

TRABAJO FIN DE GRADO

ESTUDIO DEL EFECTO CASIMIR

GRADO EN FÍSICA

Autor:

Andrés Miguel Cuartero

Director:

Manuel Asorey Carballeira



Universidad Zaragoza

Facultad de Ciencias
2019/2020

Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en describir el marco general para el estudio del efecto Casimir, analizando para ello las propiedades del vacío cuántico de teorías cuánticas de campos. En particular, se analizará el comportamiento de la energía del vacío y la fuerza que de ella se deriva en estas teorías cuando se introducen en el espacio dos placas perfectamente paralelas (energía y fuerza de Casimir). Este estudio lo realizamos primero para el campo electromagnético con condiciones de contorno de Dirichlet en las placas y, posteriormente, para el caso de campos escalares. Los cálculos se realizan en dos regímenes distintos: uno en teorías sin masa y otro en teorías con masa, estudiando la dependencia de la fuerza para distintas condiciones de contorno. Finalmente, se comparan los resultados con los obtenidos por otros autores en la literatura.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Introducción histórica y fundamentos	1
1.2	Convenios de notación	2
2	Cuantización canónica del campo escalar real	2
3	Cálculo de la fuerza de Casimir: condiciones de contorno de Dirichlet	4
3.1	Teoría sin masa: campo electromagnético	4
3.2	Teoría con masa: campo escalar	8
3.2.1	Método global	8
3.2.2	Método local	12
4	Cálculo de la fuerza de Casimir en teorías con masa: otras condiciones de contorno	15
4.1	Condiciones de contorno periódicas	16
4.2	Condiciones de contorno antiperiódicas	18
4.3	Condiciones de contorno de Zarembo	20
5	Representación gráfica de los resultados analíticos	21
6	Conclusiones	22
A	Cuantización canónica del campo electromagnético	1
B	Campo electromagnético: derivación de la densidad hamiltoniana	3
C	Cuantización del campo electromagnético: justificación de la suma de modos	4
D	Cálculo de $\langle 0 T_{zz} 0\rangle$ para distintas condiciones de contorno	5
D.1	Condiciones de contorno periódicas	5
D.2	Condiciones de contorno antiperiódicas	7
D.3	Condiciones de contorno de Zarembo	8

1. Introducción

1.1. Introducción histórica y fundamentos

El efecto Casimir es un fenómeno que surge en el marco de la Teoría Cuántica de Campos, basado en la existencia de fluctuaciones del estado de mínima energía o vacío cuántico que dan lugar a la interacción entre dos cuerpos, independientemente de que estos tengan carga eléctrica o no, y que se manifiesta para cualquier campo cuántico (campo escalar, campo electromagnético, etc.). En su origen, comenzó siendo estudiado por el físico holandés H. B. G. Casimir, del que toma su nombre. A este fenómeno se puede acceder desde perspectivas bastante diferentes entre sí.

Por un lado, se empezó relacionando con la interacción de dispersión de Van der Waals en el régimen retardado (Casimir y Polder, 1948, ([1])). Tomaron como antecedente los desarrollos teóricos realizados por F. London para la interacción de Van der Waals entre dos átomos neutros polarizables, en los que se obtenía una dependencia de la interacción, $V(r)$, con la distancia entre los átomos, r , de la forma: $V(r) \sim r^{-6}$ ([2]). Sin embargo, experimentos realizados posteriormente por Verwey y Overbeek en los años 40 ponían de manifiesto que, para distancias grandes, esta interacción parecía decrecer más rápidamente que con r^{-6} ([3]). Así, Casimir y Polder, en el marco teórico de la electrodinámica cuántica, pasaron a tener en cuenta los efectos de retardo de la interacción de Van der Waals, obteniendo en este caso una dependencia de la forma: $V(r) \sim r^{-7}$, que sí cuadraba con los resultados experimentales previos y era la causante de las llamadas *fuerzas de Casimir-Polder*.

Por otro lado, más adelante, Casimir recalculó este efecto, pero esta vez desde una perspectiva diferente: en este caso, calculando el cambio en la energía de punto cero del campo electromagnético. En particular, lo aplicó a la geometría de dos placas conductoras perfectamente paralelas entre sí, separadas una cierta distancia ([4]). Obtuvo como resultado una interacción atractiva entre las placas que solo tenía un efecto apreciable a escalas microscópicas e inferiores.

Así, desde un enfoque más experimental, como consecuencia de esto último y de diversas limitaciones experimentales, como la dificultad de mantener las placas perfectamente paralelas entre sí, la medición experimental del efecto Casimir no resulta fácil. Con todo, desde la segunda mitad del siglo XX se han propuesto diversos experimentos, realizados por autores como Sparnaay (1958), Lamoreaux (1997) o Mohideen y Roy (1998), entre otros ([5],[6],[7]), con el objetivo de demostrar experimentalmente este fenómeno y verificar el acuerdo entre los experimentos y los resultados obtenidos analíticamente.

Respecto al procedimiento a seguir para calcular la energía y la fuerza de Casimir, existen distintos métodos. Aquí se van a presentar dos: por un lado, un método global, que pasa por calcular la energía de punto cero del campo considerado a partir del hamiltoniano obtenido al realizar la cuantización canónica para las condiciones de contorno consideradas, y, por otro lado, un método local, más técnico y basado en el uso de la función de Green.

Aunque en este trabajo en concreto nos centramos en el estudio del efecto Casimir para una geometría de dos placas paralelas, pueden considerarse otro tipo de geometrías (esférica, cilíndrica...), obteniendo en cada caso una interacción de naturaleza distinta. También, se pue-

den considerar distintas condiciones de contorno, ya que el efecto Casimir depende fuertemente de estas, como se va a ver.

1.2. Convenios de notación

Conviene aclarar alguna cuestión de notación empleada en los apartados que prosiguen. En primer lugar, los desarrollos y cálculos presentados en el trabajo se realizan considerando el sistema natural de unidades, en el que $\hbar = c = 1$. También, a lo largo del trabajo va a aparecer en reiteradas ocasiones la notación cuadvectorial: $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$, donde si este cuadvector representa la posición, $x^0 \equiv t$. Cuando se utilizan índices griegos, estamos trabajando con las cuatro componentes de un cuadvector ($\mu = \{0, 1, 2, 3\}$), mientras que si aparecen índices latinos, nos referimos exclusivamente a las componentes espaciales del cuadvector ($i = \{1, 2, 3\}$).

Respecto a la geometría considerada a lo largo del trabajo para calcular las magnitudes relevantes del efecto Casimir, se van a tener dos placas perfectamente paralelas entre sí, de lado L , paralelas al plano XY y situadas respectivamente en $z = 0$ y $z = a$, con $L \gg a$. Para todos los distintos métodos y condiciones de contorno presentadas a lo largo del trabajo, se considerará esta configuración geométrica de las placas y los ejes.

2. Cuantización canónica del campo escalar real

Clásicamente, un sistema viene caracterizado por las coordenadas q^i y los momentos p^i . Para pasar a una descripción cuántica de dicho sistema, estas coordenadas y momentos deben sustituirse por operadores. Si en particular se trabaja en la llamada imagen de Heisenberg, se tienen operadores dependientes del tiempo, $q^i(t)$ y $p^i(t)$, a los que se les debe imponer las siguientes reglas de conmutación para tiempos iguales: $[q^i(t), p^j(t)] = i\delta_{ij}$, $[q^i(t), q^j(t)] = [p^i(t), p^j(t)] = 0$. En teoría de campos, para realizar la cuantización basta con reemplazar $q^i(t)$ por $\phi(t, \mathbf{x})$ y $p^i(t)$ por $\Pi(t, \mathbf{x})$, donde $\phi(t, \mathbf{x})$ representa un campo escalar real de masa m y $\Pi(t, \mathbf{x})$ su momento canónico conjugado ([8]). La cuantización canónica de un campo escalar pasa por imponer las siguientes reglas de conmutación a estos operadores:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (2.1)$$

La densidad lagrangiana para el campo ϕ se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.2)$$

ya que para describir una dinámica no trivial del campo se necesitan términos de la forma $\partial_\mu\phi$ y estos deben estar contraídos, pues la densidad lagrangiana de un campo escalar debe ser un escalar. El objeto covariante $\partial_\mu\phi$ y el objeto contravariante $\partial^\mu\phi$ están relacionados entre sí a través de la operación de subida y bajada de índices: $\partial_\mu\phi = g_{\mu\nu}\partial^\nu\phi$, donde $g_{\mu\nu}$ representa el tensor métrico, que definiremos de acuerdo al siguiente convenio:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.3)$$

Con la densidad lagrangiana así definida, es inmediato comprobar que si se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo ϕ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \quad (2.4)$$

se obtiene la siguiente ecuación lineal, que se conoce como ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.5)$$

donde $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$ representa el operador D'Alembertiano. La solución más general de la ecuación anterior viene dada por:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi^+(t, \mathbf{x}) + \phi^-(t, \mathbf{x})$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} u^*(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \quad (2.6)$$

y, por tanto, el momento canónico conjugado, $\Pi(t, \mathbf{x}) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\phi) = \partial_0\phi(t, \mathbf{x})$, será:

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (-i\omega_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} u^*(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \quad (2.7)$$

El primer sumando de (2.6) corresponde a los términos de frecuencia positiva (ϕ^+), mientras que el segundo sumando representa los términos de frecuencia negativa (ϕ^-). La frecuencia viene dada por:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (2.8)$$

$a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k}}$ son los operadores creación y destrucción, respectivamente, que verifican las siguientes reglas de conmutación como consecuencia de haber exigido (2.1):

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (2.9)$$

Además, estos operadores verifican:

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = \langle 0| a_{\mathbf{k}}^\dagger = 0 \quad (2.10)$$

Respecto a la función $u(\mathbf{k}, \mathbf{x})$, en (2.5) se puede sustituir la expresión del campo $\phi(t, \mathbf{x})$ de (2.6):

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0 \Rightarrow (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)(\phi^+ + \phi^-) = 0$$

y como ϕ^+ y ϕ^- se pueden considerar independientes, esta ecuación puede dividirse en dos, una para ϕ^+ y otra para ϕ^- . Consideramos la correspondiente a ϕ^+ (el cálculo es análogo para la referida a ϕ^-):

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi^+ &= (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (m^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \nabla^2 u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

Y de aquí se deduce que $u(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ ha de satisfacer la siguiente ecuación:

$$(\nabla^2 + \mathbf{k}^2)u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.11)$$

La solución de esta ecuación en el caso sin condiciones de contorno, esto es, cuando se considera el espacio tridimensional libre, presenta la siguiente forma:

$$u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

A continuación, puede calcularse la densidad hamiltoniana \mathcal{H} a partir de la expresión (2.2):

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \quad (2.13)$$

El hamiltoniano H viene dado por la integral a todo el espacio de la densidad hamiltoniana \mathcal{H} . Introduciendo las expresiones de (2.6) y (2.7) para $\phi(t, \mathbf{x})$ y $\Pi(t, \mathbf{x})$, respectivamente, se tiene:

$$H = \int \mathcal{H}d^3x = \int d^3x \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} & \left[-\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}(a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right. \\ & + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ & - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'(a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ & - a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}) + m^2(a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ & \left. + a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}) \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la delta de Dirac cumple:

$$\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \quad (2.15)$$

la expresión de H se reduce a:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}V \right) \quad (2.16)$$

donde en el último paso se ha aplicado la regla de conmutación (2.9) y se ha tenido en cuenta que $(2\pi)^3\delta^3(0) \rightarrow V$, donde V es el volumen del sistema.

3. Cálculo de la fuerza de Casimir: condiciones de contorno de Dirichlet

3.1. Teoría sin masa: campo electromagnético

En este caso, se va a seguir un método global para el cálculo de la energía y la fuerza de Casimir. Consideraremos condiciones de contorno de Dirichlet para el campo electromagnético, que en términos de los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} se pueden expresar de la siguiente manera:

1. En las placas, \mathbf{E} es perpendicular a ellas: $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_S = 0$
2. En las placas, \mathbf{B} se encuentra contenido en el plano de estas: $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_S = 0$

donde S denota la superficie de las placas y $\hat{\mathbf{n}}$ representa un vector unitario perpendicular a estas. En primer lugar, es necesario cuantizar el campo electromagnético en términos del potencial electromagnético $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, que se relaciona con los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} de la siguiente manera :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.1)$$

El proceso a seguir es similar al presentado para el campo escalar real en la sección 2, aunque en este caso se complica más debido a que ahora entran en juego los dos estados de polarización distintos que presentan los fotones, que denotaremos como $\alpha = 1, 2$ (para ver los detalles de la cuantización del campo electromagnético en el espacio tridimensional libre, se puede consultar el anexo A). Conviene reexpresar las condiciones de contorno de Dirichlet relacionándolas de forma directa con \mathbf{A} . Bajo estas condiciones de contorno, \mathbf{A} se puede desarrollar como ([9]):

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ es una función que verifica la siguiente ecuación: $-\nabla^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$.

Introduciendo (3.2) en la segunda igualdad de (3.1) e imponiendo $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}|_S = 0$, se tiene:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \times \hat{\mathbf{n}}|_S = 0 \quad (3.3)$$

lo que significa que, en las placas, $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ no tiene componentes tangenciales a estas. Además, imponiendo (3.3) se obtiene:

$$\nabla \times \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})|_S = \frac{\partial \mathcal{A}_{\mathbf{k},z}}{\partial y} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\mathbf{k},z}}{\partial x} \hat{\mathbf{j}} \quad (3.4)$$

por lo que, utilizando la primera igualdad de (3.1), se llega a la condición $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_S = 0$. Así, (3.3) representa una reformulación de las condiciones de contorno de Dirichlet en términos de $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}$.

La cuantización del campo electromagnético en el caso de condiciones de contorno de Dirichlet puede realizarse de forma análoga al caso del espacio tridimensional libre, teniendo en cuenta que ahora los valores de la componente k_z se encuentran cuantizados:

$$k_z = \frac{\pi}{a} n \quad (3.5)$$

donde n es un entero positivo. Las componentes de \mathbf{k} paralelas a las placas, k_x y k_y , toman un continuo de valores y podemos denotar $k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2$. De este modo, los valores permitidos para k vendrán dados por: $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_z^2} = \left(k_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}\right)^{1/2}$.

El hamiltoniano para estas condiciones de contorno viene dado por:

$$H = \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\mathbf{k},n} \left(a_{\mathbf{k},\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k},\alpha} + \frac{1}{2} L^2 \right) \quad (3.6)$$

La energía de punto cero del campo electromagnético, E_0 , se puede escribir como el valor esperado del hamiltoniano anterior en el estado vacío, $\langle 0|H|0\rangle$:

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\mathbf{k},n} \left(\langle 0|a_{\mathbf{k},\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k},\alpha}|0\rangle + \frac{1}{2} L^2 \langle 0|0\rangle \right) \quad (3.7)$$

En este caso, la regla de cuantización canónica consiste en reemplazar los campos y sus momentos por operadores de un espacio de Hilbert de estados cuánticos de forma que se satisfaga la siguiente regla de conmutación:

$$[A^i(t, \mathbf{x}), \Pi^j(t', \mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.8)$$

siendo $\mathbf{\Pi}(t', \mathbf{x}')$ el momento canónico conjugado. Es fácil comprobar que esto puede realizarse substituyendo los operadores $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k}}$ que aparecen en las ecuaciones (2.6) y (2.7) por operadores $a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k},\alpha}$ que tienen en cuenta también el estado de polarización, α , y satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha,\alpha'} \quad [a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k}',\alpha'}] = [a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger, a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = 0 \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta que $\langle 0 | a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha} | 0 \rangle = 0$, ya que $a_{\mathbf{k},\alpha} | 0 \rangle = 0$; y que $\langle 0 | 0 \rangle = 1$, dado que se trata de un estado normalizado, la ecuación (3.7) queda:

$$E_0 = \frac{1}{2} \int \frac{L^2}{(2\pi)^2} d^2 k_{\parallel} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\mathbf{k},n} \quad (3.10)$$

La energía de Casimir, E_{cas} , se puede obtener como la diferencia de energía del vacío entre la situación en la que se tienen las placas perfectamente paralelas entre sí y la situación en la que no hay placas. En ambos casos, la energía del vacío es una cantidad divergente, de manera que hay que adoptar un proceso de regularización para dar un significado físico a dicha diferencia:

$$E_{cas} = \lim_{s \rightarrow 0} [E_0^{(I)} - E_0^{(II)}] \quad (3.11)$$

donde el primer término (I) es la situación en la que se tienen las dos placas paralelas, mientras que el segundo término (II) se refiere al caso en el que no hay placas. El origen de energías correspondería a este último caso. s es lo que se conoce como parámetro de regularización, que al final debe eliminarse para obtener una cantidad que no dependa de él, y por ello se toma el límite $s \rightarrow 0$. El proceso de regularización se puede realizar por medio de distintos métodos. En este caso, se procederá fijando una frecuencia de corte elevada en la expresión de la energía de punto cero ([4], [10]), lo que se justifica con el hecho de que las placas metálicas se hacen transparentes en el límite de altas frecuencias, por lo que las contribuciones correspondientes a altas frecuencias se cancelan en la ecuación anterior.

Con esto, se procede ahora al cálculo explícito de la energía de Casimir. Tal y como se demuestra en el anexo C, a cada k_x , k_y , k_z les corresponden dos ondas estacionarias, salvo que se esté en el caso con $n = 0$, que entonces solo hay una. La energía de Casimir sin regularizar, $E_{cas}^{nr}(a)$, se puede escribir como:

$$E_{cas}^{nr}(a) = \frac{1}{2} \int \frac{L^2}{(2\pi)^2} d^2 k_{\parallel} \left[\sqrt{k_x^2 + k_y^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \right] - \frac{1}{2} \int \frac{L^2}{(2\pi)^2} d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi} \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_z^2} dk_z \quad (3.12)$$

donde $\omega_{\mathbf{k},n} = (k_{\parallel}^2 + n^2 \pi^2 / a^2)^{1/2}$. Con el objetivo de simplificar el cálculo, se puede introducir el cambio de variable dado por: $\lambda^2 = k_{\parallel}^2 + (n\pi/a)^2$. Además de esto, ahora entra en juego el proceso de regularización, que en nuestro caso introduciremos a través de una función de corte que se anule para frecuencias elevadas y valga uno para frecuencias pequeñas. H. B. G. Casimir realizó el cálculo utilizando una función genérica que cumpliera estas condiciones ([4]), de modo que cualquier función que verifique estos requisitos resulta una función de corte adecuada sin importar su forma matemática exacta. En nuestro caso, escogemos en particular un corte

exponencial de la forma $e^{-\epsilon k_{||}}$ y, así, la energía tras el proceso de regularización, E_{cas}^r , viene dada por:

$$E_{cas}^r(a, \epsilon) = \frac{L^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\epsilon k_{||}} k_{||}^2 dk_{||} + \sum_{n=1}^\infty \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty e^{-\epsilon \lambda} \lambda^2 d\lambda - \int_0^\infty dn \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty e^{-\epsilon \lambda} \lambda^2 d\lambda \right] \quad (3.13)$$

El segundo sumando quedaría¹:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty e^{-\epsilon \lambda} \lambda^2 d\lambda &= \sum_{n=1}^\infty \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} (e^{-\epsilon \lambda}) d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty e^{-\epsilon \lambda} d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{e^{-\frac{\epsilon n\pi}{a}}}{\epsilon} \right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{e^{-\frac{\epsilon n\pi}{a}}}{\epsilon} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{e^{-\frac{\epsilon n\pi}{a}}}{\epsilon} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{e^{\epsilon\pi/a} - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

El tercer sumando se puede escribir como:

$$\int_0^\infty dn \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty e^{-\epsilon \lambda} \lambda^2 d\lambda = \int_0^\infty dn \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} (e^{-\epsilon \lambda}) d\lambda = \int_0^\infty dn \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty e^{-\epsilon \lambda} d\lambda \quad (3.15)$$

De esta forma, la expresión de la energía regularizada queda:

$$E_{cas}^r(a, \epsilon) = \frac{L^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon^3} + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{e^{\epsilon\pi/a} - 1} \right) \right] - \int_0^\infty dn \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \int_{\frac{n\pi}{a}}^\infty e^{-\epsilon \lambda} d\lambda \right] \quad (3.16)$$

$$E_{cas}^r(a, \epsilon) = \frac{L^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon^3} + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left[\frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} \left(\frac{\epsilon\pi}{a} \right)^{n-1} \right] - \frac{6a}{\pi\epsilon^4} \right] \quad (3.17)$$

Para obtener esta última expresión se ha tenido en cuenta que el segundo sumando de (3.16) puede expresarse en términos de los números de Bernoulli, B_n , de la siguiente manera: $\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^\infty B_n \frac{t^{n-1}}{n!}$. Desarrollando (3.17), se tiene:

$$E_{cas}^r(a, \epsilon) = \frac{L^2}{2\pi} \left[6(B_0 - 1) \frac{a}{\pi} \frac{1}{\epsilon^4} + (1 + 2B_1) \frac{1}{\epsilon^3} + \frac{B_4}{12} \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 + \sum_{n=5}^\infty \frac{B_n}{n!} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{n-1} (n-2)(n-3) \epsilon^{n-4} \right]$$

Sustituyendo los números de Bernoulli por sus respectivos valores: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_4 = -1/30$ y tomando el límite de esta expresión para $\epsilon \rightarrow 0$ con el objetivo de deshacer el proceso de regularización introducido al principio, queda el siguiente valor para la energía de Casimir²:

$$E_{cas}(a) = -\hbar c L^2 \frac{\pi^2}{720 a^3} \quad (3.18)$$

Se obtiene así una energía de Casimir cuya dependencia con la separación entre las dos placas planoparalelas es proporcional a a^{-3} . Otra cantidad de gran interés es la fuerza de Casimir que aparece sobre una de las placas, $F_{cas}(a)$. En particular, si queremos calcular la fuerza sobre la placa en $z = a$, basta con simplemente tomar la menos derivada de la energía respecto de a :

$$F_{cas}(a) = -\frac{\partial E_{cas}(a)}{\partial a} = -\hbar c L^2 \frac{\pi^2}{240 a^4} \quad (3.19)$$

¹En el último paso de (3.14) se tiene en cuenta que como $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$, se verifica $\sum_{n=1}^\infty e^{-\epsilon n\pi/a} = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon\pi/a}} - 1$.

²Si se quieren recuperar las constantes \hbar y c en la expresión final de la energía de Casimir, simplemente basta con multiplicar la expresión obtenida por $\hbar c$ para que las dimensiones sean las propias de la energía en el Sistema Internacional.

E, igualmente, la presión de Casimir, que se define como la fuerza de Casimir por unidad de área, viene dada por:

$$P_{cas} = \frac{F_{cas}(a)}{L^2} = -\hbar c \frac{\pi^2}{240a^4} \quad (3.20)$$

Se tiene que la fuerza de Casimir para el caso del campo electromagnético tiene una dependencia proporcional a a^{-4} . Además, esta fuerza tiene signo negativo, lo que indica que se trata de una fuerza atractiva. Los resultados obtenidos coinciden con los calculados por H. B. G. Casimir y otros autores ([4], [10]). Para hacerse una idea del orden de magnitud de la presión de Casimir, se puede calcular su valor para distintos valores de a :

a (m)	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
P_{cas} (N/m ²)	$1,3 \cdot 10^{-27}$	$1,3 \cdot 10^{-15}$	0,0013	$1,3 \cdot 10^9$

Tabla 1: Valores numéricos de la presión de Casimir para distintas separaciones entre las placas.

Los valores de la tabla ponen de manifiesto que debemos ir a escalas muy pequeñas (micrométrica e inferiores) para que la presión que experimentan las placas como consecuencia del efecto Casimir tenga una influencia palpable, pues para separaciones entre las placas por encima de la escala micrométrica, la fuerza de Casimir tiene un valor que se puede considerar prácticamente despreciable. Para $a = 1 \mu\text{m}$ se obtiene un valor que está ocho órdenes de magnitud por debajo del valor habitual para la presión atmosférica ($P_{atm} = 1,013 \cdot 10^{-5}$ Pa), mientras que a escala nanométrica ($a = 1 \text{ nm}$) se tiene un valor de presión que es doce órdenes de magnitud superior al que se tiene a escala micrométrica, lo que pone de manifiesto que a estas escalas, el efecto Casimir cobra una gran importancia.

3.2. Teoría con masa: campo escalar

Considérese ahora un campo escalar real no interactuante $\phi(t, \mathbf{x})$ de masa m en una cavidad de volumen L^2a , con $L \gg a$. Nuevamente, el cálculo se va a realizar para condiciones de contorno de Dirichlet, que en este caso se expresan a través de la anulación del campo ϕ en cada una de las placas:

$$\phi(t, x, y, z = 0) = \phi(t, x, y, z = a) = 0 \quad (3.21)$$

En este caso, se va a presentar el cálculo de la energía y la fuerza de Casimir a través de dos métodos: el método global y el método local ([10],[11]).

3.2.1. Método global

Si se realiza la cuantización del campo escalar real de manera similar a como se ha hecho en la sección 2 imponiendo condiciones de contorno de Dirichlet, se obtiene el siguiente hamiltoniano:

$$H = \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k},n} \left(a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} L^2 \right) \quad (3.22)$$

Por tanto, la energía de punto cero viene dada por:

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \int \frac{L^2}{(2\pi)^2} d^2k_{\parallel} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \quad (3.23)$$

Las frecuencias permitidas por las condiciones de contorno de Dirichlet presentan ahora un término adicional que tiene en cuenta la masa:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \left[k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]^{1/2} \quad (3.24)$$

donde n representa un entero mayor o igual que cero. Aplicando de nuevo el procedimiento que dicta (3.11) y considerando el valor esperado en el estado vacío de (2.16), así como la expresión (3.23), se tiene la siguiente ecuación para la energía de Casimir sin regularizar:

$$E_{cas}^{nr}(a, m) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int d^2 k_{\parallel} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right)^{1/2} \right] - \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int d^2 k_{\parallel} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi} \left(k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right)^{1/2} dk_z \right] \quad (3.25)$$

Teniendo en cuenta que $dk_z = \frac{\pi}{a} dn$ y realizando el cambio de variable dado por $y = \frac{a^2}{\pi^2} (k_{\parallel}^2 + m^2) + n^2$, se expresa:

$$E_{cas}^{nr}(a, m) = \frac{L^2 \pi^2}{8a^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mu^2+n^2}^{\infty} \sqrt{y} dy - \int_0^{\infty} dn \int_{\mu^2+n^2}^{\infty} \sqrt{y} dy \right] \quad (3.26)$$

donde $\mu = am/\pi$. Igual que en el caso sin masa, se debe pasar por el proceso de regularización para obtener una energía de valor finito que tenga sentido físico. Así, se introduce de nuevo un corte exponencial de la forma $e^{-\lambda\sqrt{y}}$:

$$E_{cas}^r(a, m) = \frac{L^2 \pi^2}{8a^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mu^2+n^2}^{\infty} \sqrt{y} e^{-\lambda\sqrt{y}} dy - \int_0^{\infty} dn \int_{\mu^2+n^2}^{\infty} \sqrt{y} e^{-\lambda\sqrt{y}} dy \right] \quad (3.27)$$

donde el parámetro de regularización verifica $\lambda = \frac{\pi}{ak_c}$, siendo k_c el valor del número de ondas impuesto por el corte. Si denotamos:

$$b(n, \mu, \lambda) = \int_{\mu^2+n^2}^{\infty} \sqrt{y} e^{-\lambda\sqrt{y}} dy \quad (3.28)$$

se tiene:

$$E_{cas}^r(a, m) = \frac{L^2 \pi^2}{8a^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} b(n, \mu, \lambda) - \int_0^{\infty} b(n, \mu, \lambda) dn \right] \quad (3.29)$$

A continuación, se puede aplicar la fórmula de la suma de Poisson, que toma la siguiente forma:

$$c(\alpha, \mu, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn e^{i\alpha n} b(n, \mu, \lambda) \quad (3.30)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b(n, \mu, \lambda) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(2\pi n, \mu, \lambda) \quad (3.31)$$

Tal y como se ha definido la función $b(n, \mu, \lambda)$, se tiene que esta es una función par para n , de modo que por ello las dos expresiones anteriores pueden reescribirse como:

$$c(\alpha, \mu, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dn \cos(\alpha n) b(n, \mu, \lambda) \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{2}b(0, \mu, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} b(n, \mu, \lambda) = \pi c(0, \mu, \lambda) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} c(2\pi n, \mu, \lambda) \quad (3.33)$$

De este modo, la energía de Casimir queda:

$$E_{cas}^r(a, m) = \frac{L^2 \pi^2}{8a^3} \left[\frac{1}{2}b(0, \mu, \lambda) + \frac{1}{2}b(0, \mu, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} b(n, \mu, \lambda) - \int_0^{\infty} b(n, \mu, \lambda) dn \right]$$

y si tenemos en cuenta las expresiones (3.32) y (3.33):

$$E_{cas}^r(a, m) = \frac{L^2 \pi^2}{8a^3} \left[\frac{1}{2}b(0, \mu, \lambda) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} c(2\pi n, \mu, \lambda) \right] \quad (3.34)$$

A continuación, se puede tomar el primer sumando de la anterior expresión y se tiene:

$$b(0, \mu, \lambda) = \int_{\mu^2}^{\infty} \sqrt{y} e^{-\lambda \sqrt{y}} dy = \frac{2e^{-\lambda \mu}}{\lambda} \left(\mu^2 + \frac{2\mu}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \right) \quad (3.35)$$

De este modo, $b(0, \mu, \lambda) \propto a^3$ y el término $\frac{L^2 \pi^2}{16a^3} b(0, \mu, \lambda)$ es independiente del valor de a . Como interesa conocer la dependencia de la energía de Casimir con la separación a , se puede redefinir el origen de energías y se tendría:

$$E_{cas}^r(a, m) = \frac{L^2 \pi^2}{8a^3} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} c(2\pi n, \mu, \lambda) \quad (3.36)$$

Ahora es preciso calcular $c(\alpha, \mu, \lambda)$. Teniendo en cuenta la expresión (3.32), se puede escribir:

$$c(\alpha, \mu, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dn \cos(\alpha n) \int_{\mu^2+n^2}^{\infty} dy \sqrt{y} e^{-\lambda \sqrt{y}} \quad (3.37)$$

y, realizando el cambio de variable $x = \sqrt{y}$, queda:

$$c(\alpha, \mu, \lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dn \cos(\alpha n) \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[\int_{\sqrt{\mu^2+n^2}}^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dn \cos(\alpha n) \frac{d^2}{d\lambda^2} \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(\mu^2+n^2)^{1/2}} \right) \quad (3.38)$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se puede reescribir:

$$c(\alpha, \mu, \lambda) = \frac{2}{\pi \alpha} \int_0^{\infty} dn \sin(\alpha n) \frac{n}{\sqrt{\mu^2+n^2}} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left(e^{-\lambda \sqrt{\mu^2+n^2}} \right) \quad (3.39)$$

Para resolver la integral que aparece en esta ecuación, se puede recurrir al uso de tablas de integrales ([12]) y se obtiene:

$$c(\alpha, \mu, \lambda) = \frac{2}{\pi \alpha} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[\frac{\alpha \mu}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} K_1(\mu \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}) \right] \quad (3.40)$$

donde K_1 denota una de las funciones de Bessel modificadas de segundo tipo. Para deshacer el proceso de regularización, se toma el límite de la expresión anterior para $\lambda \rightarrow 0$, obteniéndose:

$$c(2\pi n, \mu) = -\frac{2\mu^2}{\pi(2\pi n)^2} K_2(2\pi \mu n) \quad (3.41)$$

De este modo, retomando la expresión (3.36) la energía de Casimir se puede expresar de la siguiente forma:

$$E_{cas}(a, m) = -\frac{L^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2(2amn) \quad (3.42)$$

El sumatorio que aparece en la expresión anterior no se puede calcular de forma analítica. Sin embargo, sí es posible derivar una expresión exacta para la energía de Casimir en el límite de masas grandes y en el de masas pequeñas:

1. **Límite de masas pequeñas.** En este caso, se verifica $ma \ll 1$ y se puede tomar para la función modificada de Bessel el desarrollo en serie para el caso logarítmico, que tomaría la siguiente forma ([13]):

$$K_2(2man) = 2(2man)^{-2} - \frac{1}{2} + O(m^2) \quad (3.43)$$

Y, de este modo, se tiene:

$$E_{cas}(a, m) = -\frac{L^2}{16\pi^2 a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{L^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{a} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (3.44)$$

La función zeta de Riemann $\zeta(s)$, con $s \in \mathbb{C}$, se define de la siguiente manera:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (3.45)$$

de modo que expresando (3.44) en términos de esta función, queda:

$$E_{cas}(a, m) = -\frac{L^2}{16\pi^2 a^3} \zeta(4) + \frac{L^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{a} \frac{1}{2} \zeta(2) \quad (3.46)$$

Teniendo en cuenta que $\zeta(4) = \pi^4/90$ y $\zeta(2) = \pi^2/6$, el valor final que se obtiene para la energía de Casimir en el límite de masas pequeñas resulta ser:

$$E_{cas}(a, m) = -\frac{L^2 \pi^2}{1440 a^3} + \frac{L^2 m^2}{96 a} \quad (3.47)$$

Como se observa, tomando $m = 0$ en la anterior expresión se recupera el resultado que se esperaría para el caso en el que se tiene un campo no masivo ($E_{cas}(a) = -\frac{L^2 \pi^2}{1440 a^3}$), teniendo en cuenta que, en este caso, se ha considerado un campo escalar que presenta un solo estado de polarización. La expresión (3.18) es el doble que la que se obtiene en este caso, lo que se debe a que el campo electromagnético presenta dos estados de polarización.

2. **Límite de masas grandes.** Ahora se tiene $ma \gg 1$. En el límite de masas grandes la función modificada de Bessel de segundo tipo se puede aproximar de la siguiente manera:

$$K_2(2man) \approx \sqrt{\frac{\pi}{4man}} e^{-2man} \quad (3.48)$$

Por tanto:

$$E_c(a, m) = -\frac{L^2}{16\pi^2} \frac{m^2}{a} \left(\frac{\pi}{ma}\right)^{1/2} e^{-2ma} \quad (3.49)$$

Así, en el límite de masas grandes se tiene que la energía de Casimir tiene la siguiente dependencia con la masa: $E_c(a, m) \propto m^{3/2} e^{-2ma}$, siendo la dependencia dominante la exponencial. Esto quiere decir que, para masas grandes, conforme aumenta m , la energía de Casimir decae exponencialmente hasta anularse en el caso en el que m es infinitamente grande ($m \rightarrow \infty$).

3.2.2. Método local

A partir del lagrangiano del campo escalar real definido en (2.2), podemos construir ya el tensor energía-momento³, $T_{\mu\nu}$, que viene dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.50)$$

y, particularizándolo al caso del campo escalar real, queda:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \quad (3.51)$$

La componente T_{00} del tensor energía-momento representa la densidad de energía, mientras que las componentes diagonales referidas a las coordenadas espaciales (T_{11} , T_{22} , T_{33}) están relacionadas con la fuerza por unidad de área.

Se define la función de Green, $G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$, de dos puntos como ([9], [10], [14], [15]):

$$G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = i \langle 0 | T \{ \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') \} | 0 \rangle \quad (3.52)$$

donde $T \{ \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') \}$ denota el producto ordenado temporal, que verifica:

$$T \{ \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') \} = \begin{cases} \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') & \text{si } t > t' \\ \phi(t', \mathbf{x}') \phi(t, \mathbf{x}) & \text{si } t' > t \end{cases} \quad (3.53)$$

De modo que, de acuerdo con (2.5), la función de Green satisface:

$$(\square + m^2) G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.54)$$

Se puede expresar la función de Green $G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$ en términos de una función de Green reducida $g(z, z')$ a partir de una transformada de Fourier:

$$G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(z, z') \quad (3.55)$$

Introduciendo este valor de $G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$ en (3.54), se obtiene:

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(z, z') &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 - m^2 \right) g(z, z') &= -\delta(z - z') \end{aligned} \quad (3.56)$$

Se tiene así una ecuación diferencial de segundo orden para $g(z, z')$ que se resuelve imponiendo las siguientes condiciones de contorno:

$$g(0, z') = g(a, z') = 0 \quad (3.57)$$

³El teorema de Noether establece que simetrías continuas en la acción, $S = \int \mathcal{L} d^4x$, implican corrientes conservadas. Bajo traslaciones espaciotemporales, que son aquellas de la forma $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$; $\phi \rightarrow \phi'(t', \mathbf{x}') = \phi(t, \mathbf{x})$ (siendo $|\epsilon^\mu| \ll 1$ el parámetro de la transformación), se tienen cuatro corrientes conservadas que forman el tensor energía-momento, de modo que $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

que son, en realidad, las condiciones de contorno de Dirichlet en cada una de las placas. Así, la solución de (3.56) viene dada por:

$$g(z, z') = \begin{cases} A \sin(\lambda z) & \text{si } 0 < z < z' < a \\ B \sin(\lambda(z - a)) & \text{si } 0 > z > z' > a \end{cases} \quad (3.58)$$

donde $\lambda = \omega^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 - m^2$. De acuerdo con (3.56), $g(z, z')$ debe cumplir la condición de continuidad en $z = z'$, pero para su derivada ya no se tiene continuidad. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se obtiene:

$$A = -\frac{1}{\lambda} \frac{\sin(\lambda(z' - a))}{\sin(\lambda a)} \quad B = -\frac{1}{\lambda} \frac{\sin(\lambda z')}{\sin(\lambda a)} \quad (3.59)$$

De este modo, la función de Green reducida puede expresarse como:

$$g(z, z') = -\frac{1}{\lambda \sin(\lambda a)} \sin(\lambda z_{<}) \sin(\lambda(z_{>} - a)) \quad (3.60)$$

donde $z_{<}$ y $z_{>}$ denotan el menor y el mayor de z y z' , respectivamente.

Para obtener la energía y la fuerza de Casimir, es necesario calcular el valor esperado del tensor energía-momento en el vacío. Se pueden tomar los operadores campo en puntos separados, $(t, \mathbf{x}) \neq (t', \mathbf{x}')$, y considerar el límite en el que estos puntos coinciden:

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = -i \lim_{(t', \mathbf{x}') \rightarrow (t, \mathbf{x})} (\partial_{\mu} \partial'_{\nu}) G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') - g_{\mu\nu} \langle 0|\mathcal{L}|0\rangle \quad (3.61)$$

donde se ha usado (3.51) y $\langle 0|\mathcal{L}|0\rangle$ toma la siguiente forma:

$$\langle 0|\mathcal{L}|0\rangle = -\frac{i}{2} \lim_{(t', \mathbf{x}') \rightarrow (t, \mathbf{x})} (\partial_{\mu} \partial'^{\mu} - m^2) G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \quad (3.62)$$

Teniendo en cuenta que para obtener la fuerza por unidad de área sobre las placas debemos calcular, en particular, el valor medio en el vacío de la componente T_{zz} del tensor energía-momento, sustituyendo $G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}')$ por su expresión en términos de $g(z, z')$, se tiene:

$$\langle 0|T_{zz}|0\rangle = -i \lim_{z' \rightarrow z} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} g(z, z') + \langle 0|\mathcal{L}|0\rangle \quad (3.63)$$

$$\langle 0|\mathcal{L}|0\rangle = -\frac{i}{2} \lim_{z' \rightarrow z} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\lambda^2 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \right) g(z, z') \quad (3.64)$$

En (3.63), solo contribuyen al valor esperado los términos que contienen el producto de derivadas parciales respecto de z y z' , puesto que si se tienen en cuenta el resto de términos, que denotamos:

$$\langle 0|\mathcal{L}_{\parallel}|0\rangle = -\frac{i}{2} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \lambda \frac{\cos[\lambda(2z - a)]}{\sin(\lambda a)} \quad (3.65)$$

y se integran respecto a z desde $z = 0$ hasta $z = a$, se obtiene $\int_0^a \langle 0|\mathcal{L}_{\parallel}|0\rangle dz = -\frac{i}{2} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi}$, que es una integral divergente y además, como no depende de a , se puede obviar la contribución de estos términos a la fuerza. Así, finalmente, la fuerza por unidad de área que actúa sobre la placa en $z = a$ se puede expresar:

$$\langle 0|T_{zz}|0\rangle |_{z=z'=a} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} g(z, z') \right]_{z=z'=a} \quad (3.66)$$

E introduciendo el valor para $g(z, z')$ de (3.60), se obtiene:

$$\langle 0|T_{zz}|0\rangle|_{z=z'=a} = \frac{i}{2} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \lambda \cot \lambda a \quad (3.67)$$

Para resolver la integral anterior, se pueden hacer las siguientes sustituciones pasando al plano complejo: $\omega \rightarrow i\zeta$, $\lambda \rightarrow i\sqrt{\rho^2 + m^2}$, donde $\rho^2 = \mathbf{k}_{\parallel}^2 + \zeta^2$.

$$\langle 0|T_{zz}|0\rangle|_{z=z'=a} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\zeta}{2\pi} \sqrt{\rho^2 + m^2} \coth(a\sqrt{\rho^2 + m^2}) \quad (3.68)$$

Sin embargo, esta integral diverge y, por tanto, no aporta ninguna información sobre la fuerza de Casimir. Así, es necesario pasar a considerar también la fuerza por unidad de área que experimenta la placa por su parte exterior, suponiendo que esta tiene en realidad un espesor infinitesimal, de forma que así se tendrá un valor finito y con sentido físico para la fuerza de Casimir. Antes de todo, se debe encontrar la función de Green reducida en la región exterior a las placas y, para ello, se consideran como condiciones de contorno que la función de Green se anula en $z = a$ y, conforme $z \rightarrow \infty$, sale hacia el exterior ($\sim e^{ikz}$). Así, se tiene:

$$g(z, z') = \frac{1}{\lambda} [\sin(\lambda(z < -a)) e^{i\lambda(z > -a)}] \quad (3.69)$$

Y entonces, el valor esperado de la componente zz del tensor energía-momento en este caso, que denotamos por $T_{zz}^{(II)}$ para distinguirla respecto de la situación anterior, viene dado por:

$$\langle 0|T_{zz}^{(II)}|0\rangle|_{z=z'=a} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} g(z, z') \right]_{z=z'=a} = \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\lambda}{2} \quad (3.70)$$

Así, la fuerza de Casimir por unidad de área sobre la placa en $z = a$, \mathcal{F}_{cas} , se puede expresar a través de la discontinuidad de $\langle 0|T_{zz}|0\rangle$ en dicha placa:

$$\mathcal{F}_{cas} = \langle 0|T_{zz}^{(I)}|0\rangle - \langle 0|T_{zz}^{(II)}|0\rangle = -\frac{1}{2} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\zeta}{2\pi} \sqrt{\rho^2 + m^2} (\coth(a\sqrt{\rho^2 + m^2}) - 1) \quad (3.71)$$

donde el término (I) es el referido al campo escalar confinado entre las placas. Para realizar el cálculo de esta integral, se puede pasar a coordenadas polares y de esta manera reducimos las tres integrales que se tienen a solo una:

$$\mathcal{F}_{cas} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi\rho^2 \frac{2\sqrt{\rho^2 + m^2}}{e^{2a\sqrt{\rho^2 + m^2}} - 1} d\rho \quad (3.72)$$

El cálculo analítico directo de la integral que aparece en esta expresión resulta complicado, por lo que utilizando que la relación entre fuerza y energía de Casimir por unidad de área ($\mathcal{F}_{cas} = -\partial\mathcal{E}_{cas}/\partial a$), se llega a:

$$\mathcal{E}_{cas} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi\rho^2 \log\left(e^{-2a\sqrt{\rho^2 + m^2}} - 1\right) d\rho \quad (3.73)$$

Resolviendo esta integral y teniendo en cuenta que $\mathcal{E}_{cas} = E_{cas}/L^2$, donde L^2 es el área de cada una de las placas, se obtiene:

$$E_{cas}(a, m) = -\frac{L^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} K_2(2amn) \quad (3.74)$$

que es precisamente el mismo resultado que se obtenía en (3.42), cuando el cálculo de la energía de Casimir se realizaba a través del método global. Con esto, se puede calcular también la fuerza de Casimir, que viene dada por:

$$F_{cas} = -\frac{L^2 m^4}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2man} \left[K_3(2man) - \frac{1}{2man} K_2(2man) \right] \quad (3.75)$$

Se puede estudiar el comportamiento de esta expresión en los límites de pequeña masa y gran masa.

1. **Límite de masas pequeñas.** En este caso, $ma \ll 1$ y las funciones modificadas de Bessel pueden desarrollarse de acuerdo a (3.43) y a:

$$K_3(z) \simeq \frac{8}{z^3} - \frac{1}{z} + O(z) \quad (3.76)$$

Así, la fuerza de Casimir por unidad de área queda:

$$F_{cas}(a, m) = -\frac{L^2 m^4}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{6}{(2man)^4} - \frac{1}{8(man)^2} \right] \quad (3.77)$$

Recordando la definición de la función zeta de Riemann (3.45), se tiene finalmente la siguiente expresión para la fuerza de Casimir:

$$F_{cas}(a, m) = -\frac{L^2 \pi^2}{480a^4} + \frac{L^2 m^2}{96a^2} \quad (3.78)$$

Y esta expresión, para el caso de masa nula, se reduce a $F_{cas}(a) = -\frac{L^2 \pi^2}{480a^4}$. Se obtiene una fuerza con signo negativo, de modo que se trata de una fuerza atractiva.

2. **Límite de masas grandes.** En este caso, $ma \gg 1$. Para argumentos grandes, recordamos el desarrollo (3.48) para K_2 , y para K_3 este toma la forma:

$$K_3(z) \simeq \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \quad (3.79)$$

Así, la fuerza de Casimir queda:

$$F_{cas}(m, a) = -\frac{L^2 m^3}{8\pi^2 a} \left(\frac{\pi}{ma} \right)^{1/2} e^{-2ma} \left(1 - \frac{1}{2ma} \right) \quad (3.80)$$

Todos estos resultados coinciden con los obtenidos por otros autores ([10],[16]).

4. Cálculo de la fuerza de Casimir en teorías con masa: otras condiciones de contorno

A continuación, se pasa a analizar la dependencia de la fuerza de Casimir cuando se tienen en cuenta distintas condiciones de contorno. Se realizará el cálculo utilizando el tensor energía-momento de nuevo, aunque empleando un método algo menos técnico que el basado en el uso de la función de Green ([16]). En este caso, se tendrá en cuenta la contribución a la energía de las frecuencias permitidas por las condiciones de contorno impuestas. Dado que ahora se va a trabajar bajo unas ciertas condiciones de contorno, la solución de la ecuación (2.11) para $u(\mathbf{k}, \mathbf{x})$

tomará una expresión distinta a la que se tenía para el espacio libre en (2.12). Para el caso general, se tiene:

$$u(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} u(k_z, z) \quad (4.1)$$

donde \mathbf{k}_{\parallel} y \mathbf{x}_{\parallel} denotan las componentes de \mathbf{k} y \mathbf{x} paralelas a las placas, es decir: $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y)$ y $\mathbf{x}_{\parallel} = (x, y)$; y la función $u(k_z, z)$ satisface la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right) u(k_z, z) = 0 \quad (4.2)$$

La solución general de esta ecuación viene dada por:

$$u(k_z, z) = Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z} \quad (4.3)$$

donde A y B son constantes que se determinan imponiendo unas ciertas condiciones de contorno. En particular, aquí se analizan los casos correspondientes a condiciones de contorno periódicas, antiperiódicas y de Zaremba.

4.1. Condiciones de contorno periódicas

Las condiciones de contorno periódicas pasan por imponer:

$$\phi(t, x, y, z = 0) = \phi(t, x, y, z = a), \quad \left. \frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=a} \quad (4.4)$$

Si trasladamos estas condiciones de contorno a la función $u(k_z, z)$ de (4.3) con el objetivo de determinar las constantes A y B para así tener completamente determinada esta función, se debe imponer:

$$u(k_z, z = 0) = u(k_z, z = a), \quad \left. \frac{du(k_z, z)}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{du(k_z, z)}{dz} \right|_{z=a} \quad (4.5)$$

y estas condiciones se reducen a resolver:

$$\begin{cases} A + B = Ae^{ik_z a} + Be^{-ik_z a} \\ (A - B)ik_z = (Ae^{ik_z a} - Be^{-ik_z a})ik_z \end{cases} \quad (4.6)$$

De la primera de estas ecuaciones, se tiene $A = e^{-ik_z a} B$, e imponiendo la segunda se llega a $e^{-ik_z a} = 1$, lo que fija para k_z unos ciertos valores permitidos, que en este caso vienen dados por:

$$k_z = \frac{2\pi n}{a} \quad (4.7)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$. De este modo, las frecuencias permitidas vienen dadas por $\omega_n = k_x^2 + k_y^2 + (2\pi n/a)^2 + m^2$ y se tiene:

$$u(k_z, z) = A(e^{ik_z z} + e^{-ik_z(z-a)}) \quad (4.8)$$

Para determinar la constante A , basta con imponer $\int_0^a |u(k_z, z)|^2 dz = 1$ (condición de normalización), lo que nos da $|A| = 1/\sqrt{2a}$. Considerando A real y positivo, se tiene finalmente:

$$u(k_z, z) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{ik_z a} + e^{-ik_z(z-a)}) \quad (4.9)$$

Recordando (3.51), la componente T_{zz} del tensor energía-momento viene dada por:

$$T_{zz} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - m^2 \phi^2 \right] \quad (4.10)$$

Para obtener la fuerza de Casimir, debemos calcular nuevamente el valor esperado $\langle 0 | T_{zz} | 0 \rangle$. En este caso, para realizar el cálculo se puede separar el operador campo en sus partes de frecuencia positiva y negativa. Se tendrán contribuciones de la forma $\langle 0 | \phi^+ \phi^+ | 0 \rangle$, $\langle 0 | \phi^- \phi^- | 0 \rangle$, $\langle 0 | \phi^- \phi^+ | 0 \rangle$ y $\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle$. Recordando la expresión de ϕ^+ y ϕ^- en términos de los operadores creación y destrucción (2.6), así como la ecuación (2.10), se tiene que la única contribución no nula de los cuatro términos anteriores la da $\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle$. El razonamiento es análogo para los términos que involucran derivadas de los campos. De este modo, se puede expresar:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{zz} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | & \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial y} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial z} \right) - m^2 \phi^+ \phi^- | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

Calculando cada uno de los términos de la expresión anterior y simplificando, se obtiene (para ver detalles del cálculo, consultar anexo D):

$$\langle 0 | T_{zz}^{(I)} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2 a} \frac{k_z^2}{\omega_n} \quad (4.12)$$

donde el superíndice (I) denota que se está calculando la fuerza ejercida sobre el lado interior de la placa. Repitiendo el procedimiento que se ha presentado en la sección 3.2.2, se calcula ahora la fuerza que actúa sobre el lado exterior de la placa, denotada con (II), teniendo en cuenta que en la región no confinada entre las placas el momento k_z ya no está cuantizado. Así:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k_z^2}{\omega_k} \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta las contribuciones de la fuerza sobre el lado interior y exterior de la placa, la fuerza de Casimir por unidad de área queda:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(P)} = \langle 0 | T_{zz}^{(I)} | 0 \rangle - \langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2 a} \frac{k_z^2}{\omega_n} - \frac{1}{2} \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k_z^2}{\omega_k} \quad (4.14)$$

Sustituyendo k_z por su expresión en función de n , (4.7), se obtiene:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(P)} = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^2 a^3} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) - \frac{2\pi^2}{(2\pi)^2 a^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{+\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) dn \quad (4.15)$$

donde $f(n, \mathbf{k}_{\parallel})$ toma la siguiente expresión:

$$f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) = \frac{n^2}{\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 + m^2}} \quad (4.16)$$

Para simplificar el cálculo, se puede aplicar una vez más la fórmula de la suma de Poisson ([17]):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \mathbf{k}_{\parallel}) \cos(2\pi n x) dx \quad (4.17)$$

Como consecuencia de la aplicación de esta fórmula, el término del sumatorio para el que n es 0 se cancela con el segundo sumando de la expresión de $\mathcal{F}_{cas}^{(P)}$. Además, como $f(x, \mathbf{k}_{||})$ es una función par respecto de x , puede integrarse en x de 0 a ∞ si se multiplica todo por un factor 2. Lo mismo ocurre con el sumatorio, que si se vuelve a multiplicar todo por 2, este va de $n = 1$ hasta $n = \infty$, ya que $\cos(2\pi nx)$ es una función par respecto de n . Así, se tiene:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(P)} = \frac{8\pi^2}{(2\pi)^2 a^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 k_{||} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, \mathbf{k}_{||}) \cos(2\pi nx) dx \quad (4.18)$$

$$\mathcal{F}_{cas}^{(P)} = \frac{8\pi^2}{(2\pi)^2 a^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 k_{||} \left[-\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{\sqrt{\left(\frac{2\pi x}{a}\right)^2 + \mathbf{k}_{||}^2 + m^2}} dx \right]$$

Y, finalmente, resolviendo esta expresión, se tiene el siguiente resultado para la fuerza de Casimir por unidad de área ([12]):

$$\mathcal{F}_{cas}^{(P)}(a, m) = -\frac{m^4}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{man} \left[K_3(man) - \frac{1}{man} K_2(man) \right] \quad (4.19)$$

La expresión obtenida coincide con los resultados obtenidos por otros autores ([18],[19]). Una vez más, aparece un sumatorio con funciones modificadas de Bessel y solo se puede derivar un resultado exacto para esta expresión en los límites de masas pequeñas y masas grandes.

En el límite de masas pequeñas ($ma \ll 1$), se tiene:

$$F_{cas}^{(P)}(a, m) = -\frac{L^2 \pi^2}{30a^4} + \frac{L^2 m^2}{24a^2} \quad (4.20)$$

Se ve que esta expresión, en el caso de masa nula ($m = 0$), se reduce a $F_{cas}^{(P)}(a) = -\frac{L^2 \pi^2}{30a^4}$. Es decir, se tiene un valor de fuerza que es 16 veces el que se obtenía para el caso de condiciones de contorno de Dirichlet. Con todo, la fuerza es igualmente atractiva.

Por su parte, en el límite de masas grandes ($ma \gg 1$), la expresión (4.19) se reduce a:

$$F_{cas}^{(P)}(a, m) = -\frac{L^2 m^3}{2\pi^2 a} \left(1 - \frac{1}{ma}\right) \left(\frac{\pi}{2ma}\right)^{1/2} e^{-ma} \quad (4.21)$$

Se obtiene así un resultado similar al que se tenía con condiciones de contorno de Dirichlet, pero en este caso el decrecimiento exponencial con la masa es menos pronunciado que en el caso anterior, pues el exponente se reduce en un factor 2.

4.2. Condiciones de contorno antiperiódicas

Las condiciones de contorno antiperiódicas se definen de manera muy similar a las condiciones de contorno periódicas (4.4), con la diferencia de que ahora se introduce un signo negativo:

$$\phi(t, x, y, z = 0) = -\phi(t, x, y, z = a), \quad \left. \frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=0} = -\left. \frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=a} \quad (4.22)$$

Llevando estas restricciones a la función $u(k_z, z)$ e imponiendo la condición adicional de normalización, se obtiene:

$$u(k_z, z) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{ik_z z} - e^{-ik_z(z-a)}), \quad \text{con } k_z = \frac{(2n+1)\pi}{a} \quad (4.23)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$. Si se procede de la misma manera que en el caso anterior, se tiene:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(I)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_z^2}{\omega_n} \quad \langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \int d^3 k \frac{k_z^2}{\omega_k} \quad (4.24)$$

Y, de este modo, la fuerza de Casimir por unidad de área se puede expresar como:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(A)} = \frac{1}{8a^3} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) - \frac{1}{8a^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) dn \quad (4.25)$$

donde la función $f(n, \mathbf{k}_{\parallel})$ se define como:

$$f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) = \frac{(2n+1)^2}{\sqrt{\left[\frac{(2n+1)\pi}{a}\right]^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}} \quad (4.26)$$

Para facilitar el cálculo, se puede sustituir el sumatorio sobre n por un sumatorio sobre otra variable $p = 2n + 1$, de modo que $\sum_n = \sum_{p \text{ impares}}$. Puesto que solo se quiere sumar sobre los p impares, podemos reemplazar el sumatorio sobre n por un sumatorio sobre todos los p menos otro sumatorio sobre una variable que denotaremos como q que reste los valores pares que no nos interesan para el cálculo en este caso. De este modo, se puede escribir:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(A)} = \frac{1}{8a^3} \int d^2 k_{\parallel} \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}} - \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{(2q)^2}{\sqrt{\left[\frac{(2q)\pi}{a}\right]^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}} \right] - \frac{1}{4a^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) dn + \frac{1}{8a^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) dn \quad (4.27)$$

Como dentro de los sumatorios se tienen funciones pares, las sumas de $-\infty$ a $+\infty$ pueden sustituirse por sumas de 1 a $+\infty$ simplemente multiplicando por 2. Igualmente, podemos hacer lo mismo para las integrales, multiplicando por un factor 2 para pasar a integrales de 0 a $+\infty$. Teniendo en cuenta la fórmula de la suma de Poisson (4.17), se puede expresar:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(A)} = \frac{1}{4a^3} \int d^2 k_{\parallel} \left[2 \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(2\pi p x)}{\sqrt{\left(\frac{x\pi}{a}\right)^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}} - 8 \sum_{q=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(2\pi q x)}{\sqrt{\left(\frac{2x\pi}{a}\right)^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}} \right] \quad (4.28)$$

Repitiendo el mismo procedimiento de cálculo que en la sección 4.1, se obtiene finalmente la siguiente fuerza de Casimir por unidad de área:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(A)}(a, m) = -\frac{m^4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2man} \left[K_3(2man) - \frac{1}{2man} K_2(2man) \right] + \frac{m^4}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{man} \left[K_3(man) - \frac{1}{man} K_2(man) \right] \quad (4.29)$$

En el límite de masas pequeñas ($ma \ll 1$), esta expresión se reduce a:

$$F_{cas}^{(A)}(a, m) = \frac{7L^2 \pi^2}{240a^4} - \frac{L^2 m^2}{48a^2} \quad (4.30)$$

Así, para $m = 0$ la fuerza de Casimir tiene un valor $F_{cas}^{(A)}(a) = \frac{7L^2 \pi^2}{240a^4}$. Se trata de un valor positivo de fuerza, lo que indica que en este caso se trata de una fuerza repulsiva.

Para el límite de masas grandes ($ma \gg 1$), se tiene:

$$F_{cas}^{(A)}(a, m) = \frac{L^2 m^3}{2\pi^2 a} \left(\frac{\pi}{2ma} \right)^{1/2} \left[e^{-ma} \left(1 - \frac{1}{ma} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2ma} \left(1 - \frac{1}{2ma} \right) \right] \quad (4.31)$$

Así, para masas grandes la fuerza de Casimir muestra un decaimiento exponencial. Se obtiene una expresión algo más compleja que en el caso correspondiente a condiciones de contorno periódicas, puesto que en este caso se tienen dos contribuciones exponenciales: por un lado, una contribución repulsiva (e^{-ma}), y por otro lado, una contribución que suaviza dicha repulsión (e^{-2ma}). Todos estos resultados muestran sintonía con los determinados por otros autores ([18],[19]).

4.3. Condiciones de contorno de Zaremba

Las condiciones de contorno de Zaremba son en realidad unas condiciones de contorno mixtas que se reducen a imponer condiciones de Dirichlet en una de las placas y condiciones de Neumann en la otra. En nuestro cálculo, se impondrán las primeras en la placa en $z = 0$ y las últimas en la placa en $z = a$:

$$\phi(t, x, y, z = 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=a} = 0 \quad (4.32)$$

Trasladando estas restricciones a la función $u(k_z, z)$ e imponiendo la condición adicional de normalización, para la región confinada entre las placas se obtiene:

$$u(k_z, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} i \sin k_z z, \quad \text{con } k_z = \frac{(2n+1)\pi}{2a} \quad (4.33)$$

donde n es un entero mayor o igual que 0. Procediendo de la misma manera que en los casos de condiciones de contorno periódicas y antiperiódicas, se tiene:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(I)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_z^2}{\omega_n} \quad \langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \int d^3 k \frac{k_z^2}{\omega_k} \quad (4.34)$$

La fuerza de Casimir por unidad de área viene dada por:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(Z)} = \frac{\pi^2}{8(2\pi)^2 a^3} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) - \frac{\pi^2}{8(2\pi)^2 a^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_0^{\infty} f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) dn \quad (4.35)$$

donde la función $f(n, \mathbf{k}_{\parallel})$ se define como $f(n, \mathbf{k}_{\parallel}) = \frac{(2n+1)^2}{\sqrt{[\frac{(2n+1)\pi}{2a}]^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + m^2}}$.

Reescribiendo los sumatorios como en (4.27) y aplicando el mismo procedimiento de cálculo, finalmente se obtiene la siguiente fuerza de Casimir por unidad de área:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{cas}^{(Z)}(a, m) = & -\frac{m^4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4man} [K_3(4man) - \frac{1}{4man} K_2(4man)] \\ & + \frac{m^4}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2man} [K_3(2man) - \frac{1}{2man} K_2(2man)] \end{aligned} \quad (4.36)$$

En el límite de masas pequeñas ($ma \ll 1$), esta expresión se reduce a:

$$F_{cas}^{(Z)}(a, m) = \frac{7}{8} \frac{L^2 \pi^2}{480a^4} - \frac{L^2 m^2}{192a^2} \quad (4.37)$$

Así, para $m = 0$, se tiene $F_{cas}(a) = \frac{7}{8} \frac{L^2 \pi^2}{480a^4}$. Es una expresión 16 veces más pequeña que la obtenida para condiciones de contorno antiperiódicas. En este caso, la fuerza tiene signo positivo, de modo que se tiene de nuevo una fuerza de repulsión entre las placas. El término de masa suaviza la intensidad de esta repulsión.

Por su parte, en el límite de masas grandes ($ma \gg 1$) se tiene:

$$\mathcal{F}_{cas}^{(Z)}(a, m) = \frac{m^3}{4\pi^2 a} \left(\frac{\pi}{4ma}\right)^{1/2} \left[e^{-2ma} \left(1 - \frac{1}{2ma}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-4ma} \left(1 - \frac{1}{4ma}\right) \right] \quad (4.38)$$

Se trata de una expresión muy parecida a (4.31), con la diferencia de que en este caso el decaimiento exponencial es más acentuado. Los resultados obtenidos están en concordancia con los obtenidos por otros autores, tanto en el caso de teorías sin masa ([9], [10]) como de teorías con masa ([18],[19]).

5. Representación gráfica de los resultados analíticos

Se muestra una representación gráfica de los resultados obtenidos de manera analítica para el caso de condiciones de contorno de Dirichlet, periódicas, antiperiódicas y de Zaremba (expresiones (3.75), (4.19), (4.29) y (4.36), respectivamente), con el objetivo de analizar la dependencia de la fuerza de Casimir con la masa, especialmente para el caso de valores intermedios de m , puesto que resulta difícil extraer conclusiones de las expresiones anteriores en términos de sumatorios de las funciones modificadas de Bessel de segundo tipo. En particular, se representa el módulo de la fuerza de Casimir por unidad de área (o, lo que es lo mismo, presión de Casimir, P_{cas}) frente al producto ma . Todos los resultados que se muestran están en unidades naturales.

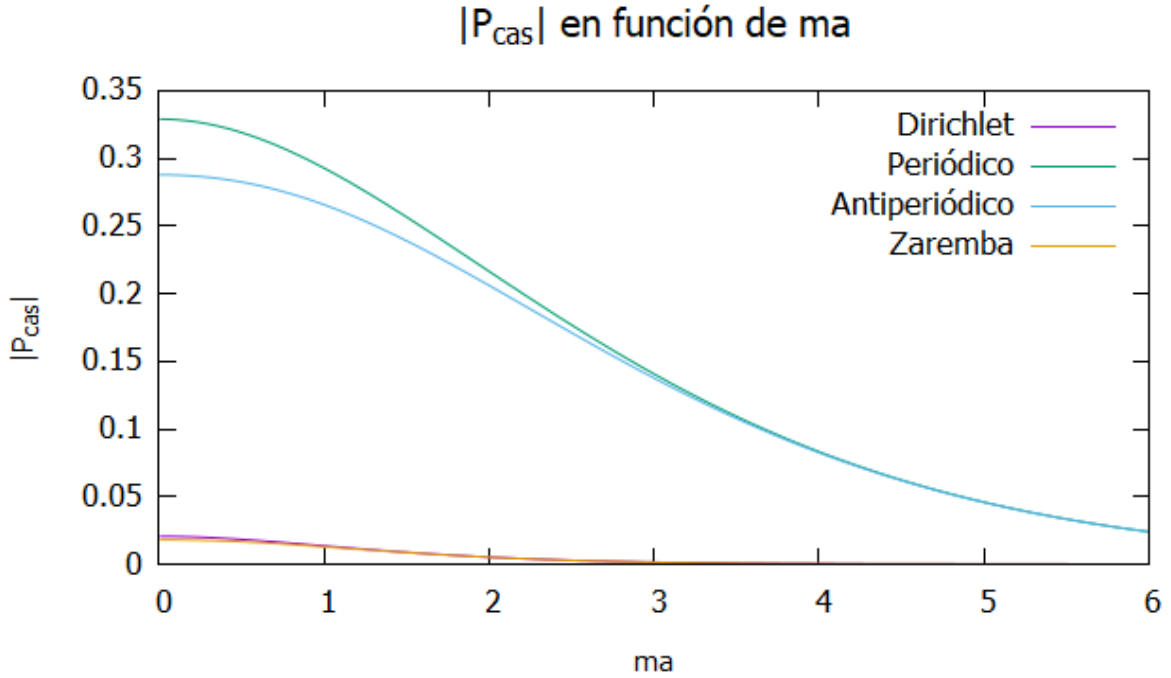


Figura 1: Representación del módulo de la presión de Casimir, P_{cas} , en función de ma para diferentes condiciones de contorno.

Como se observa, en lo referido a forma funcional se tiene una tendencia muy parecida para las cuatro condiciones de contorno representadas: la presión de Casimir disminuye conforme aumenta el valor del producto ma hasta llegar a un valor en el que esta prácticamente se hace despreciable. Para el caso de condiciones de contorno periódicas y antiperiódicas, este valor se alcanza para masas mayores que cuando se consideran condiciones de contorno de Dirichlet y de Zaremba. También se pone de manifiesto la diferencia entre órdenes de magnitud de la presión de Casimir según las condiciones de contorno. Los resultados gráficos mostrados coinciden con los obtenidos por otros autores ([19]).

6. Conclusiones

A lo largo del trabajo, se ha descrito una visión global del efecto Casimir para la geometría particular de dos placas perfectamente conductoras paralelas entre sí, calculando algunas de las magnitudes más relevantes de este fenómeno: en particular, la energía y la fuerza de Casimir, considerando para ello distintas teorías: unas sin masa (campo electromagnético) y otras con masa (campo escalar real) y aplicando distintos métodos de cálculo (globales y locales), con el objetivo de comparar los métodos entre sí, así como los resultados obtenidos en cada uno de ellos. Además, el cálculo del efecto Casimir se ha realizado también para cuatro condiciones de contorno diferentes (Dirichlet, periódicas, antiperiódicas y Zaremba), con el objetivo de estudiar la dependencia de la fuerza de Casimir con las condiciones de contorno.

Así, efectivamente se ha probado de forma teórica que existe una interacción causada por las fluctuaciones del vacío y que es intrínseca a cualquier campo cuántico, sin importar su naturaleza. Respecto a los valores calculados para la energía y la fuerza de Casimir en cada uno de los casos, se ha obtenido que estas magnitudes dependen fuertemente del valor de la separación entre las placas, a , mostrando siempre una dependencia del tipo $E_{cas} \propto a^{-3}$, $F_{cas} \propto a^{-4}$ para los casos de masa nula. También dependen del parámetro geométrico L^2 , que determina el área de las placas. Una de las consecuencias más relevantes de los resultados obtenidos es que el factor de proporcionalidad que relaciona E_{cas} y F_{cas} con los parámetros geométricos L^2 y a depende exclusivamente de constantes fundamentales, como la constante de Planck \hbar o la velocidad de la luz c , de modo que se tiene así una interacción independiente de la carga eléctrica, que se puede dar tanto entre cuerpos cargados como entre cuerpos neutros, incluso para el caso del campo electromagnético. Cuando pasa a tenerse en cuenta la influencia de la masa, aparecen expresiones analíticas con las que resulta un poco complicado trabajar, pero se extraen fácilmente conclusiones de ellas al representar los resultados gráficamente y tomar los límites correspondientes a masas pequeñas y masas grandes. Se tiene que, para todas las condiciones de contorno consideradas, el módulo de la presión de Casimir es una función decreciente de la masa, hasta que se llega a un valor de m para el que esta presión se hace prácticamente despreciable. En el límite de masas pequeñas, el término de masa varía cuadráticamente y suaviza la intensidad de la interacción, mientras que en el límite de masas grandes, este término pasa a tener una dependencia de tipo exponencial.

Respecto a los distintos métodos utilizados, ambos nos proporcionan el mismo resultado. El método global representa un método sencillo de cálculo de la energía de Casimir, mientras que el método local tiene la ventaja de que hace uso del tensor energía-momento, que es una

cantidad local. Así, los métodos locales proporcionan una información mayor sobre el sistema.

También es importante comentar que la naturaleza de la interacción asociada al efecto Casimir, como se observa de acuerdo con los resultados obtenidos, muestra una fuerte dependencia con las condiciones de contorno, obteniéndose en unos casos interacciones de tipo atractivo y en otros, interacciones de tipo repulsivo, y afectando esto también a la magnitud de la fuerza. En particular, se tiene una interacción atractiva para el caso de condiciones de contorno de Dirichlet y periódicas, y una interacción repulsiva para condiciones de contorno antiperiódicas y de Zaremba. Esto concuerda con el *Teorema de Kenneth-Klich*, que establece que si las condiciones de contorno son simétricas, entonces la fuerza de Casimir es de tipo atractivo ([20]). Se puede dar una formulación más general que la presentada en este trabajo para la dependencia de la energía de Casimir con las condiciones de contorno, que pasaría primero por analizar los requisitos que deben cumplir las condiciones de contorno para un cierto tipo de campo ([18]).

Para las aplicaciones, interesa que la fuerza de Casimir sea repulsiva, tanto por sus aplicaciones a dispositivos microelectromecánicos como por su interés en estudios de gravedad y cosmológicos, en los que es necesario poder discernir adecuadamente los efectos propiamente gravitatorios del efecto Casimir.

Asimismo, es importante añadir que, como limitación que presentan los resultados analíticos obtenidos en este trabajo, hay que tener en cuenta que los cálculos han sido realizados considerando condiciones totalmente ideales: en primer lugar, las dos placas se suponen perfectamente conductoras, cuando en la realidad los materiales con los que se trabaja tienen una conductividad finita. En segundo lugar, los cálculos presentados corresponden al caso de temperatura nula. Así, una estimación más realista de la interacción que permitiría comparar de una forma mucho más adecuada los resultados teóricos con los datos que se pueden obtener de forma experimental pasaría por incorporar una conductividad finita y los posibles efectos térmicos para temperatura ambiente. Otro factor que también desempeña un papel importante y que es motivo de discrepancia entre teoría y experiencia es la rugosidad de las superficies empleadas.

Referencias

- [1] H. B. G. Casimir and D. Polder. The influence of retardation on the London-Van der Waals forces. *Phys. Rev.*, 73:360–372, 1948.
- [2] F. London. Zur theorie und systematik der molekularkräfte. *Zeitschrift für Physik*, 63(3-4):245–279, 1930.
- [3] E. J. W. Verwey. Theory of the stability of lyophobic colloids. *The Journal of Physical Chemistry*, 51(3):631–636, 1947.
- [4] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Front. Phys.*, 100:61–63, 1948.
- [5] Marcus J. Sparnaay. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, 24(6-10):751–764, 1958.
- [6] Steven K. Lamoreaux. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 μm range. *Physical Review Letters*, 78(1):5, 1997.
- [7] U. Mohideen and A. Roy. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm . *Physical Review Letters*, 81(21):4549, 1998.
- [8] Michele Maggiore. *A modern introduction to quantum field theory*, volume 12. Oxford University Press, 2005.
- [9] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko. *Advances in the Casimir effect*, volume 145. Oxford University Press, 2009.
- [10] C. Farina. The Casimir effect: some aspects. *Brazilian Journal of Physics*, 36(4A):1137–1149, 2006.
- [11] G. Plunien, B. Müller, and W. Greiner. The Casimir effect. *Physics Reports*, 134(2-3):87–193, 1986.
- [12] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [13] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ERIC, 1972.
- [14] K. A. Milton. *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. World Scientific, 2001.
- [15] C. A. Escobar, L. Medel, and A. Martín-Ruiz. Casimir effect in Lorentz-violating scalar field theory: A local approach. *Physical Review D*, 101(9):095011, 2020.
- [16] S. Mobassem. Casimir effect for massive scalar field. *Modern Physics Letters A*, 29(31):1450160, 2014.
- [17] P. M. Morse and H. Feshbach. Methods of theoretical physics. *American Journal of Physics*, 22(6):410–413, 1954.

- [18] M. Asorey and J. M. Muñoz-Castaneda. Attractive and repulsive Casimir vacuum energy with general boundary conditions. *Nuclear Physics B*, 874(3):852–876, 2013.
- [19] A. C. Pinto, T. M. Britto, R. Bunchaft, F. Pascoal, and F. S. S. Da Rosa. Casimir effect for a massive scalar field under mixed boundary conditions. *Brazilian Journal of Physics*, 33(4):860–866, 2003.
- [20] O. Kenneth and I. Klich. Opposites attract: A theorem about the Casimir force. *Physical review letters*, 97(16):160401, 2006.
- [21] J. J. Sakurai. *Advanced quantum mechanics*. Pearson Education India, 1967.

TRABAJO FIN DE GRADO

ESTUDIO DEL EFECTO CASIMIR (ANEXOS)

GRADO EN FÍSICA

Autor:

Andrés Miguel Cuartero

Director:

Manuel Asorey Carballeira



Universidad Zaragoza

Facultad de Ciencias
2019/2020

A. Cuantización canónica del campo electromagnético

A partir del proceso de cuantización canónica del campo electromagnético sin fuentes en el gauge de Coulomb, se puede deducir el hamiltoniano de radiación. Se empezará trabajando en el marco clásico para posteriormente pasar a la teoría cuántica introduciendo las modificaciones necesarias ([8], [21]). Definimos un cuadrivector potencial electromagnético $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, donde A_0 representa el potencial electrostático y \mathbf{A} denota el potencial vector tridimensional. En el gauge de Coulomb se verifica la llamada condición de transversalidad⁴:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

y además se tiene $A^0(t, \mathbf{x}) = 0$. El potencial A^μ se relaciona con el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} a través de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Teniendo en cuenta una de las ecuaciones de Maxwell, en particular, la ley de Ampère generalizada:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (\text{A.3})$$

esta se puede reescribir como:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

donde se ha usado la primera igualdad de (3.1), la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ y la condición de transversalidad (A.1). También se ha tomado $\mathbf{j} = 0$, puesto que se está considerando el caso de un campo libre. Así, se ha obtenido una ecuación de ondas para el potencial vector \mathbf{A} , por lo que esta admite como solución un desarrollo en serie de Fourier. Si consideramos el espacio libre tridimensional, sin ningún tipo de condición de contorno, podemos escribir para un instante de tiempo cualquiera t :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \sum_{\alpha} (a_{\mathbf{k},\alpha} e^{-i\omega t} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x}) + a_{\mathbf{k},\alpha}^* e^{i\omega t} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^*(\mathbf{x})) \quad (\text{A.5})$$

donde $\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} = \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. En esta expresión, $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ representa una onda plana en $t = 0$, mientras que $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}$ es un vector de polarización, refiriéndose $\alpha = \{1, 2\}$ al estado de polarización. Los vectores de polarización cumplen la condición de ortonormalidad $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha')} = \delta_{\alpha\alpha'}$ y, como consecuencia de la condición de transversalidad (A.1), son vectores ortogonales al vector de ondas \mathbf{k} que representa la dirección de propagación. Así, $(\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ define una base ortonormal en el espacio tridimensional de vectores. Por su parte, ω representa la frecuencia y verifica la siguiente relación de dispersión: $\omega = c|\mathbf{k}|$. Sin embargo, el desarrollo dado para $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ es el propio de la teoría clásica. Para pasar a una descripción cuántica del campo electromagnético, deben introducirse nuevamente los operadores creación ($a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger$) y destrucción ($a_{\mathbf{k},\alpha}$), que satisfacen las siguientes reglas de conmutación⁵:

$$[a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha,\alpha'} \quad [a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k}',\alpha'}] = [a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger, a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = 0 \quad (\text{A.6})$$

⁴Siempre se puede fijar un gauge determinado en el que el potencial electromagnético verifique esta condición. Esto se fundamenta en que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones gauge.

⁵Estas reglas de conmutación son similares a las dadas en (2.9), con la diferencia de que aquí se pasa a tener en cuenta también los dos estados de polarización posibles.

y, como en (2.10), estos operadores cumplen: $a_{\mathbf{k},\alpha} |0\rangle = \langle 0| a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger = 0$. Así, para pasar al marco cuántico se reemplazan los coeficientes $a_{\mathbf{k},\alpha}$, $a_{\mathbf{k},\alpha}^*$ del caso clásico por los operadores $a_{\mathbf{k},\alpha}$, $a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger$. Además, se verifica:

$$a_{\mathbf{k},\alpha}(t) = a_{\mathbf{k},\alpha} e^{-i\omega t} \quad (\text{A.7})$$

$$a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) = a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger e^{i\omega t} \quad (\text{A.8})$$

Así, introduciendo estos operadores en (A.5), se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\alpha} [a_{\mathbf{k},\alpha} \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} + a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}] \quad (\text{A.9})$$

Este desarrollo pone de manifiesto que al pasar del marco clásico a la descripción cuántica del campo electromagnético, \mathbf{A} pasa de representar una función vectorial real en el espacio tridimensional a convertirse en un operador hermítico. Así, se puede cuantizar el hamiltoniano de radiación H , teniendo en cuenta que debemos integrar la densidad hamiltoniana $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2)$ a todo el espacio tridimensional. La justificación del valor de \mathcal{H} aparece explicada en el anexo B.

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \frac{1}{2} \int (|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2) d^3x = \frac{1}{2} \int \left(|\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 \right) d^3x \quad (\text{A.10})$$

Esta integral debe reformularse teniendo en cuenta (A.9), de modo que expresamos cada uno de los sumandos de la expresión anterior en términos de los operadores creación y destrucción. Para $|\nabla \times \mathbf{A}|^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 &= (\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \times \mathbf{A})^* = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\sum_{\alpha} [a_{\mathbf{k},\alpha}(t) \nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} + a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) \nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^*] \right) \\ &\quad \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left(\sum_{\alpha'} [a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger(t) \nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* + a_{\mathbf{k}',\alpha'}(t) \nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}] \right) \\ |\nabla \times \mathbf{A}|^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{\alpha, \alpha'} [a_{\mathbf{k},\alpha}(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}(t) (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha})(\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}) \\ &\quad + a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger(t) (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^*)(\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^*) + a_{\mathbf{k},\alpha}(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger(t) (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha})(\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^*) \\ &\quad + a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}(t) (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^*)(\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'})] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Desarrollando la expresión anterior y utilizando (2.15), se llega a:

$$\int |\nabla \times \mathbf{A}|^2 d^3x = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} (a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha} + a_{\mathbf{k},\alpha} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger) \quad (\text{A.12})$$

Ahora se pasa a considerar el segundo sumando de (A.10), $\left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 = (\partial \mathbf{A} / \partial t)(\partial \mathbf{A} / \partial t)^*$, y se procede de forma análoga, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^* = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} i\omega_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} (\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^* a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) - \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} a_{\mathbf{k},\alpha}(t)) \quad (\text{A.13})$$

y al calcular $|\partial\mathbf{A}/\partial t|^2$, quedan términos de la forma:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^* a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) - \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} a_{\mathbf{k},\alpha}(t))(\mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger(t) - \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'} a_{\mathbf{k}',\alpha'}(t)) = \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^* \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger(t) \\ & + \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'} a_{\mathbf{k},\alpha}(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}(t) - \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^* \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}(t) - \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* a_{\mathbf{k},\alpha}(t) a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger(t) \end{aligned}$$

Al integrar $|\partial\mathbf{A}/\partial t|^2$ a todo el volumen, se obtiene:

$$\int \left| \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 d^3x = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} (a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha} + a_{\mathbf{k},\alpha} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger) \quad (\text{A.14})$$

Por tanto, el hamiltoniano de radiación propio del campo electromagnético en el marco cuántico en el espacio tridimensional libre viene dado finalmente por:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} (a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha} + a_{\mathbf{k},\alpha} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \left(a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha} + \frac{1}{2}V \right) \quad (\text{A.15})$$

donde en el paso final se ha aplicado la regla de conmutación (A.6). Desde el enfoque de la teoría cuántica, el campo electromagnético se caracteriza por tener una partícula asociada de masa y espín definidos, el fotón, que actúa como partícula mediadora de la interacción electromagnética. Así, en el hamiltoniano \mathbf{k} indica los momentos del fotón y α está relacionado con su estado de polarización. Se tiene una expresión análoga a (2.16), con la diferencia de que ahora se añade una suma sobre los dos estados de polarización distintos, mientras que en el campo escalar se tenía un único estado de polarización.

B. Campo electromagnético: derivación de la densidad hamiltoniana

Para deducir la densidad hamiltoniana propia del campo electromagnético, usada en (A.10), es necesario considerar la formulación covariante del electromagnetismo. Así, se introduce el tensor electromagnético, $F^{\mu\nu}$, que se define de la siguiente manera:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{B.1})$$

De acuerdo con esta definición, $F^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (\text{B.2})$$

Y, expresado en forma matricial en términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , viene dado por:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Así, se tiene:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad (\text{B.4})$$

donde se ha utilizado la operación de bajada de índices: $F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$.

Se define la densidad lagrangiana de Maxwell como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (\text{B.5})$$

Conocido esto, se puede calcular ya la densidad hamiltoniana \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \right) \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} \quad (\text{B.6})$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0}$ y utilizando la definición (B.1), se obtiene:

$$\mathcal{H} = F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} = F^{\mu 0} (F_{0\mu} + \partial_\mu A_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \mathbf{E}^2 - F^{0i} \partial_i A_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$$

En el último paso se ha empleado la antisimetría del tensor $F_{\mu\nu}$ y en el segundo sumando se ha restringido la contracción a los índices espaciales, ya que el término correspondiente a $\mu = 0$ se anula porque $F^{00} = 0$. Recordando que en el gauge de Coulomb $A_0 = 0$, se tiene finalmente el siguiente valor para la densidad hamiltoniana del campo de radiación:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (\text{B.7})$$

C. Cuantización del campo electromagnético: justificación de la suma de modos

Se va a presentar la justificación de la suma de modos que aparece en la expresión (3.12), requerida para el cálculo de la energía de Casimir correspondiente al campo electromagnético cuando se consideran condiciones de contorno de Dirichlet ([9]). La función $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ introducida en (3.2), en el caso de estas condiciones de contorno, expresadas en (3.3), viene dada por:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} C_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ C_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ C_z \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

donde el valor de k_z está cuantizado, según (3.5) y C_x, C_y, C_z son constantes cuyo valor se determina imponiendo la condición de transversalidad que fija el gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{x}) = 0$), así como la condición de normalización de la función $\mathcal{A}_{\mathbf{k},n}(\mathbf{x})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^a dz \mathcal{A}_{\mathbf{k},n}^*(\mathbf{x}) \mathcal{A}_{\mathbf{k}',n'}(\mathbf{x}) = 4\pi \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y) \delta_{k_z k'_z} \quad (\text{C.2})$$

De acuerdo con esto, se obtienen los siguientes valores:

$$C_x = C_y = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}} \frac{k_z}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + 2k_z^2}}, \quad C_z = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}} \frac{k_x + k_y}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + 2k_z^2}} \quad (\text{C.3})$$

Respecto a los vectores de polarización, en este caso presentan la siguiente forma, teniendo en cuenta que estos verifican la condición de ortonormalidad $\epsilon^{(\alpha)} \epsilon^{(\alpha')} = \delta_{\alpha\alpha'}$ y que, además, son vectores ortogonales al vector \mathbf{k} que indica la dirección de propagación:

$$\epsilon^{(1)} = \frac{1}{k_{\parallel}} \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(2)} = \frac{1}{k k_{\parallel}} \begin{pmatrix} k_x k_z \\ k_y k_z \\ -k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

El vector $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ es perpendicular al plano de incidencia, que es el plano definido por el vector de ondas \mathbf{k} y el vector normal a las placas $\hat{\mathbf{n}}$, mientras que $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ es paralelo a este plano.

Si las dos polarizaciones son separables, se verifican las dos siguientes expresiones:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^2 \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} \quad (\text{C.5})$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} \quad (\text{C.6})$$

Así, de acuerdo a esta última expresión, se obtiene:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{k},n}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_{\parallel}} C_x (\partial_x - \partial_y) \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z \quad (\text{C.7})$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{k},n}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{k k_{\parallel}} (C_x \partial_x \partial_z + C_x \partial_y \partial_z + C_z k_{\parallel}^2) \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \quad (\text{C.8})$$

De acuerdo a estas expresiones, podemos ya justificar la suma de modos usada en la expresión (3.12). Si $n = 0$, se tiene $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{k},0}^{(1)}(\mathbf{x}) = 0$, de modo que solo daría contribución no nula la polarización correspondiente a $\alpha = 2$. En cambio, para $n \geq 1$, el campo electromagnético presenta dos polarizaciones posibles, las dos con contribución no nula.

D. Cálculo de $\langle 0|T_{zz}|0\rangle$ para distintas condiciones de contorno

Se va a detallar el proceso de cálculo que se ha seguido en la sección 4 para calcular el valor esperado en el vacío de la componente T_{zz} del tensor energía-momento, $\langle 0|T_{zz}|0\rangle$. Se muestra el cálculo para las condiciones de contorno consideradas previamente: periódicas, antiperiódicas y de Zaremba.

D.1. Condiciones de contorno periódicas

De acuerdo con la expresión (4.11), debe empezarse calculando la expresión de los productos $\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial z}\right)$ y $\phi^+\phi^-$ y luego se pasa a calcular su valor esperado en el vacío. Así, teniendo en cuenta la expresión (2.6) para los campos ϕ^+ y ϕ^- , para $\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right)$ se tiene⁶:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right) &= \left(\int d^2k_{\parallel} \sum_n \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_n}} a_{\mathbf{k},n} e^{-i\omega_n t} (-i\omega_n) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{ik_z z} + e^{-ik_z(z-a)}) \right) \\ &\quad \left(\int d^2k'_{\parallel} \sum_m \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_m}} a_{\mathbf{k}',m}^{\dagger} e^{i\omega_m t} (i\omega_m) e^{-i\mathbf{k}'_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{-ik'_z z} + e^{ik'_z(z-a)}) \right) \end{aligned}$$

Y, reorganizando términos, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right) &= \int d^2k_{\parallel} \int d^2k'_{\parallel} \sum_{n,m} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k}',m}^{\dagger} e^{i(\omega_m - \omega_n)t} \omega_n \omega_m \\ &\quad e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \frac{1}{2a} (e^{i(k_z - k'_z)a} + e^{i(k_z z + k'_z(z-a))} + e^{-i(k_z(z-a) + k'_z z)} + e^{-i(k_z(z-a) - k'_z(z-a))}) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

⁶Para el resto de términos, el procedimiento de cálculo es análogo.

Con esto, se puede calcular ya el valor esperado $\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) | 0 \rangle$. Si a continuación se aplica la regla de conmutación dada por (2.9) y se tiene en cuenta (2.10), el valor esperado queda:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) | 0 \rangle = \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\omega_n^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.2})$$

Para el resto de términos, el procedimiento de cálculo es análogo. Se obtiene:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial x} \right) | 0 \rangle = \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{k_x^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.3})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial y} \right) | 0 \rangle = \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{k_y^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.4})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial z} \right) | 0 \rangle = \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{k_z^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.5})$$

$$\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle = \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.6})$$

Y, de este modo, finalmente, el valor esperado de la componente zz del tensor energíamomento en el vacío necesario para calcular la fuerza que actúa sobre el lado interior de las placas puede expresarse como:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(I)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_z^2}{\omega_n} \quad (\text{D.7})$$

Ahora debe seguirse el mismo procedimiento para el caso en el que se requiere la fuerza que actúa sobre el lado exterior de las placas, $\langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle$. En este caso, se tiene:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.8})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial x} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{k_x^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.9})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial y} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{k_y^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.10})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial z} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{k_z^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.11})$$

$$\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{1}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.12})$$

Y así, finalmente se tiene:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k_z^2}{\omega_k} \quad (\text{D.13})$$

D.2. Condiciones de contorno antiperiódicas

Haciendo como en el apartado anterior, en este caso se tendría:

$$\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right) = \left(\int d^2k_{\parallel} \sum_n \frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{2\omega_n}} a_{\mathbf{k},n} e^{-i\omega_n t} (-i\omega_n) e^{i\mathbf{k}_{\parallel}\cdot\mathbf{x}_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{ik_z z} - e^{-ik_z(z-a)})\right) \\ \left(\int d^2k'_{\parallel} \sum_m \frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{2\omega_m}} a_{\mathbf{k}',m}^{\dagger} e^{i\omega_m t} (i\omega_m) e^{-i\mathbf{k}'_{\parallel}\cdot\mathbf{x}_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2a}} (e^{-ik'_z z} - e^{ik'_z(z-a)})\right)$$

$$\left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right) = \int d^2k_{\parallel} \int d^2k'_{\parallel} \sum_{n,m} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k}',m}^{\dagger} e^{i(\omega_m - \omega_n)t} \omega_n \omega_m \\ e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel})\cdot\mathbf{x}_{\parallel}} \frac{1}{2a} (e^{i(k_z - k'_z)a} - e^{i(k_z z + k'_z(z-a))} - e^{-i(k_z(z-a) + k'_z z)} + e^{-i(k_z(z-a) - k'_z(z-a))}) \quad (\text{D.14})$$

Así, el valor esperado de esta cantidad en el vacío viene dado por:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right) | 0 \rangle = \int d^2k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\omega_n^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.15})$$

Para el resto de términos necesarios para calcular la componente $T_{zz}^{(I)}$, se tiene:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial x}\right) | 0 \rangle = \int d^2k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{k_x^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.16})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial y}\right) | 0 \rangle = \int d^2k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{k_y^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.17})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial z}\right) | 0 \rangle = \int d^2k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{k_z^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.18})$$

$$\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle = \int d^2k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.19})$$

Y, de este modo, se tiene finalmente:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(I)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \int d^2k_{\parallel} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_z^2}{\omega_n} \quad (\text{D.20})$$

Para los términos necesarios para calcular $T_{zz}^{(II)}$, se tiene:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial t}\right) | 0 \rangle = \int d^3k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.21})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial x}\right) | 0 \rangle = \int d^3k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{k_x^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.22})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial y}\right) | 0 \rangle = \int d^3k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{k_y^2}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.23})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial\phi^+}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial\phi^-}{\partial z}\right) | 0 \rangle = \int d^3k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{k_z^2}{2a} 2[1 + \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.24})$$

$$\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{2\omega_k} \frac{a}{(2\pi)^3} \frac{1}{2a} 2[1 - \cos(k_z(2z - a))] \quad (\text{D.25})$$

Y así, finalmente se tiene:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k_z^2}{\omega_k} \quad (\text{D.26})$$

D.3. Condiciones de contorno de Zaremba

Haciendo como en los apartados anteriores, en este caso se tendría:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) &= \left(\int d^2 k_{\parallel} \sum_n \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_n}} a_{\mathbf{k},n} e^{-i\omega_n t} (-i\omega_n) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \sqrt{\frac{2}{a}} i \sin(k_z z) \right) \\ &\quad \left(\int d^2 k'_{\parallel} \sum_m \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_m}} a_{\mathbf{k}',m}^{\dagger} e^{i\omega_m t} (i\omega_m) e^{-i\mathbf{k}'_{\parallel} \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \sqrt{\frac{2}{a}} (-i) \sin(k'_z z) \right) \\ \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) &= \int d^2 k_{\parallel} \int d^2 k'_{\parallel} \sum_{n,m} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m}} a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k}',m}^{\dagger} e^{i(\omega_m - \omega_n)t} \omega_n \omega_m \\ &\quad e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel}) \cdot \mathbf{x}_{\parallel}} \frac{2}{a} \sin(k_z z) \sin(k'_z z) \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

De este modo, el valor esperado de esta cantidad en el vacío sería:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_n \frac{\omega_n^2}{\omega_n} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.28})$$

Y para el resto de términos que conforman la componente $T_{zz}^{(I)}$, se tiene:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial x} \right) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_n \frac{k_x^2}{\omega_n} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.29})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial y} \right) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_n \frac{k_y^2}{\omega_n} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.30})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial z} \right) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_n \frac{k_z^2}{\omega_n} \cos^2(k_z z) \quad (\text{D.31})$$

$$\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_n \frac{1}{\omega_n} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.32})$$

Y, de este modo, se tiene finalmente:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(I)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \int d^2 k_{\parallel} \sum_n \frac{k_z^2}{\omega_n} \quad (\text{D.33})$$

Por su parte, los términos necesarios para calcular $T_{zz}^{(II)}$ vienen dados por:

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial t} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \frac{\omega_k^2}{\omega_k} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.34})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial x} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \frac{k_x^2}{\omega_k} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.35})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial y} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \frac{k_y^2}{\omega_k} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.36})$$

$$\langle 0 | \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi^-}{\partial z} \right) | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \frac{k_z^2}{\omega_k} \cos^2(k_z z) \quad (\text{D.37})$$

$$\langle 0 | \phi^+ \phi^- | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \frac{1}{\omega_k} \sin^2(k_z z) \quad (\text{D.38})$$

Por tanto:

$$\langle 0 | T_{zz}^{(II)} | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^2 a} \frac{a}{2\pi} \int d^3 k \frac{k_z^2}{\omega_k} \quad (\text{D.39})$$