacions de Navier-Stokes (semidiscretes), integrant sobre Ω i «integrant per parts» el terme viscós i el de gradient de pressió, s'obté la forma feble (15), que per al problema semidiscret (37) es pot escriure de forma explícita com:

$$\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \Big[\frac{1}{\delta t} \Big(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n \Big) + \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}^{n+1} \Big]\, d\boldsymbol{x} \\ + \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{u}^{n+1}\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p^{n+1} \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}^{n+1}\, d\boldsymbol{x}. \quad (39)$$

Multiplicant ara l'equació de continuïtat (38) per una altra funció de test q i integrant sobre Ω queda

$$\int_\Omega q \nabla \cdot \boldsymbol{u}^{n+1}\, d\boldsymbol{x} = 0. \quad (40)$$

En aquest cas semidiscret, les incògnites ja no depenen del temps. Els espais de funcions per a incògnites i funcions de test és el mateix: $[\boldsymbol{u}^n, p^n]$, $[\boldsymbol{v}, q] \in \boldsymbol{X}(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Com és habitual en aquest context, denotarem els espais de treball per $V \equiv \boldsymbol{X}(\Omega)$ i $Q \equiv L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Les *aproximacions numèriques* que considerarem consisteixen a *aproximar* V *per* $V_h \subset V$ i Q *per* $Q_h \subset Q$, amb V_h *i* Q_h *de dimensió finita.* Entren dins d'aquest tipus d'aproximacions el mètode dels elements finits (conformes), els mètodes espectrals i alguns mètodes de volums finits.

Fem servir el subíndex h per indicar les funcions pertanyents als espais discrets V_h i Q_h, per tal de distingir-les de les dels espais V i Q. Així doncs, el problema completament discret que queda és: per a $n = 1, 2, \ldots$, trobar $\boldsymbol{u}_h^{n+1} \in V_h$ i $p_h^{n+1} \in Q_h$ tals que compleixin:

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \Big[\frac{1}{\delta t} \Big(\boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}_h^n \Big) + \boldsymbol{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1} + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h^{n+1} \Big]\, d\boldsymbol{x} \\ + \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{v}_h : \nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1}\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p_h^{n+1} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_h\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{f}^{n+1}\, d\boldsymbol{x}. \quad (41)$$

$$\int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h^{n+1}\, d\boldsymbol{x} = 0. \quad (42)$$

Estimadors numèrics anàlegs als del problema continu. Vejam quina estabilitat podem obtenir del problema discret plantejat.

Denotem per $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$ la norma a $L^2(\Omega)$ introduïda anteriorment. Suposem per simplificar que $\boldsymbol{f} \in C^0(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$. Prenent $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{n+1}$ i $q = p^{n+1}$ a (39) i fent servir que $(2a, a-b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a-b\|^2$ per a qualssevol funcions a i b, tenim

$$\frac{1}{2\delta t} \Big(\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 - \|\boldsymbol{u}^n\|^2 + \|\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n\|^2 \Big) + \nu \|\nabla \boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 \\ = (\boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}) \le \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|^2. \quad (43)$$

Si sumem aquestes desigualtats des de $n = 0$ fins a $N - 1$ (N fix) obtenim

$$\|\boldsymbol{u}^N\|^2 - \|\boldsymbol{u}^0\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} 2\nu\delta t\|\nabla\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} \delta t\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \delta t\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|^2.$$

Fent servir la desigualtat de Gronwall discreta (vegeu, e. g., [35]) resulta:

$$\|\boldsymbol{u}^N\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} 2\nu\delta t\|\nabla\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 \leq \|\boldsymbol{u}^0\|^2 + C\sum_{n=0}^{N-1} \delta t\|\boldsymbol{f}^{n+1}\|^2, \tag{44}$$

que és la versió discreta de l'estimador d'energia que per al problema continu correspon a la desigualtat (16). A l'equació anterior i en tot el que segueix, C és una constant genèrica.

Igual que per al problema continu, el membre de la dreta de (44) conté normes de les dades que suposem fitades. Per tant, hem obtingut en particular que $\|\boldsymbol{u}^N\| \leq C$. Ara bé, si en lloc de sumar les desigualtats (43) fins a $N - 1$ ho haguéssim fet fins a un m arbitrari hauríem obtingut $\|\boldsymbol{u}^m\| \leq C$. Amb això i la fitació sobre el segon terme del membre de l'esquerra a (43) ens queda

$$\max_{n=1,2,\ldots,N} \|\boldsymbol{u}^n\| \leq C \quad \text{i} \quad \nu\sum_{n=0}^{N-1} \delta t\|\nabla\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 \leq C. \tag{45}$$

Per analogia amb el problema continu, de vegades es defineixen els espais $\ell^p(X)$ de successions de funcions amb valors en un espai de Banach X com els formats per successions $\{v_n\}_{n=0}^N$ tals que $\sum_{n=0}^N \delta t\|v_n\|_X^p < \infty$ per a $1 \leq p < \infty$ i $\max_{n=0,1,\ldots,N} \|v_n\|_X < \infty$ en el cas $p = \infty$. Per tant, els estimadors d'estabilitat (45) es poden escriure com

$$\{\boldsymbol{u}^n\} \in \ell^\infty(\boldsymbol{L}^2(\Omega)) \quad \text{i} \quad \nu^{1/2}\{\boldsymbol{u}^n\} \in \ell^2(\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)). \tag{46}$$

Observem, per tant, que la successió de solucions en velocitat $\{\boldsymbol{u}^n\}$ pertany justament a la versió discreta de l'espai de funcions on s'ha de trobar la solució del problema continu, $L^2(0,T;\boldsymbol{V}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}(\Omega))$. L'única diferència és que per al problema continu es pot garantir que la velocitat és de divergència nul·la i en el problema discret només ho serà en el sentit feble donat per (40).

Malgrat que el teorema 1 garanteix que $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}(\Omega))$ per al problema continu i això és del tot suficient, en el cas discret els estimadors d'estabilitat (46) tenen diverses mancances:

- No tenim cap estimador per a la pressió.
- L'estimador $\{\boldsymbol{u}^n\} \in \ell^\infty(\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ és important per la informació sobre el comportament en el temps, però és molt feble a l'espai.
- L'estimador $\nu\sum_{n=0}^{N-1} \delta t\|\nabla\boldsymbol{u}^{n+1}\|^2 \leq C$ és molt útil *si ν és gran*. Tanmateix, numèricament *és irrellevant si ν és molt petita.*

A continuació discutim breument quines conseqüències tenen aquestes mancances.

La inestabilitat de la pressió. Comencem discutint el problema de la pressió. A nivell continu, ens hauríem de plantejar si els problemes (13) i (15) són realment equivalents o, altrament dit, si de (13) es desprèn l'existència d'una pressió que pertanyi a l'espai de funcions adequat. En aquest marc continu, es pot veure fàcilment que això és així si, i només si, es compleix la condición inf-sup

$$\inf_{q\in L^2(\Omega)} \sup_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega q\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}}{\|q\|\,\|\nabla\boldsymbol{v}\|} \geq C > 0. \tag{47}$$

Que aquesta condició certament es compleix ho demostrà Ladyženskaja ([45]). El fet és que per al cas continu no és un resultat especialment rellevant. Més endavant, Babuška ([1, 2]) demostrà una condició inf-sup abstracta que provà que era necessària i suficient per tal que un problema variacional abstracte estigués ben posat, tant a nivell continu com discret. Finalment, Brezzi ([5]) provà que per a les equacions de Navier-Stokes (de fet, per al problema de Stokes, és a dir, sense terme convectiu ni evolució temporal) la condició abstracta de Babuška esdevé (47), és a dir, la condició que Ladyženskaja ja havia demostrat en el marc continu. A més, Brezzi demostrà que si es compleix a nivell discret l'aproximació numèrica al problema de Stokes convergeix de forma òptima.

Tanmateix, la versió discreta de (47), és a dir,

$$\inf_{q_h\in Q_h} \sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_h} \frac{\int_\Omega q_h\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h\,d\boldsymbol{x}}{\|q_h\|\,\|\nabla\boldsymbol{v}_h\|} \geq C > 0, \tag{48}$$

té una dificultat fàcil d'observar: no s'hereta del problema continu al discret, malgrat que $V_h \subset V$ i $Q_h \subset Q$. Això és fàcil de veure notant que el suprem es pren sobre un espai més petit que V. El problema, doncs, que es planteja des del punt de vista numèric és *trobar combinacions d'espais V_h i Q_h que compleixin la condició (48).* Per les raons d'evolució cap a la comprensió d'aquesta condició, sovint s'anomena *condició LBB*, per Ladyženskaja-Babuška-Brezzi, o simplement condició BB.

La construcció d'espais discrets V_h i Q_h que compleixin (48) no és gens fàcil i ha generat una gran quantitat de treballs, en especial en el context del mètode dels elements finits (malgrat que aquesta condició és òbviament aplicable a mètodes numèrics variacionals en general). A la referència [6] es pot trobar una descripció dels treballs més rellevants.

Què implica $\{\boldsymbol{u}^n\} \in \ell^\infty(\boldsymbol{L}^2(\Omega))$? L'estimador d'estabilitat $\{\boldsymbol{u}^n\} \in \ell^\infty(\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ involucra certament una norma molt fina en el temps, la millor des del punt de vista numèric. Tanmateix, $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ és una norma molt feble. Numèricament, que una funció sigui de quadrat integrable diu més aviat poc. Permet, en particular, que les solucions numèriques siguin completament oscil·latòries. Sovint, a les aplicacions, interessen derivades de la velocitat (per a calcular vorticitat o tensions, per exemple) i sobre aquestes no tenim cap control si només sabem que $\boldsymbol{u}^n \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ per a tot n.

Problemes numèrics associats a petites viscositats. Així com el problema de la inestabilitat de la pressió és estrictament numèric i no té cap conseqüència física, els problemes causats per viscositats petites són molt rellevants físicament i matemàtica.

Des del punt de vista matemàtic, el límit $\nu \to 0$ és un límit singular, en el sentit que canvïa el marc funcional on plantejar el problema (passem de les equacions de Navier-Stokes a les dites equacions d'Euler en el cas $\nu = 0$). Físicament, les viscositats petites tenen dues implicacions. Per una banda, apareixen capes límit, és a dir, regions de l'espai on una de les dimensions, diguemne el gruix, tendeix a zero quan $\nu \to 0$, i on la variació total de la velocitat està fitada inferiorment per un valor positiu (això passa també en les capes anomenades «de tallant», o *shear layers*, en anglès). Però sens dubte l'efecte més rellevant de viscositats petites és la major importància del terme de convecció no lineal, el qual és responsable de la dinàmica terriblement complexa de les equacions de Navier-Stokes.

Però ara el que ens interessa és plantejar-nos què passa quan ν és petita des del punt de vista estrictament numèric. El primer que hem de fer és mesurar què vol dir «petit» en aquest context. Per això, observem que l'estimador (46) dóna directament control (estabilitat) sobre el terme viscós, però *no tenim cap control sobre*

- El terme convectiu si aquest domina el viscós,
- El terme de Coriolis si aquest domina el viscós.

Vejam com mesurar cada cas. Per fixar idees, suposem que el mètode numèric és un mètode d'elements finits o de volums finits (variacionals) i sigui h una mesura de la discretització, per exemple, la distància entre nodes. La importància relativa del terme de convecció respecte del numèric la mesura *el nombre de Reynolds local*, definit per

$$\mathrm{Re}_h := \frac{Uh}{\nu},$$

on ara U és una velocitat característica del node que considerem. *Per a valors grans de* Re_h *és justament que (46) no dóna prou control del terme de convecció.* Numèricament, això es tradueix en les ben conegudes oscil·lacions numèriques per convecció dominant, de les quals cap aproximació numèrica se salva, *llevat que es modifiqui la forma variacional discreta (41)-(42).* Aquest fet està extensament explicat i documentat a la literatura numèrica (vegeu, e. g., [57, 61]). Se n'ha donat múltiples interpretacions i alguns remeis. Més endavant en veurem un.

La importància relativa del terme de Coriolis la mesura el *nombre d'Ekman local*, definit per

$$\mathrm{Ek}_h := \frac{\nu}{\omega h^2},$$

on ω és la norma de la velocitat de rotació del sistema de referència. Aquest nombre és una mesura local del terme viscós dividit pel terme de Coriolis. Per a valors de Ek_h molt petits, (46) no dóna prou control del terme de Coriolis i, igual que en el cas de convecció dominant, apareixen inestabilitats numèriques que es manifesten en aproximacions completament oscil·latòries [11]. Aquest problema és certament menys «popular» que l'anterior, però apareix en problemes d'oceanografia, meteorologia o en fluxos al voltant de màquines rotatòries, en els quals les forces de Coriolis poden ser rellevants.

4.2 Introducció de les subescales a la formulació numèrica

Les inestabilitats descrites fins ara tenen origens diferents (interpolació velocitat-pressió, dominància del terme convectiu o dominància del terme de rotació respecte del viscós). El que és més interessant, però, *és que totes es poden resoldre mitjançant els anomenats mètodes d'estabilització* i, en particular, el mètode que a continuació descriurem breument, anomenat *la formulació variacional multiescala*. En anglès s'anomena «variational multiscale formulation» i es fan servir les sigles VMF, que usarem en el que segueix.

Considerem una aproximació numèrica associada a uns subespais de dimensió finita $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$. La idea fonamental és descompondre

$$V = V_h \oplus V', \qquad Q = Q_h \oplus Q',$$

i prendre

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}', \qquad p = p_h + p', \tag{49}$$

amb $\boldsymbol{u}_h \in V_h$, $p_h \in Q_h$, $\boldsymbol{u}' \in V'$, $p' \in Q'$. Els espais V' i Q' són en principi qualssevol que completin V_h i Q_h, respectivament, per a obtenir els espais del problema continu, V i Q.

Es tracta ara de plantejar un problema per a $\boldsymbol{u}_h$ i p_h tenint en compte l'efecte de $\boldsymbol{u}'$ i p', que anomenarem *subescales* (de velocitat i de pressió). Naturalment, $\boldsymbol{u}'$ i p' no es poden obtenir de forma exacta (la qual cosa implicaria resoldre el problema continu), sinó *aproximada*. Justament els diversos mètodes numèrics que es poden plantejar (i en els quals no entrarem) es basen a aproximar les subescales de diferents maneres.

Per simplificar, prendrem $p' = 0$ en el que segueix, de manera que l'objectiu serà aproximar la subescala de velocitat exclusivament. En el pas de temps n, siguin $\boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{u}_h^n + \boldsymbol{u}'^{\,n}$ i $p^n \approx p_h^n$. Anomenant $\delta_t^n f := (f^{n+1} - f^n)/\delta t$ i integrant diversos termes per parts, el problema (37)-(38) ens porta a

$$\begin{aligned}
&(\delta_t^n \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + (\delta_t^n \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}_h) \\
&\quad + (\boldsymbol{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{v}_h) + (\boldsymbol{u}'^{\,n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{v}_h) - (\boldsymbol{u}'^{\,n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_h) \\
&\quad + 2\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{v}_h) - 2(\boldsymbol{u}'^{\,n+1}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_h) \\
&\quad + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \nabla \boldsymbol{v}_h) - \nu(\boldsymbol{u}'^{\,n+1}, \Delta \boldsymbol{v}_h) \\
&\quad - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_h) = \langle \boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{v}_h \rangle,
\end{aligned} \tag{50}$$

per a qualssevol $\boldsymbol{v}_h \in V_h$ i $q_h \in Q_h$. Aquestes *són les equacions de Navier-Stokes projectades a l'espai* V_h. Per a cert tipus d'aproximacions, cal donar sentit numèric a les derivades de segon ordre, malgrat que això no es rellevant pel que segueix.

Per a determinar $\boldsymbol{u}'$, cal *projectar les equacions a l'espai* V'. El resultat és:

$$\delta_t^n \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{u}'^{\,n+1} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}'^{\,n+1} - \nu \Delta \boldsymbol{u}'^{\,n+1} = \boldsymbol{r}^{n+1} + \boldsymbol{v}_{h,\mathrm{ort}}^{n+1}, \tag{51}$$

$$\boldsymbol{r}^{n+1} := \boldsymbol{f}^{n+1} - \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1} - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_h^{n+1} + \nu \Delta \boldsymbol{u}_h^{n+1} - \nabla p_h^{n+1}.$$

on $\boldsymbol{v}_{h,\mathrm{ort}}^{n+1}$ és una funció a V_h ortogonal a les subescales.

El problema per a $\boldsymbol{u}'$ és igual de complicat que el problema per a $\boldsymbol{u}$. Tanmateix, *només ens cal l'efecte de* $\boldsymbol{u}'$ *sobre* $\boldsymbol{u}_h$, no la solució exacta. El pas següent és *modelar* $\boldsymbol{u}'$, és a dir, proposar una solució aproximada. Aquest naturalment és el punt clau dels mètodes VMF. Les possibilitats són diverses, des d'aproximar les subescales mitjançant interpolacions locals fins a donar fórmules tancades per a les subescales. Per exemple, si substituïm l'equació diferencial de les subescales (51) per l'equació algebraica

$$\left(\frac{1}{\delta t} + \frac{1}{\tau}\right) \boldsymbol{u}'^{\,n+1} = \frac{1}{\delta t} \boldsymbol{u}'^{\,n} + \boldsymbol{r}^{n+1} + \boldsymbol{v}_{h,\mathrm{ort}}^{n+1},$$

amb

$$\tau := \left(c_1 \frac{\nu}{h^2} + c_2 \frac{\|\boldsymbol{u}^{n+1}\|}{h} + c_3 \|\boldsymbol{\omega}\|\right)^{-1},$$

existeixen valors de les constants c_1, c_2 i c_3 per als quals la subescala exacta i l'aproximada tenen aproximadament la mateixa norma L^2 a subdominis del domini Ω (que depenen del mètode numèric) i, per tant, *la mateixa energia cinètica* ([12]).

Un cop es té una aproximació per a les subescales, el problema queda tancat portant-la a (50). En conclusió, la idea es pot resumir de la manera següent:

- Plantejar la descomposició (49).
- Escriure les equacions per a les incògnites $\boldsymbol{u}_h^n$ i p_h^n en els espais discrets i per a les subescales, (50) i (51) respectivament.

- Aproximar les subescales, és a dir, resoldre (51) aproximadament.
- Incorporar aquesta aproximació a l'equació projectada a l'espai discret V_h (i Q_h, si és el cas), en el nostre cas (50).

El procediment conceptual queda així definit. La manera de triar les subescales determinarà si hem assolit l'objectiu que originalment ens plantejàvem: millorar l'estabilitat que proporcionen els estimadors (45). Diverses formulacions mostren que això efectivament és així: es poden resoldre numèricament problemes dominats per convecció, dominats per rotació i no cal satisfer la condició (48) sobre els espais interpolants de velocitat i pressió.

Observacions

- Dins d'aquest marc, i amb moltes simplificacions addicionals, es poden justificar alguns dels anomenats *mètodes d'estabilització* que han anat apareixent des dels anys setanta per a resoldre les diverses inestabilitats descrites anteriorment. De fet, aquesta fou la motivació original de les VMF proposades originalment a [37, 38], el format de les quals hem seguit aquí.
- El punt clau és plantejar la descomposició $V = V_h \oplus V'$. A diferència de les formulacions LES, *ara V_h està ben definit* i de V' sabem que només en volem *l'efecte sobre V_h*.
- Quan aproximem V', el resultat serà un espai de dimensió finita. Per tant, triar-lo és tant com triar una projecció $P_h : V \to V_h$, i *no cal que sigui la de V* (la que li dóna estructura d'espai de Hilbert).
- També és possible plantejar la descomposició en part capturable i subescales *en el temps* (com en el mètode de Galerkin no lineal, [54, 39]).
- La idea $u = \bar{u} + u'$, amb u la incògnita d'un problema i $\bar{u}$ l'escala «macroscòpica», *és comuna a moltes teories* (turbulència clàssica, homogeneïtzació, acústica...) L'interès de fer-la servir en el context numèric és que permet arribar força lluny.
- L'anàlisi matemàtica dels mètodes d'estabilització particulars per a les equacions de Navier-Stokes està lluny de ser completa (i menys encara per a les VMF en abstracte). L'estabilització de la pressió per al problema estacionari es considera, per exemple, a [13, 4] i per al problema transitori a [3]. L'estabilització del problema dominat per convecció s'analitza (amb èxit només parcial) a [68, 69] en el cas estacionari i a [33] en el cas transitori.

5 VMF és LES?

A les dues seccions precedents hem tractat d'explicar les bases de dos enfocaments per a estudiar les equacions de Navier-Stokes completament diferents. Conclourem aquest article amb alguns comentaris i observacions sobre aquests dos enfocaments i els seus possibles nexes d'unió.

A la secció 3 hem introduït els models dits LES. Malgrat que el seu objectiu és l'aproximació numèrica, el seu plantejament *és previ* a aquesta aproximació. A partir de la descripció de la dinàmica del problema original, els models LES tenen per objectiu plantejar un problema amb el mateix comportament però només per a les «macroescales», obtingudes després d'un cert filtratge de les equacions i una aproximació al tensor de subescales.

D'altra banda, a la secció 4 hem introduït els models VMF, els quals es plantegen directament com a formulacions numèriques. D'aquests, i de la seva comparació amb els models LES, podem fer els comentaris següents:

- A les VMF no hi ha «filtratge», sinó una expressió tancada de les subescales. La manera d'obtenir aquesta expressió és justament el que caracteritza els diversos models VMF.
- No hi ha ambigüitat sobre què és una subescala: voldríem que $\boldsymbol{u}_h = P_h(\boldsymbol{u})$ per a alguna projecció P_h sobre l'espai discret, d'on $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - P_h(\boldsymbol{u})$. No hi ha problema de tancament, més enllà del que implica proposar una expressió per a P_h.
- Segons la definició de Guermond i Prudhomme presentada a la secció 3, $\varepsilon = h$, és a dir, el terme «regularitzant» l'introdueix la mateixa aproximació numèrica. Altrament dit, a les VMF no hi ha cap model pre-LES, sinó que el terme regularitzant prové de tenir en compte l'efecte de les subescales *numèriques*.
- Que $\boldsymbol{u}_h \rightharpoonup \boldsymbol{u}$, $p_h \rightharpoonup p$ i $[\boldsymbol{u}, p\,]$ sigui una solució admissible és un problema obert. Dependrà del model de subescales. La convergència a una solució feble del problema continu, això sí, està garantida emprant directament la tècnica de Hopf ([36]) i resultats d'estabilitat similars a (44).
- Les subescales han de satisfer alguns requisits físics que s'expliquen de la discussió presentada a la secció 3. En particular, s'ha de complir la llei dels $-5/3$ que prediu la teoria de Kolmogorov K41 (27). Així mateix, la dimensió de l'atractor discret que en resulti ha de ser d'ordre $\mathrm{Re}^{9/4}$, segons s'estableix a (32). Un altre requisit, que aquí no hem discutit, és el comportament en capes límit i en capes de tallant, el gruix de les quals s'obté d'anàlisis asimptòtiques i resulta ser de la forma Re^{-a}, per a algun exponent $a > 0$. Tots aquests requisits s'haurien de verificar numèricament i demostrar analíticament.

D'aquestes observacions podem *conjecturar* que

- Possiblement, *VMF és LES*, amb les definicions que hem donat d'aquests termes...
- ... Però, tenint VMF, cal pensar en LES?

- Altrament dit, la turbulència ha de ser un model *físic o numèric*? Molt possiblement, l'enfocament completament numèric de les VMF fa *innecessària* la referència als models LES. Aquesta idea, amb la qual estem d'acord, sembla que comença a fer forat, ni que sigui de forma implícita, en molts treballs numèrics.

Referències

[1] Babuška, I. «Error bounds for finite element method». *Numerische Mathematik*, 16 (1971), 322–333.

[2] Babuška, I. «The finite element method with Lagrangian multipliers». *Numerische Mathematik*, 20 (1973), 179–192.

[3] Blasco, J.; Codina, R. «Space and time error estimates for a first order, pressure stabilized finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations». *Applied Numerical Mathematics*, 38 (2001), 475–497.

[4] Bochev, P. «Analysis of least-squares finite element methods for the Navier-Stokes equations». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34 (1997), 1817–1844.

[5] Brezzi, F. «On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers». *RAIRO Anal. Numer.*, 8 (1974), 129–151.

[6] Brezzi, F.; Fortin, M. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer Verlag, 1991.

[7] Caffarelli, L.; Kohn, R.; Nirenberg, L. «Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations». *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 35 (1982), 771–831.

[8] Carey, G.; Oden, J. *Finite Elements: Fluid Mechanics. The Texas Finite Element Series*, vol. vi. Prentice Hall, 1986.

[9] Clark, R.; Ferziger, J.; Reynolds, W. «Evaluation of subgrid-scale models using and accurately simulated turbulent flow». *Journal of Fluid Mechanics*, 91 (1979), 1–16.

[10] Clay Mathematics Institute. www.claymath.org/millennium/. *Millennium Problems* 2000.

[11] Codina, R. «Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations with Coriolis forces based on the discretization of the total time derivative». *Journal of Computational Physics*, 148 (1999), 467–496.

[12] Codina, R. «Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 (2002), 4295–4321.

[13] Codina, R.; Blasco, J. «Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations». *Numerische Mathematik*, 87 (2000), 59–81.

[14] CONSTANTIN, P.; FOIAS, C.; TEMAM, R. «Attractors representing turbulent flows». *Memoirs of AMS*, 53 (1985), 314.

[15] DOERING, C.; GIBBON, J. *Applied analysis of the Navier-Stokes equations*. Cambridge University Press, 1995.

[16] DRAZIN, P. *Introduction to hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 2002.

[17] DUCHON, J.; ROBERT, R. «Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations». *Nonlinearity*, 13 (2000), 249–255.

[18] ECKMANN, J. «Roads to turbulence in dissipative systems». *Reviews of Modern Physics*, 53(4) (1981), 643–654.

[19] FEIGENBAUM, M. «The transition to aperiodic behaviour in turbulent systems». *Communications in Mathematical Physics*, 77 (1980), 65–86.

[20] FOIAS, C.; MANLEY, O.; ROSA, R.; TEMAM, R. «Estimates for the energy cascade in three-dimensional turbulent flows». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 333(5) (2001), 499–504.

[21] FOIAS, C.; MANLEY, O.; ROSA, R.; TEMAM, R. «Navier-Stokes equations and turbulence». *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2001.

[22] FRID, H.; PEREPELITSA, M. «Partial regularity of solutions of the 3-d incompressible Navier-Stokes equations». *23th Brazilian Colloquium of Mathematics*, 2001.

[23] GERMANO, M. «Differential filters for the large eddy simulation of turbulent flows». *Physics of Fluids*, 29(6) (1986), 1755–1757.

[24] GERMANO, M. «Differential filters of elliptic type». *Physics of Fluids*, 29(6) (1986), 1757–1758.

[25] GIBBON, J.; TITI, E. «Attractor dimension and small length scale estimates for the three-dimensional Navier-Stokes equations». *Nonlinearity*, 10 (1997), 109–119.

[26] GIRAULT, V.; RAVIART, P. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer–Verlag, 1986.

[27] GUERMOND, J. «Finite-element-based Faedo-Galerkin weak solutions to the Navier-Stokes equations in the three-dimensional torus are suitable». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (accepted) (2005).

[28] GUERMOND, J.; ODEN, J.; PRUDHOMME, S. «An interpretation of the Navier-Stokes-alpha model as a frame-indifferent Leray regularization» *Physica D* 177 (2003), 23–30.

[29] GUERMOND, J.; ODEN, J.; PRUDHOMME, S. «Mathematical perspectives on large eddy simulation models for turbulent flows». *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 6 (2004), 194–248.

[30] GUERMOND, J.; PRUDHOMME, S. «Mathematical analysis of a spectral hyperviscosity LES model for the simulation of turbulent flows». *Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)*, 37(6) (2003), 893–908.

[31] GUERMOND, J.; PRUDHOMME, S «On the construction of suitable solutions to the Navier-Stokes equations and questions regarding the definition of large eddy simulation». *Physica D*, 207(1-2) (2005), 64–78.

[32] GUNZBURGER, M. *Finite element methods for viscous incompressible flows*. Academic Press, 1989.

[33] HANSBO, P.; SZEPESSY, A. «A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 84 (1990), 175–192.

[34] HE, C. «On partial regularity for weak solutions to the Navier-Stokes equations» *Journal of Functional Analysis*, 211(1) (2004), 153–162.

[35] HEYWOOD, J.; RANNACHER, R. «Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. IV: Error analysis for second-order time discretization». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27 (1990), 353–384.

[36] HOPF, E. «Über die aufanswertaufgabe für die hydrodynamischen grundgleichungen». *Mathematische Nachrichten*, 4 (1951), 213–231.

[37] HUGHES, T. «Multiscale phenomena: Green's function, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 (1995), 387–401.

[38] HUGHES, T.; FEIJÓO, G.; MAZZEI, L.; QUINCY, J. «The variational multiscale method—A paradigm for computational mechanics». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 (1998), 3–24.

[39] JAUBERTEAU, F.; ROSIER, C.; TEMAM, R. «A nonlinear Galerkin method for the Navier-Stokes equations». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80 (1990), 245–260.

[40] JOHN, V. *Large eddy simulation of turbulent incompressible flows*. Springer-Verlag, 2003.

[41] KANIEL, S. «On the initial value problem for an incompressible fluid with nonlinear viscosity». *Journal of Mathematics and Mechanics*, 19 (1970), 681–706.

[42] KOLMOGOROV, A. «The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large reynolds number». *Doklady Akademii Nauk SSR*, 30 (1941), 9–13.

[43] KOLMOGOROV, A. «A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynols number». *Journal of Fluid Mechanics*, 13 (1962), 82–85.

[44] LADYZHENSKAYA, O. «New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them». *Proc. Steklov Inst. Math.*, 102 (1967), 95–118.

[45] LADYZHENSKAYA, O. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach, 1969.

[46] LAYTON, W. «Advanced models for large eddy simulation». VKI Lecture Notes. *Computational Fluid Dynamics-Multiscale Methods* [ed. H. Deconinck]. Rhode-Saint-Genèse, Belgium: Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2002.

[47] LAYTON, W. «A mathematical introduction to large eddy simulation». VKI Lecture Notes. *Computational Fluid Dynamics-Multiscale Methods* ([ed. H. Deconinck]. Rhode-Saint-Genèse, Belgium: Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2002.

[48] LAYTON, W. «Variational multiscale methods and subgrid scale eddy viscosity». VKI Lecture Notes. *Computational Fluid Dynamics-Multiscale Methods* [ed. H. Deconinck]. Rhode-Saint-Genèse, Belgium: Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2002.

[49] LEONARD, A. «Energy cascade in large eddy simulation of turbulent fluid flows». *Advances in Geophysics*, 18 (1974), 237–248.

[50] LERAY, J. «Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace». *Acta Mathematica*, 63 (1934), 193–248.

[51] LIN, F. «A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem». *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 51 (1998), 241–257.

[52] LIONS, J. «Sur certaines équations paraboliques non linéaires». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93 (1965), 155–175.

[53] LIONS, J. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Ed. Dunod, 1969.

[54] MARION, M.; TEMAM, R. «Nonlinear Galerkin methods». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26 (1989), 1139–157.

[55] NEWHOUSE, S.; RUELLE, D.; TAKENS, F. «Ocurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flows on Tm m bigger than 3». *Communications in Mathematical Physics*, 64 (1978), 35–40.

[56] OBUKHOV, A. «Some specific features of atmospheric turbulence». *Journal of Fluid Mechanics*, 13 (1962), 77–81.

[57] PIRONNEAU, O. *Finite element methods for fluid flow*. John Wiley & Sons, 1989.

[58] POMEAU, Y.; MANNEVILLE, P. «Intermitent transition to turbulence in dissipative dynamical systems». *Communications in Mathematical Physics*, 74 (1980), 189–197.

[59] POPE, S. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.

[60] RICHARDSON, L. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922.

[61] Roos, H.-G.; Stynes, M.; Tobiska, L. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations—Convection-Diffusion and Flow Problems*. Springer–Verlag, 1996.

[62] Ruelle, D.; Takens, F. «On the nature of turbulence». *Communications in Mathematical Physics*, 20 (1971), 167–192.

[63] Sagaut, P. *Large eddy simulation for incompressible flows*. Scientific Computing, Springer, 2001.

[64] Scheffer, V. «Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations». *Communications in Mathematical Physics*, 55 (1977), 97–112.

[65] Smagorinsky, J. «General circulation experiments with the primitive equations. I: The basic experiment». *Monthly Weather Review*, 91(3) (1963), 99–164.

[66] Temam, R. *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*. North-Holland, 1984.

[67] Temam, R. «Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century». Pier, J. P. [managing editor]. *Dévelopment des Mathématiques au cours de la seconde moitié du XXème siècle*. Birkhäuser, 1999.

[68] Tobiska, L.; Lube, G. «A modified streamline-diffusion method for solving the stationary Navier-Stokes equations». *Numerische Mathematik*, 59 (1991), 13–29.

[69] Tobiska, L.; Verfürth, R. «Analysis of a streamline diffusion finite element method for the Stokes and Navier-Stokes equations». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33 (1996), 107–127.

Ramon Codina
Dep. de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona, 1-3, edifici C1
08034 Barcelona
ramon.codina@upc.edu

Oriol Guasch
ICR, Enginyeria pel Control del Soroll
Berruguete, 52, Vil·la Olímpica - Vall d'Hebron
08035 Barcelona
oguasch@icrsl.com