

# **Modelo jerárquico dependiente del tiempo de fractura de haces de fibras**

Trabajo de fin de grado

**Autor:**

**Daniel Lázaro Lázaro**

**Directores:**

**Dr. Amalio Fernández- Pacheco Pérez**

**Dr. Javier Gómez Jiménez**

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelo. Método de Monte Carlo</b>	<b>10</b>
<b>3. Resultados</b>	<b>12</b>
3.1. Caso no trivial para comprobar el Método . . . . .	12
3.2. Tiempo de fallo asintótico en sistemas macroscópicos . . . . .	14
<b>4. Discusión de resultados</b>	<b>15</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>22</b>
<b>6. Bibliografía</b>	<b>22</b>
Anexo 1. Caso de $N=8$ elementos	
Anexo 2. Código	

# 1. Introducción

Este trabajo de fin de grado trata del problema de fractura en materiales heterogéneos [1], [2]. Materiales heterogéneos (cerámicas, rocas, materiales compuestos...) son aquellos que tienen unas propiedades de ruptura que varían de manera muy fuerte de un punto a otro como consecuencia de la existencia de defectos microestructurales con una distribución aleatoria. Como luego se verá, se va a usar el modelo de Monte Carlo para su resolución, el cual trata de forma estocástica un problema determinista con números aleatorios.

El proceso de fractura de un material heterogéneo se puede abordar desde dos puntos de vista: la fractura estática o independiente del tiempo y la fractura dinámica o dependiente del tiempo. La fractura estática tiene como objetivo encontrar la resistencia del material (es decir, la carga máxima instantánea que es capaz de soportar sin romperse) mientras que la fractura dinámica busca conocer el tiempo hasta la rotura, una vez se ha cargado el sistema con un peso constante. En este trabajo nos vamos a centrar en la fractura dependiente del tiempo o fractura por fatiga. Para abordar este problema existen diferentes posibles enfoques. Nosotros aquí vamos a usar un modelo de fractura estocástica, para cuya resolución un método de Monte Carlo es lo más adecuado. En particular, vamos a usar el paradigma Fiber Bundle Model (FBM, modelos de haces de fibras) [3], [4], que son un conjunto de modelos, tanto estáticos como dinámicos, que permiten estimar las propiedades mecánicas de los materiales heterogéneos. Estos modelos FBM constan de tres características esenciales: un conjunto finito  $N$  de elementos, a los que indistintamente nos referiremos como elementos o fibras, que será la red  $d$ -dimensional a simular; una distribución de probabilidad para el fallo de los elementos en cuestión y una regla de transferencia de carga (dada la ruptura de una fibra, ver a qué fibras se va a transferir y de qué manera o proporción).

La topología de la red sobre la que se sitúan los elementos del sistema puede ser muy variada, desde una cadena unidimensional, un plano bidimensional o una red tridimensional, hasta a topologías más complejas como una red de Bethe o una red scale-free. En cuanto a la distribución de probabilidad de rotura de los elementos individuales (es decir, no sometidos a transferencias de carga), se suele escoger una de tipo Weibull, ya que es la que mejor reproduce los experimentos realizados con materiales heterogéneos [5].

Lo que realmente se está buscando es el tiempo de ruptura de todas las fibras desde la ruptura de la primera de ellas, que afectará al resto. Esa primera ruptura comenzará de manera aleatoria,

como un daño en alguna posición concreta desconocida, lo cual afectará a posteriori al conjunto del material, ya que será la desencadenante de una gran multitud de microfracturas, tales que el sistema evolucionará en el tiempo, rompiendo las fibras que lo componen. Se puede ver entonces este tiempo de ruptura final como el fallo a escala macroscópica del sistema.

En lo que estamos interesados es en el comportamiento asintótico en relación con ese tiempo de fallo o tiempo de vida del sistema, con respecto al número de elementos que lo compone,  $N$ , es decir, estamos interesados en el tiempo de fallo de un sistema compuesto por  $N$  elementos cuando  $N$  se hace cada vez más grande, con el objetivo de poder extrapolar dicho tiempo de fallo para un sistema de tamaño infinito.

Los modelos FBM dinámicos, que son el objetivo de este trabajo, son aquellos que simulan fallos en el sistema, esa ruptura de fibras, debida a un proceso de fatiga que tendrá asociada una ruptura con un cierto tiempo de retraso... Se puede suponer una carga constante impuesta sobre el sistema y ver la ruptura de los elementos por fatiga tras un cierto tiempo desde que se aplica dicha carga.

Para ver esa distribución en caso de modelo FBM dinámico se podrá expresar tal que una distribución de Weibull como se había anticipado

$$P(t; \sigma(t)) = 1 - e^{\int_0^t \kappa[\sigma(\tau)] d\tau} \quad (1)$$

Donde  $P(t, \sigma)$  es la probabilidad de que un elemento se rompa en el tiempo  $t$  bajo una carga  $\sigma$ . En esta expresión,  $\kappa$  es el *hazard rate*, o regla de rupturas, para el cual vamos a usar la siguiente forma

$$\kappa(\sigma) = \nu_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^\rho \quad (2)$$

Donde  $\sigma_0$  será una fuerza referencia que además podremos considerar como la unidad sin pérdida de ninguna generalidad  $\sigma_0 = \nu_0 = 1$ . El exponente,  $\rho$ , controla el grado de heterogeneidad del material, como  $\rho = 2 - 5$  para materiales fabricados artificialmente y  $\rho = 10 - 50$  para rocas. Sustituyendo en la expresión (1), veremos entonces

$$P(t; \sigma(t)) = 1 - e^{\int_0^t \nu_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^\rho d\tau} = 1 - e^{-\nu_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^\rho t} \quad (3)$$

La última expresión, que tiene la forma de una distribución de Weibull, es válida cuando las fibras del sistema son independientes unas de otras (no hay transferencia de carga), por lo que cada fibra se rompe con su carga  $\sigma$  inicial, carga que es constante.

Una vez explicadas dos de las características de los modelos FBM: la topología del conjunto discreto de  $N$  elementos que forman el sistema, y las distribuciones de probabilidad para el fallo de los elementos individuales. Queda por explicar la última de las características que definen estos modelos, la ley de transferencia de carga, siendo además éste el ingrediente más importante de los tres.

Tendremos a su vez tres tipos de reglas de transferencia:

La primera de ellas será la *EqualLoad – Sharing* (ELS) que consiste en una igual repartición a todos los elementos de la fibra. Se podría ver como una teoría de campo medio clásico en la cual se suma un potencial. En este caso, es una carga a todos los elementos no rotos de la red. Este tipo de regla de transferencia tiene aplicaciones en la predicción de fallos o rupturas bajo una tensión aplicada en hilos elásticos o en cables que no tengan, o muy poca torsión o giro.

La segunda regla de transferencia será la *LocalLoad – Sharing* (LLS), en la cual, al romperse un elemento, la carga que este soportaba se reparte en sus vecindades como su propio nombre indica. Se trata de añadir la carga repartida a los vecinos atendiendo a la geometría y dimensionalidad de la red. Las aplicaciones de esta regla de ruptura suelen ser en fallos de materiales tal como podrían ser compuestos de fibra reforzada y con una *stiff matrix* (matriz de rigidez).

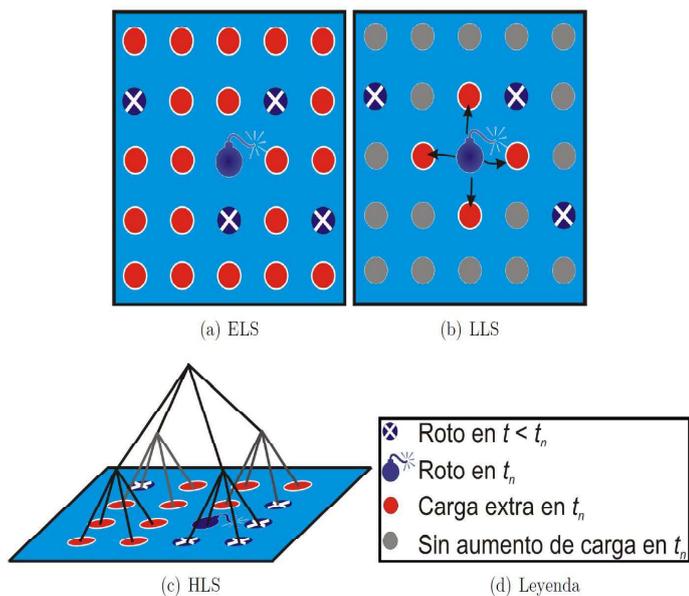


Figura 1: Modos de transferencia de la carga del elemento roto en  $t_n$ . En el modelo ELS la carga se reparte por igual entre todos los elementos supervivientes. En el modelo LLS la carga se reparte entre los elementos adyacentes (aunque como veremos, el tratamiento riguroso es más complejo). Finalmente, en el modelo HLS la carga se reparte entre los elementos del mismo nodo (en el caso del esquema, como ya están rotos es necesario remontarse a un nivel superior).

La tercera y última de las reglas de transferencia es la *HierarchicalLoad – Sharing* (LLS), la cual trata la repartición de la carga considerando el espacio de la red como un árbol fractal. Se dice que tenemos este árbol fractal ya que la estructura es tal que si imponemos una coordinación,  $c$ , que es una agrupación de elementos, podremos agrupar la red en forma de

$$N = c^p \quad (4)$$

De tal forma que tenemos  $\frac{N}{c}$  subgrupos de coordinación  $c$ . Se podrá ver una cierta simetría en este problema, ya que podremos ver que esos  $\frac{N}{c}$  subgrupos se podrán agrupar a su vez en grupos de  $c$ , por lo cual tendremos entonces  $\frac{N}{c^2}$  subgrupos de ese nivel anterior. De esta forma y como un proceso iterado podemos ver la estructura se repite hasta que formamos una estructura que se asemeja a un árbol de  $p$  pisos de altura.

Además hemos mencionado que esta regla de transferencia trata el espacio de cargas como una estructura de árbol fractal, ahora podemos ver por qué, ya que se repite la estructura de forma periódica y tendremos subpartes que serán iguales a las partes de las que proceden.

Este tipo de regla de transferencia tiene aplicación en geofísica para estudiar el proceso de

fractura durante un terremoto. En este caso el conjunto de elementos simulan el plano de una falla sísmica y el proceso paulatino de rotura de los elementos que componen el plano de falla culmina con la rotura macroscópica del sistema, que es lo que llamamos un terremoto [6].

Como hemos mencionado antes, nuestro objetivo en este trabajo es calcular el valor asintótico del tiempo de fallo de un sistema con una estructura jerárquica de transferencia de carga, y para que sea un modelo realista tendremos que trabajar en la condición de ese límite, ya que necesitaremos un sistema tal que

$$N \rightarrow \infty, \quad (5)$$

para que así el sistema sea lo suficientemente grande como para poder estar hablando de un sistema macroscópico ya que, como se ha comentado más arriba, los elementos de nuestro sistema son de dimensiones microscópicas (defectos microestructurales de un material heterogéneo). En particular, estamos interesados en conocer si el tiempo de fallo asintóticos de un árbol fractal de una coordinación dada y un exponente  $\rho$  dado tiende a cero o a un valor no nulo al aumentar el tamaño del sistema.

Para simular la rotura por fatiga de un sistema jerárquico de tipo HLS debemos especificar tres parámetros: (1) el exponente  $\rho$  de la regla de rotura potencial (que, como hemos dicho, controla el grado de heterogeneidad del material), (2) el número de coordinación  $c$  del árbol (es decir, el número de elementos de un nivel que están unidos a un elemento del nivel superior, y (3) el número  $p$  de niveles del árbol. De esta manera, el número  $N$  de elementos del sistema no es un parámetro independiente sino que es función de  $c$  y  $p$ :

$$N = c^p. \quad (6)$$

Es importante recordar aquí que el único nivel real del sistema es  $p=1$ , que es en el que se sitúan los  $N$  elementos. El resto de niveles,  $p=2$ ,  $p=3$ , etc, no son más que una superestructura que sirva para poder repartir la carga de acuerdo con el modelo jerárquico de árbol fractal.

Para poder apreciar mejor cómo se producen las roturas sucesivas en el modelo, vamos a estudiar un caso muy sencillo para mostrar el procedimiento que se va a seguir

$$N = 2^2 \quad (7)$$

Antes de empezar conviene hacer una serie de simplificaciones, empezando por el *hazard rate*, para el cual consideraremos  $\sigma_0 = \nu_0 = 1$ , lo cual podremos sustituir en la expresión (2) y ver

$$\kappa(\sigma) = \sigma^\rho \quad (8)$$

A continuación se define la anchura de ruptura, que vendrá dada como

$$\Gamma_i = \sum_{i=1}^N \kappa_i(\sigma) = \sum_{i,j=1}^N \sigma_{i,j}^\rho \quad (9)$$

Donde por un lado el subíndice  $i$  hace referencia a la etapa de rotura correspondiente ( $i=1$  hace referencia a la rotura del primer elemento,  $i=2$  a la rotura del segundo elemento y así sucesivamente), por lo que tendremos una anchura de ruptura del haz de fibras para cada etapa del proceso de ruptura. Y por otro lado, el subíndice  $j$ , en cada etapa  $i$ -ésima, será el que recorra los  $N$  elementos de del haz de fibras, sumando la carga de cada una de las fibras sanas.

Se define la probabilidad de que se rompa un determinado elemento que, a su vez, vendrá dada por este parámetro acorde a la siguiente ecuación (en la que realmente se está pesando el valor de la carga de ese elemento  $j$ -ésimo frente a la anchura total de la configuración del haz de fibras en esa etapa  $i$ -ésima)

$$P(j, i) = \frac{\sigma_{j,i}^\rho}{\Gamma_i} \quad (10)$$

Así pues, el tiempo de ruptura de esa etapa concreta vendrá dado por su inversa, tal que con el índice  $i$  denotando la etapa de la ruptura correspondiente

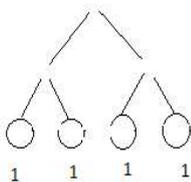
$$\delta_i = \frac{1}{\Gamma_i} \quad (11)$$

Por lo que, finalmente, se podrá ver relacionado con el tiempo de ruptura del haz de fibras desde la primera ruptura hasta que ya no queden elementos sanos

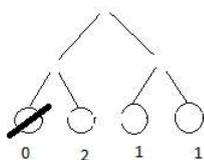
$$T = \sum_{i=1}^N \delta_i \quad (12)$$

Definidas estas magnitudes podremos empezar a ver la ruptura del caso mencionado (asumiendo  $\rho = 2$  el exponente de la regla de rotura). En los esquemas siguientes un círculo hace

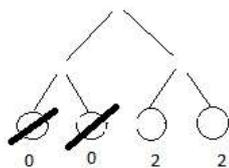
referencia a una fibra sana , un círculo tachado a una fibra rota. Los números que hay debajo de cada elemento es la carga que esa fibra está soportando.



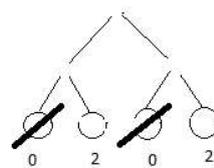
Etapa 1



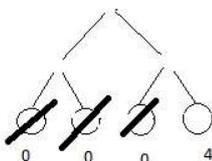
Etapa 2



Etapa 3.1



Etapa 3.2



Etapa 4

La ruptura del primero de los casos será un paso trivial, ya que tendremos una total simetría de cuál sea el siguiente en romperse. Podemos ver los datos de las dos primeras de las etapas como

$$\Gamma(1) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4 \rightarrow$$

$$\delta(1) = \frac{1}{4}$$

$$\Gamma(2) = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6 \rightarrow$$

$$\delta(2) = \frac{1}{6}$$

Y en la tercera etapa, es decir, en ese segundo elemento roto, podremos ver que ya no es

una única posible forma de ruptura, sino que, de hecho, tendremos dos alternativas posibles. Observando los esquemas de rotura del sistema de 4 elementos se deduce fácilmente que hay seis formas diferentes de pasar de la etapa 2 a la etapa 3, cuatro de las cuales desembocan en configuraciones del tipo (3.1) y dos en configuraciones del tipo (3.2). Por tanto, la probabilidad de transición (2)  $\rightarrow$ (3.1) es  $\frac{4}{6}$  y la probabilidad de transición (2)  $\rightarrow$ (3.2) es  $\frac{2}{6}$ . La anchura de fractura de cada una de las dos configuraciones con dos elementos rotos es:

$$\Gamma(3,1) = 2^2 + 2^2 = 8 \quad (13)$$

$$\Gamma(3,2) = 2^2 + 2^2 = 8 \quad (14)$$

Por lo cual, el tiempo que transcurre hasta que se rompe el tercer elemento,  $\delta(3)$  es:

$$\delta(3) = \frac{1}{8} \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \frac{2}{3} = \frac{1}{8} \quad (15)$$

Finalmente, la última etapa de este caso particular, para ambos casos será la misma configuración

$$\Gamma(4) = 4^2 = 16 \quad (16)$$

$$\delta(4) = \frac{1}{16} \quad (17)$$

Por tanto, el tiempo  $T$  de rotura del sistema se calcula como:

$$T = \sum_{i=1}^N \delta(i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0,60416... \quad (18)$$

Podemos concluir este apartado con los objetivos de este trabajo. El primero de ellos será asegurarnos de que el código (Anexo 2) funcione correctamente y reproduzca un caso no trivial pero lo suficientemente sencillo como para tener una solución analítica. Una vez calculada la solución analítica de ese caso no trivial, usaremos el código de Monte Carlo para reproducir dicho valor analítico. Este resultado se muestra en el Apartado 3, para el caso de  $N = 8$  elementos componiendo ese haz de fibras.

Una vez hayamos asegurado que el código funciona correctamente y es capaz de estimar con

precisión el tiempo de fallo de haces de fibras pequeños, estaremos en disposición de abordar el segundo objetivo (y principal) del trabajo: estudiar el efecto del coeficiente  $\rho$ , el cual nos parametriza el grado de heterogeneidad del material. Estudiando ese comportamiento podríamos ver que en haces de fibras lo suficientemente grandes como para considerarlos macroscópicos, podríamos ver comportamientos muy diferentes en el tiempo de fallo, en función de dicho coeficiente de heterogeneidad. Así, en la segunda parte del Apartado 3, veremos que para valores pequeños de  $\rho$  u tiempo de fallo de un sistema de tamaño infinito (el tiempo asintótico) es no nulo para el sistema, mientras que si  $\rho$  aumenta, el tiempo de fallo tiende a cero.

## 2. Modelo. Método de Monte Carlo

Antes se ha mencionado el estudio de un haz de fibras no trivial, podemos ver en el anexo 1 el caso de 8 elementos, en el cual ya tenemos en la cuarta y quinta etapas de ruptura dos posibles valores de las anchuras de rupturas, que vendrán dados por probabilidades distintas. En consecuencia tendremos un espacio de rupturas que podrá ser recorrido por multitud de posibles caminos, dependiendo de cuál sea el orden específico en el que se produzca la rotura de los elementos del sistema. Ese espacio de posibles caminos de ruptura es largo y tedioso de analizar incluso en este caso de solo 8 elementos, por lo que queda fuera de toda posibilidad hacer una estimación analítica del caso asintótico.

La finalidad del algoritmo que se presenta en el Anexo 2, es recorrer ese espacio de caminos de tal forma que la probabilidad de cada uno de ellos aparezca de manera indirecta, dada por el número de veces que se haya ido por ese camino con respecto al total. Para que los resultados obtenidos del tiempo de fallo de un sistema de  $N$  elementos sea suficientemente preciso deberemos de repetir el proceso de rotura aleatorio un número elevado de veces, para que nos permita reconstruir la distribución de probabilidad de los tiempos de rotura o, al menos, sus momentos principales (media y desviación estándar). Además, estaremos consiguiendo ver que se puede resolver problemas no triviales con el método de Monte Carlo, que es lo que necesitamos para poder extrapolar este problema a  $N$  mucho mayores (haces de fibras macroscópicos).

Estamos estudiando un problema determinista, es decir, como bien se puede ver en el ejemplo del anexo 1, tendremos un haz de fibras cuyo proceso de ruptura estará fijado, y aunque tenga diferentes posibles caminos, tendrán esas probabilidades de ruptura, por lo cual el resultado final

del tiempo de fallo es un valor fijado. Entonces, tal y como se ha mencionado antes, el método de Monte Carlo se encarga de resolver este problema determinista usando números aleatorios. En el caso del programa implementado (Anexo 2), lo que se estiman son las probabilidades de ruptura de cada elemento en cada una de las etapas, acorde a la distribución de Weinbul mencionada previamente.

Así, en cada etapa  $i$  de rotura se elige, de forma aleatoria, un número  $x_i$  comprendido en el intervalo  $[0,1]$  que nos servirá para identificar el elemento que se rompe en dicha etapa. Para identificar el elemento a romper, recorreremos todos los elementos sanos del sistema (en un orden aleatorio, para evitar que se produzcan las roturas siempre en la misma zona). Para cada elemento calculamos su probabilidad de rotura por medio de la ecuación (10) y vamos acumulando dichas probabilidades hasta que esa suma se hace igual o superior al número aleatorio  $x_i$ . El primer elemento para el cual se cumple la condición es el elemento que se rompe.

Lo que hace el método es, por tanto, para cada etapa de rotura, subdividir el segmento  $[0,1]$  en  $N$  sub-segmentos, cada uno con una longitud igual a la probabilidad de rotura de un elemento (ec. 10). El sub-segmento que contenga en valor del número aleatorio  $x_i$  será el que se rompa. Es importante resaltar que, conforme el sistema se va rompiendo, muchos sub-segmentos tendrán una longitud cero, ya que se corresponden a los elementos que ya se han roto. Además, es evidente que será más probable que el número aleatorio  $x_i$  esté dentro de un sub-segmento "grande"; es decir, que será más probable que se rompa un elemento con una probabilidad de rotura grande (dada por la ec. 10), pero que no necesariamente se va a romper el elemento con la mayor probabilidad de rotura entre los que todavía están sanos.

Así veremos todo el espacio de configuraciones de posibles caminos de ruptura, y los más probables o frecuentes serán aquellos con probabilidad de ruptura mayor, como era de esperar. Por ello, es lógico esperar que para todas las posibles configuraciones que existen en ese estado de la fibra de la etapa de rotura, tendremos que realizar un gran número de rupturas de ese sistema, para que estadísticamente hablando, se esté recorriendo todo ese espacio de configuraciones, o al menos las más probables y que por ello tendrán un mayor peso en el tiempo final, mientras que si alguna no ha sido recorrida significa que no era tan probable y por ello su contribución estadística al tiempo promedio es despreciable.

### 3. Resultados

#### 3.1. Caso no trivial para comprobar el Método

Como resultados podemos ver el efecto del tamaño muestral en este modelo a través del caso particular  $N = 2^3 = 8$  con  $\rho = 2$  explicado en el anexo 1.

El motivo por el cuál solo se muestran los valores en esas deltas de esas dos etapas se explica en dicho anexo, en el que básicamente se ve que el resto de etapas de la ruptura tienen un valor fijado de esa anchura de ruptura o  $\Gamma$ , mientras que en la cuarta y quinta etapa de ruptura se aprecian dos anchuras de ruptura diferentes, de tal forma que cada una de ellas se reproducirá con una probabilidad diferente. Por tener diferentes posibles resultados es por lo que vemos que es necesario tener un mayor número de repeticiones, ya que nos dará, al aumentar el tamaño muestral, un mayor número de cifras significativas en la estimación de cada delta y, por tanto, en la estimación del tiempo de fallo final del sistema. La siguiente tabla recoge los resultados obtenidos promediando sobre un número de repeticiones dado por la primera columna. Las columnas 2 y 4 dan el valor obtenido para  $\delta(4)$  y  $\delta(5)$ , y las columnas 3 y 5 el error estándar de dichas  $\delta$ .

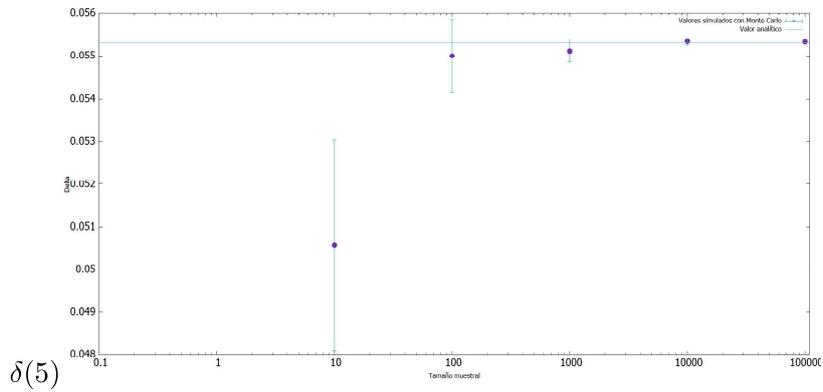
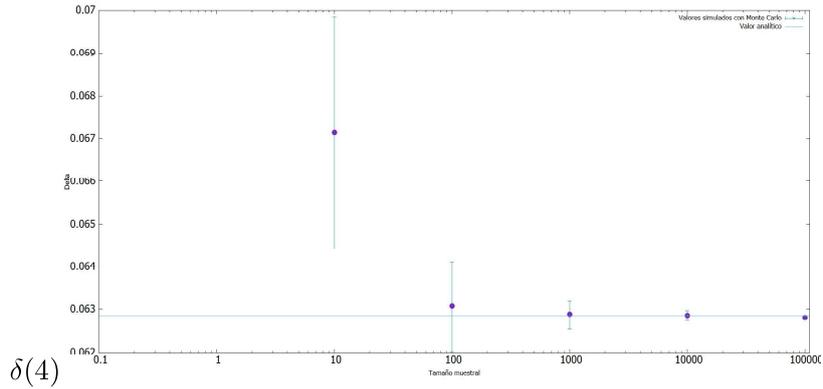
Número de Repeticiones	$\delta(4)$	Error $\delta(4)$	$\delta(5)$	Error $\delta(5)$
10	0.067143	$2.71 \cdot 10^{-3}$	0.050568	$2.47 \cdot 10^{-3}$
100	0.063071	$1.05 \cdot 10^{-3}$	0.055000	$8.46 \cdot 10^{-4}$
1.000	0.062879	$3.32 \cdot 10^{-4}$	0.055119	$2.67 \cdot 10^{-4}$
10.000	0.062859	$1.05 \cdot 10^{-4}$	0.055334	$8.414 \cdot 10^{-5}$
100.000	0.062810	$3.32 \cdot 10^{-5}$	0.055326	$2.66 \cdot 10^{-5}$
1.000.000	0.062851	$1.05 \cdot 10^{-5}$	0.055305	$8.42 \cdot 10^{-6}$

En el Anexo 1 se han calculado analíticamente los valores exactos de  $\delta(4)$  y  $\delta(5)$ , que son

$$\delta(4) = 11/175 = \widehat{0,062854714} \quad (19)$$

$$\delta(5) = 1703/30800 = \widehat{0,055292207} \quad (20)$$

Podemos ver gráficamente los resultados de esta tabla y ver esa convergencia a medida que aumentamos el tamaño muestral (el número de repeticiones del Monte Carlo).



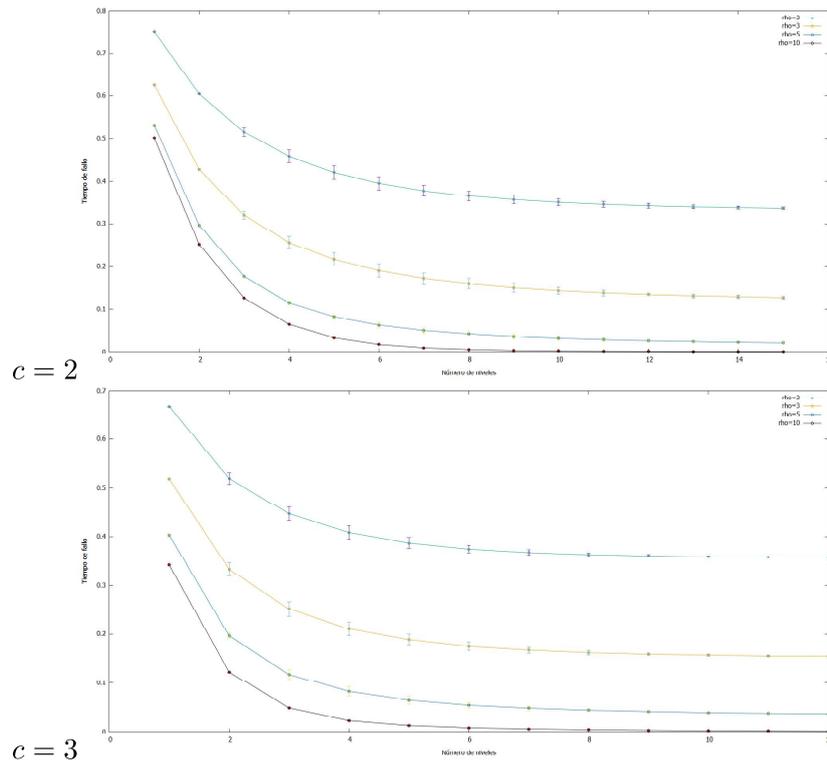
En estas gráficas se puede ver que el eje horizontal está en escala logarítmica debido a la gran diferencia de órdenes de magnitud del número de repeticiones. Se aprecia, como era de esperar, que a medida que se aumenta ese tamaño muestral, los tiempos de fallo de esas dos etapas tienden cada una a su valor teórico. Una vez conocidos esos valores de  $\delta(4)$  y  $\delta(5)$ , podríamos calcular por ello que el tiempo total de fallo, ya que el resto de etapas tienen unas anchuras de ruptura fijadas, y el programa de Monte Carlo nos proporciona los valores exactos.

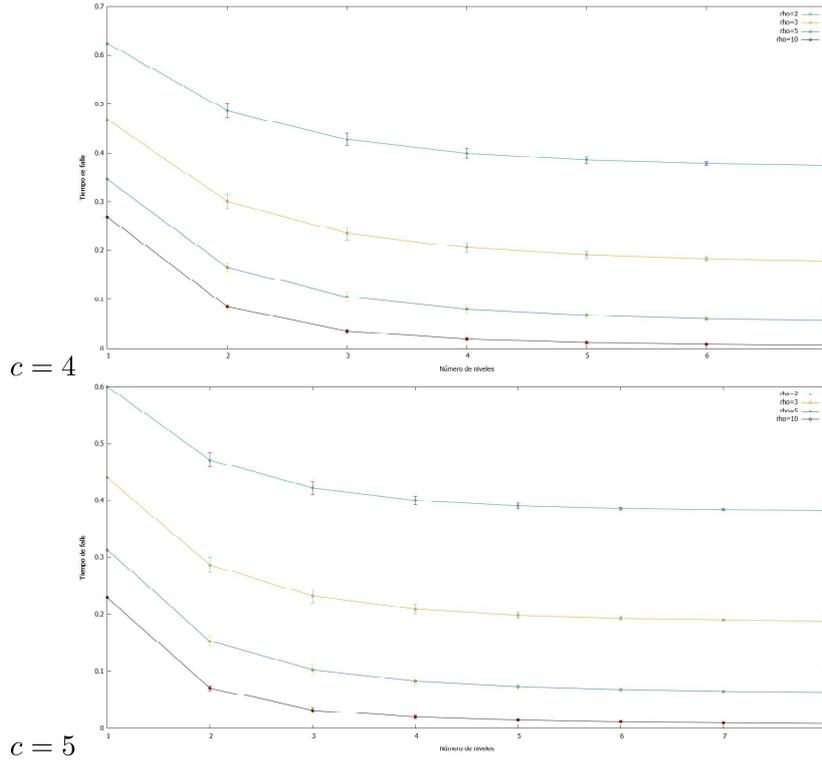
Cabe mencionar que el tamaño de las barras de error va decreciendo, como era de esperar, al aumentar el tamaño muestral, ya que al acercarnos más al valor teórico estaremos considerando un mayor número de deltas a las cuales promediar y por ello un resultado a la vez más exacto, y más preciso.

También cabe recalcar esa diferencia del caso trivial de 4 elementos frente al caso de 8 elementos, es decir, solo aumentando de forma ligera el tamaño de nuestro problema, ya necesitamos del método de Monte Carlo. Por ello será mucho más necesario en escalas superiores como eran las que queremos estudiar, en ese límite asintótico.

### 3.2. Tiempo de fallo asintótico en sistemas macroscópicos

Para estudiar el papel que desempeñan la coordinación  $c$  y, sobre todo, el coeficiente de heterogeneidad  $\rho$  en el tiempo de fallo de sistemas grandes, hemos realizado un gran número de simulaciones de Monte Carlo para coordinaciones  $c = 2, 3, 4, 5$ . Para cada uno de estos valores de  $c$  se han realizado simulaciones con  $\rho = 2, 3, 5, 10$ , es decir, desde valores de heterogeneidad alta ( $\rho$  pequeño) a valores de heterogeneidad baja ( $\rho$  grande). Los resultados de estas simulaciones se muestran en las gráficas siguientes, con una gráfica para cada  $c$  y, en cada una de ellas una curva para cada valor de  $\rho$ . En eje horizontal muestra el número de niveles  $p$  del árbol fractal y el eje vertical el valor del tiempo de fallo. El número de elementos de cada sistema se calcula fácilmente como  $N = c^p$ . El tamaño más grande que se ha podido simular para cada valor de  $c$  es de  $2^{15} = 32768$  elementos para  $c = 2$ ,  $3^{12} = 531,441$  para  $c = 3$ ,  $4^7 = 16,384$  elementos para  $c = 4$  y  $5^8 = 390,625$  elementos para  $c = 5$ .





Podemos ver esos límites asintóticos en esos 16 casos. No obstante se puede estudiar más en detalle cada una de ellas, ya que lo que se quiere obtener es el valor del tiempo asintótico al que se acerca en cada uno de esos casos cuando el sistema tiende a infinito.

#### 4. Discusión de resultados

Para poder observar con más claridad el comportamiento general del tiempo de fallo en estas figuras, con un decrecimiento paulatino de  $T_f$  conforme el tamaño del sistema aumenta. Además, para un valor fijo de la coordinación  $c$ , el tiempo de fallo de un sistema heterogéneo ( $\rho$  pequeño) es mayor que el de un sistema homogéneo ( $\rho$  grande), para un mismo tamaño del sistema. para sistemas infinitos lo que se hizo fue, para cada uno de los casos, hacer uso de la función *fit* de Gnuplot, con la cual se puede dar una serie de valores y especificarle al programa la función a la que queremos que se ajuste, la cual en nuestro caso es de la forma [7], [8]

$$T = T_{\infty} + Ae^{kp} \quad (21)$$

Los resultados del ajuste se muestran en las siguientes figuras para los sistemas de coordinación  $c = 3$  y  $c = 5$ , por ser la coordinación de los sistemas más grandes que se han podido simular.

En cada uno de los 8 casos (dos coordinaciones y cuatro valores de  $\rho$  para cada coordinación) se muestran tres gráficos: el primero es el mismo que los mostrados en la figura anterior (el tiempo de fallo frente al número de niveles), pero con el ajuste superpuesto; el segundo gráfico muestra el valor del tiempo de fallo asintótico ( $T_{inf}$ ) en función del número de puntos usados para hacer el ajuste; y el tercer gráfico muestra los resultados del Monte Carlo y el ajuste al valor estable de  $T_{inf}$ , con el eje vertical  $T_f - T_{inf}$  en escala logarítmica. Podríamos ver que con nuestros datos, haciendo el fit a todos los tiempos de los diferentes tamaños, inicialmente se obtendría un valor para el parámetro  $T_\infty$  que es superior a algunos de los tiempos calculados con el método Monte Carlo. Esto no es posible, ya que estamos buscando un caso asintótico de una exponencial negativa, de tal forma que los valores, a medida que aumentamos  $N$  (o  $p$  haciendo referencia no al número de elementos sino al número de niveles, aunque conceptualmente sea análogo a  $N$  por aumentar el tamaño del haz de fibras) tenderán a decrecer, aunque cada vez de forma más amortiguada. Es decir, por medio de este fit tendremos un ajuste que nos dará ese tiempo asintótico ajustándose a los últimos valores, por ello, podremos ver ese  $T_\infty$  será tal que

$$T_\infty < T_i \quad (22)$$

donde el subíndice  $i$  denota el tiempo de fallo relativo a alguno de esos casos de  $N$  elevado. El problema en hacer el fit a todos los datos es que los sistemas más pequeños no tienen porqué estar dentro de la tendencia asintótica, sino solo los sistemas a partir de un tamaño suficientemente grande. los correspondientes a sistemas más grandes.

Eliminando del ajuste los sistemas más pequeños, y haciendo esto de forma paulatina, podremos ver si el valor del parámetro de ajuste  $T_{inf}$  converge a un valor estable, valor que será nuestra mejor estimación del tiempo de fallo asintótico

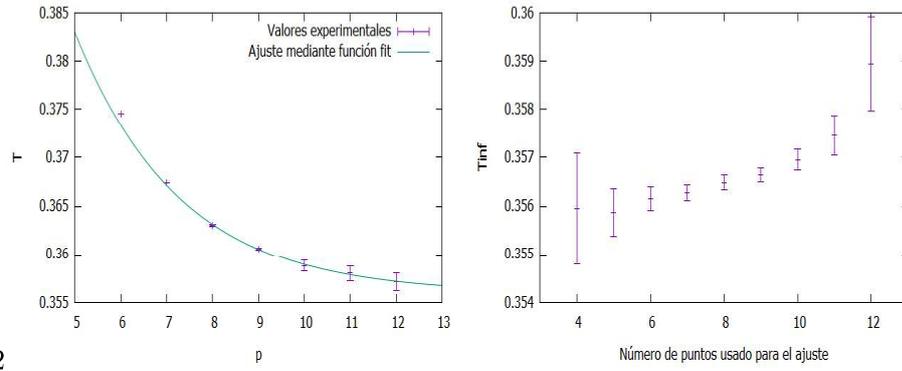
$$N \rightarrow \infty \quad (23)$$

tal y como estábamos buscando. Esto es lo que se muestra, para los casos  $c = 3$  y  $c = 5$ , en el segundo gráfico de cada valor de  $\rho$ . Así, para los casos explicados previamente podemos ver los ajustes a los últimos valores junto con la representación del ajuste a la ecuación

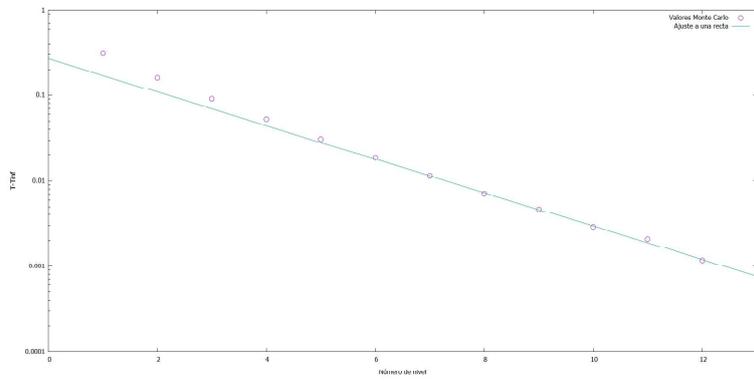
$$\ln\left(\frac{T - T_\infty}{A}\right) = kp \quad (24)$$

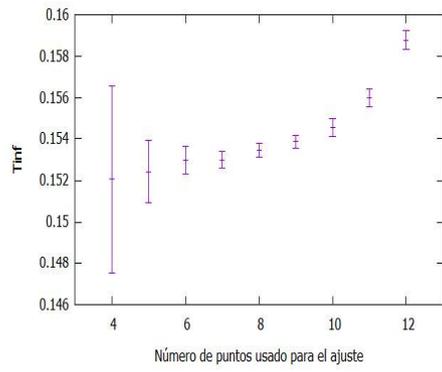
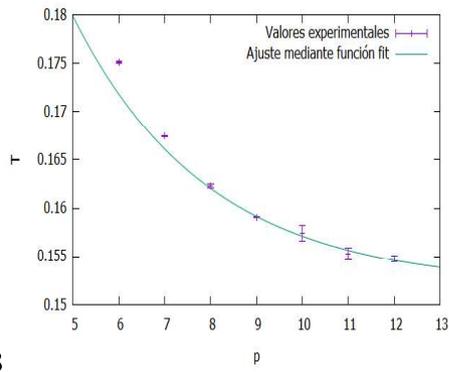
$$\ln(T - T_{\infty}) = \ln A + kp \tag{25}$$

por lo cual estaremos representando una función lineal en términos de  $n$ .

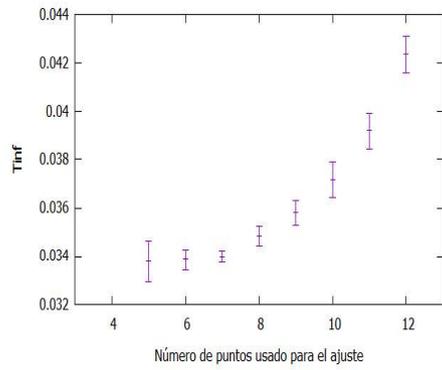
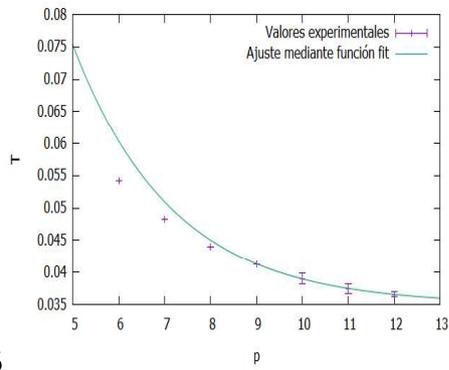
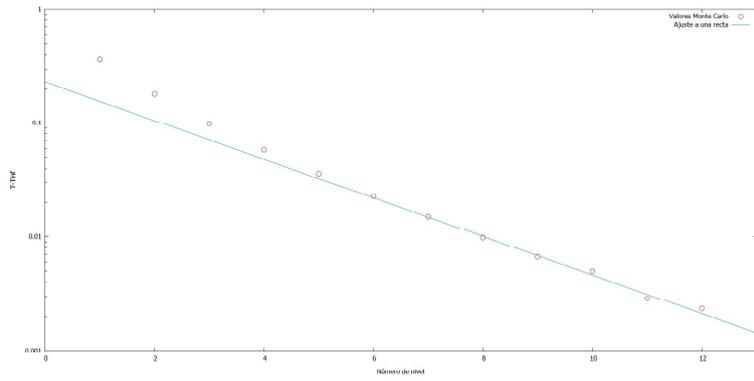


$$c = 3, \rho = 2$$

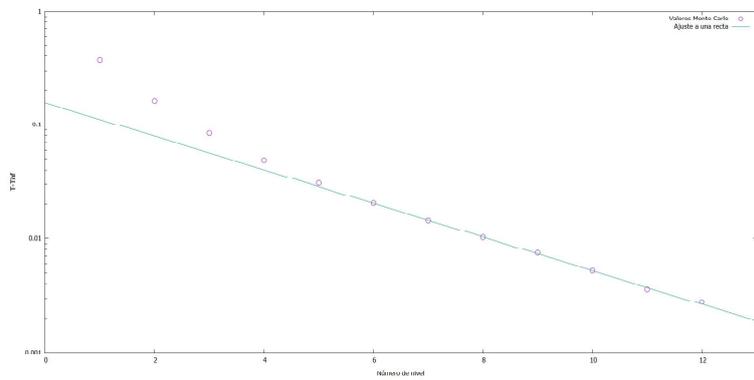


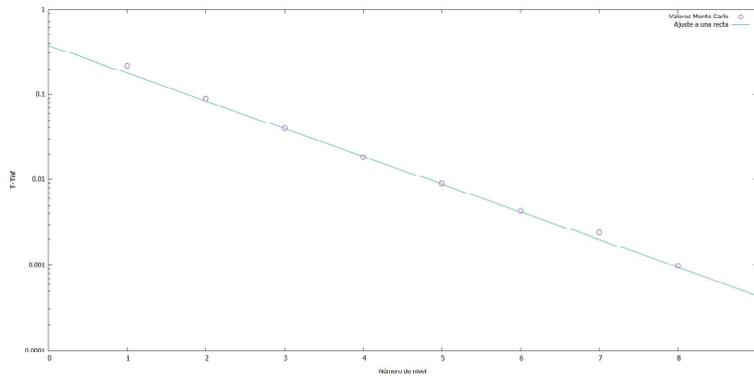
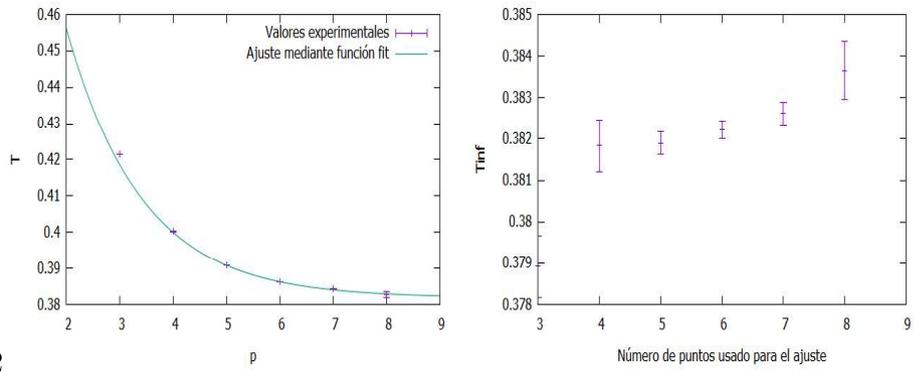
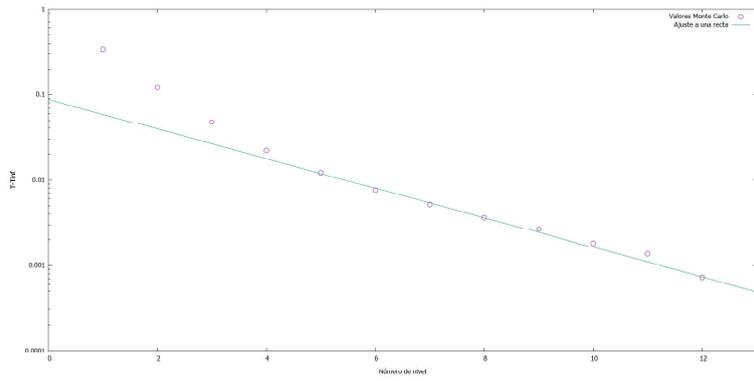
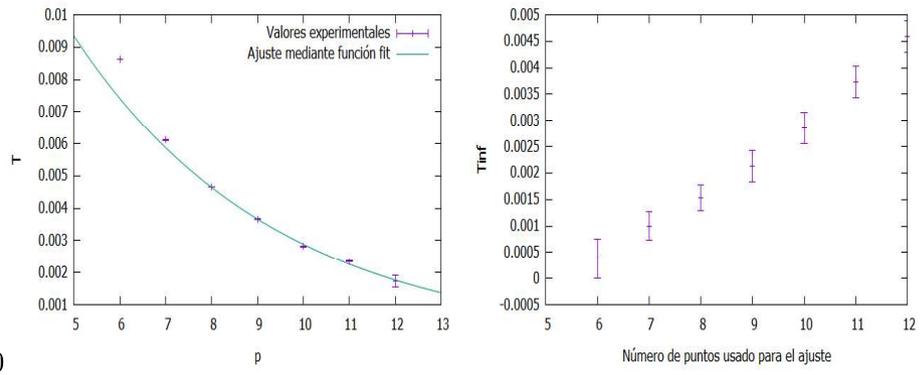


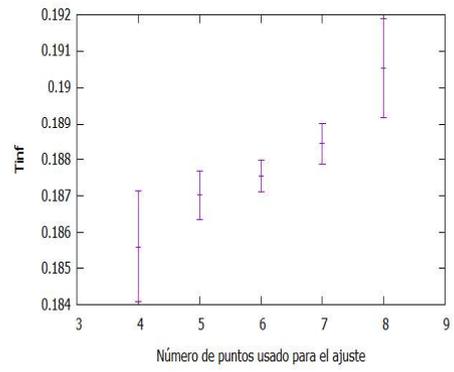
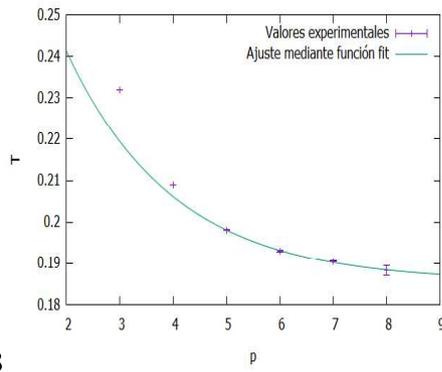
$c = 3, \rho = 3$



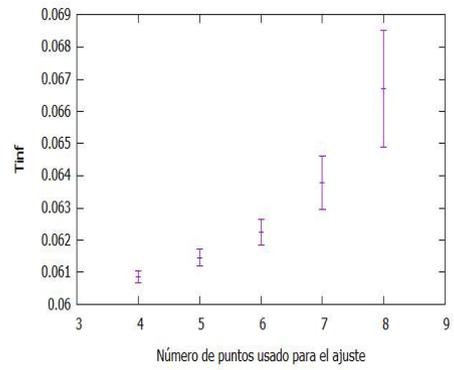
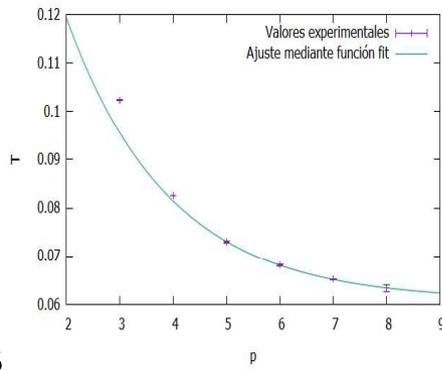
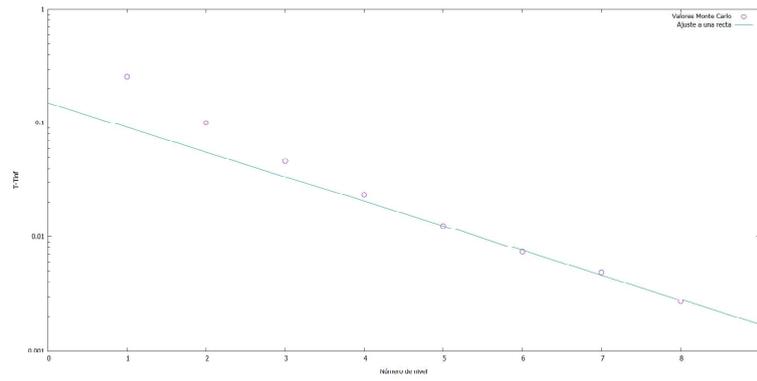
$c = 3, \rho = 5$



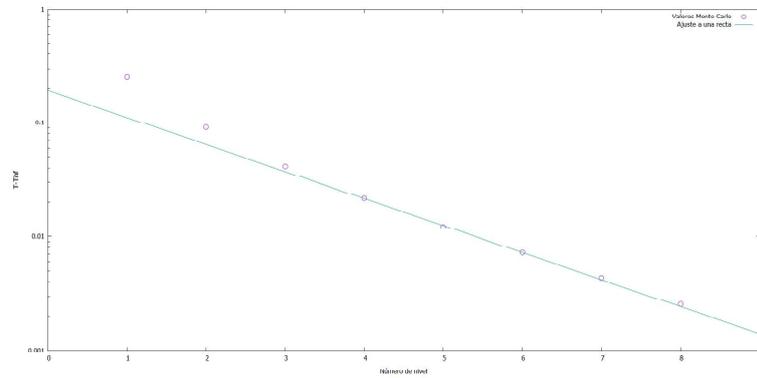


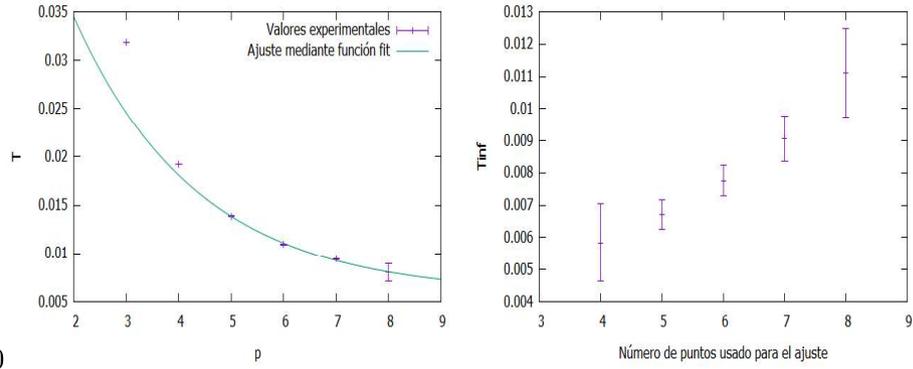


$c = 5, \rho = 3$

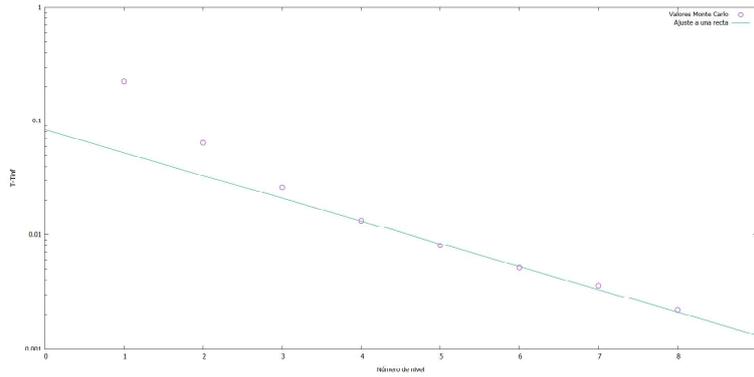


$c = 5, \rho = 5$





$c = 5, \rho = 10$



La tabla siguientes resume los valores del tiempo de fallo para sistemas infinitos,  $T_{inf}$ , para sistemas jerárquicos con coordinación  $c = 3$  y  $c = 5$ .

$c = 3$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 5$	$\rho = 10$
$T_{\infty}$	0,355944	0,152422	0,033806	0,001

$c = 5$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 5$	$\rho = 10$
$T_{\infty}$	0,381833	0,18561	0,060857	0,005835

Esta tabla, junto con los gráficos mostrados en las figuras anteriores, nos permiten concluir un resultado muy importante, ya que estábamos buscando ver que un sistema infinito con un valor de  $\rho$  pequeño, como son los tres casos  $\rho = 2, 3, 5$ , los cuales tienen cada uno un tiempo asintótico no nulo. Sin embargo, a medida que aumenta ese valor del parámetro  $\rho$ , como se da en el último de los casos  $\rho = 10$ , el tiempo asintótico sí que parece tender a cero, ya que  $T_{inf}$  no muestra estabilización al eliminar del ajuste los sistemas más pequeños, y su valor, al tener en cuenta las barras de error, es compatible con un tiempo de fallo nulo para sistemas infinitos.. Esto se puede ver en las gráficas de las figuras anteriores, ya que tenemos esos casos de  $\rho$  pequeños en los cuales hacemos el fit y este sí acaba convergiendo a un valor de  $T_{\infty}$  no nulo, mientras que en el caso de  $\rho = 10$  solo sigue decreciendo hasta llegar al caso

$$T_{\infty} \rightarrow 0 \tag{26}$$

## 5. Conclusiones

- El programa de Monte Carlo para simular la rotura por fatiga de un haz de fibras dependiente del tiempo que se ha escrito es capaz de reproducir con gran precisión el tiempo de fallo de sistemas pequeños, para los cuales se conoce la solución exacta como se ha demostrado en el Apartado 3.1. Es decir, a medida que aumentamos nuestro número de búsquedas en el espacio muestral, se reproducirán las probabilidades asociadas de manera indirecta, ya que se manifestarán en función de la proporcionalidad, cada una de esas posibles rupturas, una de ellas aparecerá un número de veces con respecto al total del tamaño muestral que será proporcional a dicha probabilidad de ese camino de ruptura concreto.
- El tiempo de fallo depende del tamaño del sistema, de manera que dicho tiempo de fallo disminuye al aumentar el tamaño del sistema. En este caso se ha observado en las representaciones del apartado 3.2 que en esa representación del tiempo de fallo  $T$  frente al número de niveles  $p$ .
- El coeficiente de heterogeneidad,  $\rho$ , desempeña un papel fundamental en el comportamiento asintótico de estos modelos.  $T_{inf}$  frente al número de puntos necesarios para el ajuste (Apartado 3.2). De tal forma que en los casos del coeficiente de heterogeneidad, donde le damos un valor pequeño  $\rho = 2, 3, 5$ , se observan  $T_{inf}$  no nulos, mientras que para el caso de  $\rho = 10$ , se ve, al menos para  $c=3$ , que

$$T_{inf} \rightarrow 0 \tag{27}$$

## 6. Bibliografía

La bibliografía en la que se basa este trabajo fin de grado consiste en los artículos siguientes

[1] Chacrabarty, B.K., Benguigui L.G (1997). Statistical physics of fracture and breakdown in disordered systems. Clarendon Press, 161 págs.

- [2] Herrmann H.J., Roux, S (1990). Statistical modelos for the fracture of disordered systems. North Holland, 368 págs.
- [3] H.E. Daniels, Proc R. L. Soc. London, Ser A 183,404I (1945)
- [4] Hansen, A. and Hemmer, P.C. and Pradhan, S. (2015). The Fiber Bundle Model: Modeling Failure in Materials. Weinheim, Alemania: Wiley.
- [5] Coleman BD (1957). Time dependent of mechanical breakdown in bundles of fibers, I. Constant total load. J. Appl. Phys. 28: 1058.
- [6] William I.Newman, Andrei M.Gabrielov, Thomas A .Durand, Leigh Phoenix, Donald L.Turcotte (1994). An exact renormalization model for earthquakes and material failure statics and dynamics. Physica D 77: 200-216.
- [7] J.B. Gómez, M. Vázquez-Prada, Y. Moreno, and A.F. Pacheco, Phys. Rev. E 59, R1287 1999!
- [8] Javier B. Gómez and Amalio F. Pacheco, Phys. Rev. E 73, 047104 2006