Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Funciones: una propuesta didáctica en 4º ESO Matemáticas orientadas a Enseñanzas Académicas

Functions: A didactic proposal in 4th ESO Mathematics oriented to Academic Teaching

Autor/es

Daniel Mondurrey Ortín

Director/es

José María Muñoz Escolano

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Año 2020

Contenido

A. Definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático elegido son las funciones en el contexto del curso 4º de Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Antes hablar de campos de problemas, técnicas y tecnologías de la propuesta, creemos necesario realizar un breve análisis del currículo (ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón., 2016) para concretar los objetos matemáticos que, según la normativa, deben ser tratados en este curso:

Contenidos:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
- Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje:

- Crit.MAAC.4.1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
    - Est.MAAC.4.1.1. Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas
    - Est.MAAC.4.1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.
    - Est.MAAC.4.1.3. Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales.

- Est.MAAC.4.1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.
- Est.MAAC.4.1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
- Est.MAAC.4.1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas.

- Crit.MAAC.4.2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.
  - Est.MAAC.4.2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
  - Est.MAAC.4.2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.
  - Est.MAAC.4.2.3. Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos.
  - Est.MAAC.4.2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

Si nos centramos específicamente en los sistemas de representación de relaciones funcionales, el primer criterio hace referencia a la expresión algebraica y gráfica. En el segundo aparecen exclusivamente tablas y gráficas asociadas a situaciones reales. No se menciona explícitamente el enunciado verbal como representación de funciones, pero si está implícito en comprender y explicar la relación funcional que se está representando.

Se recogen varios tipos de funciones sencillas que se trabajarán profundamente en la propuesta: funciones lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas y definidas a trozos.

Encontramos también una serie de elementos de las funciones que se mencionan de forma explícita:

- La tasa de variación media aparece en el primer criterio. Este es contenido nuevo de la asignatura en este curso. Además de saber calcularla y aproximarla en diferentes representaciones funcionales, esta va a ser usada para analizar el crecimiento y decrecimiento de funciones. Las funciones crecientes y decrecientes se introducen el curso anterior, pero este análisis se realiza únicamente desde la representación gráfica de la función.
- La estimación, cálculo e interpretación de parámetros característicos. En este punto es destacable poca información o la ambigüedad que encierra el término "parámetros característicos". En el currículo no se precisa a qué se refiere exactamente con esa expresión que puede recoger desde el estudio del dominio de una función, de la simetría, a la continuidad o derivabilidad de la misma o cálculo del polinomio de Taylor asociado a una función en un punto.
- La representación gráfica con una correcta elección de ejes y unidades.

Todos los elementos anteriores van a ser fundamentales para la interpretación de fenómenos funcionales y análisis de resultados. Las relaciones funcionales que se van a establecer en la propuesta van a estar ligadas a situaciones reales que derivan de la física, la química o la economía entre otras; por lo que van a aparecer preguntas con respuesta verbal interpretando los resultados obtenidos ya que los datos están contextualizados.

Estos contenidos se trabajarán combinando medios tradicionales de la docencia como son pizarra, lápiz y papel con medios tecnológicos como son las proyecciones y el programa GeoGebra. Este último jugará un papel importante ya que nos permite crear familias de funciones a través de parámetros en forma de deslizadores para analizar el comportamiento de estas cuando variamos estos.

Para trabajar los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje se proponen los siguientes campos de problemas:

1. Estudio de parámetros característicos de diferentes modelos de funciones y paso de un sistema de representación a otro:
    1.1. Lineal.
    1.2. Cuadrática.
    1.3. Hipérbolas.
    1.4. Exponencial y logarítmica.
    1.5. Funciones definidas a trozos.

2. Análisis del crecimiento y decrecimiento de funciones mediante la tasa de variación media.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Para responder a esta pregunta, primero tenemos que advertir que las funciones como objeto matemático no se introduce por primera vez en este curso de 4º de ESO, sino que se lleva trabajando al menos desde 1º de la ESO poniendo énfasis en diferentes representaciones (primero, identificando y estableciendo relaciones funcionales en la realidad e interpretando de gráficas y paulatinamente mediante el estudio de su expresión algebraica). Es por eso que creemos conveniente para abordar esta pregunta centrarnos en la introducción escolar de los contenidos "nuevos" que aparecen en el 4º curso de la ESO.

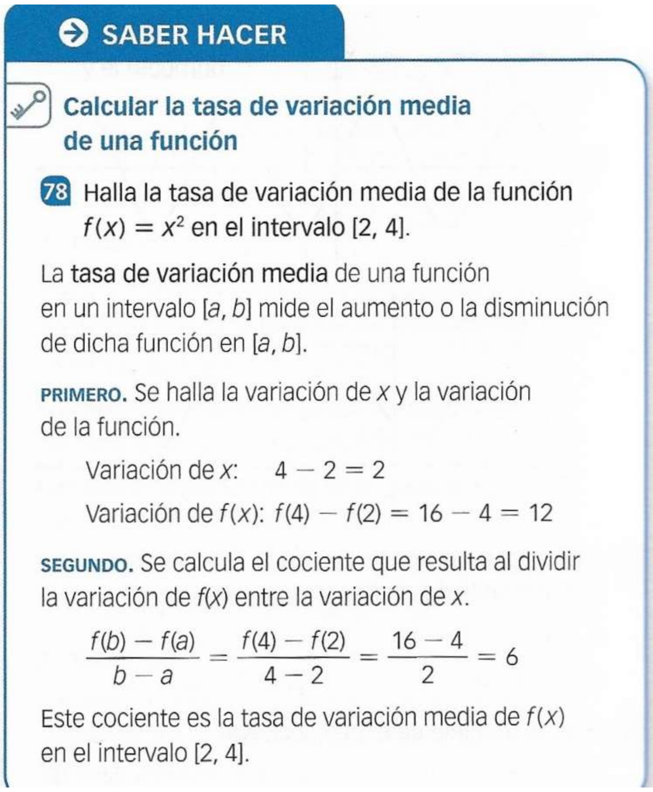
Comparando los currículos de este curso y anteriores, los nuevos objetos matemáticos introducidos en el bloque de funciones de la asignatura son:

1. La tasa de variación media.
2. Tipos de funciones: de proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas y definidas a trozos.

Es necesario observar distintas propuestas de diferentes libros de texto para dar una respuesta fundamentada. Los libros de texto utilizados son:

- Cólera, Gaztelu, García, Oliveira y, Martínez (2003).
- Gámez, Gaztelu, Loysele, Marín, Pérez y, Sánchez (2016).
- Marea Verde (2018).

En primer lugar, destaca la no inclusión en Cólera, Gaztelu, García, Oliveira y, Martínez (2003) de la tasa de variación media, ya que, aunque este libro se publicó cuando estaba en vigor la LOGSE, esta aparecía en el currículo de la época y también en los posteriores (LOE y LOMCE). En Gámez, Gaztelu, Loysele, Marín, Pérez y, Sánchez (2016) se introduce en un recuadro intercalado con las actividades de final de unidad, que lo podemos ver en la siguiente imagen:



SABER HACER

Calcular la tasa de variación media de una función

78 Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [2, 4].

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo $[a, b]$ mide el aumento o la disminución de dicha función en $[a, b]$.

PRIMERO. Se halla la variación de x y la variación de la función.

Variación de x: $4 - 2 = 2$

Variación de $f(x)$: $f(4) - f(2) = 16 - 4 = 12$

SEGUNDO. Se calcula el cociente que resulta al dividir la variación de $f(x)$ entre la variación de x.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6$$

Este cociente es la tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo [2, 4].

Finalmente, la propuesta de Marea Verde (2018) presenta la tasa de variación media como un elemento más de la unidad y lo complementan con otro concepto no presente en el currículo, la tasa de crecimiento. Se introduce con una definición formal y después se introduce un ejemplo explicado en el que se compara con la velocidad media. Además, se introduce como parámetro para medir el crecimiento y decrecimiento de la función.

A continuación, analizamos como se introducen los nuevos tipos de funciones en cada una de las propuestas revisadas:

- En Cólera, Gaztelu, García, Oliveira y, Martínez (2003) tenemos que las funciones de proporcionalidad inversa, exponenciales y logarítmicas se introducen de forma algebraica acompañadas de una o dos gráficas. Además, vienen acompañadas de una descripción verbal de las variaciones según los parámetros. La exponencial es la única que obtiene un trato diferente, ya que después de explicarla de forma abstracta, se contextualiza con 3 ejemplos de realidades concretas. Las definidas a trozos aparecen de forma algebraica y gráfica, con poco texto explicativo y ejemplos sin relación alguna con situaciones reales.
- En Gámez, Gaztelu, Loysele, Marín, Pérez y, Sánchez (2016) sucede lo mismo que en la propuesta anterior con las definidas a trozos: dos ejemplos de estas abstraídos de la realidad. En cuanto a las de proporcionalidad inversa, son

introducidas con su expresión algebraica, un listado de características únicamente verbal y un ejemplo resuelto con contexto real. La relación entre estas funciones y las magnitudes inversamente proporcionales aparecen en el margen de la página como un simple comentario. En cuanto a las exponenciales y logarítmicas, estas vienen introducidas con la expresión algebraica y muchas gráficas según se varían los parámetros. También vienen algunos ejemplos, pero ninguno menciona un suceso cotidiano.

- En Marea Verde (2018) la introducción de los tipos de funciones es muy completa, ya que cuentan con numerosas gráficas, variaciones de parámetros y ejemplos con contexto real. Además, estos ejemplos vienen introducidos en varios sistemas de representación, haciendo una introducción completa.

En definitiva, salvo la última propuesta, la introducción de los modelos de funciones se realiza desde un contexto abstracto, y no desde la modelización de sucesos reales. Además, para la introducción de estos contenidos, ninguna de las propuestas utiliza GeoGebra para presentar las distintas familias de funciones.

Las características para realizar el análisis funcional recogidas en las propuestas son: dominio y recorrido, continuidad y cortes con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetría, periodicidad y comportamiento en el infinito. La forma de introducirlas en los libros es prácticamente idéntica: se introduce el concepto en forma de enunciado verbal y expresiones algebraicas y ejemplos de forma gráfica. Las principales diferencias que encontramos en las propuestas son:

- En Cólera, Gaztelu, García, Oliveira y, Martínez (2003) no aparece el recorrido. Además, aparece un apartado denominado tendencia en el que se analiza el comportamiento en el infinito de las funciones.
- En Gámez, Gaztelu, Loysele, Marín, Pérez y, Sánchez (2016) la principal ausencia es el apartado dedicado al comportamiento en el infinito.
- En Marea Verde (2018) se añaden los tipos de discontinuidades de una función.

2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías enseñados habitualmente.

Los campos de problemas que aparecen en las propuestas anteriores se podrían clasificar en 2 grandes grupos:

- Estudio de parámetros característicos de funciones y paso de un sistema de representación a otro: este es común en las 3 propuestas. En ambas se estudian los diferentes parámetros de funciones en general y después se realiza ese estudio en las funciones específicas del currículo (lineales, cuadráticas, proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas y a trozos). El estudio se centra en dominio, recorrido, continuidad, crecimiento y decrecimiento, simetría y periodicidad.
    - En Cólera, Gaztelu, García, Oliveira y, Martínez (2003) el contenido está dividido en dos unidades: una primera dedicada al estudio de funciones en general y otra en el que profundizan en el estudio de los tipos de funciones vistos. Encontramos aproximadamente 1 tercio de problemas verbales con especial relación con sucesos reales y estos se alternan con otros más abstractos para apoyar el análisis de las características básicas de una función, poniendo especial atención en el dominio. En estos problemas o bien el objetivo es pasar de una representación a otra (gráfica, algebraica, tabla o enunciado), o bien el análisis de funciones (especialmente de su representación gráfica).
    - En Gámez, Gaztelu, Loysele, Marín, Pérez y, Sánchez (2016) encontramos una primera unidad en la que los problemas van dedicadas a las funciones en general y otras dos unidades en las que encontramos los tipos de funciones específicos. Cabe mencionar que las representaciones que más destacan son la algebraica y la gráfica. En cambio, la tabular aparece rara vez en la primera unidad y en los tipos de funciones solo aparece en los problemas relacionados con funciones de proporcionalidad inversa. Nos encontramos con problemas sin contexto real, salvo 5 problemas de 115 en la primera unidad, 7 de 104 en la segunda y 7 de 69 en la tercera. Esto hace que el análisis de resultados pierda relevancia.
    - En Marea Verde (2018) el bloque de funciones se estructura en 3 unidades: una dedicada al estudio general y 2 en las que se reparte los tipos de funciones del currículo. Es reseñable que, a pesar de introducir los tipos de funciones a través de problemas que modelizan situaciones reales, los problemas propuestos no están contextualizados. Aparecen dos en el apartado de funciones lineales y 6 en el de exponenciales y logarítmicas. Además, en la primera unidad si se trabaja con multitud de

representaciones, pero los problemas de tipos de funciones predominan las expresiones algebraicas y gráficas.

- Cálculo e interpretación de la tasa de variación media: este campo de problemas solo lo encontramos en las dos propuestas más modernas.
  - En Gámez, Gaztelu, Loysele, Marín, Pérez y, Sánchez (2016) solo aparecen 3 problemas dedicados únicamente al cálculo de esta. Además, aparece vinculada solo a funciones polinómicas y se pide calcularla a través de su expresión algebraica.
  - En Marea Verde (2018), los problemas están contextualizados, relacionando magnitudes reales. Se pide cálculo de la tasa de variación media, desde diferentes representaciones, e interpretación de esta para concluir respondiendo si la función crece o decrece. Además, introduce el parámetro tasa de crecimiento para completar el campo.

Lo más reseñable de estos campos de problemas es que las tres propuestas difieren del currículo en cuanto a la forma tabular como representación de funciones. Si bien en el currículo esta se mencionaba varias veces y asociada a fenómenos reales, en los libros aparecen problemas que la pidan en contadas ocasiones y la mayoría de estos se encuentran en el tema inicial, es decir, no se utilizan en los tipos de funciones salvo lo dicho anteriormente. Pero si es cierto que, en todas las propuestas, esta se usa como representación intermedia para el paso de expresión algebraica a gráfica.

También vemos que, en las 3 propuestas, en el primer tema se trabaja con todas las representaciones de manera más rica mientras que, a la hora de concretar en tipos de funciones, la expresión algebraica y gráfica son las principales protagonistas.

Las técnicas y tecnologías que las justifican presentes en las propuestas se pueden dividir en tres bloques:

- Análisis de funciones:
  - Para el cálculo del dominio se atiende a ideas dadas de forma general según tipos de funciones justificadas por la tecnología de la no existencia de la función para esos valores.

- La continuidad de una función se analiza como la no presencia de discontinuidades, analizando estas solo gráficamente pautadas como saltos o puntos que faltan.
- El crecimiento y los extremos relativos se realiza a través de la observación de entornos locales de la función.
- La simetría y la periodicidad se comprueban a través de condiciones en forma de expresión algebraica, que se justifica por la comprobación gráfica.

- Paso de una representación a otra: se introducen a través de ejemplos resueltos que se basan en reconocer los rasgos característicos de cada una de las representaciones para obtener la información de la representación a la que se quiere llegar. La más frecuente es el paso de expresión algebraica a gráfica, que utiliza la tabla como representación de apoyo.
- Datos concretos de distintos modelos funcionales: muchos problemas piden encontrar diferentes características de modelos funcionales concretos (por ejemplo, la pendiente de una recta a través de su gráfica) y se obtienen o bien a través de una forma general de su expresión algebraica o bien acudiendo a puntos concretos de sus gráficas.

3. Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno.

La enseñanza de funciones busca que el alumno sea capaz de reconocer las características básicas de estas y, si se trata de alguno de los modelos estudiados, obtener valores que los caracterizan. El alumno es capaz de hacer un análisis de funciones ampliando a los modelos de funciones conocidos y, como hemos visto en dos de las propuestas, sin utilizar nuevo contenido como la tasa de variación media para este análisis.

Las propuestas recogen ejercicios similares en los que solo utilizan representaciones gráficas y algebraicas de las funciones, dejando de lado las tablas y la expresión a modo de enunciado verbal. Al no utilizar esta última es posible que los alumnos no desarrollen un completo significado del modelo funcional que se presente en los problemas.

La escasa aparición de la tasa de variación media y la no utilización de esta en las dos propuestas mencionadas hace que queden desvinculados conceptos de cursos posteriores como puede ser el de derivada.

Si bien es lógico que en la propuesta más antigua no aparezca, salvo una pequeña mención en Marea Verde (2018), en ninguna de las dos propuestas más recientes aparece GeoGebra. Es difícil actualmente desvincular herramientas informáticas con el potencial de GeoGebra del proceso de enseñanza aprendizaje. El empleo de GeoGebra no solo tiene como potencialidad la representación gráfica de funciones dada su expresión algebraica de una manera rápida y evaluar valores puntuales de las mismas, como es el caso de una calculadora gráfica, sino que, además, es posible incorporar parámetros a la expresión algebraica lo que permite a los estudiantes trabajar al variar los valores de los parámetros y de manera dinámica, ya no con una sola función, sino con familias de funciones Esta ausencia de uso produce una desvinculación completa de los estudiantes con la competencia digital.

C. Conocimientos previos del alumno

1. Conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático.

El bloque de funciones de este curso no deja de ser un aprendizaje acumulativo de lo que ya se ha visto en cursos anteriores. Por tanto, muchos de los conocimientos de funciones visto en esos cursos son contenidos necesarios para afrontar la propuesta, además de otros del mismo curso y otros de carácter más general.

A continuación, se enumeran los conocimientos que debe conocer el alumno:

1. Concepto de función. Análisis local de funciones desde su representación gráfica.
2. Lectura e interpretación de gráficos.
3. Concepto de logaritmo y de exponencial.
4. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
5. Operaciones algebraicas y aritméticas sencillas.

No he incluido como conocimientos previos lo relacionado con funciones lineales y cuadráticas porque, aunque estas se vean en 3º de ESO, en la propuesta se van a ampliar los conocimientos repasando y volviendo a incidir sobre los vistos.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

De la lista de conocimientos anteriores, 1,2 y 3 corresponden a contenidos del currículo de 3º de ESO. El punto 4 corresponde a contenidos del bloque de Álgebra y números de 2º de ESO. En cuanto al último punto, corresponde al bloque de Álgebra y números de 1º y 2º de ESO.

El concepto de logaritmo y exponencial (punto 4) son contenidos del mismo curso que el objetivo matemático tratado. Para asegurarnos de que los alumnos gocen de esos conocimientos previos, la secuenciación de unidades didácticas debe ser correcta, impartiendo primero estos dos conceptos antes de abordar el bloque de funciones.

3. Actividades para asegurar que los alumnos poseen los conocimientos previos.

Las siguientes actividades están pensadas para asegurar los conocimientos de cursos anteriores: conocimiento del concepto de función y magnitudes que presentan proporcionalidad.

Actividad 1. Adaptado de Shell Centre for Mathematics Education (1985). Elige la gráfica que mejor se ajuste a cada una de las diez situaciones descritas abajo. (Algunas gráficas pueden ajustarse a más de una situación). Copia la gráfica, pon nombres a los ejes y explica tu elección, indicando todas las suposiciones que hagas. Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión (las gráficas se encuentran al final del enunciado).

1. Los precios están subiendo ahora más despacio que en ningún otro momento de los últimos cinco años.

2. Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero ¡detesto la leche templada!

3. Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.

4. Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo y vitoreando.

5. Si las entradas del cine son muy baratas, los dueños perderán dinero. Pero si son demasiado caras, irá poca gente y también perderán. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.

En las siguientes situaciones, tienes que decidir tú lo que pasa. Explícalo claramente por escrito y elige la mejor gráfica.

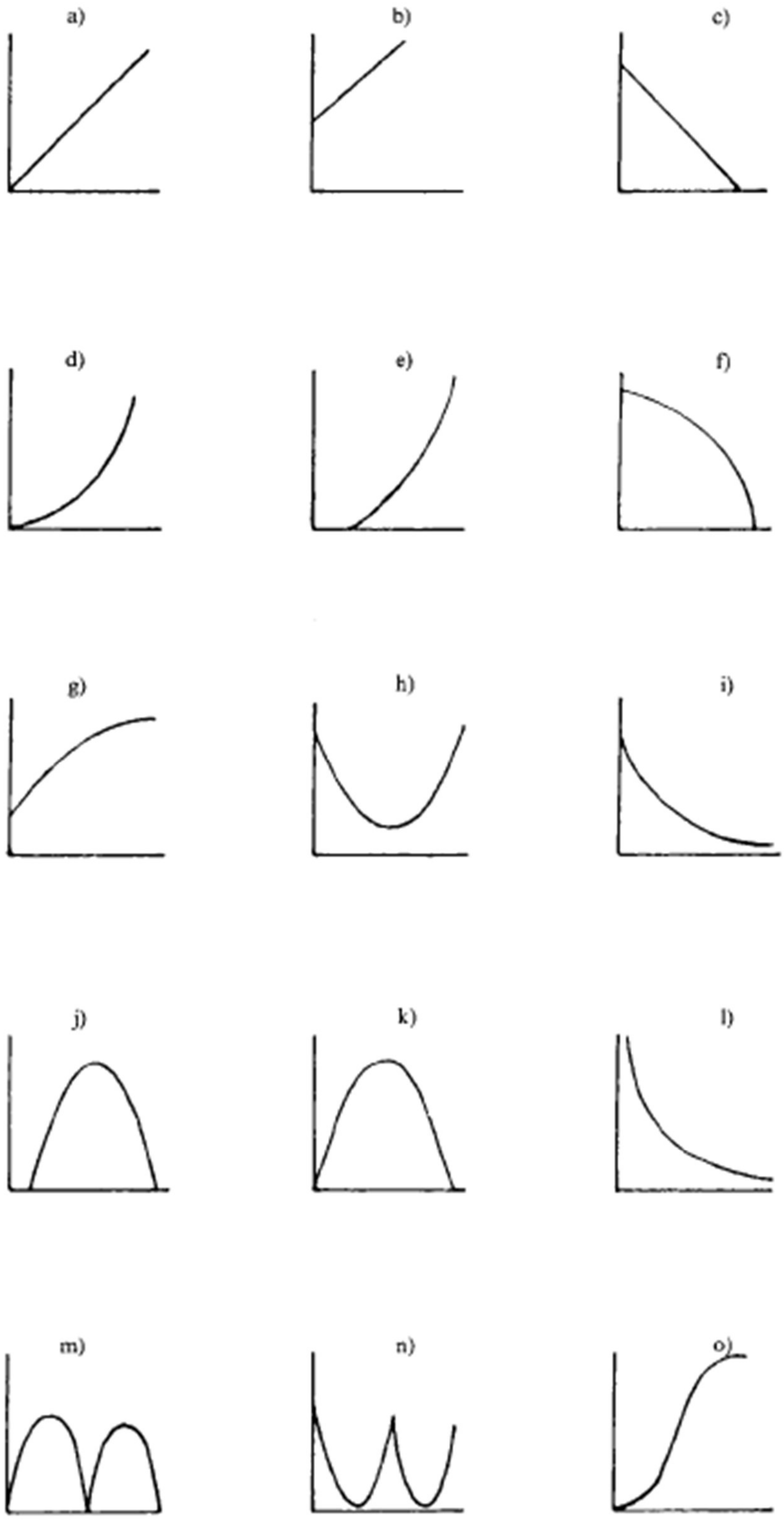
i. ¿Cómo depende el precio de una bolsa de patatas de su peso?

ii. ¿Cómo varía el diámetro de un globo cuando sale aire lentamente de él?

iii. ¿Cómo depende la duración de una carrera de su longitud?

iv. ¿Cómo varía la velocidad de una niña en un columpio?

v. ¿Cómo varía la velocidad de una pelota cuando bota?



Actividad 2. De los ejemplos anteriores, ¿existe alguno que presente proporcionalidad directa? ¿cuál?

¿Recuerdas la proporcionalidad inversa? ¿Podrías dar un ejemplo de esta?

D. Razones de ser del objeto matemático

1. Razón de ser a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.

Al fin y al cabo, el objetivo de comprender las funciones es saber comunicar, representar y predecir sucesos que tienen cierta relación funcional. Las razones de ser fundamentalmente se basan en la comunicación y la predicción:

- Comunicación: entender el que quiere decir una función en cualquiera de sus representaciones es fundamental. Por ello, es necesario entender y saber pasar de un sistema de representación a otro (descripción verbal, tabla, gráfica, expresión algebraica). Además, el conocimiento de ciertos parámetros para ciertos modelos de funciones puede ampliar el conocimiento de estas.

- Predicción: no hablamos de algo exacto, pero conociendo los contenidos del objeto matemático, los estudiantes han de prever la tendencia que va a tener una función de forma cualitativa, y acercarse a una cuantitativa con la información de los modelos de funciones.

En definitiva, la razón de ser de esto objeto matemático en el nivel trabajado es un conocimiento amplio para acercarnos a la realidad de forma cuantitativa. Además de usar las funciones como elemento comunicativo y tener los recursos suficientes para obtener una predicción sencilla.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Sierra, González y López (1990, p. 93) dividen la evolución histórica del concepto de función y sus representaciones en 5 grandes etapas:

a) Edad Antigua: los babilónicos trabajaron con tablas de dos columnas en las que, además de recoger datos astronómicos, realizaban interpolaciones tanto lineales como geométricas. En la Grecia Antigua, la distinción entre número y magnitud dificultó el concepto de función. No obstante, se encontraron indicios de tablas astronómicas y algo similar los sistemas de coordenadas en las *Cónicas de Apolonio*.

Luego la razón de ser en la Antigüedad de este primario concepto de función son los datos astronómicos a modo de tabla de valores y la geometría.

b) Edad Media: el Merton College de Oxford dedujo la fórmula de la velocidad de cambio (conocida como *regla de Merton*), que corresponde a la expresión algebraica de esta en el movimiento uniformemente acelerado. Nicolás de Oresme introdujo una representación similar a las coordenadas estudiando como varía la velocidad a lo largo del tiempo.

Por lo tanto, la razón de ser del concepto de función surge a modo de fórmulas primitivas y una especie de representación gráfica en base a una magnitud como es la velocidad, en función del tiempo y espacio.

c) Siglos XV, XVI y XVII: Vieta y el Álgebra Simbólico y Galileo y las leyes del movimiento permitieron que Descartes mencione las relaciones funcionales de manera explícita por primera vez. Este afirmó que si tenemos una ecuación con dos incógnitas se le puede asociar una representación gráfica en forma de recta o curva. Newton y Leibniz permitieron la representación de muchas más funciones a través de la representación de estas en series infinitas de potencias.

Por lo tanto, las leyes del movimiento son la razón por la que se logra establecer relaciones funcionales a través del álgebra, consiguiendo pasar de una representación algebraica a una gráfica.

d) Siglo XVIII: Descartes llevó la Geometría Analítica más allá de las funciones elementales, llegando a todas las funciones algebraicas, lo que hace ganar protagonismo a la representación algebraica. La concepción de la función como objeto llega con los estudios de Euler. Además, Euler realiza una representación gráfica de estas de una forma muy similar al sistema de coordenadas actual.

Vemos que, en esta época, se generaliza lo visto anteriormente y se progresa en las representaciones de las funciones, viendo estas como un objeto matemático.

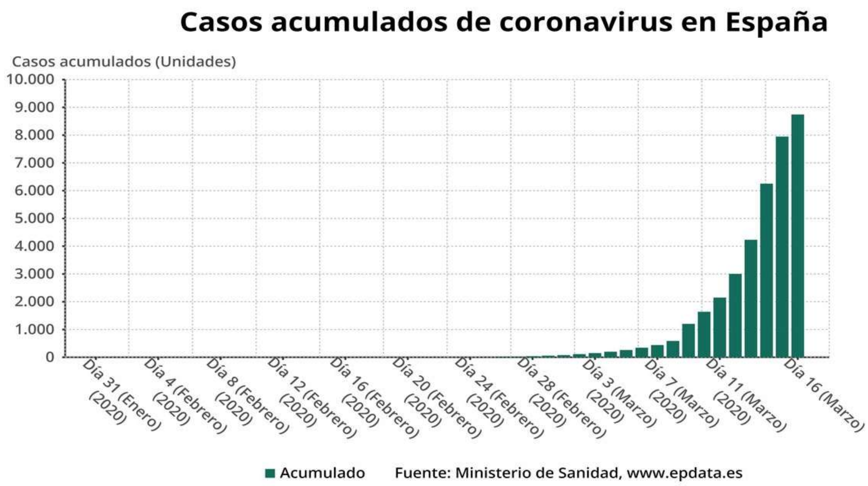
e) Siglos XIX y XX: con Cauchy aparecen los términos de variable dependiente e independiente que utilizamos actualmente. Dirichlet es el que define la función como actualmente la entendemos: «si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x» (Boyer, 1986, p. 687).

Como hemos visto, el concepto de función nace de las observaciones astronómicas, pasando por el análisis de la velocidad y el movimiento, hasta llegar a unos estudios completos más abstractos donde se realiza un proceso de generalización y desarrollo del concepto y sus representaciones.

A lo largo de la historia, se ha pasado de una recogida de datos de forma tabular a un desarrollo del concepto de forma abstracta y de sus representaciones; se ha evolucionado de forma progresiva hasta las razones de ser actuales, en las que la comunicación es un elemento imprescindible.

3. Problema que se constituye en la razón de ser del objeto matemático.

En la pandemia de COVID-19, se recogieron los siguientes datos de los casos acumulados:



En tu cuaderno, aproxima los datos numéricos de todos los días en una tabla, enumerando los días desde el 28 de febrero (es decir es el día 1 y supondremos que hay 1 caso):

Día	1	2	3	4	5	6	…	18
Casos	32	45	84	98	120	165	…	

¿Con qué tipo de función aproximarías la curva de contagios? ¿Podrías dar una expresión algebraica de esta? ¿Cuántos casos prevés el día 32 si la curva sigue la misma tendencia?

4. Metodología a seguir en su implementación en el aula.

En primer lugar, este problema no tiene respuesta única ya que van a variar los datos según tomen de la representación gráfica. Sería propuesto por parejas, con el fin de debatir las decisiones que se tomen. Se les entregará una hoja con la gráfica y el enunciado a cada alumno.

Aunque el enunciado tenga un carácter bastante abierto, el profesor es el que lleva a cabo la mayoría del trabajo guiando a los alumnos. Se responderá en común a las preguntas después de haber realizado la tabla. La idea es que propongan funciones como pueden ser la cuadrática introducida el curso anterior.

Una vez realizado el primer debate se introduce la función exponencial, asociándola con palabras utilizadas frecuentemente como “crecimiento exponencial” y se enseña la gráfica de una función exponencial.

Una vez visto que vamos a aproximarla con una función exponencial se proyecta en la pizarra GeoGebra con los puntos de las funciones ya dibujados y se introduce una función exponencial en la que encontramos varios parámetros.

El profesor los irá desplazando hasta que la curva se adapte a la gráfica, mostrando su expresión algebraica.

Una vez obtenida esta se pide a los alumnos que aproximen cuantos casos habrá en el día 32 trabajando con las parejas de antes y se pondrá en común como lo han conseguido.

Es decir, con esta actividad conseguimos la primera toma de contacto con un modelo funcional nuevo, como es el exponencial. Además, se tratan las 4 representaciones básicas del objeto matemático y se introduce la herramienta GeoGebra. Todo esto a través de un tema real y actual.

E. Campos de problemas

1. Tipos de problemas a presentar en el aula.

Los campos de problemas que se van a trabajar son los siguientes:

1. Estudio de parámetros característicos de diferentes modelos de funciones y paso de un sistema de representación a otro:

    1.1. Lineal.

    1.2. Cuadrática.

    1.3. Hipérbolas.

    1.4. Exponencial y logarítmica.

    1.5. Funciones definidas a trozos.

2. Análisis del crecimiento y decrecimiento de funciones mediante la tasa de variación media.

Todos estos problemas se van a centrar en un contexto real ya que, comparando con el currículo del curso anterior, el análisis de funciones pasa a ser más cuantitativo que cualitativo.

Además, estos problemas van a estar enfocados tanto al papel y lápiz como a los medios tecnológicos. Usaremos GeoGebra para algunos de los problemas por su potencial en el análisis de funciones de forma gráfica.

<u>1.1. Estudio de parámetros característicos y paso de un sistema de representación a otro en funciones lineales.</u>

Problema 1. *¿Cuáles de los siguientes enunciados corresponde a una relación funcional lineal?*

1. El coste de pedir fundas de móviles por una empresa de venta online tiene un coste fijo de gastos de envío de 3 euros y cada funda cuesta 4.

2. El tiempo que tarda en llenarse una piscina según el número de entradas de agua que se abran.

3. El dinero que tiene o debe una persona al comprar bolígrafos de 2 € unidad sabiendo que tiene en el monedero 8 €.

4. El número de caramelos por niño según el número de estos si se dispone de un bote de 50 caramelos.

5. Un grifo está estropeado y gotea medio litro hora.

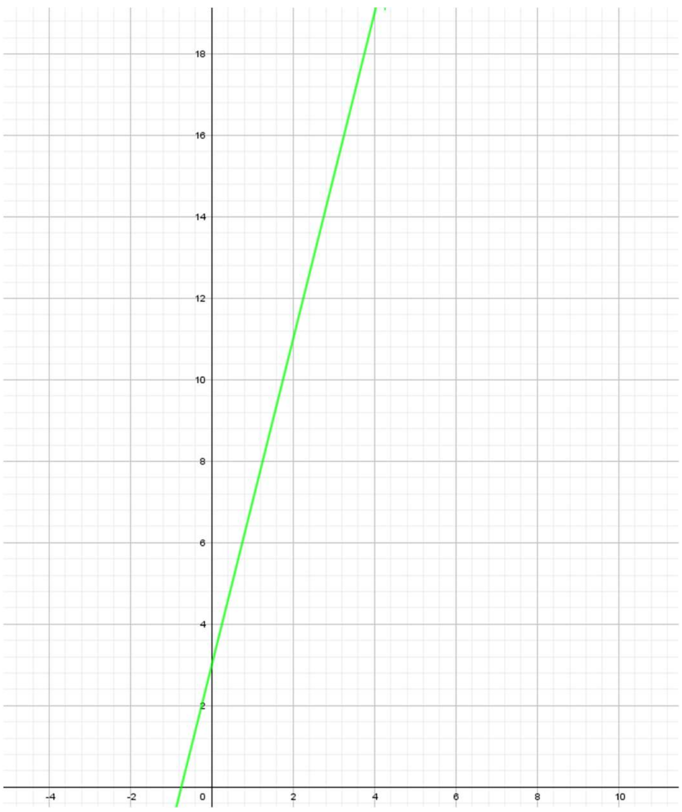
Relaciona los enunciados que corresponden a funciones lineales con las representaciones que hay a continuación:

a) $f(x) = 8 - 2x$

b)

x	*1*	*2*	*3*	*4*
f(x)	*0,5*	*1*	*1,5*	*2*

c)



Para las funciones anteriores aporta una representación distinta a cada una de las funciones del enunciado.

En el problema anterior buscamos introducir las distintas representaciones de las funciones mediante las lineales. A través de funciones dadas por enunciado verbal tienen que relacionarlas con gráfica, tabla y expresión algebraica. Además, se les pide posteriormente que construyan una representación diferente de las dadas para cada una de estas para introducir así el paso de una a otra por el propio estudiante.

Problema 2. *Una forma rápida y aproximada de medir la frecuencia cardiaca máxima de una persona según su edad es realizar la diferencia de 220 latidos por minuto y la edad de la persona.*

a) Realiza una tabla donde se muestre la disminución de esta frecuencia máxima según la edad (de 10 en 10 años).

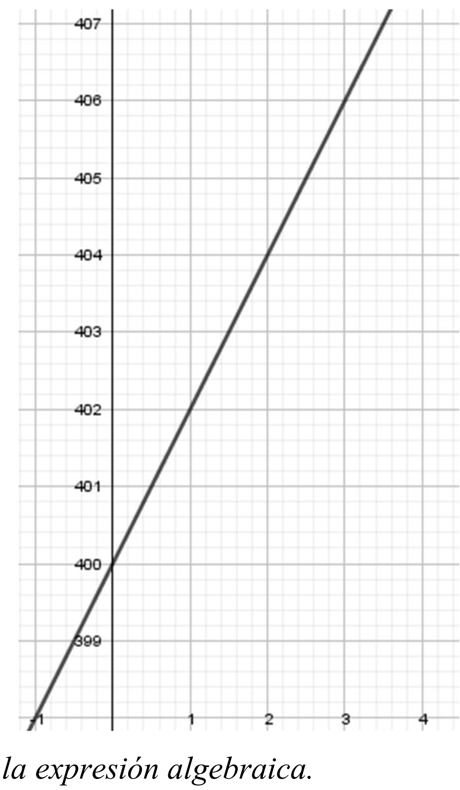
b) ¿Cuál es la expresión algebraica de esta relación?

c) Represéntala gráficamente.

d) Haz un breve comentario de lo que observas al analizar estas representaciones, valorando que sucede con la frecuencia cardiaca máxima y la edad.

En este problema se pretende trabajar con una función lineal básica de un caso real y, a través de ella, pasar por todos los sistemas de representación posibles. Partiendo de un enunciado verbal de la función, se busca en los apartados la representación tabular, algebraica, gráfica y, por último, una interpretación verbal propia por el alumno.

Problema 3. *En los datos recogidos por una granja de conejos se observa la siguiente gráfica que recoge el crecimiento de la población de conejos al día:*



a) Encuentra la expresión algebraica.

b) ¿Las magnitudes son directamente proporcionales? Y, si no lo son ¿encuentras alguna modificación posible para que lo sean modificando la pendiente o la ordenada en el origen?

En este problema se introduce una función no afín, se pide su expresión algebraica y que los alumnos sepan identificar que, haciendo esta función afín (n=0), se tiene que las magnitudes representadas guardan una relación de proporcionalidad directa.

Problema 4. *En GeoGebra dibuja una recta marcando como deslizadores entre -5 y 5 la pendiente, m, y la ordenada en el origen, n. A continuación, responde a las siguientes preguntas:*

a) Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = 3 y n = 2.

b) Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = 0 y n = 4.

c) Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = -1 y n = 5.

d) Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = 2 y n = -1.

Con este problema se busca que, a partir de valores de los parámetros característicos de las funciones lineales, los alumnos busquen ejemplos que se correspondan con las gráficas obtenidas en GeoGebra. No se hace mucho hincapié en ellos ya que se dan en profundidad en el curso anterior.

<u>1.2. Estudio de parámetros característicos y paso de un sistema de representación a otro en funciones cuadráticas.</u>

Problema 5. *A continuación se registran las distancias recorridas de objeto que cae desde un rascacielos en función del tiempo.*

Tiempo (segs.)	*0*	*1*	*2*	*5*	*8*	*10*
Distancia (metros)	*0*	*4,9*	*19,6*	*122,5*	*313,6*	*490*

a) Usando GeoGebra, dibuja los puntos anteriores. Encuentra su expresión algebraica sabiendo que se corresponde con un monomio de grado 2.

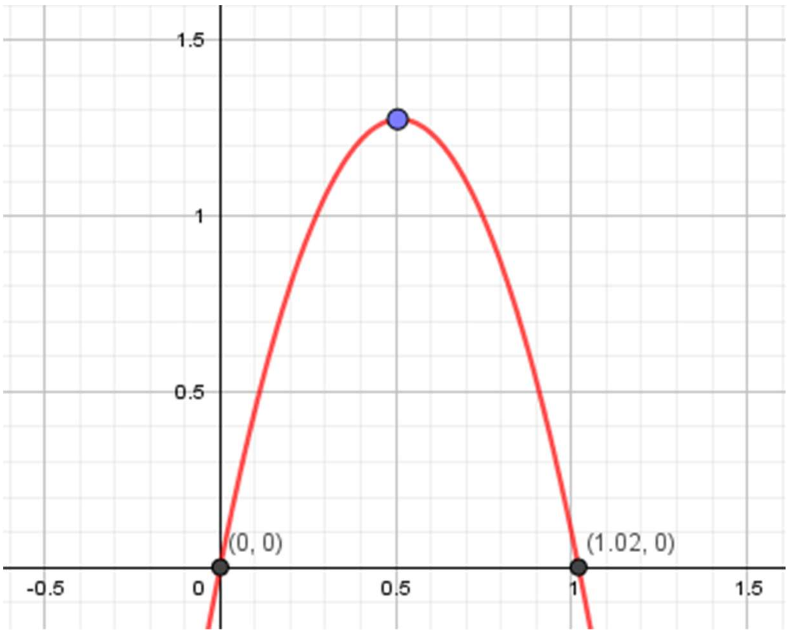
b) Haz una gráfica de la función.

c) En el caso anterior hemos visto la distancia recorrida, pero es más lógico y útil representar la distancia a la que se encuentra el objeto del suelo (la altura) *en su lugar. Dado un rascacielos con altura 396.9 metros, construye una tabla de valores y obtén la expresión algebraica y gráfica de la altura a la que se encuentra el objeto en cada momento de la caída. Utiliza GeoGebra para representar los puntos de la tabla y la expresión algebraica para ver que coinciden.*

d) Con tus propias palabras, explica cuál es la parte de la función que describe el fenómeno. ¿Qué le sucede al objeto según la gráfica?

Con el problema anterior conseguimos el paso de una tabla a otras representaciones en funciones cuadráticas. Después, aprovechando la función anterior, se pide el paso de un enunciado verbal al resto de representaciones. Para acabar se pide saber que parte representa la realidad, por qué y qué representa en el contexto real.

Problema 6. *Sergio Ramos hace un lanzamiento de falta a portería. En la siguiente gráfica se observa la altura (en metros) a la que está el balón en función del tiempo (en segundos):*



a) Sabiendo que su expresión algebraica es de la forma $y = -4,9\,x^2 + bx + c$*, hallar los parámetros b y c.*

b) ¿Cuál es la altura máxima del tiro? Calcularla al menos de 2 formas distintas.

c) ¿Qué nos dice la gráfica de la velocidad de ascenso del tiro? Explícalo con tus propias palabras.

A partir de una gráfica se consigue el paso de esta al resto de representaciones. Además, se pide el cálculo del vértice de forma indirecta y de dos formas distintas: una acudiendo a la simetría de la función respecto el vértice y otra sabiendo que si la expresión algebraica viene dada de la forma $ax^2 + bx + c$ la coordenada del eje de abscisas del vértice es $x = -\frac{b}{2a}$.

Problema 7. *Los beneficios de la venta de plátano en una frutería dependen de la demanda de este. Si x es la demanda en kilogramos, el beneficio viene dado por 9 - 0,25x euros, pero el hecho de tener plátanos tiene un coste de 4 euros fijos.*

a) Realiza una tabla en la que se compare la demanda y los beneficios de la venta de plátanos.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica del beneficio de la frutería en función de la demanda de plátanos?

c) Realiza en GeoGebra una gráfica. ¿Cuál es el beneficio máximo y con qué demanda se obtiene?

d) El dueño del establecimiento descubre otra opción de compra de plátanos. En ella, la demanda varía siendo esta la dada por la ecuación 7 – 0,1x, pero el coste fijo pasa de ser 4 a ser 10 veces más. Compara con tus propias palabras las gráficas de las dos opciones, diciendo cuál interesa más según la demanda.

Seguimos jugando con las distintas representaciones con contexto diferente. En este problema se incluye la comparación de dos gráficas para comunicar que opción es mejor.

Problema 8. *Adaptado de* Sierra, González y López (1998*). Representa las siguientes funciones con GeoGebra:*

a) $y = x^2 + q$ con $q = 1$, $q = 3$, $q = -7$. Completa la siguiente tabla:

	vértice	***eje***
$x^2 + 1$		
$x^2 + 3$		
$x^2 - 7$		

¿Qué conclusiones sacas? Puedes emplear el deslizador y observar las gráficas para comprobar si tu primera intuición es la adecuada.

b) $y = (x + p)^2$ con $p = 2$, $p = 3$, $p = -5$. Completa la siguiente tabla:

	vértice	*eje*
$(x + 2)^2$		
$(x + 3)^2$		
$(x - 5)^2$		

¿Qué conclusiones sacas? Puedes emplear el deslizador y observar las gráficas para comprobar si tu primera intuición es la adecuada.

c) Si la parábola es $y = (x + p)^2 + q$, ¿cuál es el vértice de la parábola? ¿Cuál es su eje de simetría? Para ayudarte a dar la respuesta, crea deslizadores en GeoGebra para p y q que varíen entre -5 y 5.

d) Tomando los deslizadores anteriores, crea uno nuevo r de -5 a 5 y representa la parábola $y = r\,(x + p)^2 + q$ y observa qué sucede.

e) Por último, ¿qué puntos característicos podemos obtener para dibujar a mano la gráfica de una función cuadrática?

A través de GeoGebra ayudamos a los alumnos a construir una idea general de la gráfica de las funciones cuadráticas dependiendo de varios parámetros, así como de sus rasgos característicos como son el vértice y el eje.

1.3. Estudio de parámetros característicos y paso de un sistema de representación a otro en hipérbolas.

Problema 9. *Responde a los siguientes apartados.*

a) Introduce dos magnitudes que tengan una relación de proporcionalidad inversa.

b) Crea una tabla con las dos magnitudes anteriores en las que se vea la relación de proporcionalidad. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

c) Obtén la expresión algebraica de la función que relaciona las dos magnitudes dadas.

d) Dibuja a mano una gráfica de la función y analiza su dominio, continuidad y crecimiento.

Como hemos hecho con lineales y cuadráticas, en este problema realizamos el paso entre diferentes representaciones para funciones de proporcionalidad inversa. Además, este ejercicio tiene un carácter más abierto ya que se le hace elegir al estudiante las magnitudes a representar.

Problema 10. *En un huerto se va a realizar la recolecta del tomate. Cuentan con unos 1500 tomates y quieren saber cuántos empleados son necesarios para recogerlos en 2 horas, suponiendo que cada empleado recoge 50 tomates por hora. Se han encontrado distintas tablas, pero tienen claro que solo hay una correcta:*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*1300*	*1100*	*900*	*700*	*500*	*300*	*100*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*750*	*500*	*375*	*300*	*250*	*214,3*	*187,5*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*3000*	*4500*	*6000*	*7500*	*9000*	*10500*	*12000*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*750*	*375*	*187,5*	*93,75*	*46,875*	*23,44*	*11,72*

a) ¿Cuál es la tabla correcta?

b) ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente?

c) Para encontrar la solución a la pregunta original, realiza una tabla con los tomates que se pueden recoger en 2 horas según el número de empleados.

En este problema se introducen dos magnitudes de proporcionalidad inversa elegir la representación tabular correcta. A partir de ella se busca la expresión algebraica y en una última pregunta se pide hacer un cálculo a través de otra tabla, pero las magnitudes de la tabla guardan una relación de proporcionalidad directa.

Problema 11. *El secretario de una empresa de instalaciones eléctricas ha perdido un impreso donde marcaba el precio del metro de un material en función de cuantos se encargaban. Recuerda lo siguiente de esta relación:*

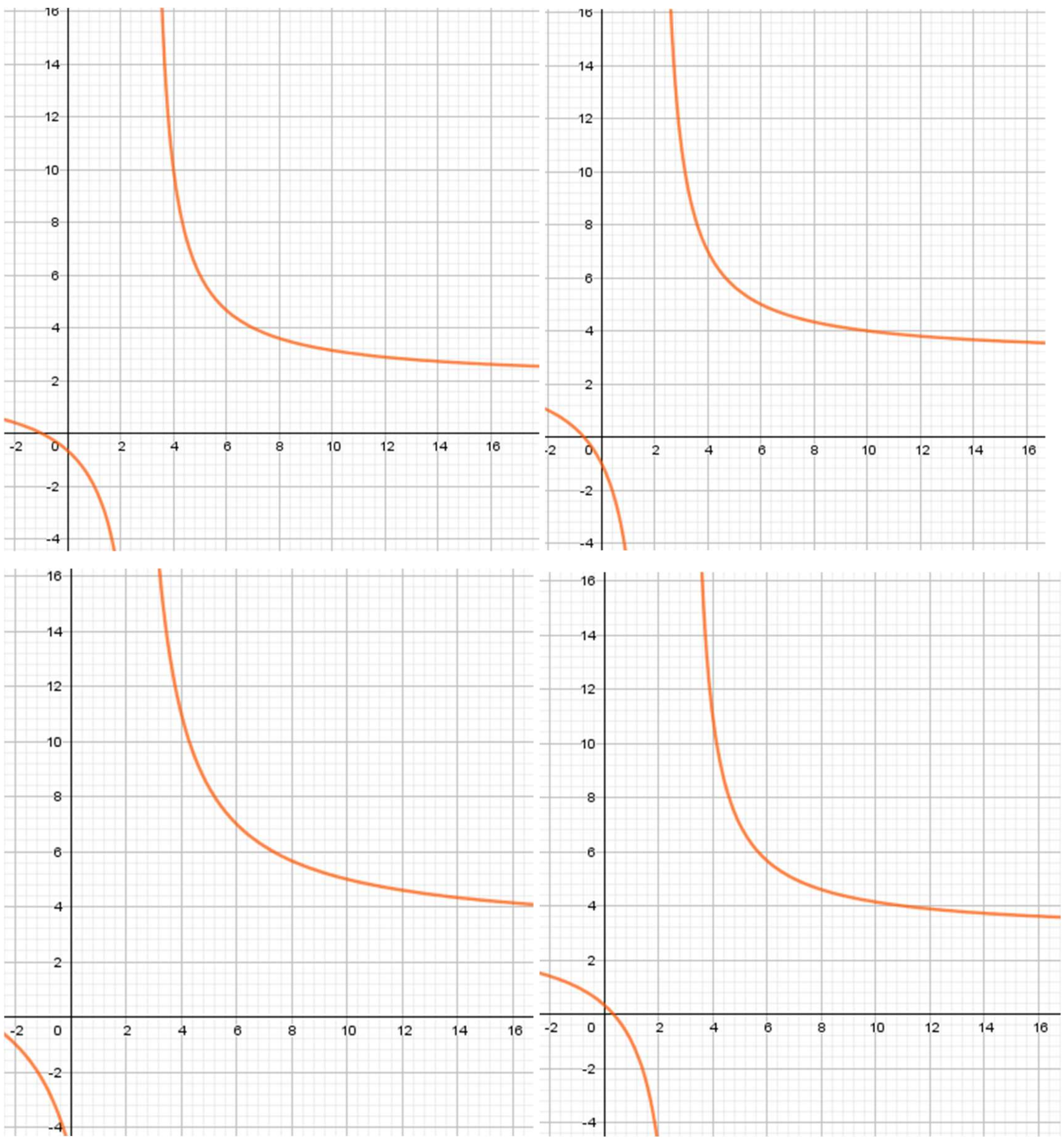
- *Cuantos más metros del material se encargan, más barato sale el metro de este.*

- *La gráfica de la función era válida a partir de los 3 metros de material, ya que según la gráfica 2 metros tenían un coste indeterminado.*

- *Si se compran muchos metros el precio se acerca a 3 euros, pero nunca llega a ser 3 exactos.*

- *El precio del metro es de 7 euros cuando se compran 4 metros, y 4 euros cuando se compran 10 metros.*

¿Cuál de las siguientes gráficas se ajusta a los datos dados por el secretario? ¿Podrías dar una expresión algebraica a la gráfica?



Con el enunciado de este problema se busca que el alumno sea capaz de relacionarlo con una gráfica y, a partir de la gráfica elegida, obtener una expresión algebraica de esta. Por el tipo de gráfica y los datos dados en el enunciado deben intuir que se trata de una función de proporcionalidad inversa.

Problema 12. *En una empresa de tratamiento de agua nos dan la siguiente información: el tanto por ciento de residuos eliminados en un litro de agua a lo largo del tiempo (en segundos) viene dado por la siguiente expresión algebraica:*

$$f(x) = \frac{200x - 100}{x}$$

a) Esboza una gráfica a mano de la función utilizando ejes y unidades adecuadas. ¿Hay asíntota vertical y/o horizontal? Indícalas.

b) Realiza una tabla de valores, ¿existe alguna relación de proporcionalidad?

c) Explica con tus propias palabras qué le sucede al agua tratada. ¿Se llega a eliminar el 100% de residuos?

En este problema se aporta la expresión algebraica de una función de proporcionalidad inversa, en la que tienen que hacer manipulaciones algebraicas simples para llegar a la expresión que conocen. A partir de estas se obtienen las diferentes representaciones de esta y se pide que expliquen si existe algún tipo de relación de proporcionalidad entre las dos magnitudes.

Problema 13. *En GeoGebra, definimos 3 deslizadores a, b, c y, a través de estos, hacemos la gráfica de la siguiente expresión algebraica:*

$$f(x) = \frac{a}{x - b} + c$$

a) Partiendo de que todos los deslizadores toman el valor 1 y están definidos en el intervalo predeterminado (entre -5 y 5), haz variar a. ¿Qué observas? ¿Hay algún punto en el que la función varíe drásticamente? ¿Cuál?

b) Dibuja una recta de la forma x = b y varía el deslizador, ¿qué sucede? ¿la función la corta?

c) Dibuja una recta de la forma y = c y varía el deslizador, ¿qué sucede? ¿la función la corta?

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de estas funciones? ¿son continuas?

e) ¿Es simétrica para algún valor de los deslizadores?

A través de GeoGebra, en el problema anterior se ven las relaciones entre la expresión algebraica y gráfica de las funciones de proporcionalidad inversa según los parámetros de la expresión algebraica. Además, se pregunta por otras características de estas para formas una idea general de este tipo de funciones a nivel gráfico.

1.4. Estudio de parámetros característicos y paso de un sistema de representación a otro en funciones exponenciales y logarítmicas.

Problema 14. *Las ondas sísmicas de los terremotos se miden en la escala de Richter para catalogar la gravedad de estos. Esta consiste en una numeración que señala la amplitud máxima de las ondas que se han generado en ese seísmo. Por cada unidad que crece la escala Richter significa que la amplitud máxima de estas ondas es 10 veces mayor, es decir, el valor 3 en la escala Richter indica que la onda máxima registrada es de 1 milímetro mientras que el valor 4 indica 1 centímetro.*

a) Construye una tabla comparando la amplitud máxima de las ondas (en centímetros) en función de los valores de la escala Richter (hasta el 10).

b) Con los valores anteriores piensa en una expresión algebraica para esta función.

c) Haz una representación gráfica de la función. ¿En algún momento está cruza el eje OX?

En este problema se busca la obtención de las distintas representaciones de una función exponencial a través de un enunciado verbal.

Problema 15. *En la siguiente tabla se recogen datos de la presión atmosférica (en milímetros de mercurio) en función de la altitud (en metros):*

Altitud (m)	***Presión (mm Hg)***
0	*760*
1000	*687.68*
2000	*622.24*
3000	*563.02*
4000	*509.44*
5000	*460.96*

6000	*417.1*
7000	*377.4*
8000	*341.49*
9000	*308.99*
10000	*279.59*

a) Calcula los parámetros a y b (con 4 decimales).

b) Comprueba que la expresión algebraica coincide con los datos dados en la tabla a través de GeoGebra.

c) Expresa con tus propias palabras la relación funcional entre la altitud y la presión atmosférica.

En este problema se busca la obtención de las distintas representaciones de una función exponencial a través de una tabla. Además, el alumno debe explicar el significado de la relación funcional de las magnitudes dadas con sus propias palabras

Problema 16. *El pH es una escala utilizada para medir la acidez de las sustancias. Esta escala valora entre el 1 y el 14 según la concentración de iones de hidrógeno, siendo 1 lo más ácido. El paso de la concentración de iones de hidrógeno a la escala se realiza calculando el logaritmo en base 10 de la concentración y cambiándole el signo.*

a) ¿Qué concentración de iones de hidrógeno tiene que haber para que la medición de pH sea 7?

b) Busca la expresión algebraica que relaciona el pH con los iones de hidrógeno.

c) Realiza una tabla en la que se vea para cada valor de la escala pH la concentración de iones de hidrógeno presentes en la disolución.

d) Dibuja la gráfica de la función teniendo en cuenta su expresión algebraica, utilizando ejes y unidades adecuadas.

El enunciado anterior consiste en que, a partir de este, se obtengan las representaciones restantes de la función logarítmica.

Problema 17. *Teniendo en cuenta el umbral estándar de la audición humana, podemos calcular la intensidad del sonido en decibelios a partir de la siguiente expresión:*

$$I(x) = 10\, log_{10}\left(\frac{x}{I_0}\right),$$

donde I_0 es el umbral de audición humana.

a) Completa la siguiente tabla:

Intensidad en veces I0	*Intensidad en dB*
$10\, I_0$	
	50 dB
$1000\, I_0$	
	80 dB
$10^{10}\, I_0$	

b) Dibuja la gráfica de la función utilizando ejes y unidades adecuadas.

En este problema buscamos completar la representación tabular y dibujar la gráfica de la expresión algebraica de una función logarítmica.

Problema 18. *Realiza las siguientes tareas en GeoGebra y responde a las preguntas:*

a) Dibuja las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = ln\ x$ y rellena la siguiente tabla observando las gráficas:

	e^x	*ln x*
Dominio		
Recorrido		
Continuidad		
Crecimiento		
Puntos corte OX		
Puntos corte OY		

b) Ahora establece un parámetro a entre 0 y 10 y dibuja las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = log_a x$. ¿Qué relación tienen estas dos funciones? ¿Qué sucede conforme aumenta a? ¿Hay algún intervalo en el que las funciones cambien de forma significativa?

c) Fijamos la a anterior en 2 y añadimos el parámetro k definido entre -5 y 5 y modificamos las funciones: $f(x) = k\,a^x$ y $g(x) = k\log_a x$. ¿Qué produce la variación de este parámetro?

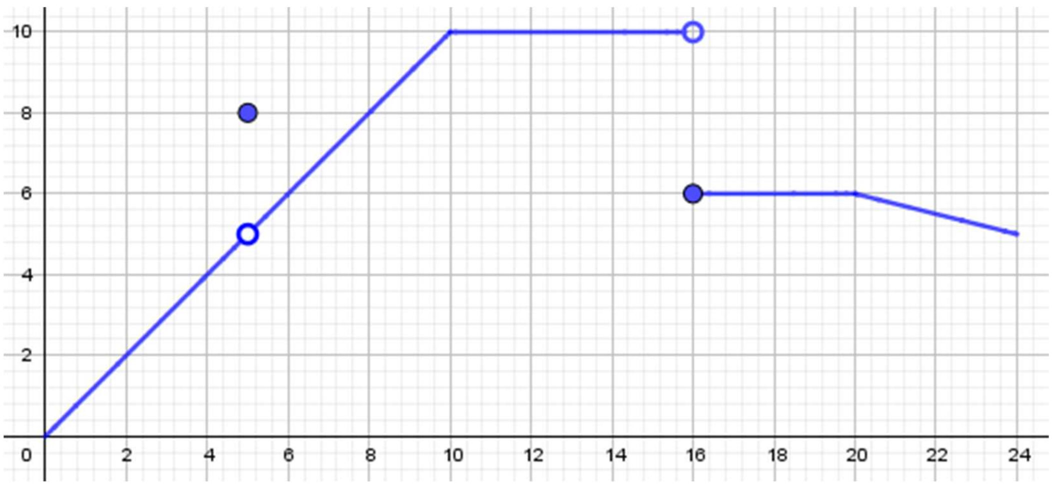
d) Fijamos k en 1, añadimos el parámetro b definido entre -5 y 5 y modificamos las funciones: $f(x) = k\,a^{bx}$ y $g(x) = k\log_a bx$. ¿Qué produce la variación de este parámetro?

e) Fijamos b en 1, añadimos los parámetros c y d definidos entre -5 y 5 y modificamos las funciones: $f(x) = k\,a^{bx+c} + d$ y $g(x) = k\log_a (bx+c) + d$. ¿Qué producen las variaciones de estos parámetros?

Con este problema y con la ayuda de GeoGebra ayudamos al alumno a entender que sucede con la expresión gráfica conforme variamos la expresión algebraica de las funciones exponenciales y logarítmicas.

1.5. Estudio de parámetros característicos y paso de un sistema de representación a otro en funciones a trozos.

Problema 19. *A lo largo de 24 horas, las acciones de determinada compañía han variado de la siguiente forma:*



a) Construye la expresión algebraica de la función.

b) ¿Es una función continua? ¿En qué puntos no es continua?

A través de la representación gráfica de una función a trozos se busca que los estudiantes obtengan la expresión algebraica de esta y un análisis de su continuidad.

Problema 20. *Una sala de eventos dispone de un aforo de 400 personas. El precio de las entradas varía según la previsión de asistentes. Si acuden entre 0 y 150 personas el precio de las entradas es de 15 euros. En caso de prever entre 150 y 300 se calcula a través de una recta de pendiente* $\frac{1}{15}$ *y ordenada en el origen 5. Y cuando se estima que entre 300 y 400 personas van a acudir al evento la entrada cuesta el cuadrado de los asistentes dividido entre 3000 y a este cálculo restarle 5 euros*

a) ¿Cuánto cuesta una entrada si asisten 115 personas? ¿y si asisten 235? ¿y si se espera agotar entradas?

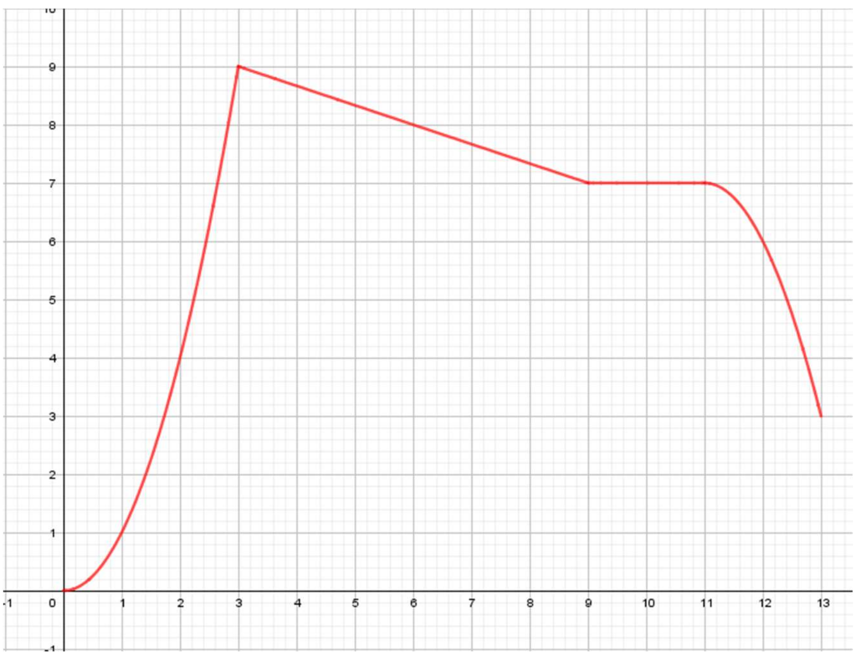
b) Representa algebraicamente la función.

c) Representa gráficamente la función a través de la orden Función(f(x), x_1*,* x_2*) que dibuja la función en el intervalo dado. ¿Es continua?*

d) ¿Cuál debe ser el número de asistentes previstos para que el precio de la entrada sea 17 euros?

A través de un enunciado verbal se busca que los alumnos comprendan la función con las preguntas siguientes y que obtengan la representación gráfica de esta.

Problema 21. *En la siguiente imagen se muestra el dibujo del cableado de una instalación eléctrica que pasa por encima de un edificio. Tanto la altura como la longitud están representadas en metros:*



a) ¿Cuál de estas es la expresión algebraica que se corresponde con la función?

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad 0\le x<3 \\ -\frac{1}{2}x+10 & si \quad 3\le x<9 \\ 7 & si \quad 9\le x<11 \\ -(x-11)^2+7 & si \quad 11\le x\le 13 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad 0\le x<3 \\ -\frac{1}{3}x+10 & si \quad 3\le x<9 \\ 7 & si \quad 9\le x<11 \\ -e^{x-11}+8 & si \quad 11\le x\le 13 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad 0\le x<3 \\ -\frac{1}{3}x+10 & si \quad 3\le x<9 \\ 7 & si \quad 9\le x<11 \\ -(x-11)^2+7 & si \quad 11\le x\le 13 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad 0\le x<3 \\ -\frac{1}{3}x+10 & si \quad 3\le x<9 \\ 7 & si \quad 9\le x<11 \\ (x-11)^2+7 & si \quad 11\le x\le 13 \end{cases}$$

b) Se quiere colocar un acceso para posibles averías en mitad de la longitud que ocupa el circuito en el eje OX. ¿A qué altura estará colocado?

c) Se estudia también variar el segundo segmento de cableado para partir la instalación en 2, de tal forma que entre el tramo 2 y el 3 del cableado haya un salto de 3 metros en el eje OY. ¿Cómo varía la expresión algebraica? ¿Es continua esta función?

En el problema anterior se busca relacionar la expresión gráfica con una de las 4 algebraicas dadas y después se realizan diferentes preguntas en las que se pide una expresión algebraica modificada y su continuidad.

2. Análisis del crecimiento y decrecimiento de funciones mediante la tasa de variación media.

Problema 22. *Dos vehículos frenan al mismo tiempo. El vehículo A lleva una velocidad inicial de 91 km/h y la variación de esta según el tiempo (en segundos) equivale a la función* $f(x) = 100 - \frac{1}{4}(x-6)^2$. *El vehículo B frena con una velocidad inicial de 120 km/h y la velocidad varía según la función* $g(x) = 120 - \frac{1}{2}x^2$.

a) ¿Cuánto tiempo tardan en pararse?

b) Calcula la aceleración media de cada vehículo.

c) Calcula la TVM de cada vehículo desde el segundo 0 hasta el tiempo en el que se detienen, ¿alguna relación con la aceleración media?

d) Calcula la TVM de ambos vehículos en los intervalos [0,2] y [9,11]. Explica que significa la diferencia entre una y otra.

El enunciado anterior introduce la tasa de variación media en un contexto real. Esta se calcula en diferentes intervalos y se relaciona con la aceleración media.

Problema 23. *Dos compañías de automóviles diferentes muestran sus ingresos en millones de euros durante el año 2019 en la siguiente tabla:*

Meses	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Compañía A	25	*25*	*29*	*38*	*36*	*39*	*34*	*29*	*28*	*32*	*35*	*37*	*38*
Compañía B	32	*32*	*28*	*34*	*35*	*42*	*34*	*32*	*31*	*34*	*32*	*39*	*36*

a) Usando la TVM, compara el crecimiento o decrecimiento de los ingresos de las compañías por semestres.

b) ¿Qué compañía ha tenido mejor segundo trimestre del año? ¿Cuál ha sido el mejor trimestre de la compañía B?

Con este problema se busca el cálculo de la TVM en una representación tabular.

Problema 24. *Vamos a definir en GeoGebra la Tasa de Variación Media para cualquier función. En primer lugar, definimos dos deslizadores a y b. A partir de ellos, definimos las rectas x = a y x = b. Construimos una función f(x) cualquiera y definimos los puntos de corte de f con las rectas definidas. Introducimos en la entrada del programa la orden Funcion(f(x), a, b) que dibujará la función en el intervalo (a, b), así la destacamos de otro color. Definimos la Tasa de Variación Media en la entrada del programa con la siguiente expresión:*

$$TVM_{a,b}f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a) Elegimos una función lineal, ¿cuál es el valor de la TVM? ¿varía? ¿corresponde a algún valor conocido?

b) Cambiamos ahora a una cuadrática. Varía los valores de los deslizadores, ¿sabrías decir que significa el valor de la TVM? ¿Cuándo es positiva y cuándo no?

En este problema introducimos el concepto de tasa de variación media en GeoGebra y se relaciona el valor de esta con la pendiente de las funciones lineales.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Para el primer campo de problemas (estudio de parámetros característicos de diferentes modelos de funciones y paso de un sistema de representación a otro) y sus subcampos nos encontramos con una estructura similar:

- Primera actividad de introducción de las características más representativas de los modelos de funciones desde enunciado basados en un contexto real.
- Actividad de GeoGebra para analizar el tipo de función a partir de familias de estas.

Para desenvolverse en estos problemas, los alumnos desempeñan las técnicas desde el primer momento a la hora de conocer el modelo funcional. Al final, todo reside en el paso entre distintas representaciones a lo que se unen las características generales de una función y los parámetros característicos de cada modelo. Todo esto se estudia problema a problema en la próxima sección.

El segundo campo de problemas (análisis del crecimiento de funciones mediante la tasa de variación media) la principal técnica que se trabaja es el cálculo de esta tasa desde diferentes tipos de representaciones.

F. Técnicas

1. Tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

A continuación, enumeramos algunos tipos de ejercicios clasificados según el campo de problemas al que pertenecen. Partimos de que las funciones que se trabajan son del tipo lineal, cuadrática, hiperbólica, exponencial o logarítmica o bien estas definidas a trozos.

1. Estudio de parámetros característicos de diferentes modelos de funciones y paso de un sistema de representación a otro:
    - Paso de un sistema de representación a otro.
    - Análisis básico de la función: dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento, continuidad y asíntotas.
    - Cálculo de valores fundamentales de cada tipo de función.
2. Análisis del crecimiento y decrecimiento de funciones mediante la tasa de variación media.
    - Cálculo de la tasa de variación media desde tablas, gráficas o expresiones algebraicas.
    - Interpretación de la tasa de variación media para analizar el crecimiento o decrecimiento.

2. Técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos.

En la propuesta aparecen algunas técnicas transversales, como la interpretación de enunciados verbales y en otros formatos.

Está claro que existen diferentes técnicas asociadas al paso de una representación a otra en función de la representación de la que se parte:

- A partir de expresión algebraica: para obtener la tabla es sencillo dando valores a la variable independiente para obtener distintos puntos y, con esta tabla, es sencillo obtener la gráfica teniendo en cuenta el tipo de función que encontramos. El enunciado verbal tiene sentido a la hora de analizar los datos que estas representan.
- A partir de enunciado verbal: se buscan las variables que actúan como dependiente e independiente. La expresión algebraica se obtiene teniendo en

cuenta los datos dados en el enunciado y, a partir de esta se obtienen la tabla y gráfica como anteriormente.

- A partir de tabla de valores: es sencillo obtener la expresión gráfica como bien hemos dicho anteriormente, aunque se ha de obtener la algebraica previamente para saber qué tipo de función es. Esta última se obtiene asociando los datos a un tipo de funciones conocido si es posible. A partir de los datos de la tabla y teniendo una visión global, el alumno dará un enunciado verbal a modo de descripción relacionando los datos con las magnitudes representadas.
- A partir de gráfica: es sencillo obtener la tabla de valores tomando puntos en la gráfica. A partir de esta tabla de valores y con la idea que da la gráfica sobre el tipo de función que puede ser, es sencillo obtener la expresión algebraica. Para representarla en forma de enunciado verbal, el alumno ha de interpretar qué sucede con las variables de la gráfica.

Cabe destacar que, para la obtención de algunos valores representativos de las funciones a representar, hay que tener en cuenta el tipo de esta. A continuación, se introducen las técnicas para calcularlos según el tipo de función:

- Funciones lineales: hablamos del cálculo e interpretación de *m* y *n* en la expresión $f(x) = mx + n$. Calcularlo desde una gráfica o tabular es sencillo viendo el punto de corte con el eje OY, que será la ordenada en el origen (*n*), y cuanto crece o decrece la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente, que será la pendiente (*m)*. En cuanto a la expresión algebraica es sencillo extrayendo los coeficientes de la expresión. En cuanto a enunciado verbal, se pueden obtener extrayendo información de los datos dados.
- Funciones cuadráticas: hablamos del vértice y eje de la función. El vértice es sencillo de obtener de forma gráfica ya que corresponde con el máximo o mínimo de la función. Si tenemos la expresión algebraica escrita de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ el vértice es el punto $(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right))$. Para calcularla desde enunciado verbal o tabla hace falta obtener una de las representaciones anteriores.

El análisis de las funciones también dependerá del tipo de estas:

- Dominio: todas las funciones tienen como dominio (a no ser que en el enunciado se especifique lo contrario) los reales salvo las hipérbolas y las logarítmicas. Estas dos últimas tienen dominio los reales salvo los valores que anulan al denominador en las primeras y los reales salvo los valores que hacen que el interior del logaritmo sea negativo en la segunda.

- Recorrido: el recorrido son los reales en lineales, cuadráticas y logarítmicas, salvo que se diga lo contrario en el enunciado. Para las hipérbolas son todos los reales salvo el valor añadido a la fracción y las exponenciales los valores mayores que el sumando añadido a la exponencial.
- Continuidad: las únicas que presentan discontinuidades son las hipérbolas y las definidas a trozos. Las hipérbolas presentan su discontinuidad en los valores donde se anula el denominador y en las definidas a trozos se pone especial atención en los puntos donde se cambia el trozo, valorando a la función a la izquierda y derecha de estos.
- Crecimiento y decrecimiento: esto dependerá de los coeficientes que acompañan a las funciones. Todas las funciones son monótonas salvo las cuadráticas, que crecen y decrecen formando un máximo o un mínimo.
- Asíntotas: presentan asíntotas las hipérbolas, las exponenciales y las logarítmicas. Las hipérbolas presentan una horizontal y una vertical y para calcularlas en la expresión algebraica, la vertical es la que anula el denominador y la horizontal corresponde con el sumando independiente de la fracción. En las exponenciales encontramos una asíntota horizontal que corresponde al sumando independiente de la exponencial y en la logarítmica encontramos una vertical que corresponde al valor que hace 0 al interior del logaritmo.

La tasa de variación media se calcula a través de la fórmula $TVM_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, desde diferentes representaciones. La interpretación se realiza a partir de su signo y valor para comparar y decir si la función crece o decrece.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Como se puede apreciar, todas estas técnicas están claramente relacionadas con los diferentes campos de problemas que hemos establecido en el punto anterior, de forma que, después de abordar el problema determinado, plantearemos los ejercicios para promover y consolidar la técnica. Este será el momento de estudio de trabajo de la técnica (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

4. Metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los estudiantes afrontarán en primer lugar las tareas que conforman cada uno de los campos de problemas. En ellas, las nuevas técnicas irán siendo necesarias para su resolución. Se intentará que las técnicas surjan del propio trabajo de los estudiantes durante la resolución del problema mediante sucesivas puestas en común donde se pueda construir el discurso matemático con ayuda del docente que dirigirá la discusión.

Una vez la técnica de resolución sea institucionalizada, se plantearán los ejercicios de desarrollo y consolidación de la técnica antes de pasar a abordar otro campo distinto.

En la sesión previa a la prueba de evaluación se volverán a recordar los distintos campos de problemas abordados, así como las técnicas de resolución de los mismos.

G. Tecnologías (justificación de las técnicas)

Las justificaciones de las técnicas anteriormente expuestas vienen apoyadas por dos tipos de justificaciones:

- Por la validez de una determinada técnica en otro registro de representación y la traducción adecuada de un registro a otro, como, por ejemplo, en los casos de las técnicas de cálculo del dominio, del crecimiento o de la Tasa de Variación Media realizadas en el sistema de representación algebraico se apoyarán en la validez de las técnicas análogas en el registro verbal, en el gráfico o en el tabular y en la traducción entre sistemas de representación.

  Por ejemplo, para justificar la técnica del cálculo el dominio de la función $\ln(x^2 - 1)$, una posible manera de justificación estaría en cambiar al registro gráfico mediante GeoGebra y comprobar el dominio de definición de la misma o representar la función $x^2 - 1$ y estudiar en qué valores dicha función es mayor que cero.

- Por la validez sintáctica de las reglas algebraicas, en el caso de aquellas técnicas que se planteen únicamente desde el sistema de representación algebraico.

  Por ejemplo, para justificar la técnica del cálculo el dominio de la función $\ln(x^2 - 1)$, una posible manera de justificación estaría en la resolución de la inecuación x^2-1>0 y la validez de este argumento podría ser únicamente la validez sintáctica de las reglas del álgebra al resolver la inecuación.

Los estudiantes, en una primera parte, cuando abordan los campos de problemas, se les exigirá que traten de exponer los razonamientos o justificar las técnicas que han empleado en las resoluciones de las tareas propuestas. Finalmente, el profesor será el que en el momento de institucionalización de la técnica será el responsable de ofrecer razonamientos que respalden la técnica presentada.

H. Secuencia didáctica y su cronograma

A continuación, se expone una propuesta de secuenciación en la que se incluyen las actividades planteadas en los anteriores epígrafes. Esta no es definitiva, ya que puede verse modificada por el profesor si viera necesario introducir más ejercicios según el progreso del grupo.

- **Sesión 1 (evaluación inicial):** para comenzar con la unidad didáctica, se introducirán los problemas trabajados en los apartados C y D. Con estos problemas se busca refrescar y evaluar la asimilación de los contenidos de cursos anteriores y ver el nivel desde el que se parte.

- **Sesión 2:** los problemas relacionados con las funciones lineales del apartado E son los que se van a tratar, en el orden que aparecen. El objetivo es comprobar el conocimiento de estas funciones e introducir la relación con la proporcionalidad directa. El problema de GeoGebra se deja para otra sesión.

- **Sesión 3:** se trabajarán los problemas de funciones cuadráticas del apartado E, salvo el que aparece GeoGebra. Estos se trabajarán en el orden que aparecen. El principal objetivo es la familiarización de este tipo de funciones en situaciones reales, consiguiendo extraer todas sus características propias.

- **Sesión 4:** en la sala de ordenadores se trabajarán los problemas de GeoGebra relacionados con funciones lineales y cuadráticas. A través de la herramienta informática se pretende que los estudiantes asocien y distingan las diferentes representaciones algebraicas y gráficas de estos tipos de funciones.

- **Sesión 5:** se trabajarán los problemas de hipérbolas del apartado E y como en las anteriores sesiones, dejaremos el ejercicio de GeoGebra para otra sesión. Los problemas se abordarán en el orden que aparecen.

- **Sesión 6:** las protagonistas de esta sesión son las funciones exponenciales y logarítmicas. Se realizarán los problemas del apartado E salvo el de GeoGebra y se resolverán en el orden que aparecen.

- **Sesión 7:** como en la sesión 4, se hará lo mismo con las funciones hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas.

- **Sesión 8:** se abordarán las funciones a trozos, a través de los tres problemas presentados en el campo de problemas correspondientes

- **Sesión 9:** esta será dedicada íntegramente a la tasa de variación media y se realizará en la sala de ordenadores. Se resolverán los ejercicios que aparecen en el apartado E en el mismo orden de aparición, para ir desde realidades concretas al concepto abstracto trabajado desde GeoGebra.

- **Sesión 10 (evaluación):** en esta sesión se realizará la prueba objetiva escrita que se detalla en el siguiente apartado.

- **Sesiones 11 y 12:** en esta sesión se corregirá el examen teniendo en cuenta las producciones de los alumnos. Si surgen, se propondrán actividades en función de los fallos generales de los estudiantes.

I. Evaluación

1. Prueba de evaluación escrita del aprendizaje realizado por los alumnos.

Pregunta 1. *La siguiente expresión algebraica sirve para calcular el dinero obtenido por inversiones a interés continuo:*

$$f(x) = C_0 e^{ix},$$

Donde:

- C_0 *es la cantidad inicial invertida.*
- i *es la tasa de interés.*
- *La variable* x *es el tiempo en años.*

Responde a los siguientes apartados:

a) Esboza una gráfica con 1 euro de cantidad inicial y un interés del 0,5 (0,75 puntos).

b) Esboza otra gráfica con 3 euros de cantidad inicial y un interés de -0,2 (0,75 puntos).

c) Basándote en las gráficas, ¿cuál es mejor inversión? ¿a qué se debe su crecimiento o decrecimiento? (0,5 puntos).

Pregunta 2. *Unos investigadores han estado catalogando los tamaños de diferentes diámetros de grano de varios materiales. Como los datos tomados son muy dispares, han decidido pasar de una escala lineal a una logarítmica realizando la siguiente transformación:*

Diámetro grano (mm)	*1*	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}	3^{8}	3^{9}	3^{10}	3^{11}
Escala logarítmica	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

a) Encuentra la expresión algebraica que relaciona la escala lineal con la logarítmica (0,75 puntos).

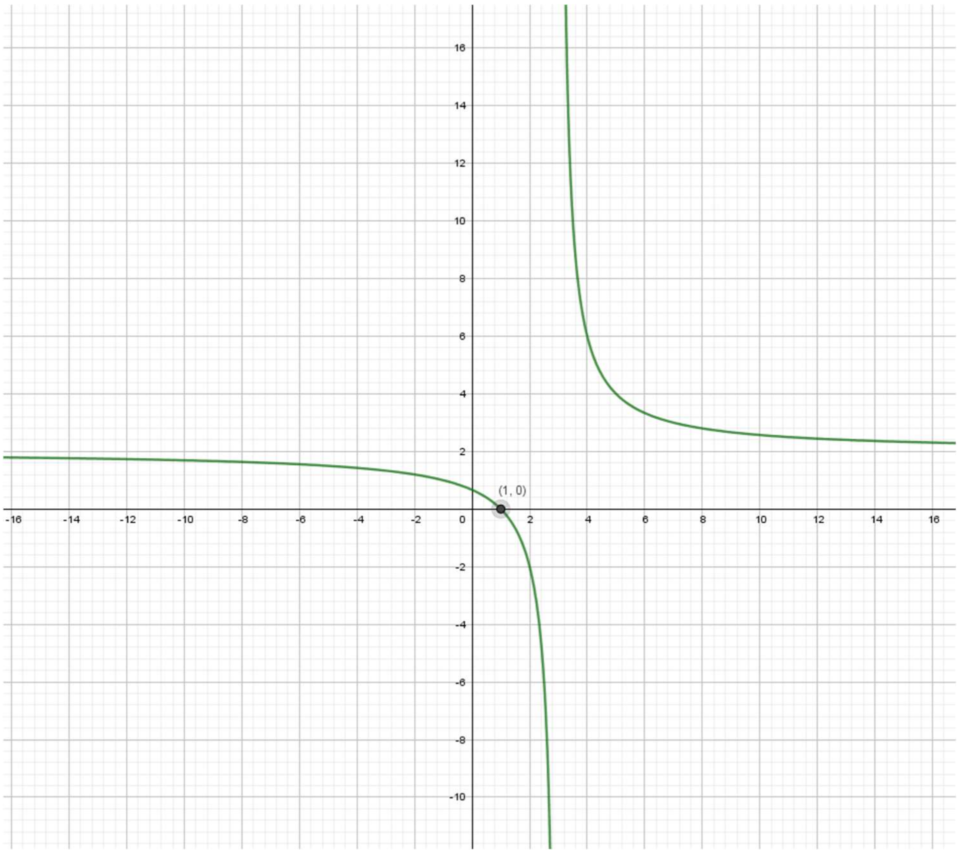
b) Representa la función de forma gráfica y aproximada (0,75 puntos).

c) ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿y el recorrido? ¿es continua? (0,5 puntos).

Pregunta 3. *Responde a los siguientes apartados:*

a) Encuentra dos magnitudes que tengan una relación de proporcionalidad inversa y aporta su expresión algebraica (1 puntos).

b) Encuentra la expresión algebraica y asíntotas de la función representada en la siguiente gráfica: ¿Es continua? ¿cuál es su dominio? ¿y su recorrido? Interpreta su crecimiento y decrecimiento (1 punto).



Pregunta 4. *En una cooperativa de aceite de oliva han perdido muchos datos referentes al precio de la aceituna en los últimos 15 días. Cuentan con una tabla, pero necesitan una fórmula y una gráfica para una buena compresión y futura predicción. El precio del kilogramo de aceitunas viene en céntimos de euro:*

Día	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Precio	*70*	*73*	*76*	*79*	*64*	*81*	*100*	*82*	*80*	*78*	*76*	*74*	*74*	*74*	*74*

Además, saben que la función se puede resumir en 4 fragmentos:

- *El primero es una función lineal creciente.*
- *El segundo es una función cuadrática y justo empieza al comienzo del cuarto día.*
- *El tercero corresponde a una lineal, tiene comienzo justo al principio del séptimo día.*
- *El cuarto corresponde a una función constante.*

Responde a las siguientes preguntas:

a) Obtén la expresión algebraica correspondiente a esta situación (0,75 puntos).

b) Dibuja la gráfica correspondiente (0,75 puntos).

c) ¿Cuál sería el coste de un kilogramo de aceitunas en el día 17 si desde el séptimo día hasta la actualidad se hubiese mantenido la relación cuadrática? (0,5 puntos).

Pregunta 5. *En la siguiente tabla se recogen las temperaturas en ºC previstas para el 1 de septiembre de 2020 de Zaragoza y Lugo:*

	0:00	1:00	2:00	3:00	4:00	5:00	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00
Zaragoza	19	18	17	17	16	15	14	15	17	19	21	23
Lugo	14	13	13	12	11	10	10	9	12	14	16	18

	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00
Zaragoza	25	27	27	28	29	28	28	28	26	24	23	21
Lugo	20	21	22	23	23	22	20	19	17	16	14	14

a) Calcula la tasa de variación media para ver en qué ciudad ha habido más variación entre las 3:00 y las 7:00. Explica el significado de los valores obtenidos (1 punto).

b) Toma la temperatura mínima y máxima de cada ciudad y calcula la tasa de variación media entre estas. ¿Qué variación es mayor? (1 punto).

2. Aspectos sobre el objeto matemático a evaluar.

A continuación, se asigna a cada pregunta un campo de problemas y se explica apartado por apartado los conocimientos a evaluar del alumno:

- Pregunta 1: corresponde al campo de problemas *estudio de parámetros característicos de funciones exponenciales y paso de un sistema de representación a otro.*

  a) El alumno es capaz de obtener la expresión algebraica sustituyendo los datos del enunciado y esbozar la gráfica, pasando antes por una tabla de valores.

  b) Lo mismo que el apartado anterior, pero variando el signo de uno de los valores del enunciado para obtener una gráfica totalmente distinta.

  c) El alumno ha de comparar las dos gráficas anteriores y responder a la pregunta. Además, se pregunta por el crecimiento o decrecimiento para ver que el alumno entiende que ha sucedido al cambiar el signo del coeficiente del exponente.

- Pregunta 2: corresponde al campo de problemas *estudio de parámetros característicos de funciones logarítmicas y paso de un sistema de representación a otro.*

  a) El alumno es capaz de obtener la expresión algebraica a partir de la tabla de valores dados.

  b) El alumno debe obtener la gráfica de la función por al menos una de las dos opciones: realizar el dibujo a partir de la tabla dada o coger la expresión algebraica, generar una tabla de valores y dibujarla.

  c) El alumno ha de calcular el dominio, recorrido y la continuidad de una función logarítmica.

- Pregunta 3: corresponde al campo de problemas *estudio de parámetros característicos de funciones de proporcionalidad inversa y paso de un sistema de representación a otro.*

  a) El alumno debe ser capaz de dar un ejemplo de dos magnitudes que mantengan una relación de proporcionalidad inversa y, además, obtener la expresión algebraica.

b) El alumno ha de obtener la expresión algebraica a través de la gráfica de una hipérbola. Además, deberá analizar su dominio, recorrido y crecimiento y decrecimiento.

- Pregunta 4 corresponde al campo de problemas *estudio de parámetros característicos de funciones definidas a trozos y paso de un sistema de representación a otro.*

a) El alumno debe se capaz de obtener la expresión algebraica de la función definida a trozos dada en forma de tabla y enunciado verbal.

b) El alumno ha de esbozar la gráfica de esta función, dejando claro dónde se encuentra cada discontinuidad entre los trozos.

c) El alumno ha de responder la pregunta dada para ver si es capaz de modificar la función anterior y dar un resultado sustituyendo en esta.

- Pregunta 5: corresponde al campo de problemas *análisis del crecimiento de funciones mediante la tasa de variación media.*

a) El alumno ha de ser capaz de calcular la tasa de variación media a partir de la tabla dada y explicar el significado de los valores obtenidos relacionándolos con el contexto dado.

b) De nuevo el alumno ha de ser capaz de calcular las tasas de variación media y compararlas.

3. Respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos.

Otra manera de contestar a esta pregunta es destacando los posibles errores de los alumnos apartado por apartado. En caso de no decir nada particular, se entiende que se espera la respuesta deseada. Las soluciones o respuestas de la prueba se pueden encontrar en el Anexo II.

- Pregunta 1

a) En este apartado no se esperan errores importantes, ya que es una exponencial sencilla.

b) En este, podría darse el caso de que los alumnos no vean clara la tendencia de la función, es decir, que al variar el signo del exponente la función decrece. Este es salvable realizando la tabla de valores.

c) Esta pregunta es clara y sencilla si las dos anteriores han sido correctas, ya que se espera que digan que es la función creciente, es decir, la del apartado a).

- Pregunta 2:

a) La principal dificultad que van a encontrar es ver la relación de los datos de la tabla con logaritmos. Es posible que algún alumno llegue a relacionar las magnitudes de forma inversa dando lugar a una función exponencial: $f(x) = 3^{x-1}$.

b) El error previsible en esta gráfica es que no tengan en cuenta la unidad que se añade en la expresión algebraica, marcando el corte con el eje OX en $x = 1$.

c) No se esperan errores significativos en este apartado.

- Pregunta 3:

a) Esta pregunta es bastante abierta, pero se espera que la respuesta sea la correcta si encuentran un ejemplo concreto y simple.

b) Los errores que podemos encontrar en este apartado están relacionados con no conocer la expresión algebraica de la función de proporcionalidad inversa. Puede que el más común sea un cambio entre el valor de la asíntota horizontal y la vertical o, una vez obtenida la expresión intermedia, suponer que $k = 1$ ya que suelen ser las más habituales.

- Pregunta 4:

a) Además de comprender el enunciado para localizar uno de sus trozos, puede presentar problema para alguno de los alumnos obtener alguna expresión lineal o cuadrática. Es probable que algún alumno obtenga $x^2 + 4$ en el segundo trozo o algo similar, o $-2x + 82$ en el tercero.

b) Una vez obtenida la expresión algebraica la gráfica es fácil de construir. El único error posible puede ser no marcar los puntos vacíos donde no corresponde al trozo.

c) No se presenta ninguna dificultad concreta, se espera que sean respuestas buenas siempre que se hayan entendido los apartados anteriores.

Pregunta 5: los errores posibles en las preguntas habituales pueden ser sobre una confusa interpretación de los datos. Como, por ejemplo, decir que en vez de baja a un promedio de 1,75 grados en ese periodo y no por hora.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Cada pregunta corresponde a un campo de problemas diferente, por lo que en total valen 2 puntos cada una. Los valores de cada apartado están especificados en los enunciados de las preguntas. Es cierto que hay preguntas que llevan mucho más tiempo que otras, pero he querido dar más puntuación a contenidos que no se dan en el curso anterior. Es por ello que, aunque la pregunta 4 puede llevar más tiempo, vale lo mismo que preguntas como la 1 o la 5 por incluir funciones lineales y cuadráticas que se dieron en 3º de ESO.

Para calificar he decidido utilizar el modelo de tercios (Gairín, Muñoz y Oller, 2012) como método para dar una calificación numérica a las preguntas. La clasificación de tareas auxiliares generales, auxiliares específicas y principales de cada apartado se puede encontrar en el Anexo II.

Imagen tomada de Gairín, Muñoz y Oller (2012).

En la imagen anterior se puede observar en qué consiste el modelo de tercios. Prácticamente, son unas cotas para restar puntuación a la producción del alumno en función del tipo de la tarea en la que ha producido el error.

Además, junto con la clasificación de las tareas de las preguntas del examen, considero que este método sirve como guía de corrección para buscar la mayor objetividad en caso de ser varios docentes los que corrigen el ejercicio.

J. Bibliografía

Azcárate, C. (2002). Funciones. En Azcárate, C. y Deulofeu, J. (Coords.) *Matemáticas. Contenidos, Actividades y Recursos. Guía Praxis para el profesorado de ESO*. Barcelona: Praxis, S.A.

Arce, M., Conejo, L., y Muñoz, J.M. (2019*). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE, Horsori.

Cólera, J., Gaztelu, I., García, R., Oliveira, M.J., y Martínez, M.M. (2003). *Matemáticas Opción B 4º ESO.* Madrid: Anaya.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM.

Gámez, J.C., Gaztelu, A.M., Loysele, F., Marín, G., Pérez, C., y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas Enseñanzas Académicas 4º ESO. Serie Resuelve.* Madrid: Santillana.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Recuperado de: http://www.boa.aragon.es/cgi-bin/EBOA/BRSCGI?CMD=VEROBJ&MLKOB=910768820909

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T., y López Esteban, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula, 10*(0), pp. 89-104.

Shell Centre for Mathematics Education. (1985). *The language of functions and graphs.* Joint Matriculation Board/Shell Centre, Nottingham: University of Nottingham.

VVAA (2018). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º B de ESO*. Apuntes Marea Verde. Disponible en: https://www.apuntesmareaverde.org.es/

Anexo I. Soluciones problemas.

Problema 1. *¿Cuáles de los siguientes enunciados corresponde a una relación funcional lineal?*

1. *El coste de pedir fundas de móviles por una empresa de venta online tiene un coste fijo de gastos de envío de 3 euros y cada funda cuesta 4. SÍ*
2. *El tiempo que tarda en llenarse una piscina según el número de entradas de agua que se abran. NO*
3. *El dinero que tiene o debe una persona al comprar bolígrafos de 2 € unidad sabiendo que tiene en el monedero 8 €. SÍ*
4. *El número de caramelos por niño según el número de estos si se dispone de un bote de 50 caramelos. NO*
5. *Un grifo está estropeado y gotea medio litro hora. SÍ*

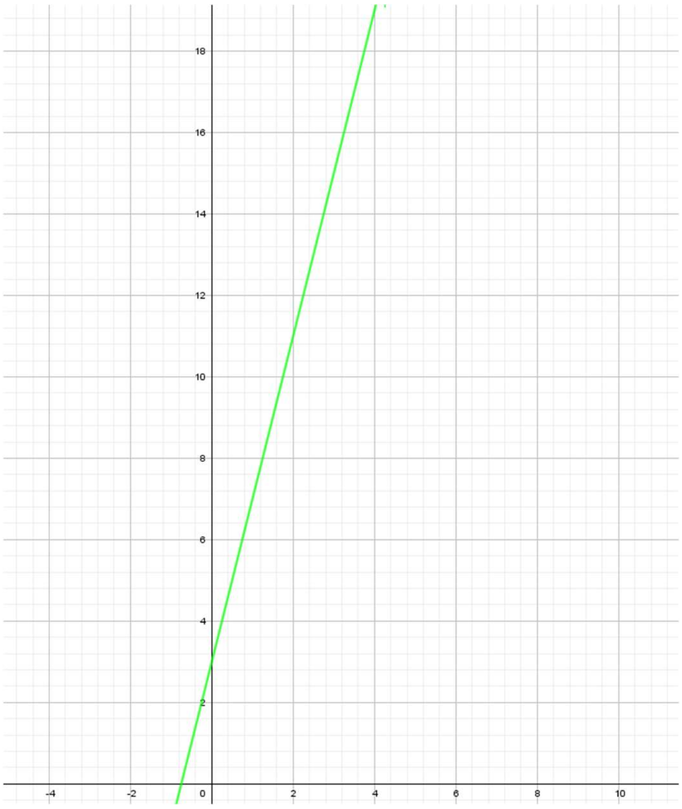
Relaciona los enunciados que corresponden a funciones lineales con las representaciones que hay a continuación:

a) $f(x) = 8 - 2x$

b)

x	1	2	3	4
f(x)	0,5	1	1,5	2

c)



Para las funciones anteriores aporta una representación distinta a cada una de las funciones del enunciado.

- A la primera función le corresponde la gráfica c).
- A la tercera función le corresponde la expresión algebraica a).
- A la quinta función le corresponde la tabla de valores b).

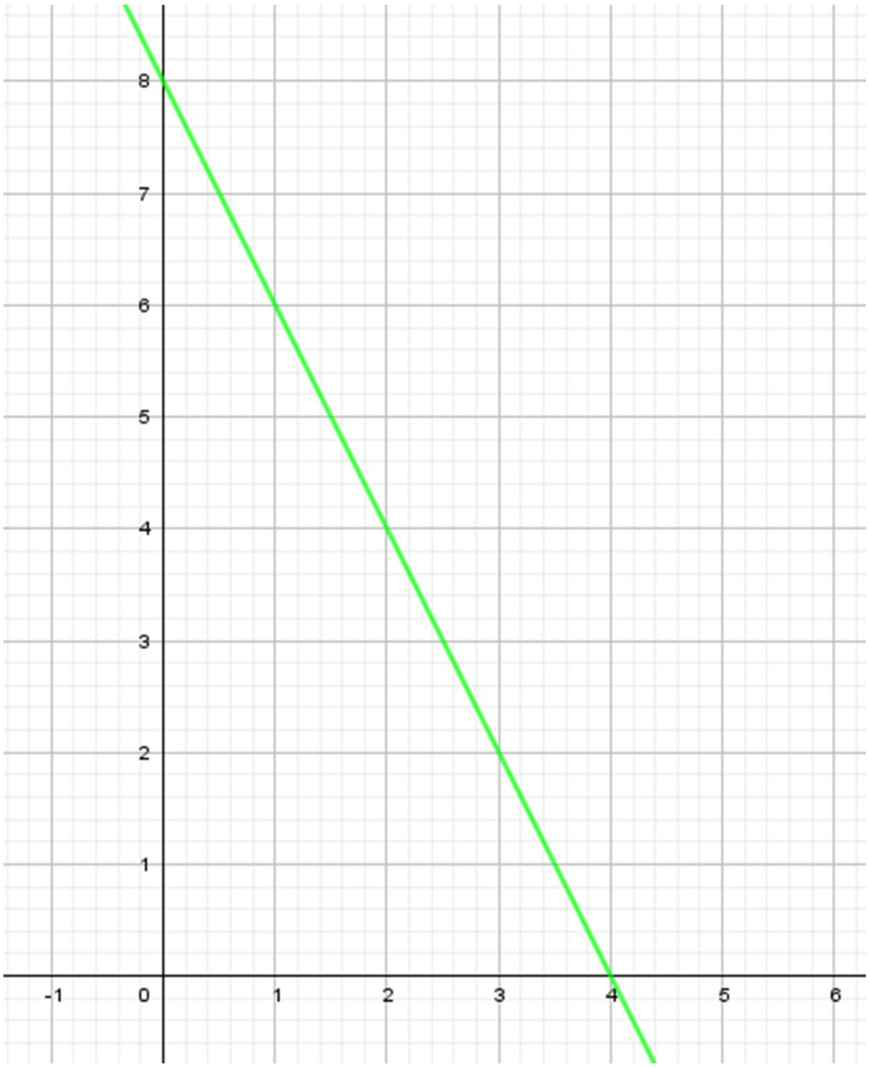
A continuación, se aportan las representaciones restantes de las funciones:

1. $f(x) = 3 + 4x$

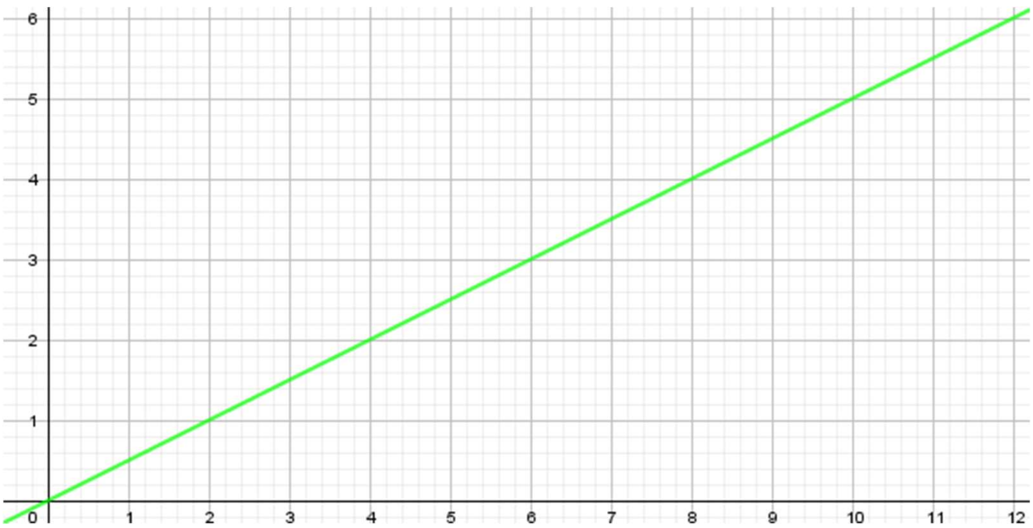
x	1	2	3	4
f(x)	7	11	15	19

2.

x	*1*	*2*	*3*	*4*
f(x)	*0,5*	*1*	*1,5*	*2*



3. $f(x) = 0{,}5x$



Problema 2. *Una forma rápida y aproximada de medir la frecuencia cardiaca máxima de una persona según su edad es realizar la diferencia de 220 latidos por minuto y la edad de la persona.*

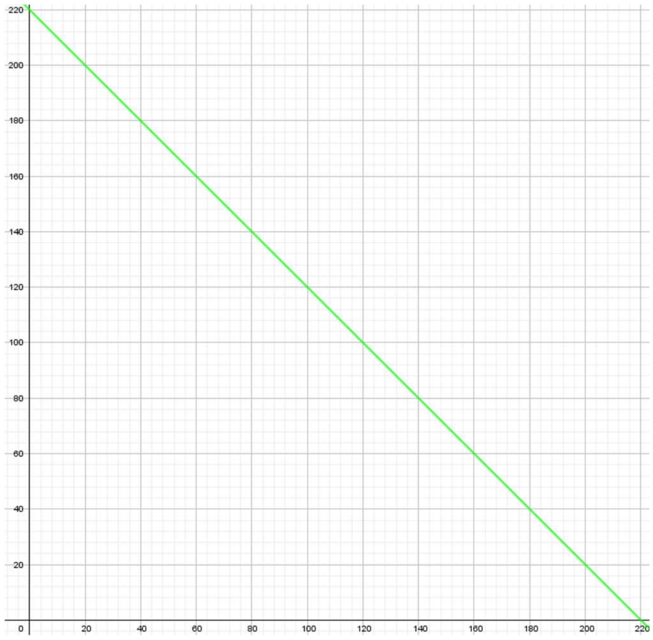
a) *Realiza una tabla donde se muestre la disminución de esta frecuencia máxima según la edad (de 10 en 10 años).*

Edad	0	10	20	30	40	50	60	70	80
FCM	220	210	200	190	180	170	160	150	140

b) *¿Cuál es la expresión algebraica de esta relación?*

$$f(x) = 220 - x$$

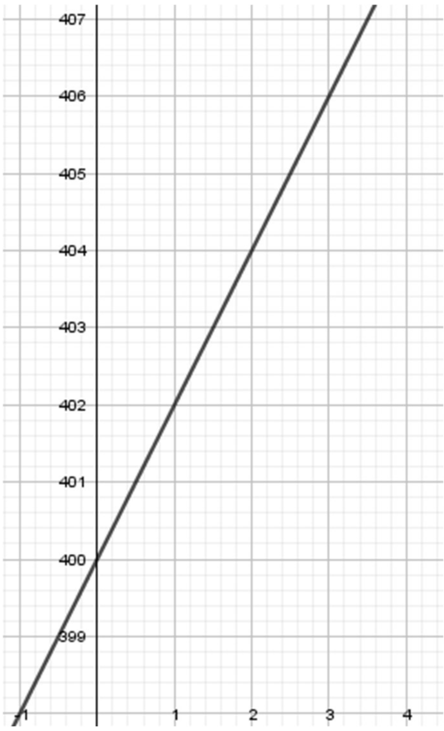
c) *Represéntala gráficamente.*



d) *Haz un breve comentario de lo que observas al analizar estas representaciones, valorando que sucede con la frecuencia cardiaca máxima y la edad.*

La frecuencia cardiaca máxima de una persona disminuye con la edad. Viene dada por una función lineal de pendiente -1 y ordenada en el origen 220.ç

Problema 3. *En los datos recogidos por una granja de conejos se observa la siguiente gráfica que recoge el crecimiento de la población de conejos al día:*



a) *Encuentra la expresión algebraica.*

   f(x)=2x+400.

b) *¿Las magnitudes son directamente proporcionales? Y, si no lo son ¿encuentras alguna modificación posible para que lo sean modificando la pendiente o la ordenada en el origen?*

   No, no lo son, pero si no contamos lo 400 conejos iniciales se puede decir que el nuevo número de conejos es directamente proporcional a los días.

Problema 4. *En GeoGebra dibuja una recta marcando como deslizadores entre -5 y 5 la pendiente, m, y la ordenada en el origen, n. A continuación, responde a las siguientes preguntas:*

a) *Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = 3 y n = 2.*

   Las acciones de una empresa parten de un valor de 3 euros y conforme pasan las horas crece de forma lineal 2 euros por cada hora.

b) *Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = 0 y n = 4.*

   La profundidad de una piscina a lo largo del tiempo siempre ha sido de 4 metros.

c) *Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = -1 y n = 5.*

   La altura de una vela es de 5 centímetros, pero por cada hora que pasa esta decrece 1 cm.

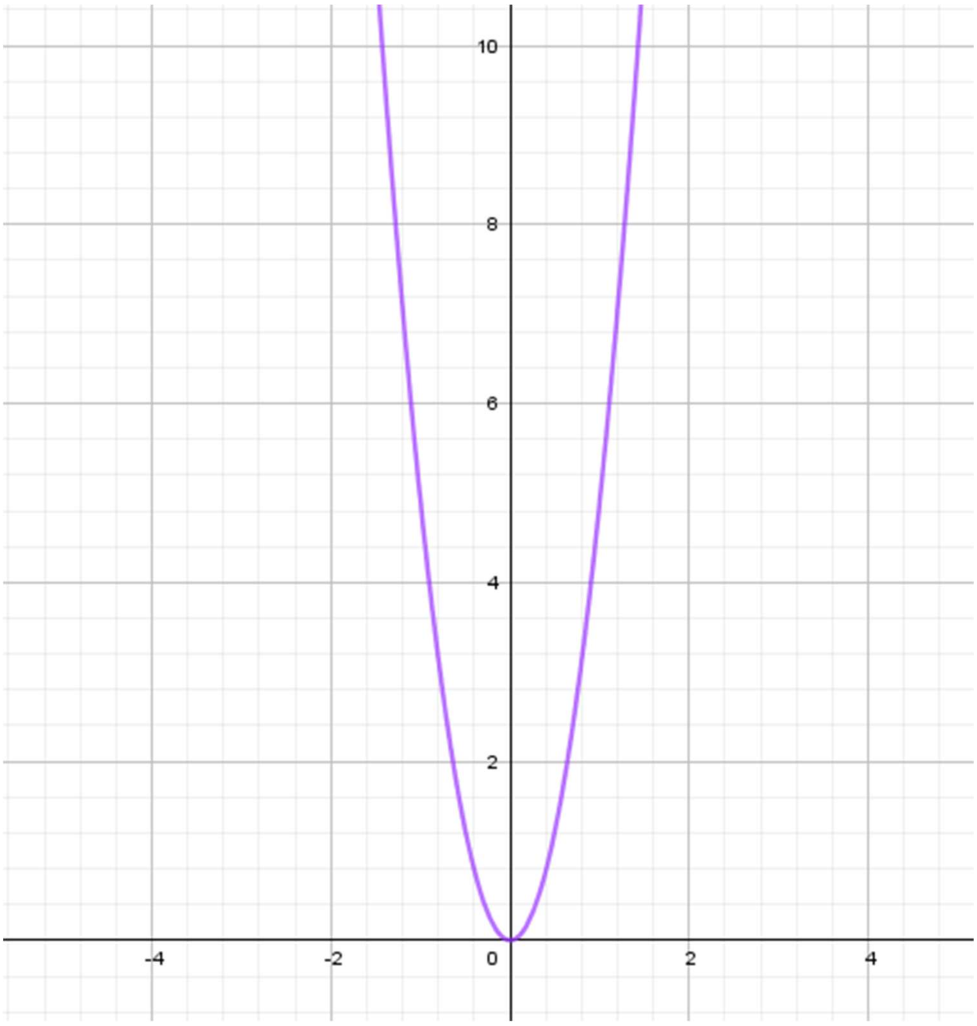
d) *Pon un ejemplo de una situación que se corresponda con m = 2 y n = -1.*

El precio de un bolígrafo es de dos euros, pero Juan cuenta con un cupón de un euro de descuento.

Problema 5. *A continuación se registran las distancias recorridas de objeto que cae desde un rascacielos en función del tiempo.*

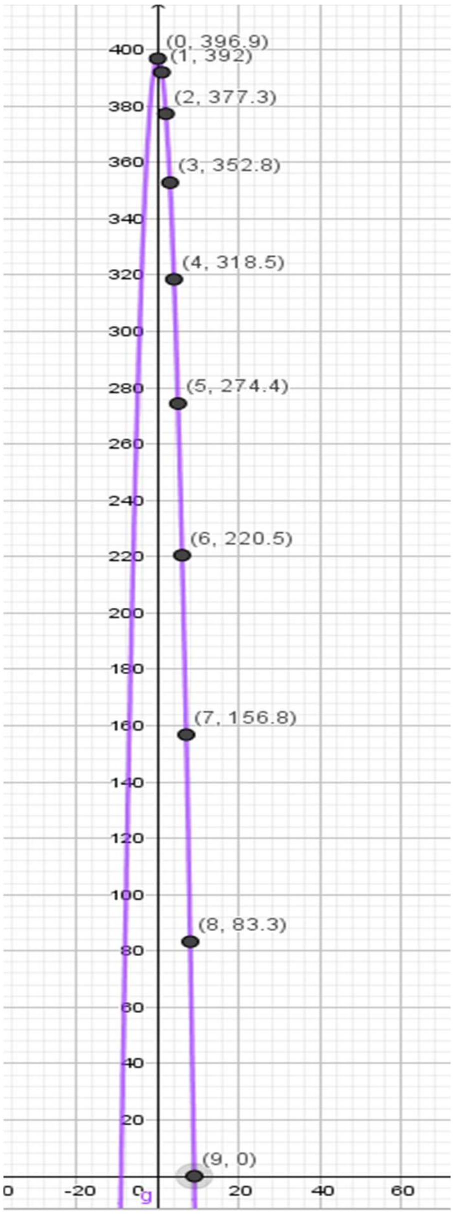
Tiempo (segs.)	*0*	*1*	*2*	*5*	*8*	*10*
Distancia (metros)	*0*	*4,9*	*19,6*	*122,5*	*313,6*	*490*

a) *Usando GeoGebra, dibuja los puntos anteriores. Encuentra su expresión algebraica sabiendo que se corresponde con un monomio de grado 2.*
   La solución es $f(x) = 4{,}9x^2$.
b) *Haz una gráfica de la función.*



c) *En el caso anterior hemos visto la distancia recorrida, pero es más lógico y útil representar la distancia a la que se encuentra el objeto del suelo (la altura) en su lugar. Dado un rascacielos con altura 396.9 metros, construye una tabla de valores y obtén la expresión algebraica y gráfica de la altura a la que se encuentra el objeto en cada momento de la caída. Utiliza GeoGebra* *para representar los puntos de la tabla y la expresión algebraica para ver que coinciden.*

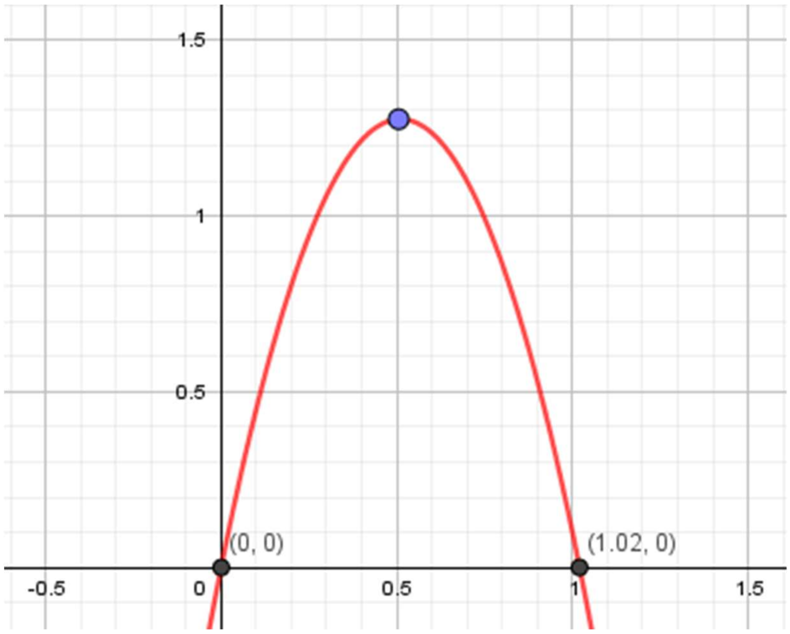
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	396,9	391	377,3	352,8	318,5	274,4	220,5	156,8	83,3	0



d) Con tus propias palabras, explica cuál es la parte de la función que describe el fenómeno. ¿Qué le sucede al objeto según la gráfica?

La función representa la situación desde que el objeto cae hasta que llega al suelo, es decir, desde x = 0 hasta x = 9. Conforme el tiempo avanza el objeto cae más rápido.

Problema 6. *Sergio Ramos hace un lanzamiento de falta a portería. En la siguiente gráfica se observa la altura (en metros) a la que está el balón en función del tiempo (en segundos):*



a) *Sabiendo que su expresión algebraica es de la forma y = -4,9 x^2 + bx + c, hallar los parámetros b y c.*

   c = 0 sustituyendo la función en x = 0. b = 5 que se obtiene también sustituyendo en el otro punto de corte.

b) *¿Cuál es la altura máxima del tiro? Calcularla al menos de 2 formas distintas.*

   Se pide calcular el vértice de dos formas distintas:

   - Sabiendo que la parábola es una función simétrica respecto al eje que pasa por el vértice, tomamos el punto medio entre los cortes con el eje OX. Así, sustituyendo, $f(0{,}51) = 1{,}275$ metros.
   - El vértice si la función está expresada de la forma $ax^2 + bx + c$ corresponde con el punto en el que $x = -\frac{b}{2a} = 0{,}51$. Sustituyendo obtenemos lo mismo.

c) *¿Qué nos dice la gráfica de la velocidad de ascenso del tiro? Explícalo con tus propias palabras.*

   La pelota asciende rápido y conforme pasa el tiempo asciende más lento hasta llegar al máximo. A partir de ahí, la pelota hace el recorrido inverso.

Problema 7. *Los beneficios de la venta de plátano en una frutería dependen de la demanda de este. Si q es la demanda en kilogramos, el beneficio viene dado por 9 - 0,25x euros, pero el hecho de tener plátanos tiene un coste de 4 euros fijos.*

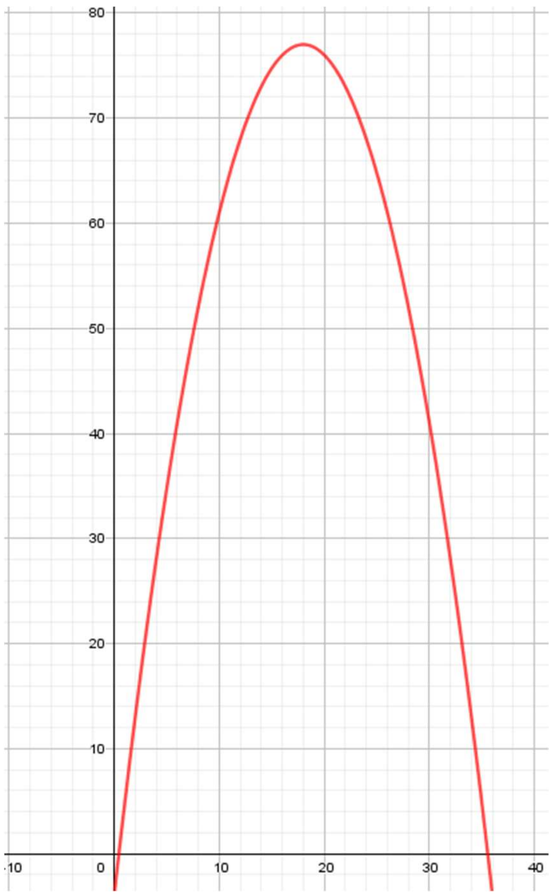
a) Realiza una tabla en la que se compare la demanda y los beneficios de la venta de plátanos.

Demanda	1	2	3	4	5	6	7	8
Beneficio	4,75	13	20,75	28	34,5	41	46,75	52

b) ¿Cuál es la expresión algebraica del beneficio de la frutería en función de la demanda de plátanos?

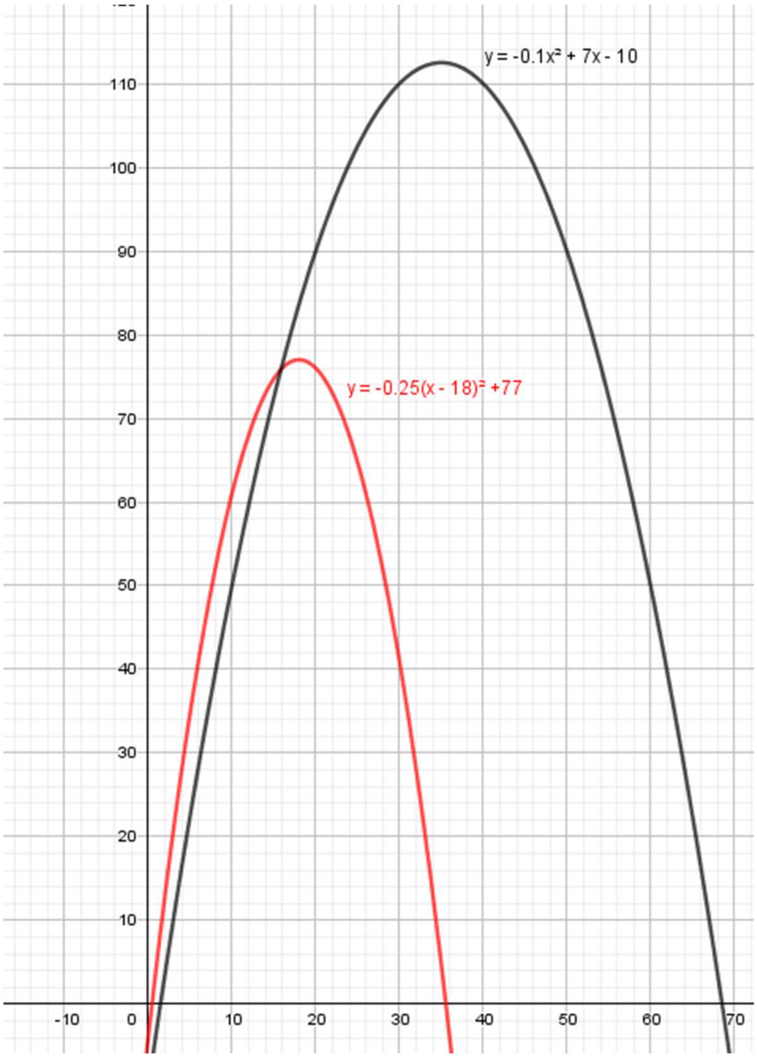
$$f(x) = x(9 - 0.25x) - 4 = -0.25x^2 + 9x - 4$$

c) Realiza en GeoGebra una gráfica. ¿Cuál es el beneficio máximo y con qué demanda se obtiene?



El ingreso máximo es en 77 y se obtiene con una demanda de 18 kg de plátano.

d) El dueño del establecimiento descubre otra opción de compra de plátanos. En ella, la demanda varía siendo esta la dada por la ecuación 7 – 0,1x, pero el coste *fijo pasa de ser 4 a ser 10 veces más. Compara con tus propias palabras las gráficas de las dos opciones, diciendo cuál interesa más según la demanda.*



En el primer tramo de demanda la primera opción da más beneficios, pero a partir del corte de las funciones la segunda opción es mucho más beneficiosa.

Problema 8. *Representa las siguientes funciones con GeoGebra:*

a) *$y = x^2 + q$ con $q = 1$, $q = 3$, $q = -7$. Completa la siguiente tabla:*

	vértice	***Eje***
$x^2 + 1$	(0, 1)	x = 0
$x^2 + 3$	(0, 3)	x = 0
$x^2 - 7$	(0, -7)	x = 0

¿Qué conclusiones sacas? Puedes emplear el deslizador y observar las gráficas para comprobar si tu primera intuición es la adecuada.

El parámetro q nos dice a qué altura se encuentra el vértice de la parábola.

b) *$y = (x + p)^2$ con $p = 2$, $p = 3$, $p = -5$. Completa la siguiente tabla:*

	vértice	**eje**
$(x + 2)^2$	(-2, 0)	x = -2
$(x + 3)^2$	(-3, 0)	x = -3
$(x - 5)^2$	(5, 0)	x = 5

¿Qué conclusiones sacas? Puedes emplear el deslizador y observar las gráficas para comprobar si tu primera intuición es la adecuada.

El parámetro p nos dice como de desplazada está la parábola respecto al eje OX.

c) *Si la parábola es $y = (x + p)^2 + q$, ¿cuál es el vértice de la parábola? ¿Cuál es su eje de simetría? Para ayudarte a dar la respuesta, crea deslizadores en GeoGebra para p y q que varíen entre -5 y 5.*

   El vértice de la parábola será (-p, q) vistos los apartados anteriores. El eje de simetría nos lo da el parámetro p, es decir, el eje es x = -p.

d) *Tomando los deslizadores anteriores, crea uno nuevo r de -5 a 5 y representa la parábola $y = r (x + p)^2 + q$ y observa qué sucede.*

   Conforme *r* crece se acentúa la parábola. Cuando pasa a ser negativo pasa lo mismo siendo el vértice de la parábola un máximo en vez de un mínimo.

e) *Por último, ¿qué puntos característicos podemos obtener para dibujar a mano la gráfica de una función cuadrática?*

   El vértice y los puntos de corte con los ejes.

Problema 9. *Responde a los siguientes apartados.*

a) *Introduce dos magnitudes que tengan una relación de proporcionalidad inversa.*

   El tiempo que tarda un coche en función de la velocidad media del trayecto en recorrer 100 km.

b) *Crea una tabla con las dos magnitudes anteriores en las que se vea la relación de proporcionalidad. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?*

Velocidad (km/h)	100	75	50	25	10
Tiempo (h)	1	1,333	2	4	10

   La constante de proporcionalidad es 100.

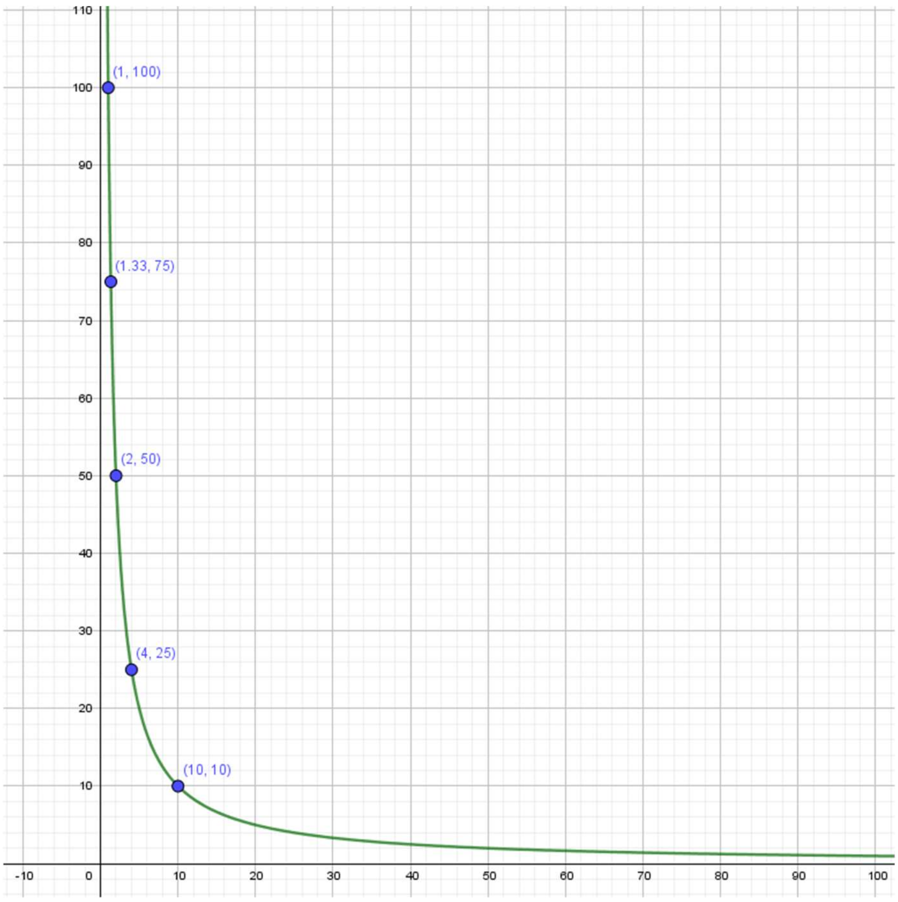
c) *Obtén la expresión algebraica de la función que relaciona las dos magnitudes dadas.*

Como 100 es la constante de proporcionalidad y sea x la variable que representa al tiempo e y la que representa a la velocidad, tenemos que:

$$100 = x \cdot y$$

De donde obtenemos que $y = \frac{100}{x}$.

d) Dibuja a mano una gráfica de la función y analiza su dominio, continuidad y crecimiento.



El dominio de la función son todos los reales menos el 0 y la función es discontinua en 0. La función es decreciente en todo su dominio.

Problema 10. *En un huerto se va a realizar la recolecta del tomate. Cuentan con unos 1500 tomates y quieren saber cuántos empleados son necesarios para recogerlos en 2 horas, suponiendo que cada empleado recoge 50 tomates por hora. Se han encontrado distintas tablas, pero tienen claro que solo hay una correcta:*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*1300*	*1100*	*900*	*700*	*500*	*300*	*100*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*750*	*500*	*375*	*300*	*250*	*214,3*	*187,5*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*3000*	*4500*	*6000*	*7500*	*9000*	*10500*	*12000*

Empleados contratados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Tomates por empleado	*1500*	*750*	*375*	*187,5*	*93,75*	*46,875*	*23,44*	*11,72*

a) *¿Cuál es la tabla correcta?*

La tabla correcta es la segunda.

b) *¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente?*

$$y = \frac{1500}{x}$$

c) *Para encontrar la solución a la pregunta original, realiza una tabla con los tomates que se pueden recoger en 2 horas según el número de empleados.*

Empleados	1	2	3	4	15
Tomates	100	200	300	400	1500

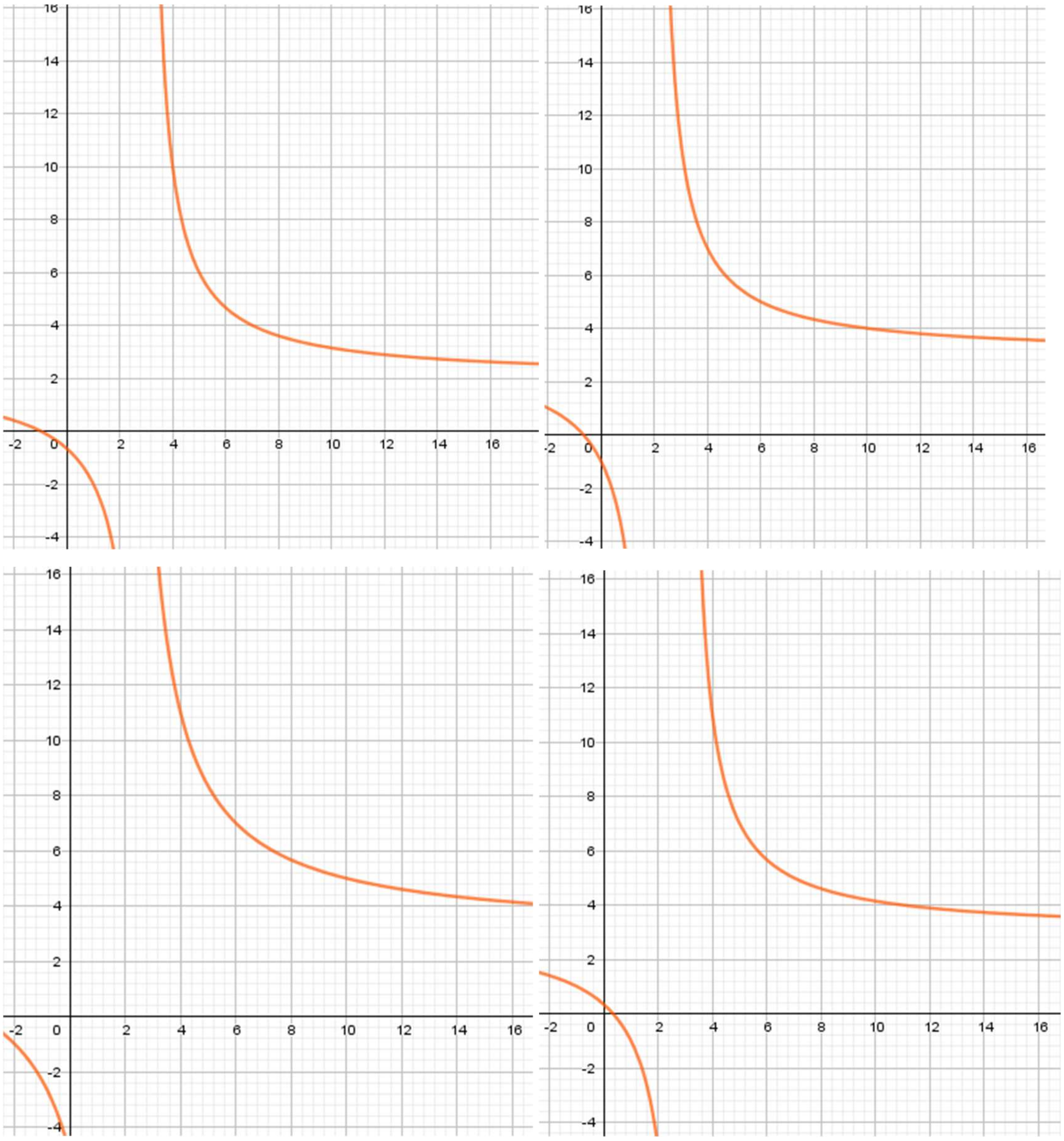
Para recoger los 1500 tomates en 2 horas hacen falta 15 empleados.

Problema 11. *El secretario de una empresa de instalaciones eléctricas ha perdido un impreso donde marcaba el precio del metro de un material en función de cuantos se encargaban. Recuerda lo siguiente de esta relación:*

- *Cuantos más metros del material se encargan, más barato sale el metro de este.*
- *La gráfica de la función era válida a partir de los 3 metros de material, ya que según la gráfica 2 metros tenían un coste indeterminado.*
- *Si se compran muchos metros el precio se acerca a 3 euros, pero nunca llega a ser 3 exactos.*

- *El precio del metro es de 7 euros cuando se compran 4 metros, y 4 euros cuando se compran 10 metros.*

¿Cuál de las siguientes gráficas se ajusta a los datos dados por el secretario? ¿Podrías dar una expresión algebraica a la gráfica?



La gráfica es la que se sitúa en la esquina superior izquierda. La expresión algebraica de esta es:

$$y = \frac{8}{x-2} + 3$$

Problema 12. *En una empresa de tratamiento de agua nos dan la siguiente información: el tanto por ciento de residuos eliminados en un litro de agua a lo largo del tiempo (en segundos) viene dado por la siguiente expresión algebraica:*

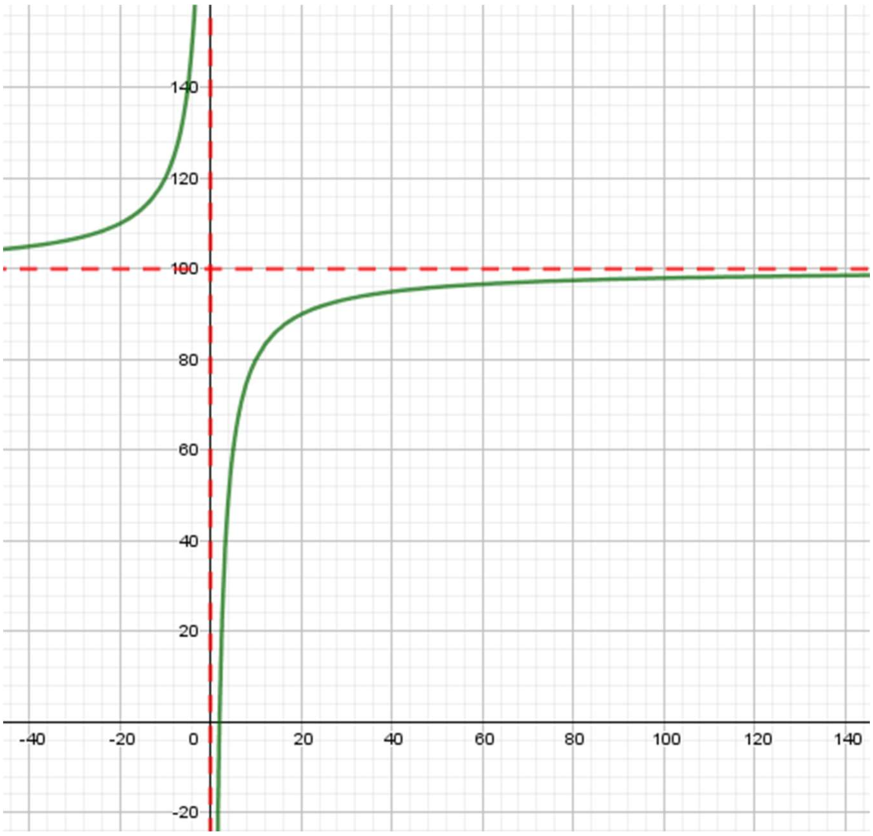
$$f(x) = \frac{200x - 100}{x}$$

a) *Esboza una gráfica a mano de la función utilizando ejes y unidades adecuadas. ¿Hay asíntota vertical y/o horizontal? Indícalas.*

Primero es necesario trabajar con la expresión de tal forma que:

$$f(x) = -\frac{200}{x} + 100$$

Así, tenemos que:



b) *Realiza una tabla de valores, ¿existe alguna relación de proporcionalidad?*

X	10	20	30	40	50
f(x)	80	90	93,333	95	96

No, no existe ningún tipo de proporcionalidad.

c) *Explica con tus propias palabras qué le sucede al agua tratada. ¿Se llega a eliminar el 100% de residuos?*

No, ya que como hay una asíntota horizontal en $y = 100$, este valor nunca se alcanza, pero se llega a valores muy próximos a este.

Problema 13. *En GeoGebra, definimos 3 deslizadores a, b, c y, a través de estos, hacemos la gráfica de la siguiente expresión algebraica:*

$$f(x) = \frac{a}{x - b} + c$$

a) *Partiendo de que todos los deslizadores toman el valor 1 y están definidos en el intervalo predeterminado (entre -5 y 5), haz variar a. ¿Qué observas? ¿Hay algún punto en el que la función varíe drásticamente? ¿Cuál?*

   Cuando los valores de a son positivos la función decrece y cuando son negativos crece. Conforme el valor absoluto de esta es mayor las curvas se acentúan menos. En $a = 0$ la función es una recta con valor c.

b) *Dibuja una recta de la forma x = b y varía el deslizador, ¿qué sucede? ¿la función la corta?*

   No, ya que $x = b$ es asíntota vertical de la función.

c) *Dibuja una recta de la forma y = c y varía el deslizador, ¿qué sucede? ¿la función la corta?*

   No, ya que $y = c$ es asíntota horizontal de la función.

d) *¿Cuál es el dominio y recorrido de estas funciones? ¿son continuas?*

   El dominio de la función son todos los reales menos b y el recorrido todos los reales menos c. No es continua ya que presenta una discontinuidad en $x = b$.

e) *¿Es simétrica para algún valor de los deslizadores?*

   Sí, cuando $b = c = 0$, la función presenta simetría impar.

Problema 14. *Las ondas sísmicas de los terremotos se miden en la escala de Richter para catalogar la gravedad de estos. Esta consiste en una numeración que señala la amplitud máxima de las ondas que se han generado en ese seísmo. Por cada unidad que crece la escala Richter significa que la amplitud máxima de estas ondas es 10 veces mayor, es decir, el valor 3 en la escala Richter indica que la onda máxima registrada es de 1 milímetro mientras que el valor 4 indica 1 centímetro.*

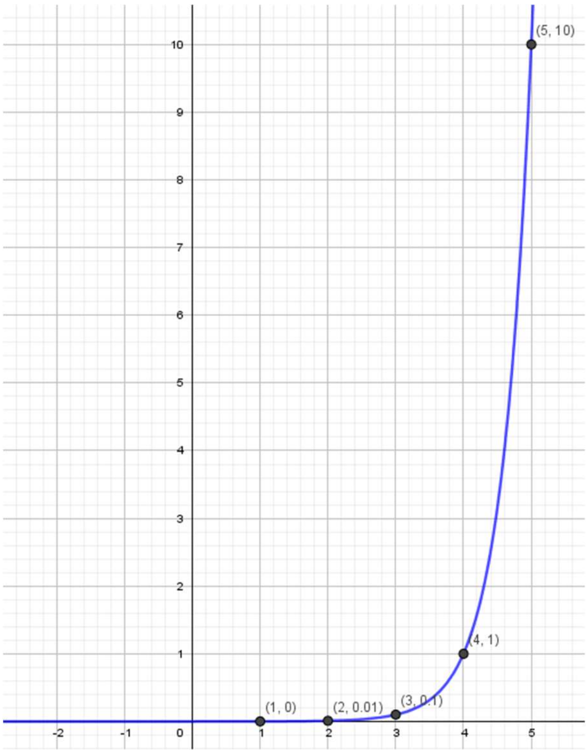
a) *Construye una tabla comparando la amplitud máxima de las ondas (en centímetros) en función de los valores de la escala Richter (hasta el 10).*

Escala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amplitud (cm)	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

b) *Con los valores anteriores piensa en una expresión algebraica para esta función.*

$$f(x) = 10^{x-4}$$

c) *Haz una representación gráfica de la función utilizando ejes y unidades adecuadas. ¿En algún momento está cruza el eje OX?*



No, no se cruza.

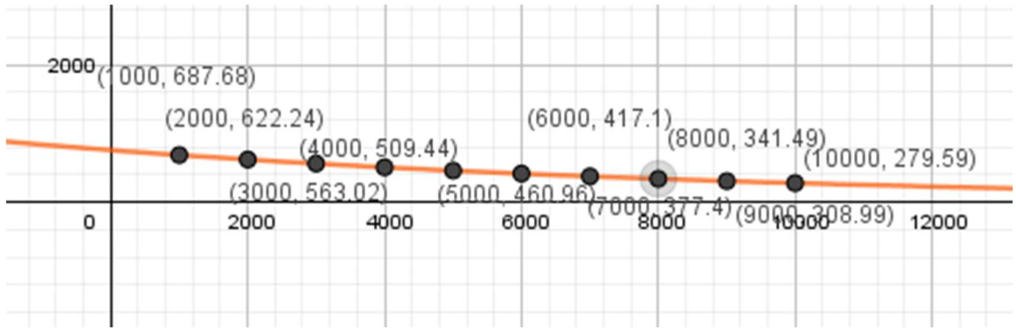
Problema 15. *En la siguiente tabla se recogen datos de la presión atmosférica (en milímetros de mercurio) en función de la altitud (en metros):*

Altitud (m)	***Presión (mm Hg)***
0	*760*
1000	*687.68*
2000	*622.24*
3000	*563.02*
4000	*509.44*
5000	*460.96*
6000	*417.1*
7000	*377.4*
8000	*341.49*
9000	*308.99*
10000	*279.59*

a) *Calcula los parámetros a y b (con 4 decimales).*

a = 760, b = -0.0001.

b) *Comprueba que la expresión algebraica coincide con los datos dados en la tabla a través de GeoGebra.*



c) *Expresa con tus propias palabras la relación funcional entre la altitud y la presión atmosférica.*

La presión atmosférica decrece cada vez menos conforme aumenta la altitud, de forma que partiendo de 760 mm Hg se va acercando a 0 hasta el infinito.

Problema 16. *El pH es una escala utilizada para medir la acidez de las sustancias. Esta escala valora entre el 1 y el 14 según la concentración de iones de hidrógeno, siendo 1 lo más ácido. El paso de la concentración de iones de hidrógeno a la escala se realiza calculando el logaritmo en base 10 de la concentración y cambiándole el signo.*

a) *¿Qué concentración de iones de hidrógeno tiene que haber para que la medición de pH sea 7?*

Se tiene que cumplir que $7 = -\log_{10} x$. Luego $x = 10^{-7}$.

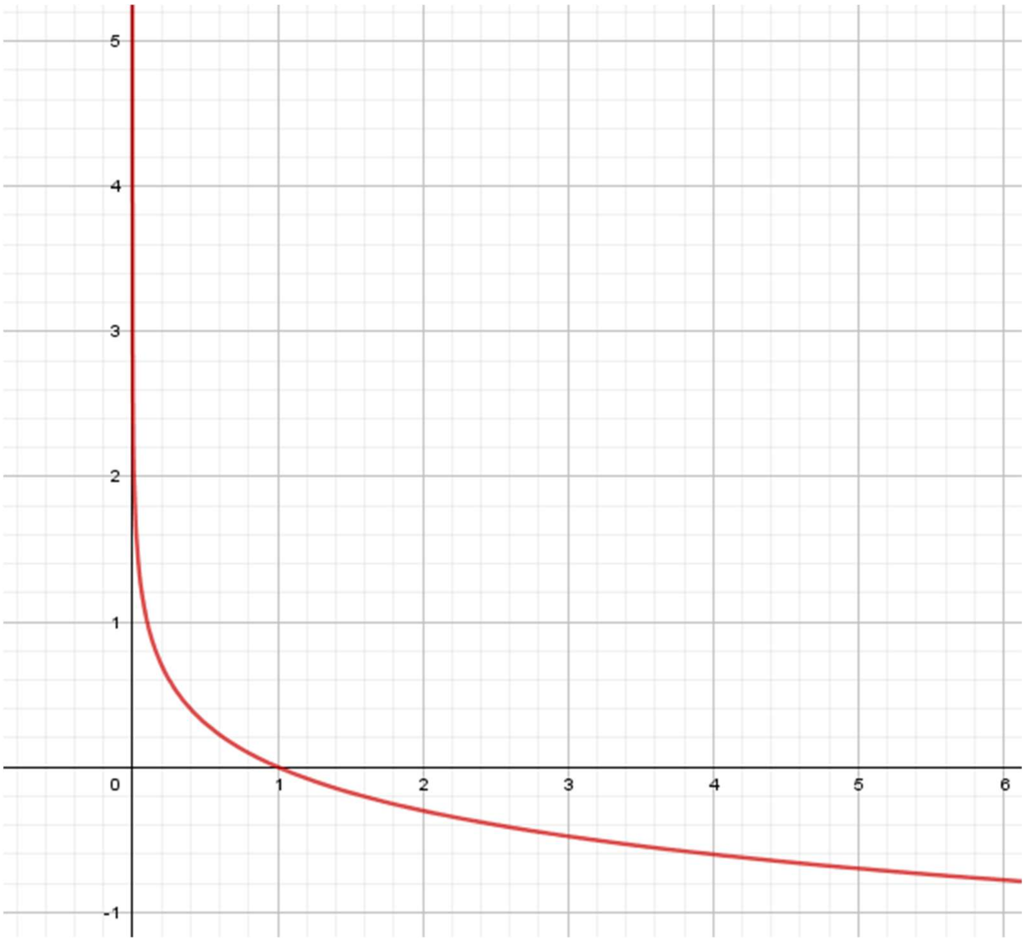
b) *Busca la expresión algebraica que relaciona el pH con los iones de hidrógeno.*

$$f(x) = -\log_{10} x$$

c) *Realiza una tabla en la que se vea para cada valor de la escala pH la concentración de iones de hidrógeno presentes en la disolución.*

Concentración	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
pH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

d) *Dibuja la gráfica de la función teniendo en cuenta su expresión algebraica, utilizando ejes y unidades adecuadas.*



Problema 17. *Teniendo en cuenta el umbral estándar de la audición humana, podemos calcular la intensidad del sonido en decibelios a partir de la siguiente expresión:*

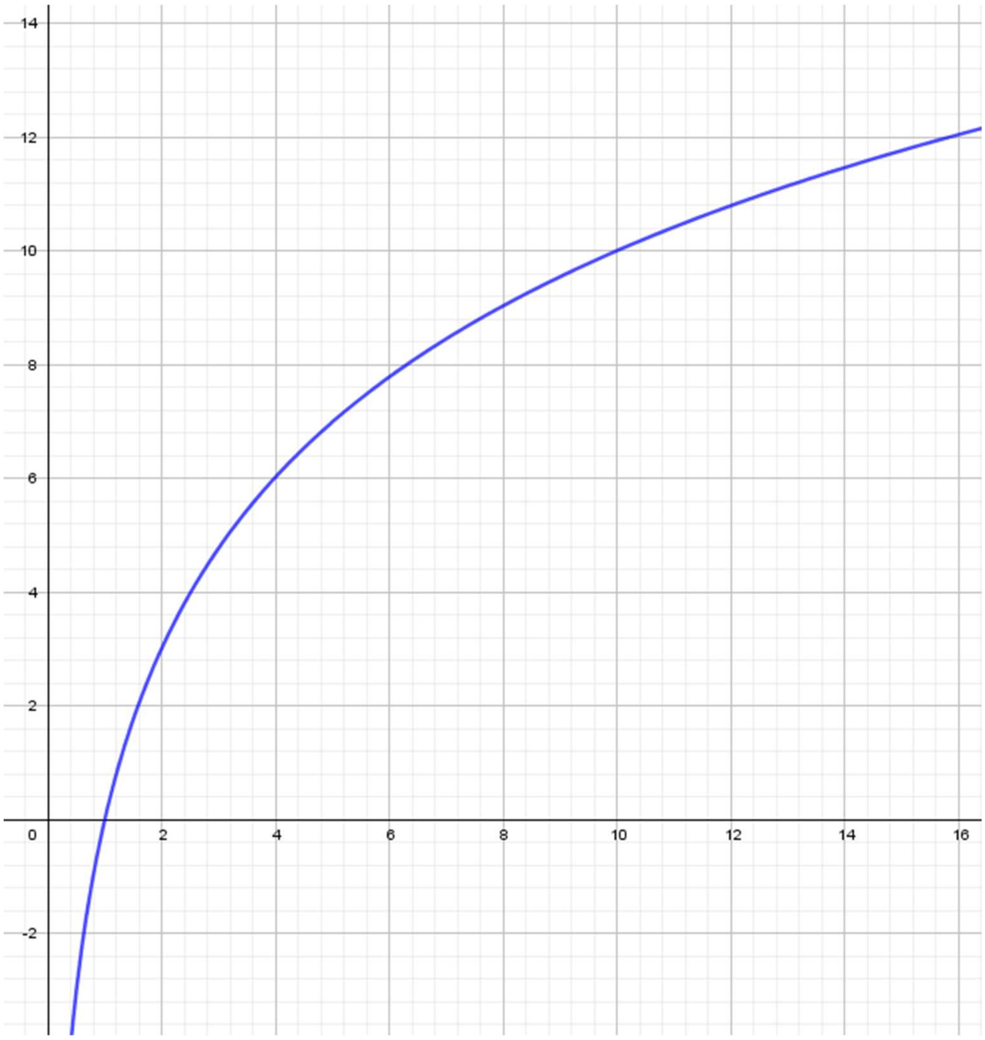
$$I(x) = 10\ log_{10}\left(\frac{x}{I_0}\right),$$

donde I_0 es el umbral de audición humana.

a) *Completa la siguiente tabla:*

Intensidad en veces I0	*Intensidad en dB*
10 I_0	10 dB
$10^5 I_0$	*50 dB*
1000 I_0	30 dB
$10^8 I_0$	*80 dB*
10^{10} I_0	100 dB

b) *Dibuja la gráfica de la función.*



Problema 18. *Realiza las siguientes tareas en GeoGebra y responde a las preguntas:*

a) Dibuja las funciones $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log x$ y rellena la siguiente tabla observando las gráficas:

	10^x	$\log x$
Dominio	Los reales	*(0, ∞)*
Recorrido	*(-∞,+∞)*	*(-∞,+∞)*
Continuidad	En todo su dominio	En todo su dominio
Crecimiento	Creciente	Creciente
Puntos corte OX	No	*x = 1*
Puntos corte OY	*y = 1*	No

b) Ahora establece un parámetro a entre 0 y 10 y dibuja las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$. ¿Qué relación tienen estas dos funciones? ¿Qué sucede conforme aumenta a de 1 a 10? ¿Y entre 0 y 1?

Conforme aumenta *a* la exponencial crece más rápido mientras que la logarítmica lo hace más lento. En el intervalo (0,1) la forma función exponencial se refleja en el eje OY y la de la logarítmica hace lo propio en el OX.

c) *Fijamos la a anterior en 2 y añadimos el parámetro k definido entre -5 y 5 y modificamos las funciones:* $f(x) = k\,a^x$ *y* $g(x) = k \log_a x$. *¿Qué produce la variación de este parámetro?*

   Cuando *k* es positivo y crece hace que ambas funciones crezcan. Cuando es negativo refleja las funciones respecto al eje OX y conforme este decrece hace que las funciones decrezcan más rápido.

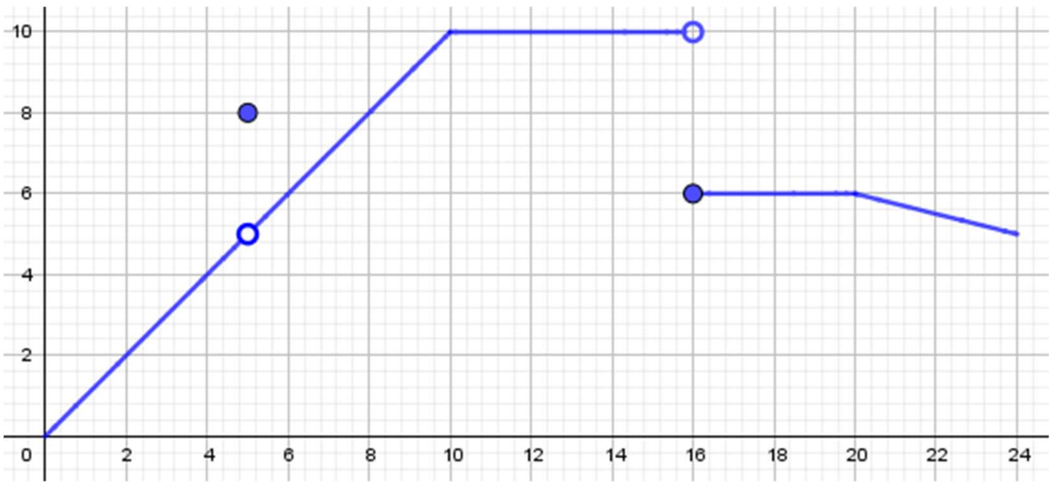
d) *Fijamos k en 1, añadimos el parámetro b definido entre -5 y 5 y modificamos las funciones:* $f(x) = k\,a^{bx}$ *y* $g(x) = k \log_a bx$. *¿Qué produce la variación de este parámetro?*

   b produce el mismo efecto que k, pero las dos funciones se reflejan en el eje OY.

e) *Fijamos b en 1, añadimos los parámetros c y d definidos entre -5 y 5 y modificamos las funciones:* $f(x) = k\,a^{bx+c} + d$ *y* $g(x) = k \log_a (bx+c) + d$. *¿Qué producen las variaciones de estos parámetros?*

   c produce las traslaciones de las funciones en la dirección del eje OX y *d* produce lo propio respecto el eje OY.

Problema 19. *A lo largo de 24 horas, las acciones de determinada compañía han variado de la siguiente forma:*



c) *Construye la expresión algebraica de la función.*

$$f(x)\begin{cases} x \;\; si \;\; 0 \leq x < 5 \\ 8 \;\; si \;\; x = 5 \\ x \;\; si \;\; 5 \leq x < 10 \\ 10 \;\; si \;\; 10 \leq x < 16 \\ 6 \;\; si \;\; 16 \leq x \leq 20 \\ -\frac{1}{2}x + 16 \; si \; 20 < x \leq 24 \end{cases}$$

d) ¿Es una función continua? ¿En qué puntos no es continua?

No, no es continua en *x = 5* y *x= 16*.

Problema 20. *Una sala de eventos dispone de un aforo de 400 personas. El precio de las entradas varía según la previsión de asistentes. Si acuden entre 0 y 150 personas el precio de las entradas es de 15 euros. En caso de prever entre 150 y 300 se calcula a través de una recta de pendiente* $\frac{1}{15}$ *y ordenada en el origen 5. Y cuando se estima que entre 300 y 400 personas van a acudir al evento la entrada cuesta el cuadrado de los asistentes dividido entre 3000 y a este cálculo restarle 5 euros*

e) ¿Cuánto cuesta una entrada si asisten 115 personas? ¿y si asisten 235? ¿y si se espera agotar entradas?

Si asisten 115 personas, el precio es de 15 €.

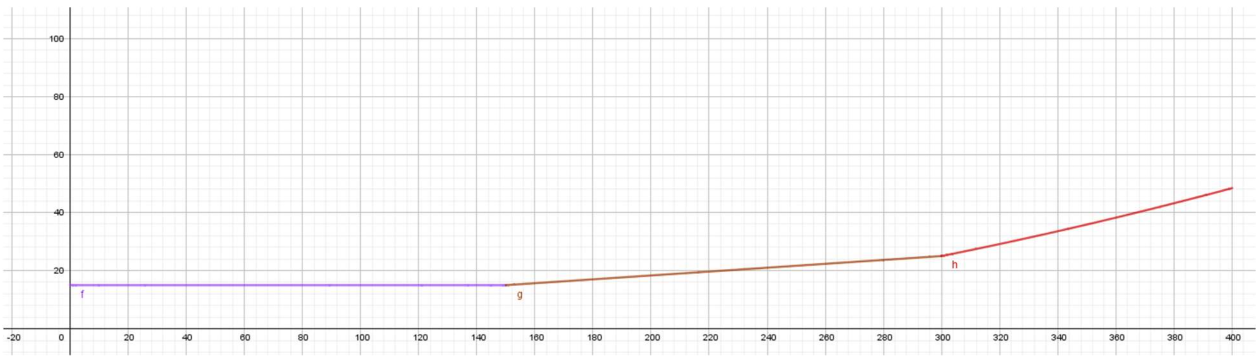
Si asisten 235 personas, el precio es de $\frac{1}{15}235 + 5 = 15 + 5 = 20$ €.

Si asisten 400 personas, el precio es de $\frac{400^2}{3000} - 5 = 48.33$ €.

f) Representa algebraicamente la función.

$$f(x) = \begin{cases} 15 \; si \; 0 < x \leq 150 \\ \frac{1}{15}x + 5 \; si \; 150 < x \leq 300 \\ \frac{x^2}{3000} - 5 \; si \; 300 < x \leq 400 \end{cases}$$

g) Representa gráficamente la función a través de la orden Función(f(x), x_1, x_2) que dibuja la función en el intervalo dado. ¿Es continua?



Es continua.

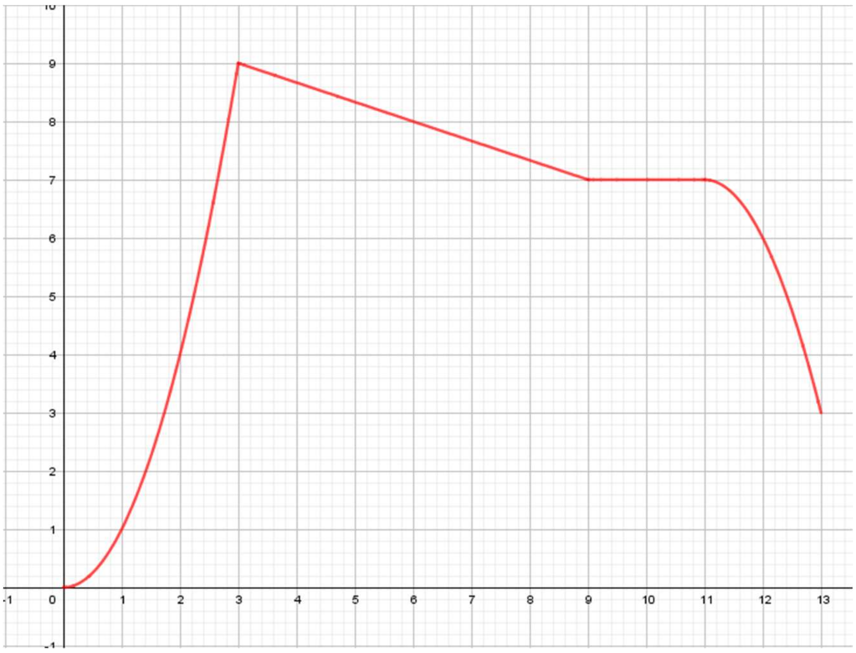
h) ¿Cuál debe ser el número de asistentes previstos para que el precio de la entrada sea 17 euros?

Observando la gráfica debe estar en el segundo tramo, así que buscamos el número que satisfaga que:

$$\frac{1}{15}x + 5 = 17$$

Este número es 180 asistentes.

Problema 21. *En la siguiente imagen se muestra el dibujo del cableado de una instalación eléctrica que pasa por encima de un edificio. Tanto la altura como la longitud están representadas en metros:*



d) ¿Cuál de estas es la expresión algebraica que se corresponde con la función?

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad 0 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{2}x + 10 & si \quad 3 \leq x < 9 \\ 7 & si \quad 9 \leq x < 11 \\ -(x-11)^2 + 7 & si \quad 11 \leq x \leq 13 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{3}x + 10 & si \quad 3 \leq x < 9 \\ 7 & si \quad 9 \leq x < 11 \\ -e^{x-11} + 8 & si \quad 11 \leq x \leq 13 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{3}x + 10 & si \quad 3 \leq x < 9 \\ 7 & si \quad 9 \leq x < 11 \\ -(x-11)^2 + 7 & si \quad 11 \leq x \leq 13 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x < 3 \\ -\frac{1}{3}x + 10 & si \quad 3 \leq x < 9 \\ 7 & si \quad 9 \leq x < 11 \\ (x-11)^2 + 7 & si \quad 11 \leq x \leq 13 \end{cases}$$

La correcta es la esquina inferior izquierda.

e) *Se quiere colocar un acceso para posibles averías en mitad de la longitud que ocupa el circuito en el eje OX. ¿A qué altura estará colocado?*

El circuito ocupa un total de 13 metros en el eje OX, así que buscamos el valor de la función en $x = 6.5$.

$$f(6.5) = -\frac{1}{3}6.5 + 10 = 12.16\, metros.$$

f) *Se estudia también variar el segundo segmento de cableado para partir la instalación en 2, de tal forma que entre el tramo 2 y el 3 del cableado haya un salto de 3 metros en el eje OY. ¿Cómo varía la expresión algebraica? ¿Es continua esta función?*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; 0 \leq x < 3 \\ \frac{1}{6}x + 8.5 \; si \; 3 \leq x < 9 \\ 7 \; si \; 9 \leq x < 11 \\ -(x-11)^2 + 7 \; si \; 11 \leq x \leq 13 \end{cases}$$

Problema 22. *Dos vehículos frenan al mismo tiempo. El vehículo A lleva una velocidad inicial de 91 km/h y la variación de esta según el tiempo (en segundos) equivale a la función* $f(x) = 100 - \frac{1}{4}(x-6)^2$. *El vehículo B frena con una velocidad inicial de 120 km/h y la velocidad varía según la función* $g(x) = 120 - \frac{1}{2}x^2$.

a) *¿Cuánto tiempo tardan en pararse?*

Calculando el punto de corte con el eje OX obtenemos el tiempo que tardan en pararse. El vehículo A se para a los 26 segundos y el B a los 15.5 segundos.

b) *Calcula la aceleración media de cada vehículo.*

La aceleración media corresponde a la siguiente fórmula:

$$a_m = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Así, tenemos que:

$$a_{m,A} = \frac{0 - 91}{26 - 0} = -\frac{7}{2} m/s^2$$

$$a_{m,B} = \frac{0 - 120}{15,5 - 0} = -7.74\; m/s^2$$

c) *Calcula la TVM de cada vehículo desde el segundo 0 hasta el tiempo en el que se detienen, ¿alguna relación con la aceleración media?*

La TVM y la aceleración media coinciden.

d) *Calcula la TVM de ambos vehículos en los intervalos [0,2] y [9,11]. Explica que significa la diferencia entre una y otra.*

$$TVM_{A,[0,2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{96 - 91}{2} = 2{,}5$$
$$TVM_{B,[0,2]} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{118 - 120}{2} = -1$$
$$TVM_{A,[9,11]} = \frac{f(11) - f(9)}{11 - 9} = \frac{93.75 - 97.75}{2} = -2$$
$$TVM_{B,[9,11]} = \frac{g(11) - g(9)}{11 - 9} = \frac{59.5 - 79.5}{2} = -10$$

En el primer intervalo el coche A sigue acelerando (gana velocidad) mientras que el B comienza a frenar (pierde velocidad. En el segundo, los dos frenan, pero B lo hace mucho más rápido que A.

Problema 23. *Dos compañías de automóviles diferentes muestran sus ingresos en millones de euros durante el año 2019 en la siguiente tabla:*

Meses	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Compañía A	25	*25*	*29*	*38*	*36*	*39*	*34*	*29*	*28*	*32*	*35*	*37*	*38*
Compañía B	32	*32*	*28*	*34*	*35*	*42*	*34*	*32*	*31*	*34*	*32*	*39*	*36*

a) Usando la TVM, compara el crecimiento o decrecimiento de los ingresos de las compañías por semestres.

Primer semestre:

$$TVM_A = \frac{34 - 25}{6 - 0} = \frac{3}{2}$$
$$TVM_B = \frac{34 - 32}{6 - 0} = \frac{2}{5}$$

La compañía A ha crecido más rápido que la B.

Segundo semestre:

$$TVM_A = \frac{38 - 34}{12 - 6} = \frac{2}{3}$$
$$TVM_B = \frac{36 - 34}{12 - 6} = \frac{1}{3}$$

La compañía A ha crecido más rápido que la B.

b) ¿Qué compañía ha tenido mejor segundo trimestre del año? ¿Cuál ha sido el mejor trimestre de la compañía B?

Segundo trimestre:

$$TVM_A = \frac{34-38}{6-3} = -\frac{4}{3}$$

$$TVM_B = \frac{34-34}{6-3} = 0$$

La compañía A ha perdido mientras que la B mantiene.

El mejor trimestre de la compañía B es el último ya que su TVM es mayor.

Problema 24. *Vamos a definir en GeoGebra la Tasa de Variación Media para cualquier función. En primer lugar, definimos dos deslizadores a y b. A partir de ellos, definimos las rectas x = a y x = b. Construimos una función f(x) cualquiera y definimos los puntos de corte de f con las rectas definidas. Introducimos en la entrada del programa la orden Funcion(f(x), a, b) que dibujará la función en el intervalo (a, b), así la destacamos de otro color. Definimos la Tasa de Variación Media en la entrada del programa con la siguiente expresión:*

$$TVM_{a,b}f(x) = \frac{f(b)\ -\ f(a)}{b-a}$$

a) *Elegimos una función lineal, ¿cuál es el valor de la TVM? ¿varía? ¿corresponde a algún valor conocido?*

Al dar una función lineal cualquiera se busca que el alumno relacione esta con la pendiente.

b) *Cambiamos ahora a una cuadrática. Varía los valores de los deslizadores, ¿sabrías decir que significa el valor de la TVM? ¿Cuándo es positiva y cuándo no?*

El valor que da la tasa de variación media expresa cuánto crece o decrece la función en un intervalo. Será positiva a la derecha del vértice si el coeficiente que acompaña al término cuadrático es positivo y viceversa si es negativo. Es más grande conforme estamos lejos del vértice.

Anexo II. Soluciones prueba escrita y clasificación de tareas.

Pregunta 1. *La siguiente expresión algebraica sirve para calcular el dinero obtenido por inversiones a interés continuo:*

$$f(x) = C_0 e^{ix},$$

Donde:

- C_0 *es la cantidad inicial invertida.*
- i *es la tasa de interés.*
- *La variable* x *es el tiempo en años.*

Responde a los siguientes apartados:

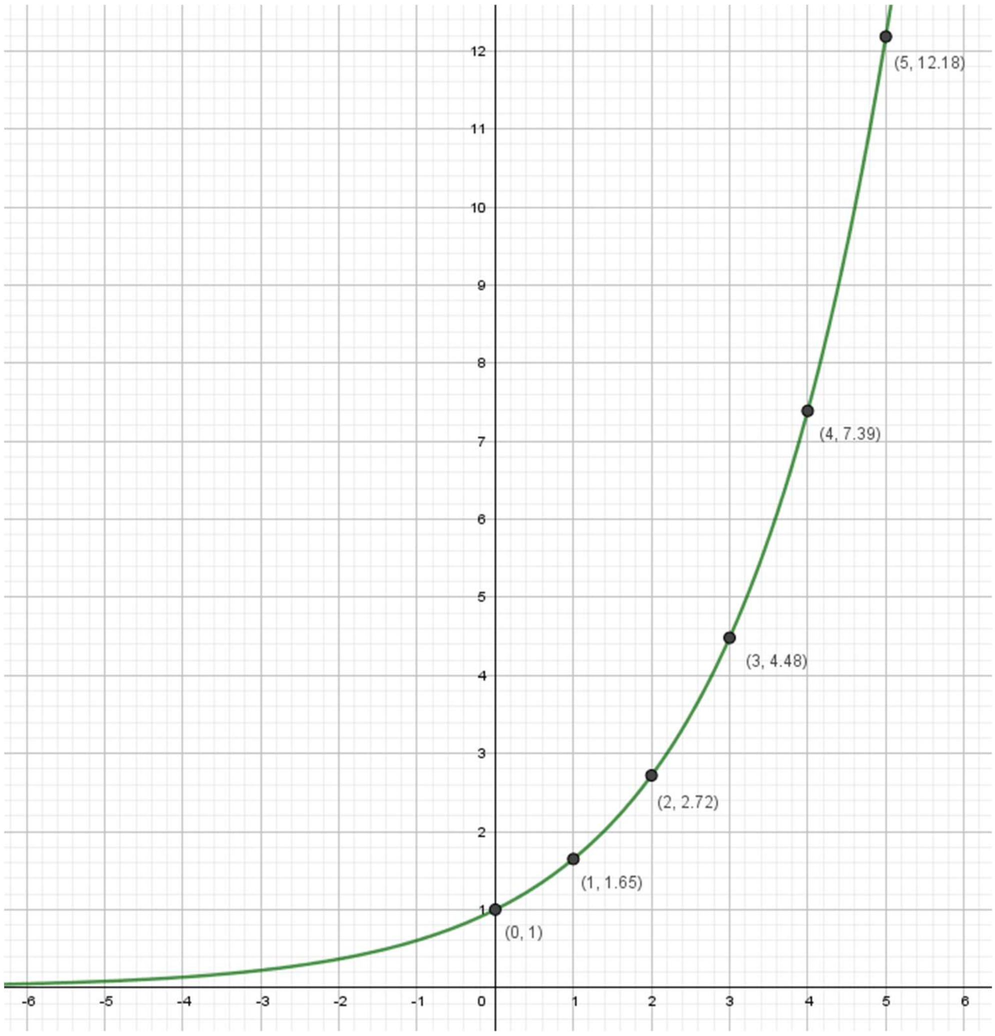
a) *Esboza una gráfica con 1 euro de cantidad inicial y un interés del 0,5 (0,75 puntos).*

Para dibujar la gráfica es necesario obtener primero la expresión algebraica sustituyendo los datos del enunciado, quedando: $f(x) = 1 \cdot e^{0,5x} = e^{0,5x}$.

Una vez obtenida, se realiza una tabla de valores para proceder a dibujar la gráfica:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1	1,65	2,72	4,48	7,39	12,18

Para terminar, a través de unos ejes de coordenadas, se dibujan los puntos y se unen de tal forma que tengan una tendencia exponencial:



Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

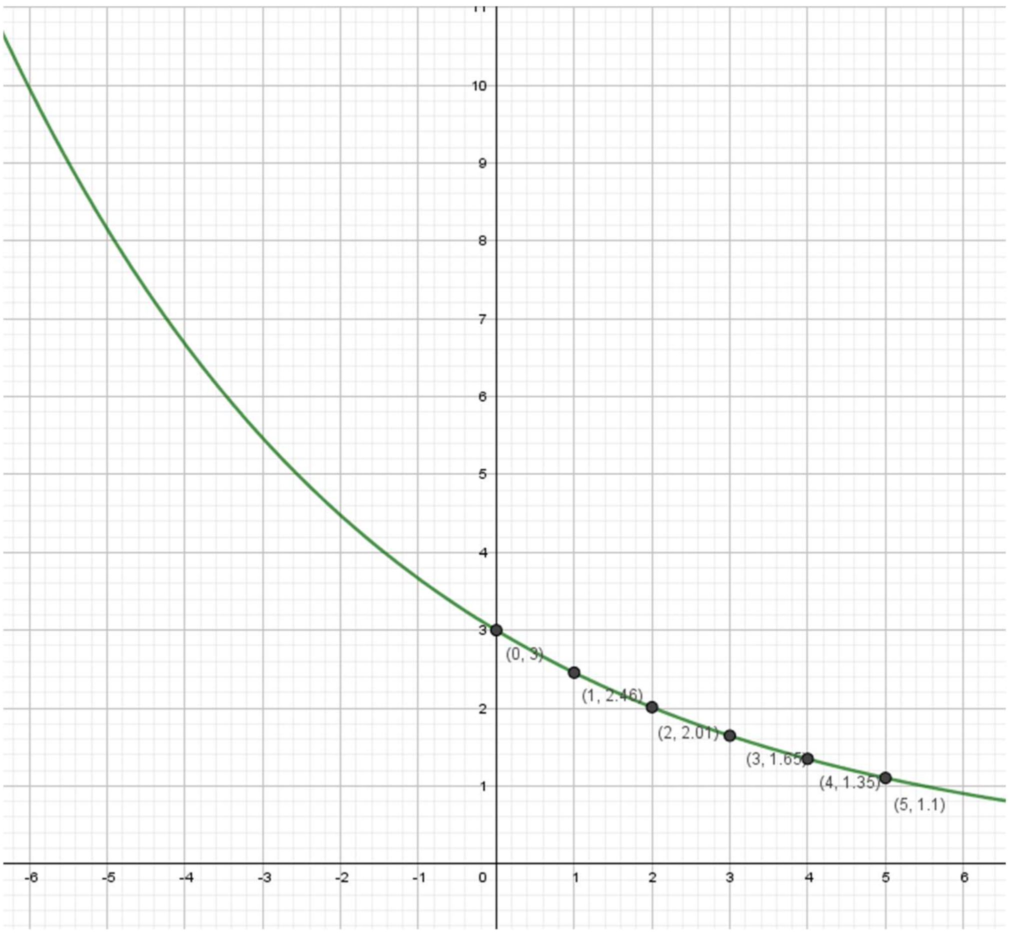
- Tareas principales:
  - Representación gráfica de la función exponencial.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Obtención de puntos o construcción de tabla.
- Tareas auxiliares generales:
  - Cálculos algebraicos (sustitución de los coeficientes).
  - Cálculos aritméticos.

b) Esboza otra gráfica con 3 euros de cantidad inicial y un interés de -0,2 (0,75 puntos).

Procedemos de la misma forma que el apartado anterior: obtenemos expresión algebraica, algunos puntos de la función y dibujo de la gráfica teniendo en cuenta que es una exponencial ahora con exponente negativo.

$f(x) = 3 \cdot e^{-0,2x} = 3e^{-0,2x}$.

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	3	2,45	2,01	1,64	1,34	1,1



Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Representación gráfica de la función exponencial.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Obtención de puntos o construcción de tabla.
- Tareas auxiliares generales:
  - Cálculos algebraicos (sustitución de los coeficientes).
  - Cálculos aritméticos.

c) *Basándote en las gráficas, ¿cuál es mejor inversión? ¿a qué se debe su crecimiento o decrecimiento? (0,5 puntos).*

La del apartado a), ya que es creciente. La diferencia entre las dos funciones es que de una a otra se cambia el signo del exponente, haciendo que una crezca y otra decrezca.

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Interpretación del crecimiento de las funciones.
  - Relacionar el comportamiento con los parámetros de la exponencial.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Obtención de las gráficas de las funciones (apartados anteriores).

Pregunta 2. *Unos investigadores han estado catalogando los tamaños de diferentes diámetros de grano de varios materiales. Como los datos tomados son muy dispares, han decidido pasar de una escala lineal a una logarítmica realizando la siguiente transformación:*

Diámetro grano (mm)	*1*	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}
Escala logarítmica	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

a) *Encuentra la expresión algebraica de una función logarítmica que relacione la escala lineal con la logarítmica (0,75 puntos).*

Para encontrar la expresión logarítmica, hay que conocer la definición de logaritmo:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Teniendo claro esto, es fácil ver que está sucediendo esto en los datos de la tabla:

$$3^a = a + 1$$

Luego la expresión algebraica se construye así:

$$f(x) = \log_3 x + 1$$

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

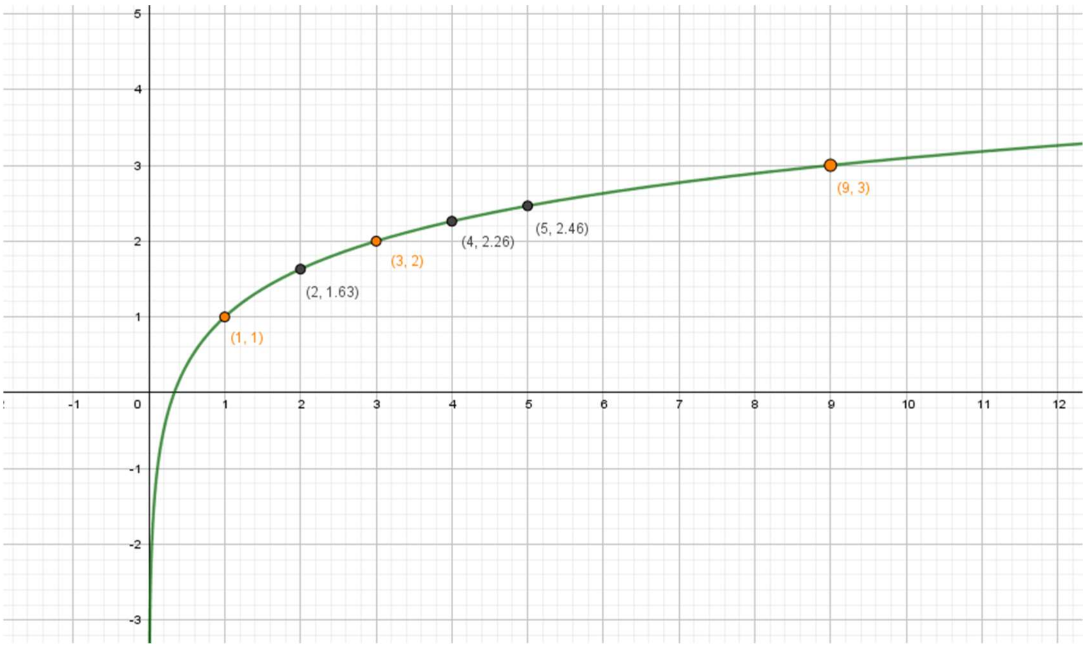
- Tareas principales:

- Paso de la tabla a la expresión algebraica.

- Tareas auxiliares específicas:
  - Relacionar el logaritmo con la potencia.
- Tareas auxiliares generales:
  - Cálculo algebraico.
  - Cálculo aritmético.

b) Representa la función de forma gráfica y aproximada (0,75 puntos).

En este apartado hay dos opciones diferentes: o bien hacer una tabla de valores, o bien tomar los valores pequeños de la tabla (los tres primeros) y representarla.



Los puntos en naranja son los dados en la tabla inicial, mientras que los puntos en negro serían los obtenidos por los alumnos en una tabla de valores (más los naranjas).

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Obtención de la representación gráfica.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Obtención de la expresión algebraica (solo si se opta por hacer la gráfica a través de la expresión algebraica).
  - Obtención de puntos de la función o tabla de valores (solo si se opta por hacer la gráfica a través de la expresión algebraica).

- Tareas auxiliares generales:
    - Cálculo aritmético.

c) *¿Cuál es el dominio de esta función? ¿y el recorrido? ¿es continua? (0,5 puntos).*

El dominio de esta función comprende el intervalo $(0, \infty)$, mientras que el recorrido son todos los reales. La función es continua en todo su dominio.

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
    - Dominio, recorrido y análisis de continuidad.
- Tareas auxiliares específicas:
    - Obtención de la expresión algebraica o gráfica (apartados anteriores).

Pregunta 3. *Responde a los siguientes apartados:*

a) *Encuentra dos magnitudes que tengan una relación de proporcionalidad inversa y aporta su expresión algebraica (1 puntos).*

Esta pregunta tiene un carácter abierto, ya que los alumnos podrán elegir dos magnitudes cualesquiera que guarden esta relación.

Por ejemplo: el tiempo que se tarda en llenar un depósito de 6000 litros de agua frente al número de grifos que llenan a 60 litros/hora.

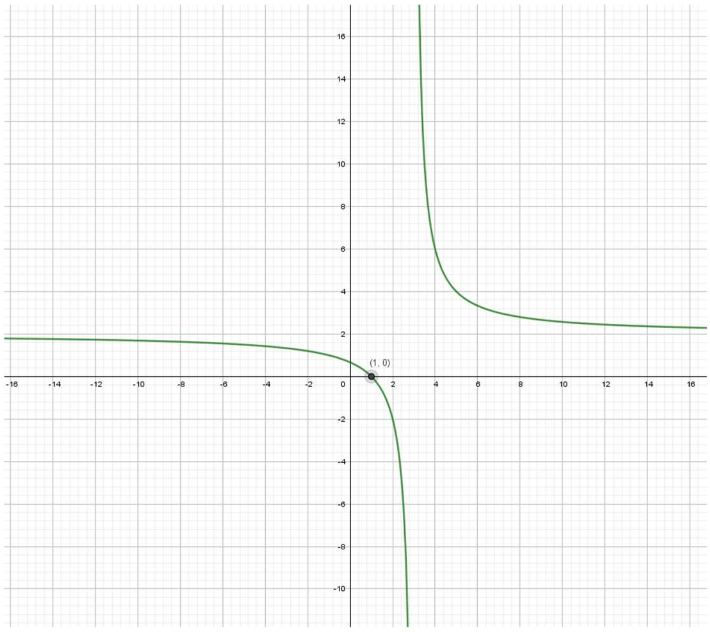
$f(x) = \frac{6000}{60x} = \frac{100}{x}$, representando en el eje OX el número de grifos y en el OY el tiempo en horas.

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
    - Obtención de un ejemplo de dos magnitudes inversamente proporcionales.
    - Obtener la función que las relaciona.
- Tareas auxiliares generales:

- Cálculos algebraicos a la hora de obtener la expresión.

b) *Encuentra la expresión algebraica y asíntotas de la función representada en la siguiente gráfica:*



¿Es continua? ¿cuál es su dominio? ¿y su recorrido? Interpreta su crecimiento y decrecimiento (1 punto).

En primer lugar, se pide calcular las asíntotas para poder obtener la expresión algebraica como se ha realizado en la secuencia didáctica. Las asíntotas se ven a simple vista: la horizontal es $y = 2$ y la vertical es $x = 3$.

Sabiendo esto, tenemos que la expresión algebraica de la gráfica es de la forma:

$$y = \frac{k}{x-3} + 2$$

Para obtener k, sustituimos los valores del punto dado en la gráfica:

$$0 = \frac{k}{1-3} + 2, k = 4$$

Así, sustituyendo obtenemos la expresión algebraica deseada:

$$y = \frac{4}{x-3} + 2$$

La función no es continua, tiene una discontinuidad en $x = 3$ y por tanto su dominio son todos los reales exceptuando el 3. La función es decreciente en todo su dominio. El recorrido son todos los reales excepto el 2. Esta información se puede obtener tanto en la representación gráfica como en la expresión algebraica previamente calculada.

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Obtención de la expresión algebraica y asíntotas.
  - Continuidad, dominio, recorrido y monotonía de la función.
- Tareas auxiliares generales:
  - Cálculo aritmético.
  - Cálculo algebraico.

Pregunta 4. *En una cooperativa de aceite de oliva han perdido muchos datos referentes al precio de la aceituna en los últimos 15 días. Cuentan con una tabla, pero necesitan una fórmula y una gráfica para una buena compresión y futura predicción. El precio del kilogramo de aceitunas viene en céntimos de euro:*

Día	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
Precio	*70*	*73*	*76*	*79*	*64*	*81*	*100*	*82*	*80*	*78*	*76*	*74*	*74*	*74*	*74*

Además, saben que la función se puede resumir en 4 fragmentos:

- *El primero es una función lineal creciente que acaba justo al final del tercer día.*
- *El segundo es una función cuadrática y justo empieza al comienzo del cuarto día y acaba justo al final del séptimo.*
- *El tercero corresponde a una lineal, tiene comienzo justo al principio del séptimo día.*
- *El cuarto corresponde a una función constante.*

Responde a las siguientes preguntas:

a) Obtén la expresión algebraica correspondiente a esta situación (0,75 puntos).
Para legar a la expresión algebraica que se pide, hay que encontrarla en cada trozo determinado por el enunciado.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+70 & si \quad 0 \leq x < 4 \\ (x+4)^2 & si \quad 4 \leq x < 8 \\ -2x+96 & si \quad 8 \leq x < 11 \\ 74 & si \quad 11 \leq x \leq 14 \end{cases}$$

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Obtención de la expresión algebraica a partir de la tabla.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Interpretar el enunciado para diferenciar los tramos de la función.
- Tareas auxiliares generales:
  - Cálculo aritmético.
  - Cálculo algebraico.

b) Dibuja la gráfica correspondiente (0,75 puntos).

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Obtención de la gráfica.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Obtención de la expresión algebraica (apartado anterior).

c) *¿Cuál sería el coste de un kilogramo de aceitunas en el día 17 si desde el séptimo día hasta la actualidad se hubiese mantenido la relación cuadrática? (0,5 puntos).*

Si tenemos clara la expresión algebraica también es obvio que lo único que hay que hacer es extender el intervalo del segundo tramo hasta 17 y calcularlo, es decir: $(17 + 4)^2 = 21^2 = 441$.

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Sustitución del valor en la expresión algebraica.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Obtención de la expresión algebraica.
- Tareas auxiliares generales:
  - Cálculo aritmético.

Pregunta 5. *En la siguiente tabla se recogen las temperaturas en ºC previstas para el 1 de septiembre de 2020 de Zaragoza y Lugo:*

	0:00	*1:00*	*2:00*	*3:00*	*4:00*	*5:00*	*6:00*	*7:00*	*8:00*	*9:00*	*10:00*	*11:00*
Zaragoza	*19*	*18*	*17*	*17*	*16*	*15*	*14*	*15*	*17*	*19*	*21*	*23*
Lugo	*14*	*13*	*13*	*12*	*11*	*10*	*10*	*9*	*12*	*14*	*16*	*18*

	12:00	*13:00*	*14:00*	*15:00*	*16:00*	*17:00*	*18:00*	*19:00*	*20:00*	*21:00*	*22:00*	*23:00*
Zaragoza	*25*	*27*	*27*	*28*	*29*	*28*	*28*	*28*	*26*	*24*	*23*	*21*
Lugo	*20*	*21*	*22*	*23*	*23*	*22*	*20*	*19*	*17*	*16*	*14*	*14*

a) *Calcula la tasa de variación media para ver en qué ciudad ha habido más variación entre las 3:00 y las 7:00. Explica el significado de los valores obtenidos (1 punto).*

Calculamos la de Zaragoza:

$$TVM_{[3,7]} = \frac{15 - 17}{7 - 3} = -\frac{2}{4} = -0{,}5$$

Calculamos la de Lugo:

$$TVM_{[3,7]} = \frac{9 - 12}{7 - 3} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

Luego la respuesta es clara que la mayor variación se encuentra en Lugo en ese periodo de 4 horas. En este periodo, el promedio de descenso de la temperatura por hora es de 0,5 y 0,75 grados respectivamente.

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
    - Cálculo de las tasas de variación media.
    - Comparación e interpretación de estas.
- Tareas auxiliares generales:
    - Cálculo aritmético.

b) Toma la temperatura mínima y máxima de cada ciudad y calcula la tasa de variación media entre estas. ¿Qué variación es mayor? ¿Qué interpretas de cada una de ellas? (1 punto).

Buscamos la temperatura mínima y máxima de Zaragoza y registramos a qué hora ha sido:

$$TVM_{[6,16]} = \frac{29-14}{16-6} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

Hacemos lo mismo que en Lugo, aunque hay empate a la hora de las temperaturas máximas, luego será válida cualquiera de las dos que se tomen:

$$TVM_{[7,15]} = \frac{23-9}{15-7} = \frac{14}{8} = 1{,}75$$

Es claro que la variación de Lugo es mayor. Se puede decir que en ambas es positiva, lo que significa que la temperatura mínima siempre se localiza antes que la máxima. Además, sabemos que en promedio sube 1,5 y 1,75ºC en cada ciudad por hora, dentro de ese intervalo de tiempo.

Las **tareas** que encontramos en este apartado son las siguientes:

- Tareas principales:
    - Cálculo de las tasas de variación media.
    - Comparación e interpretación de estas.
- Tareas auxiliares generales:
    - Cálculo aritmético.