



Universidad
Zaragoza



Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO

EFFECTOS NO CONVENCIONALES EN LA
FÍSICA DE NEUTRINOS DEBIDOS A UNA
DEFORMACIÓN DE LA RELATIVIDAD
ESPECIAL

AUTORA:

Leire Salamero Lorea

DIRECTORES:

José Manuel Carmona Martínez

José Javier Relancio Martínez

Departamento de Física Teórica
Zaragoza, 14 de julio de 2020

Resumen

En la búsqueda de física más allá del Modelo Estándar, es interesante preguntarse por fenomenología de Gravedad Cuántica accesible con la tecnología actual. En este trabajo se analiza la desintegración $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$ desde el punto de vista de la cinemática de la relatividad doblemente especial (DSR), considerando una escala de energía Λ inferior a la de Planck, con el fin de encontrar si su efecto en la energía del neutrino podría ser detectable.

Abstract

When searching for physics beyond the Standard Model, we can wonder about the Quantum Gravity phenomenology which may be accessible with current technology. This work analyses the decay $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$ using doubly-special relativity (DSR) kinematics at a scale Λ lower than Planck energy so as to find whether its effect in neutrino energy could be detectable.

Agradecimientos

Gracias a José Manuel Carmona, José Javier Relancio y Jose Luis Cortés por la ayuda prestada en la realización de este trabajo. Gracias también a mis padres, por el apoyo constante, y en especial a mi padre por su infinita paciencia.

Índice de contenidos

1. Introducción	1
1.1. Gravedad Cuántica	1
1.1.1. LIV	3
1.1.2. DSR	5
1.2. Neutrinos	7
1.2.1. Fuentes y detectores	8
2. Desintegración a dos partículas	11
2.1. Relatividad Especial	11
2.2. DSR	13
3. Conclusiones	17
4. Bibliografía	19

Lista de acrónimos y abreviaturas

- GR: General Relativity.
- QFT: Quantum Field Theory.
- SM: Standard Model.
- QG: Quantum Gravity.
- SR: Special Relativity.
- LIV: Lorentz Invariance Violation.
- EFT: Effective field theory.
- SME: Standard Model Extension.
- mSME: Minimal Standard Model Extension.
- QED: Quantum Electro Dynamics.
- DSR: Doubly-Special Relativity
- GRB: Gamma-Ray Bursts.
- AGN: Active Galactic Nuclei.
- WIMP: Weak Interacting Massive Particles.
- CMB: Cosmic Microwave Background
- CR: Cosmic-Ray.
- PMT: Photomultiplier.
- DOM: Digital Optical Module.

1. Introducción

Actualmente en Física hay dos teorías consolidadas: la Relatividad General (GR), que describe la interacción gravitatoria, y la Teoría Cuántica de Campos (QFT), que se encarga del resto de interacciones. Estas dos teorías son disjuntas, ya que a pesar de que QFT es una teoría relativista, no incluye los efectos gravitacionales y está formulada usualmente en el espacio plano de Minkowski, propio de Relatividad Especial, mientras que GR es una teoría clásica que no tiene en cuenta las propiedades cuánticas de las partículas [1].

Estas diferencias no implican que una sea correcta y haya que considerar la otra errónea, ya que ambas funcionan perfectamente en sus respectivos campos, como se ha mostrado a lo largo de los años. Sin embargo, hay ciertas cuestiones, como qué ocurre dentro de los agujeros negros y el estado inicial de alta densidad del Universo [2], en las que se necesita la combinación de ambas teorías para poder encontrar una descripción. Es aquí donde se muestra la incompatibilidad de sus marcos de trabajo.

¿Cuales son, entonces, estas incompatibilidades? Primero, GR describe el campo gravitatorio como un campo clásico dinámico mientras que QFT, como su nombre indica, describe campos cuantizados; por tanto, si QFT se considera una ley universal, habría que cuantizar el campo gravitatorio. Mientras que el espacio-tiempo es una entidad dinámica en Relatividad General, en QFT constituye una estructura fija sobre el que se describe la evolución de las variables dinámicas [2]-[3].

Todo esto lleva a una conclusión clara: el Modelo Estándar (SM) no está completo tal y como está descrito hoy en día (de hecho deja de ser consistente a energías arbitrariamente altas [3]) y se necesita ir más allá, consiguiendo encontrar una teoría que describa la cuantización de la gravitación. Presumiblemente, será una teoría que se desviará de lo predicho por nuestras teorías a energías por encima del límite de validez de la teoría de Einstein y que, en el límite de baja energía, se recuperará GR [4].

Esta teoría es la gravedad cuántica y será el marco teórico que uno debería tomar para justificar la posible aparición de una deformación de la cinemática relativista con implicaciones en la física de neutrinos, que es el tema de este TFG.

1.1. Gravedad Cuántica

Habiendo introducido muy brevemente de dónde surge esta idea del marco teórico de gravedad cuántica, en esta sección se desarrollará más a fondo este concepto y se hablará de los posibles enfoques teóricos de la misma.

No todos los físicos se muestran de acuerdo en que haya que buscar una teoría de este tipo, pero parece razonable que para describir la gravedad se necesitará cuantizarla, ya que la métrica depende de otros campos cuya naturaleza cuántica está bien establecida [5]. Tampoco hay un consenso sobre cómo realizar dicha cuantización; existen dos corrientes mayoritarias dependiendo de la especialización de los físicos: los de partículas utilizan la teoría perturbativa para alterar GR, mientras que los relativistas buscan una cuantización directa [5]. Estos dos enfoques son bastante distintos, pero casi todas las teorías que forman parte de este marco coinciden en que tiene que haber una modificación en el espacio-tiempo a distancias de la escala de Planck, donde

el continuo se convierte en discreto [6].

Otra de las cuestiones en las que tampoco hay un consenso es si este marco teórico de gravedad cuántica que se está describiendo es o no una unificación de todas las interacciones, siendo la corriente que está a favor de la unificación aquella que busca la cuantización a través de la teoría de perturbaciones. A estas teorías que buscan la unificación de las interacciones se les suele dar el nombre de *teorías del todo* o TOE (las siglas en inglés) [3]. La más relevante es la Teoría de Cuerdas, que a su vez tiene numerosas ramificaciones como son la Teoría M, la Supergravedad o las Supercuerdas (que surge al introducir el concepto de supersimetría) y es una de las grandes candidatas a ser la teoría de gravedad cuántica. Es una teoría perturbativa que a bajas energías se reduce a GR y que considera la gravedad como una interacción emergente e incluye teorías gauge [3]; pero de momento, a pesar de ser una de las candidatas más interesantes, no se ha conseguido obtener un formalismo consistente [7] ni encontrado observaciones ni experimentos que nos indiquen que es la teoría correcta [6]. Presenta, de hecho, problemas como la predicción errónea del signo de la constante cosmológica [5], llevando así a un Universo sin una expansión acelerada, al contrario de lo observado.

El otro enfoque teórico no pretende encontrar una Teoría del Todo sino que busca únicamente conseguir la cuantización de la gravedad, partiendo de una teoría ya establecida (casi siempre GR) y aplicando diferentes reglas de cuantización; es así como se llega a las teorías covariantes y canónicas de la gravedad cuántica [3]. Otra de las teorías candidatas más conocidas es la Gravedad Cuántica de Bucles, que tiene tanto una versión canónica como otra covariante, de la que se puede encontrar más información en la referencia [8]. Un listado de las diferentes candidatas puede consultarse también en la referencia [6].

El marco teórico de QG es especialmente interesante si se considera su fenomenología, pero uno de sus problemas es que no es posible acceder directamente a la escala donde los efectos cuánticos de la gravedad serían relevantes si dicha escala es la de Planck [3]:

$$l_p \approx 1.62 \cdot 10^{-33} \text{ cm}; \quad t_p \approx 5.39 \cdot 10^{-44} \text{ s}; \quad m_p \approx 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}.$$

Los parámetros anteriores son, respectivamente, la longitud, el tiempo y la masa de Planck. Existen también argumentos para identificar la longitud de Planck l_P con una longitud mínima a partir de la cual se pierde el significado del espacio y el tiempo en relatividad, como se muestra en la referencia [9].

La información obtenida sobre los comienzos del Universo indica que había una densidad de partículas elevada con energías comparables a la de Planck que jugaba un papel importante en esos primeros estados [1]. La fenomenología de gravedad cuántica sería especialmente útil en esta situación ya que las predicciones teóricas realizadas podrían ser contrastadas con las mediciones experimentales. Estos nuevos efectos predichos deberían dominar para partículas de energías cercanas a la de Planck y estar presentes para aquellas que tuvieran energías menores, caso en el que las correcciones serían muy pequeñas y podrían ser difíciles de detectar, especialmente si los límites esperados y calculados son los correctos, puesto que las correcciones serán, supuestamente, cercanas a la escala de Planck [1].

La búsqueda de este tipo de efectos es relativamente nueva, puesto que fue entre 1997 y 2000 cuando se llevaron a cabo análisis que mostraron qué efectos introducidos en la escala de Planck se podían testear. Un resultado importante fue el hecho de que algunos de estos análisis consideraban

efectos en la escala de Planck acumulados por la desviación de la simetría de Lorentz clásica. El espacio-tiempo de Minkowski está relacionado con la simetría clásica de Lorentz y, por tanto, al introducir elementos cuánticos en la estructura del espacio-tiempo esta simetría puede verse afectada [1]; esto permitiría probar las teorías de gravitación cuánticas a un nivel puramente cinemático.

En particular, este trabajo se centrará en el marco de fenomenología de gravedad cuántica, analizando la cinemática de ciertas desintegraciones de partículas. El desarrollo de este trabajo se centra en un régimen intermedio en el que los efectos cuánticos y gravitatorios pueden ser ignorados (considerando $G \rightarrow 0, \hbar \rightarrow 0, m_P = \sqrt{\hbar c/G}$ finito), quedando como huella indirecta de dichos efectos una desviación de la Relatividad Especial (SR) [10], la cual se recupera al considerar el límite $m_P \rightarrow \infty$. Se tendrán en cuenta dos desviaciones: violación de invariancia Lorentz (LIV) y deformación de la relatividad especial (DSR).

1.1.1. LIV

Como se ha comentado ya en la sección anterior, la fenomenología de QG será relevante a energías de la escala de Planck, pero para poder indicar si la teoría es correcta o no, se necesita poder acotar dichos efectos o limitar aquellas teorías formuladas para así comprobar con la fenomenología que ésta es la línea correcta de trabajo. Asimismo, se han enumerado algunas de las posibles líneas de investigación. Una idea que ha ganado bastante interés a lo largo de los años es considerar la posibilidad de que haya violación de invariancia Lorentz (LIV) cuando los efectos de la teoría QG son relevantes.

La invariancia Lorentz es un ingrediente esencial en la formulación de SR. Las leyes de transformación Lorentz sustituyen a las leyes de transformación de Galileo cuando se incluyen los efectos relativistas, y los invariantes cinemáticos, bajo dichas transformaciones, permiten establecer criterios de selección que prohíben ciertas desintegraciones. Es uno de los ingredientes fundamentales del SM puesto que permite establecer simetrías de gran importancia en la física como son las simetrías de gauge. Se considera que el mundo en el que vivimos es, a energías por debajo de la de Planck, invariante Lorentz, pero este hecho no es incompatible con que cuando se analice el comportamiento a altas energías pueda encontrarse una violación de dicha invariancia como consecuencia de QG [11].

El estudio de una posible pérdida o inconsistencia de la invariancia Lorentz se remonta hasta casi los años 60-70, siendo en los 80 cuando comenzaron a aparecer trabajos en esta línea ([12], [13]).

De forma similar a lo que se comentó para las posibles teorías de QG, hay distintos modelos teóricos en cuyo marco se han analizado posibles tests de esta hipótesis. Los marcos teóricos tras esta teoría, o bien rompen explícitamente la invariancia, consiguiendo así que haya un observador privilegiado, o pueden modificar el álgebra de Poincaré, modificando por tanto las relaciones entre los sistemas de referencia inerciales [14]. Una posibilidad son las diferentes formulaciones de la teoría de campos efectiva (EFT, *effective field theory*) [14]. Por ejemplo, el SME (*Standard Model Extension*), que extiende el modelo estándar incluyendo GR y todos los operadores de LIV cuya adición no viola simetrías gauge [11] (para más información puede consultarse la referencia [15] donde se trata esta teoría y las simetrías Lorentz y CPT). Otro ejemplo derivado

del SME es el mSME (*Minimal Standard Model Extension*) cuyos operadores tienen que satisfacer condiciones como preservar la simetría gauge interna o el subgrupo de traslaciones de Poincaré [11]. Variaciones de la Teoría de Cuerdas y la Gravedad Cuántica de bucles también pueden incluir una violación de la simetría de Lorentz [14].

Aunque éste sea un trabajo que no se centra en el marco teórico de QG, vale la pena remarcar que el hecho de encontrar posibles evidencias de LIV no supondría una confirmación de ningún modelo de QG en especial; lo que sí sería es una evidencia de que hay física más allá de la física establecida. Antes de pasar a la fenomenología, es importante señalar que lo ideal sería que se preservara el mayor número posible de rasgos compatibles con la relatividad general mientras se introduce la violación de invariancia Lorentz local [14]. Tanto el principio de equivalencia como la causalidad también se verán modificadas a altas energías por LIV.

Los efectos producidos por la ruptura de la invariancia serán más fuertes a la escala de Planck. Sin embargo, diseñar experimentos a esa escala es impensable a día de hoy, así que la estrategia seguida para estudiar la fenomenología es intentar encontrar huellas de estos efectos a baja energía y establecer restricciones sobre los mismos. Los experimentos diseñados se pueden agrupar en dos categorías [11]: los terrestres, de baja energía y las observaciones astrofísicas.

A bajas energías, los experimentos tienen que ser muy específicos puesto que los efectos esperados son muy pequeños (a baja energía se tiene que recuperar la invariancia Lorentz). Entre estos pueden encontrarse los experimentos de comparación de relojes, importantes para establecer restricciones en los parámetros de mSME, las medidas de la masa de los mesones neutros (una modificación de ésta podría estar producida por los operadores de SME), o el retroceso de átomos. Para más información, una lista más extensa de los efectos (tanto de los terrestres como de las observaciones astrofísicas) se puede encontrar en los dos artículos de referencia de la sección: [11] y [14].

Las observaciones astronómicas o astrofísicas envuelven procesos de alta energía que dejan huellas a bajas energías; reciben el nombre de *ventanas a la QG* [14] y las más relevantes son los efectos en el tiempo de vuelo y en los umbrales de las interacciones.

Para analizar el tiempo de vuelo se necesitan partículas de altas energías que recorran largas distancias (conocidas como astropartículas), como los fotones [16] o los neutrinos. El vuelo de estas partículas tiene asociado un efecto de amplificación debido a las largas distancias que recorren, y una de las restricciones que se pueden obtener de aquí está relacionada con la birrefringencia (velocidad de la luz dependiente de la polarización [14]). Sería posible que se enmascarase una señal LIV debido a diferentes energías emitidas a distintos instantes de tiempos [14], lo que puede evitarse buscando correlaciones entre el retraso en vuelo y el redshift (estudiando el retraso para varios redshifts ya que es un efecto que se incrementa con el tiempo). Los límites establecidos con estos tests tienen la ventaja (o desventaja) de que, debido a su naturaleza cinemática, se pueden realizar para cualquier relación de dispersión aun sin conocer la dinámica que describe los efectos [11]. La birrefringencia del vacío es otro de los efectos acumulativos, y las restricciones que se obtienen de sus operadores son más fuertes que las del vuelo de las partículas [14].

En cuanto a los umbrales de las interacciones, hay que conocer primero cómo LIV afecta a la cinemática de las partículas. Cuando se analizan problemas de cinemática en SR, las relaciones con las que se trabaja son la ley de composición (que representa la ley de conservación de energía o de momentos) y la relación de dispersión (en SR: $E^2 = p^2 + m^2$). Para describir procesos en

LIV se modifica la relación de dispersión; la modificación más sencilla es definir una función

$$F(E, p) = m^2$$

y considerar el desarrollo en potencias de p centrado en $p = 0$ [14]. Para estudiar los umbrales no es necesario tener en cuenta la modificación de la dinámica [14].

Las restricciones en los umbrales de desintegración se determinan, por tanto, mediante la relación de dispersión. La modificación de ésta hace que los resultados experimentales esperados sean distintos, así que lo que hay que buscar son cambios en los umbrales de las reacciones que están permitidas en SR o reacciones permitidas en el contexto de LIV y no en SR (por ejemplo, la desintegración del fotón en un par leptón-antileptón o el photon splitting $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ —prohibida cinemáticamente en QED—) [14].

Si se tiene interés en el aspecto técnico del análisis de la fenomenología, en la referencia [16] se detalla el procedimiento de análisis de búsqueda de señales LIV utilizando espectros de rayos gamma de TeV. Se obtiene de aquí que se necesitan solo dos cantidades para determinar la contribución del espectro medido en la búsqueda de una señal de LIV: la distancia de la fuente (controla la cantidad de modulación) y la máxima energía medida en el espectro (regula la cantidad de datos de los que se dispone en el rango de energías).

La física de neutrinos también se ve afectada al tener en cuenta LIV. La propagación de los neutrinos se modifica y, de hecho, como son más energéticos que los fotones al no sufrir interacciones que disminuyan su energía durante su propagación, tienen mayor retraso en sus vuelos y, según las referencias [11], [14], son incluso mejores candidatos para el estudio de umbrales de reacciones para encontrar efectos LIV. Los experimentos de las oscilaciones de neutrinos son también muy sensibles a una modificación de la relación de dispersión al ser una consecuencia de la diferencia entre la energía y el módulo del momento de los neutrinos [14].

1.1.2. DSR

Aparte de LIV, otra posibilidad es considerar una modificación de invariancia de Lorentz en vez de su violación. La idea tras DSR es bastante reciente comparada con la historia de LIV que se ha explicado en la sección anterior; las primeras referencias a esta nueva teoría datan de principios de los 2000 ([17], [18]) mientras que en la anterior eran de los años 60.

Las siglas DSR vienen de *Doubly-Special Relativity*. A veces se ha descrito como deformación de Relatividad Especial, aunque no es del todo correcto etiquetarlo como deformación puesto que no toda deformación de SR es una teoría DSR. Se tienen que cumplir unos requisitos determinados [19] llamados principios de DSR:

- Tiene que haber un principio de relatividad (al contrario que en LIV). En este marco, todos los observadores inerciales son equivalentes.
- Tiene que tener dos escalas invariantes características (independientes del observador): c , la velocidad de la luz (característica de SR), y otra que representa una mínima longitud o máxima energía [19]. En general, una deformación implica la aparición de una escala que modifica la relación de dispersión, convirtiéndola en no lineal, la misma en todo sistema de referencia inercial [20].

La segunda escala, E_{DSR} (o L_{DSR}) se suele identificar en la literatura como la escala de Planck [14] pero nada impide que tenga un valor menor. De hecho, experimentos en el LHC han intentado establecer un límite inferior a TeV [21]. Es importante considerar todas las posibilidades, pero solo con los resultados experimentales podrá determinarse cuál es la escala correcta [19].

La idea tras DSR puede resultar más interesante que LIV porque se siguió un proceso similar cuando Einstein introdujo SR. Para dar el paso de la relatividad de Galileo al marco de SR, Einstein introdujo una escala invariante c con la que se modificaron las transformaciones del sistema, obteniéndose así las transformaciones de Lorentz, cuyo límite a bajas velocidades recupera las de Galileo. La idea para pasar de SR a DSR es similar a esta, introducir una nueva escala invariante que, de nuevo, modificará las leyes de transformación del sistema y cuyo límite inferior será SR [22]. Esta segunda escala, de la que ya se ha hablado un poco, podría ser la huella que dejan las constantes G, \hbar en el límite $G \rightarrow 0, \hbar \rightarrow 0$ [20].

La existencia de dos escalas invariantes para formular una teoría cinemática en DSR fuerza a modificar las transformaciones de Lorentz de un modo no lineal, y esto a su vez lleva a una modificación tanto de la relación de dispersión como de la ley de composición de momentos (o energías) [22]. La existencia de leyes de composición no lineales tiene también implicaciones sobre el espacio-tiempo y, en particular, sobre la noción de localidad de las interacciones. La localidad absoluta de relatividad especial se convierte en una “localidad relativa”, dependiente del observador [23].

No se ha encontrado todavía un marco que pueda describir DSR de forma satisfactoria. Sin embargo, sí se han formulado diversos modelos juguete haciendo uso de las representaciones no lineales del grupo estándar de Poincaré-Lie, el espacio-tiempo canónico no conmutativo [19] o el álgebra de Poincaré-Hopf. En concreto, el uso del álgebra κ -Poincaré-Hopf es uno de los más extendidos [22]; con él puede formularse un marco matemático que describe la cinemática de dos partículas en DSR y que puede extenderse a más[20].

Al principio, los estudios buscaban una modificación de la relación de dispersión en la forma $E^2 = p^2 + m^2 + \eta L_p^n E^{n+2}$ basándose en formalismos ya establecidos en QG [19]. La complejidad de estos formalismos hacía difícil conocer cuáles eran las consecuencias físicas que podían esperarse.

Como se explica en la referencia [22], una de las posibles consecuencias de una modificación en la relación de dispersión de relatividad especial podría ser la observación de rayos cósmicos cuyas energías están por encima de la llamada “energía GZK” (del orden de 10^{19} eV) que marca el umbral de la interacción de los rayos cósmicos con el fondo cósmico de microondas.

Sin embargo, analizando la fenomenología de DSR, se encuentra que los umbrales de reacciones astrofísicas se ven modificados mucho menos en este caso que para LIV [14]. Aquellas interacciones no permitidas en SR seguirán sin serlo para DSR, pero sí podrían encontrarse huellas de DSR en el desplazamiento de los umbrales de aquellas reacciones que sí están permitidas; este desplazamiento resulta ser muy pequeño y muy difícil de observar. Como consecuencia, los experimentos que pueden arrojar más luz sobre las posibles restricciones que se pueden establecer para el caso de DSR son los test de tiempo de vuelo [20].

Esta fenomenología es la esperada cuando la escala de energías se identifica como la de Planck (o de valor similar). Tal y como se ha comentado al principio de la sección, la escala de Planck es la más común pero no la única posible; vale la pena estudiar cuál sería la fenomenología esperada

para los umbrales de desintegración si la escala invariante tuviese un valor menor. El presente TFG constituye una primera contribución a dicho estudio.

En esta sección se ha dejado claro que, de momento, aún no hay una teoría como tal que sea compatible con DSR y, en consecuencia, no se dispone de ninguna fenomenología “real” de DSR. Para afirmar que se está haciendo fenomenología “de verdad”, habría que tener un marco teórico establecido que fuera compatible con los principios de DSR y caracterizarlo.

Se puede adquirir cierta perspectiva de tests realizados sobre teorías de juguete DSR [19]. En la referencia anterior se incluyen posibles teorías test: una “confined to leading order” y otra “all-order perspective” donde se indica que las simetrías DSR podrían ser solo unas simetrías aproximadas. Cualquier experimento que dé evidencia de la existencia de un observador privilegiado implicaría la no existencia de DSR.

1.2. Neutrinos

Conocida la necesidad de buscar efectos más allá de SR, hay que preguntarse cómo pueden estudiarse. Se buscan efectos de alta energía en la cinemática de las partículas que pueden ser detectados mediante observaciones astrofísicas (siempre que los instrumentos tengan la suficiente sensibilidad) [10]; interesan, para dicha discusión, partículas de alta energía que recorran largas distancias, como los neutrinos.

A estas partículas se les ha denominado *mensajero astronómico ideal*. Debido a la baja interacción de los neutrinos con la materia, el Universo se presenta prácticamente transparente a su paso y sus trayectorias se ven muy poco afectadas (característica que resulta muy útil a la hora de identificar las fuentes) [24]. El estudio de estas partículas, por tanto, permite llevar a cabo una investigación tanto en el marco de la astrofísica, ya que los neutrinos recorren largas distancias hasta llegar a nosotros, como en el de la física de partículas, centrando así el estudio en aquellos neutrinos de altas energías dentro del rango 100 TeV a 10 EeV. Son, entonces, una buena elección para estudiar la fenomenología de gravedad cuántica.

En el contexto de este trabajo se engloban los neutrinos en tres categorías: cosmogénicos (neutrinos de ultra alta energía asociados al decaimiento de los piones en los procesos GZK según lo predicho por Berezhinsky y Zatsepin [24]), astrofísicos (producidos por fuentes astrofísicas) y atmosféricos (producidos en la atmósfera). Los neutrinos atmosféricos pueden penetrar fácilmente en la Tierra y por tanto, son observables desde cualquier dirección; constituyen a su vez un fondo constante en la búsqueda de neutrinos astrofísicos, siendo la contribución dominante hasta energías del orden de 100 TeV [25]. Para diferenciar entre los neutrinos atmosféricos y los astrofísicos se puede analizar el espectro de energía, teniendo en cuenta que el flujo de neutrinos astrofísicos esperado es bajo, o analizando su direccionalidad, que los identificará como astrofísicos sobre todo si sus direcciones están asociadas a fuentes conocidas [24].

La física de neutrinos es un área de investigación muy amplia en la que, a día de hoy, aún hay muchas cuestiones sin respuesta, como el debate de si los neutrinos son partículas de Dirac o Majorana, o si hay una posible violación CP (recientemente se ha llegado a ver indicios de asimetría CP como se indica en la referencia [26]), pero la discusión de estos fenómenos se aleja del objetivo de este trabajo.

En relación a la búsqueda de efectos de nueva física, no hay que olvidar la masa de los neutrinos,

que se considera nula en el SM. La evidencia experimental disponible impone una cota superior a su valor [27].

Hay más huellas posibles de nueva física. Una posibilidad sería modificaciones en la sección eficaz de los neutrinos cosmogénicos, detectables a partir de desviaciones con respecto a lo extrapolado de los resultados a bajas energías [24]. Otra posibilidad sería encontrar modificaciones en el espectro de energía como podrían ser picos o cortes [28]. Estos efectos podrían aparecer tanto por la inestabilidad de los neutrinos al introducir física más allá del SM, como por la producción de neutrinos a partir de la materia oscura según algunos modelos (en los que se propone que del decay de la materia oscura o de su aniquilación podrían obtenerse neutrinos) [28]. Otros modelos de física más allá del SM también aluden a que podría haber un cambio en la ratio (1:1:1) de las oscilaciones de neutrinos al llegar a la Tierra [28].

1.2.1. Fuentes y detectores

La lista de posibles fuentes de producción de neutrinos es extensa. En concreto, la de los neutrinos de alta energía incluye: GRBs, fuentes asociadas a objetos estelares (restos de explosiones de supernovas galácticas, sistemas binarios de rayos-X, microcuasars), AGN, producción asociada a los rayos cósmicos, y posiblemente, agujeros negros primordiales [29]. Todas estas posibles fuentes tienen una característica común: son aceleradores de partículas.

Los GRBs (*gamma-ray bursts*) se asocian a explosiones extremadamente energéticas en el colapso de estrellas masivas en agujeros negros en procesos de supernova [25]. Son fuentes muy interesantes de neutrinos cuyas energías están en el rango de MeV a EeV [29].

La producción de neutrinos asociada a rayos cósmicos (CR) puede ocurrir en diferentes situaciones: cuando estos se aceleran cerca de sus fuentes, en su periferia cuando están escapando, o durante su interacción con el fondo cósmico de microondas (CMB) [30]. En esta última, los rayos al viajar por el espacio interaccionan siguiendo

$$\begin{aligned} p + \gamma_{bg} &\rightarrow n + \pi^+, \\ p + \gamma_{bg} &\rightarrow p + \pi^0. \end{aligned} \tag{1}$$

Al desintegrarse, el pión neutro crea un flujo de rayos gamma de alta energía [30], y los piones cargados se desintegran en 3 neutrinos de alta energía (ν) y 3 anti-neutrinos ($\bar{\nu}$) vía la cadena $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ seguida de $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$, y el proceso de las cargas conjugadas. Esta interacción aparece a partir de un valor de energía concreto conocido como E_{GZK} (Greisen-Zatsepin-Kuzmin, que ya se ha nombrado anteriormente), el cual marca el límite superior energético de los CR; esto explica el *cutoff* que se encuentra al analizar el espectro de dichos rayos, tal y como han podido detectar los experimentos HiRes y Auger [24].

Los rayos cósmicos con origen en explosiones de supernova también pueden interaccionar con el gas del disco galáctico produciéndose así piones de las tres cargas que, de nuevo, decaerán en fotones y neutrinos [25].

En el caso de fuentes extragalácticas, los neutrinos pueden producirse, por ejemplo, en el disco de acreción de un AGN (*Active Galactic Nucleus*). Los protones pierden energía por efecto de los elevados campos magnéticos y permanecen atrapados mientras los neutrones y los productos de la desintegración de los piones cargados y neutros se escapan con alta energía [25]. Por ello

los blazars, particularmente, son una posible fuente de flujos de neutrinos de energías de TeV a EeV [29].

La detección de neutrinos de alta energía es ciertamente complicada. Según el modelo de flujo de neutrinos de Waxman-Bahcall, se necesita un detector de un km^2 únicamente para poder encontrar de 10 a 50 interacciones por año de neutrinos de energía TeV [24]. Es necesario, por tanto, disponer de grandes superficies y por ello, a lo largo de los años, se han instalado diferentes detectores en grandes extensiones de hielo (AMANDA entre 1996 y 2004, IceCube desde el 2010 hasta el presente) o de agua (ANTARES, localizado bajo el Mar de Mediterráneo o Super-Kamiokande en Japón). Otros experimentos como ANITA y RICE han conseguido establecer límites superiores al flujo de neutrinos cosmogénicos [24]. Este tipo de detectores reciben el nombre de *detectores de Cherenkov*.

En concreto, el IceCube es un detector de neutrinos situado en el Polo Sur. Su localización es ideal ya que, además de cumplir el requisito de tener una gran superficie de detección, la propia Tierra actúa de filtro absorbiendo el flujo de fondo de los muones inducidos por los rayos cósmicos [24]. Este detector tiene 5160 módulos ópticos digitales (DOM) [30] distribuidos verticalmente en cuerdas y equiespaciados 17 metros; los DOM están enterrados bajo una capa de 1450 m de hielo y colocados en huecos verticales en su interior [24], cubriendo un volumen de 1 km^3 . Los módulos son esferas que contienen un fotomultiplicador (PMT) y un aparato electrónico que se encarga de digitalizar la señal detectada [30].

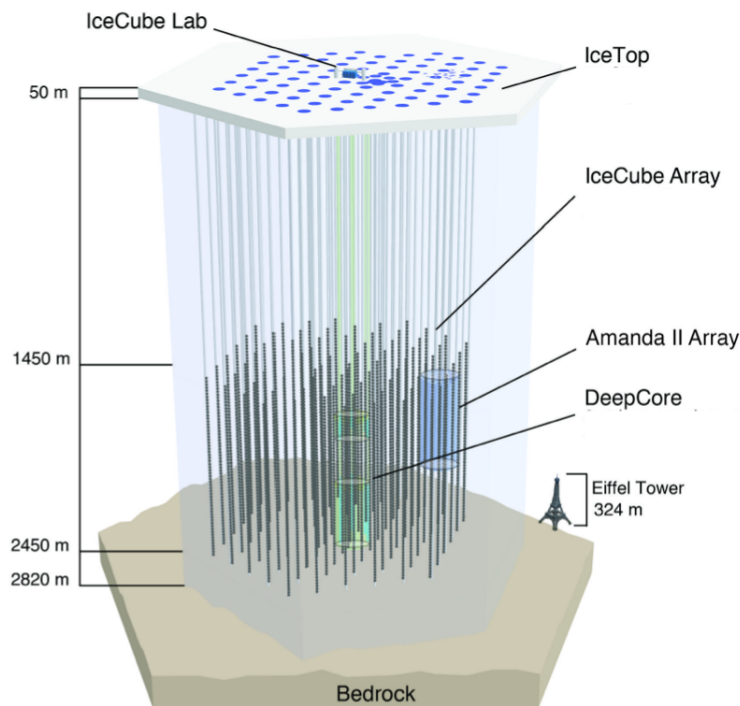


Figura 1: Esquema de la estructura del detector IceCube obtenida de la referencia [30]

IceCube está optimizado para energías superiores a 10 TeV (aunque detecta neutrinos con energías a partir de 0.1 TeV) pero el umbral en el DeepCore es menor, de 10 GeV. De hecho, se puede considerar que el propio IceCube actúa como filtro para aquellos eventos de neutrinos que ocurren fuera del DeepCore (éste proporciona una ventana para estudiar los neutrinos atmosféricos

[24]). La primera publicación de detección de un flujo de neutrinos cósmicos se puede consultar en la referencia [31], donde se recogen 28 eventos candidatos de energías por encima de 30 TeV, registrados en el IceCube desde mayo de 2010 a mayo de 2012.

La detección de los neutrinos se realiza mediante interacciones, como es común en la física de partículas. Los neutrinos cósmicos llegan a la Tierra e interactúan predominantemente por scattering inelástico con los núcleos del hielo [30], obteniéndose como productos una cascada hadrónica, si el neutrino es lo suficientemente energético [29], y una partícula cargada (electrón si el neutrino es ν_e , muón si es ν_μ o tau si ν_τ) si son corrientes cargadas. El agua o el hielo es un medio natural de radiación Cherenkov (partículas relativistas que se mueven más rápido que c en el medio) por lo que la partícula producida viaja por ella generando dicha radiación. La radiación será recogida y procesada por los PMT del detector. De esta señal se puede obtener diversa información (como el momento de detección, la amplitud de la señal, la topología...) con la que reconstruir el camino seguido por la partícula [29].

En el proceso de análisis se identifican dos clases de eventos: trazas y cascadas. Las trazas se identifican como muones de vida larga que atraviesan el detector; los electrones energéticos tienen un scattering muy rápido y los taus que se han producido en interacciones CC una vida media muy corta, así que ninguno produce trazas alargadas [30]. Las cascadas hadrónicas también pueden ser identificadas al radiar fotones Cherenkov y son esféricas en vez de alargadas. Estos dos eventos contribuyen de forma distinta a la identificación de las propiedades del neutrino detectado: las cascadas dan una mejor estimación de la energía puesto que los muones sufren pérdidas de energía en su paso por el detector (por ionización, bremsstrahlung, producción de pares e interacciones foto-nucleares), mientras que las trazas indican la dirección [30]. Además de los eventos descritos, pueden observarse otros como el double-bang (generado por la lluvia hadrónica y la desintegración de la partícula) o el lollipop, ambos relacionados con los tauones. Para más información, puede consultarse la referencia [24].

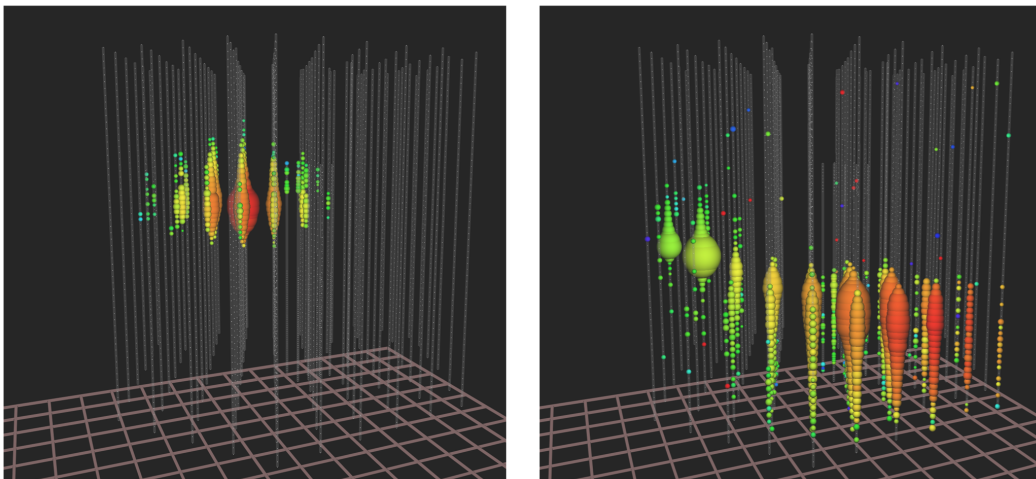


Figura 2: La imagen de la izquierda presenta un ejemplo de un evento de cascada de un neutrino ν_e o ν_τ y la de la derecha es la traza que deja un muón al atravesar el detector. Ambas han sido sacadas de la referencia [30]

2. Desintegración a dos partículas

Visto que los neutrinos son mensajeros astronómicos ideales, analizaremos ahora su espectro de energías en la desintegración $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$, tanto en el marco de la cinemática SR como en el de DSR. Primero haremos el cálculo de forma genérica con el fin de poder estudiar, también, la desintegración en dos partículas dentro del marco DSR. Particularizaremos luego para poder comparar los resultados obtenidos a una escala de energías Λ menor que la escala de Planck.

2.1. Relatividad Especial

Vamos a estudiar la cinemática de la desintegración de una partícula de masa m cuyo cuadrimomento es $K = (E, \vec{k})$ en dos partículas 1 y 2 de masas m_1 y m_2 y cuadrimomentos $P = (E_1, \vec{p})$ y $Q = (E_2, \vec{q})$, respectivamente. Aplicando la conservación del momento obtenemos

$$\begin{aligned} k &= p \cos \theta_1 + q \cos \theta_2, \\ 0 &= p \sin \theta_1 - q \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (2)$$

donde θ_1 y θ_2 representan los ángulos que forman los vectores \vec{p} y \vec{q} con la dirección marcada por el vector \vec{k} . k, p, q representan los módulos de los momentos de las partículas.

Despejando $\cos \theta_2$ y $\sin \theta_2$ se puede aplicar la relación fundamental de la trigonometría y obtener una relación entre los momentos de las partículas

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1 &\rightarrow \frac{(k - p \cos \theta_1)^2}{q^2} + \frac{(p \sin \theta_1)^2}{q^2} = 1, \\ \cos \theta_1 &= \frac{k^2 + p^2 - q^2}{2kp}. \end{aligned} \quad (3)$$

La función coseno está acotada entre 1 y -1 , por lo tanto, calculando $1 - \cos \theta_1$ la función que obtengamos tendrá que ser positiva para cualquier valor del ángulo θ_1 .

$$1 - \cos \theta_1 = \frac{2kp - k^2 - p^2 + q^2}{2kp} > 0 \rightarrow 2kp - k^2 - p^2 + q^2 > 0. \quad (4)$$

Buscamos una expresión que únicamente dependa de las energías de la partícula 1, E_1 , y de la partícula inicial, E . Para ello utilizamos la relación de dispersión:

$$\begin{aligned} p^2 &= E_1^2 - m_1^2, \\ q^2 &= E_2^2 - m_2^2, \\ k^2 &= E^2 - m^2, \end{aligned} \quad (5)$$

y valiéndonos de la aproximación ultrarrelativista,

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{E^2 - m^2} \approx E \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \right), \\ p &= \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \approx E_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{E_1^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo todo esto en la condición anterior obtenemos

$$2EE_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{E_1^2}\right) - E^2 + m^2 - E_1^2 + m_1^2 + E_2^2 - m_2^2 > 0. \quad (7)$$

Aplicando la conservación de la energía, $E = E_1 + E_2$, y operando:

$$2EE_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{E_1^2} - \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} + \frac{1}{4} \frac{m^2 m_1^2}{E_1^2 E^2}\right) - m^2 - m_1^2 + m_2^2 + 2EE_1 > 0. \quad (8)$$

El cuarto término se desprecia puesto que, en comparación con los demás términos de la ecuación, es de menor orden. Por tanto, la expresión final es

$$m^2 E_1^2 + (m_2^2 - m^2 - m_1^2) E E_1 + m_1^2 E^2 < 0. \quad (9)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado asociada se obtiene:

$$E_1 = \frac{E \left[(m^2 + m_1^2 - m_2^2) \pm \sqrt{(m_2^2 - m^2 - m_1^2)^2 - 4m_1^2 m^2} \right]}{2m^2}. \quad (10)$$

Una condición necesaria para que se pueda dar la desintegración es que el radicando sea positivo. Esto proporciona una relación entre las masas:

$$\begin{aligned} (m_2^2 - m^2 - m_1^2)^2 - 4m_1^2 m^2 &> 0, \\ m_2^4 + m^4 + m_1^4 &> 2(m_2^2 m^2 - m_2^2 m_1^2 + m^2 m_1^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Los valores de la energía de la partícula 1 que cumplen la condición (9) son $E_1^- \leq E_1 \leq E_1^+$ siendo E_1^- la raíz de E_1 con signo negativo y E_1^+ con el signo positivo.

El proceso para obtener E_2 es totalmente análogo al aquí desarrollado para E_1 y el resultado obtenido es

$$E_2 = \frac{E(m^2 + m_2^2 - m_1^2) \pm \sqrt{E^2(m_1^2 - m_2^2 - m^2)^2 - 4m^2 m_2^2 E^2}}{2m^2}, \quad (12)$$

y se debe cumplir la misma condición: $E_2^- < E_2 < E_2^+$.

Este análisis se puede particularizar para la desintegración

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu.$$

Considerando ν_μ como la partícula 1 y μ^- como la partícula 2, y por tanto $m_1 \approx 0$, $m_2 = m_\mu$ y $m = m_\pi$, las cotas para la energía del neutrino son:

$$\begin{aligned} E_1^- = E_\nu^- &= \frac{E(m_\pi^2 - m_\mu^2) - E\sqrt{(m_\mu^2 - m_\pi^2)^2}}{2m_\pi^2} = 0, \\ E_1^+ = E_\nu^+ &= \frac{E(m_\pi^2 - m_\mu^2) + E\sqrt{(m_\mu^2 - m_\pi^2)^2}}{2m_\pi^2} = \frac{E(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{m_\pi^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Los mismos resultados se obtendrían para la energía del neutrino si, en vez de la situación considerada, se tuviera que μ^- es la partícula 1 y ν_μ es la partícula 2.

2.2. DSR

En DSR se modifican tanto la ley de composición como la relación de dispersión. Un ejemplo de ley de composición y relación de dispersión modificadas en una teoría DSR es [32]:

$$(p \oplus q)_\mu = p_\mu + \left(1 + \epsilon \frac{p_0}{\Lambda}\right) q_\mu, \quad (14)$$

$$m^2 = \frac{l_0^2 - \vec{l}^2}{1 + \epsilon \frac{l_0}{\Lambda}}, \quad (15)$$

donde ϵ es un parámetro escalar de valores $\epsilon = \pm 1$.

Con estas nuevas relaciones se estudia el decay $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$ de forma genérica, considerando una partícula de masa m cuyo cuadrimomento es $K = (k_0, \vec{k})$ que se desintegra en dos partículas 1 y 2, de masas m_1 y m_2 y cuadrimomentos $P = (p_0, \vec{p})$ y $Q = (q_0, \vec{q})$, respectivamente.

Aplicando (14),

$$\begin{aligned} k &= (p \oplus q)_1 = p \cos \theta_1 + \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right) q \cos \theta_2, \\ 0 &= (p \oplus q)_2 = p \sin \theta_1 + \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right) q \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Se pueden elegir los ejes de forma que el eje X coincida con la dirección de la partícula inicial, $k_1 = k = |\vec{k}|$. Las componentes del momento de las partículas 1 y 2 vienen determinadas por los ángulos de desviación θ_1 y θ_2 respecto de la trayectoria inicial; por tanto $p_1 = |\vec{p}| \cos \theta_1$, $p_2 = |\vec{p}| \sin \theta_1$, $q_1 = |\vec{q}| \cos \theta_2$, $q_2 = |\vec{q}| \sin \theta_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2 &= 1 \rightarrow \frac{p^2 \sin^2 \theta_1}{\left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2 q^2} + \frac{(k - p \cos \theta_1)^2}{\left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2 q^2} = 1, \\ \cos \theta_1 &= \frac{p^2 + k^2 - \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2 q^2}{2kp}. \end{aligned} \quad (17)$$

$\cos(\theta_1)$ es una función acotada, $-1 \leq \cos \theta_1 \leq 1$, así que $1 - \cos \theta_1$ será positiva. Como el denominador siempre será positivo al ser el producto de dos módulos, esto implica

$$2kp - p^2 - k^2 + \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2 q^2 > 0. \quad (18)$$

Ahora hay que reescribir esta expresión de forma que solo dependa de las energías E y E_1 . Utilizando (14) y (15) obtenemos:

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{(E - E_1)^2 - m_2^2 \left(1 + \epsilon \frac{E_2}{\Lambda}\right) \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2}{\left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2}, \\ p^2 &= E_1^2 - m_1^2 \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right), \\ k^2 &= E^2 - m^2 \left(1 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Utilizando la aproximación ultrarrelativista, donde $E \gg m$:

$$\begin{aligned} p &= E_1 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{E_1^2} \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)} \approx E_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{E_1^2} \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)\right), \\ k &= E \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}\right)} \approx E \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \left(1 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}\right)\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Sustituyendo todo esto en (18):

$$\begin{aligned} &2E \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \left(1 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}\right)\right] E_1 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{E_1^2} \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)\right] - E_1^2 + m_1^2 \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right), \\ &- E^2 + m^2 \left(1 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}\right) + (E - E_1)^2 - m_2^2 \left(1 + \epsilon \frac{E_2}{\Lambda}\right) \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2 > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Si desarrollamos el primer término:

$$2EE_1 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} - \frac{1}{2} \epsilon \frac{m^2}{E^2} \frac{E}{\Lambda} - \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} - \frac{1}{2} \epsilon \frac{m^2}{E^2} \frac{E}{\Lambda} + \frac{1}{4} \frac{m^2}{E^2} \frac{m_1^2}{E_1^2} \left(1 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}\right) \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)\right]. \quad (22)$$

Se puede despreciar el último término puesto que los sumandos resultantes son del orden de los términos despreciados en la aproximación ultrarrelativista.

Y, desarrollando el último producto:

$$-m_2^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{\Lambda} \frac{E - E_1}{1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}}\right) \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda}\right)^2 = -m_2^2 \left(1 + \epsilon \frac{E_1}{\Lambda} + \epsilon \frac{E}{\Lambda} + \epsilon^2 \frac{EE_1}{\Lambda^2}\right). \quad (23)$$

Operando, finalmente, se obtiene una ecuación de segundo orden en E_1 ,

$$\begin{aligned} &E_1^2 \left(-m^2 - \epsilon m^2 \frac{E}{\Lambda} + \epsilon m_1^2 \frac{E}{\Lambda} - \epsilon m_2^2 \frac{E}{\Lambda} - \epsilon^2 m_2^2 \frac{E^2}{\Lambda^2}\right) \\ &+ E_1 \left(-\epsilon m_1^2 \frac{E^2}{\Lambda} + m_1^2 E + m^2 E + \epsilon m^2 \frac{E^2}{\Lambda} - m_2^2 E - m_2^2 \epsilon \frac{E^2}{\Lambda}\right) - m_1^2 E^2 > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Hay que encontrar las soluciones de E_1 que cumplen la condición anterior. Para ello resolvemos la ecuación de segundo orden:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{-E(m_1^2 + m^2 - m_2^2) - \epsilon \frac{E^2}{\Lambda}(m^2 - m_1^2 - m_2^2)}{2 \left(-m^2 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}(-m^2 + m_1^2 - m_2^2) - m_2^2 \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2}\right)} \\ &\pm \sqrt{\frac{\left[E(m_1^2 + m^2 - m_2^2) + \epsilon \frac{E^2}{\Lambda}(m^2 - m_1^2 - m_2^2)\right]^2 + 4m_1^2 E^2 \left[-m^2 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}(-m^2 + m_1^2 - m_2^2) - m_2^2 \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2}\right]}{2 \left(-m^2 + \epsilon \frac{E}{\Lambda}(-m^2 + m_1^2 - m_2^2)\right)}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Puesto que hay dos raíces podemos denominarlas E_1^+ y E_1^- , siendo el superíndice el correspondiente al signo \pm en (25). La expresión (18) se identifica como una parábola cóncava, y por tanto, las soluciones que satisfacen la condición buscada son $E_1^+ < E_1 < E_1^-$.

La energía de la segunda partícula se puede obtener siguiendo el mismo método, llegando así a la ecuación de segundo grado

$$E_2^2 \left(-m^2 - 2m^2 \epsilon \frac{E}{\Lambda} - m^2 \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2} \right) + E_2 [E(m^2 + m_2^2 - m_1^2) + 2\epsilon \frac{E^2}{\Lambda} (m^2 + m_2^2 - m_1^2) + \epsilon^2 \frac{E^3}{\Lambda^2} (m_2^2 - m_1^2 + m^2)] - m_2^2 \left(E^2 + 2\epsilon \frac{E^3}{\Lambda} - m_2^2 - \epsilon^2 \frac{E^4}{\Lambda^2} \right) > 0, \quad (26)$$

cuyas raíces se pueden encontrar igualando la expresión a cero,

$$E_2 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4m^2 m_2^2 \left(1 + 2\epsilon \frac{E}{\Lambda} + \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2} \right) \left(E^2 + 2\epsilon \frac{E^3}{\Lambda} + \epsilon^2 \frac{E^4}{\Lambda^2} \right)}}{2m \left(-1 - 2\epsilon \frac{E}{\Lambda} - \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2} \right)}, \quad (27)$$

donde A es el coeficiente que multiplica a E_2 en la expresión (26),

$$A = E(m^2 + m_2^2 - m_1^2) + 2\epsilon \frac{E^2}{\Lambda} (m^2 + m_2^2 - m_1^2) + \epsilon^2 \frac{E^3}{\Lambda^2} (m_2^2 - m_1^2 + m^2). \quad (28)$$

La expresión 27, al contrario de lo observado en el caso de relatividad especial, no se puede obtener de (25) intercambiando los valores de m_1 y m_2 . Esto se debe a que en el cálculo realizado la ley de composición no es simétrica (como se puede comprobar viendo la expresión (14)) lo cual genera una asimetría entre m_1 y m_2 .

Los límites de la energía serán, al igual que en el caso de la partícula 1, E_2^- y E_2^+ .

Hecho el análisis generalizado de la desintegración, queda particularizar para la desintegración que estamos estudiando. Habrá que considerar, por tanto, dos casos: cuando ν_μ es la partícula 1 y cuando ν_μ es la partícula 2.

En el primer caso (primer canal) tendremos que, ahora, $m_1 \approx 0$, $m_2 = m_\mu$, $m = m_\pi$ y E es la energía del π^- ; sustituyendo en (25):

$$E_1^+ = E_\nu^+ = \frac{0}{m_\pi^2 + \epsilon \frac{E}{\Lambda} (m_\pi^2 + m_\mu^2)} = 0, .$$

$$E_1^- = E_\nu^- = \frac{E(m_\pi^2 - m_\mu^2) + \epsilon \frac{E^2}{\Lambda} (m_\pi^2 - m_\mu^2)}{m_\pi^2 + \epsilon \frac{E}{\Lambda} (m_\pi^2 + m_\mu^2) + m_\mu^2 \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2}} = \frac{E(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{m_\pi^2 + m_\mu^2 \epsilon \frac{E}{\Lambda}}. \quad (29)$$

De esta expresión se puede recuperar el resultado obtenido en relatividad especial en el límite $\Lambda \rightarrow 0$.

En el segundo caso (segundo canal) identificamos μ^- con la partícula 1 y ν_μ con la partícula 2. Por tanto, $m_1 = m_\mu$, $m_2 \approx 0$, $m = m_\pi$.

$$E_2^+ = E_\nu^+ = \frac{0}{-2m_\pi^2 \left(1 + 2\epsilon \frac{E}{\Lambda} + \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2} \right)} = 0,$$

$$E_2^- = E_\nu^- = \frac{E(m_\pi^2 - m_\mu^2) + 2\epsilon \frac{E^2}{\Lambda} (m_\pi^2 - m_\mu^2) + \epsilon^2 \frac{E^3}{\Lambda^2} (m_\pi^2 - m_\mu^2)}{m_\pi^2 \left(1 + 2\epsilon \frac{E}{\Lambda} + \epsilon^2 \frac{E^2}{\Lambda^2} \right)} \quad (30)$$

$$= \frac{E(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{m_\pi^2}.$$

Como vemos, el primer canal por el que se puede producir la desintegración altera el espectro de neutrinos respecto al caso de relatividad especial, ya que la energía máxima obtenida en (29) es distinta de la obtenida en (13). Esta modificación puede ser muy relevante si la energía del pion es del orden de la escala Λ . Por otro lado, si la reacción se produce a través del segundo canal, no hay modificación en el rango de energías del neutrino resultante de la desintegración del pion.

3. Conclusiones

El objetivo de este trabajo era ver cómo un cambio, tanto en la relación de dispersión como en la de composición de los momentos/energías, afectaba a la cinemática de la desintegración del π en ν_μ y μ . Este cálculo en DSR, al contrario que el de SR, no es simétrico (como ya hemos explicado en la sección anterior) y por tanto encontramos dos posibles resultados. Comparando (13) con (25) y (27) se puede ver que ambas contienen el resultado de SR y, de hecho, (27) coincide con éste independientemente del valor de la escala de energías Λ y de ϵ . Por el contrario, el resultado (25) sí que se ve modificado: si $\epsilon = 1$, E_ν tendrá un valor menor mientras que si $\epsilon = -1$, E_ν será mayor; en qué medida será mayor o menor depende del cociente E/Λ . Por tanto, el término $m_\mu^2 \epsilon \frac{E}{\Lambda}$ puede despreciarse cuando Λ se identifica como la escala de Planck, pero sí es relevante si la escala es comparable con la energía del pion; en este caso, la energía máxima del neutrino se modificará de forma apreciable, aumentando o disminuyendo su valor dependiendo de ϵ . Como pueden darse las dos situaciones ((25), (27)) de forma equiprobable, es posible, globalmente, poder encontrar en promedio desviaciones de lo predicho por SR, poniendo de manifiesto los efectos de DSR.

Este resultado no es más que un primer acercamiento con un modelo juguete a un campo muy poco explorado en DSR, el de una escala de energías menores a la de Planck. De hecho, es un cálculo incompleto, puesto que faltaría un estudio del efecto que se espera encontrar en un detector como el IceCube. Este estudio incluiría un análisis cinemático de la desintegración del neutrino y la modificación esperada en las energías de las partículas detectadas por el PMT.

Debido a que los resultados muestran que la modificación podría ser apreciable (a falta de completar el cálculo), vale la pena seguir estudiando qué efectos podrían producirse a esta escala de energías, especialmente por su interés fenomenológico, ya que podría abrir las puertas a un nuevo abanico de posibilidades más allá de los efectos acumulativos en el tiempo de vuelo.

4. Bibliografía

- [1] Giovanni Amelino-Camelia. «Quantum-Spacetime Phenomenology». En: *Living Rev.Rel.* 16 (2013), pág. 5. DOI: 10.12942/lrr-2013-5. arXiv: 0806.0339 [gr-qc].
- [2] Reiner Hedrich. «Quantum Gravity: Motivations and Alternatives». En: *Phys. Phil.* 2010 (2010), pág. 016. arXiv: 0908.0355 [gr-qc].
- [3] Claus Kiefer. «Conceptual Problems in Quantum Gravity and Quantum Cosmology». En: *ISRN Math. Phys.* 2013 (2013), pág. 509316. DOI: 10.1155/2013/509316. arXiv: 1401.3578 [gr-qc].
- [4] Giampiero Esposito. «An Introduction to quantum gravity». En: ago. de 2011. arXiv: 1108.3269 [hep-th].
- [5] R. P. Woodard. «How Far Are We from the Quantum Theory of Gravity?» En: *Rept. Prog. Phys.* 72 (2009), pág. 126002. DOI: 10.1088/0034-4885/72/12/126002. arXiv: 0907.4238 [gr-qc].
- [6] Hermann Nicolai. «Quantum Gravity: the view from particle physics». En: *Fundam. Theor. Phys.* 177 (2014). Ed. por Jiri Bicak y Tomas Ledvinka, págs. 369-387. DOI: 10.1007/978-3-319-06349-2_18. arXiv: 1301.5481 [gr-qc].
- [7] Sunil Mukhi. «String theory: a perspective over the last 25 years». En: *Class. Quant. Grav.* 28 (2011), pág. 153001. DOI: 10.1088/0264-9381/28/15/153001. arXiv: 1110.2569 [physics.pop-ph].
- [8] Hanno Sahlmann. «Loop Quantum Gravity - A Short Review». En: *Proceedings, Foundations of Space and Time: Reflections on Quantum Gravity: Cape Town, South Africa.* 2010, págs. 185-210. arXiv: 1001.4188 [gr-qc]. URL: <https://inspirehep.net/record/843661/files/arXiv:1001.4188.pdf>.
- [9] Luis J. Garay. «Quantum gravity and minimum length». En: *Int. J. Mod. Phys. A* 10 (1995), págs. 145-166. DOI: 10.1142/S0217751X95000085. arXiv: gr-qc/9403008.
- [10] José Manuel Carmona, José Luis Cortés y José Javier Relancio. «Observers and their notion of spacetime beyond special relativity». En: *Symmetry* 10.7 (2018), pág. 231. DOI: 10.3390/sym10070231. arXiv: 1806.01725 [hep-th].
- [11] Stefano Liberati. «Tests of Lorentz invariance: a 2013 update». En: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013), pág. 133001. DOI: 10.1088/0264-9381/30/13/133001. arXiv: 1304.5795 [gr-qc].
- [12] A. Zee. «Perhaps proton decay violates Lorentz invariance». En: *Phys. Rev. D* 25 (1982), pág. 1864. DOI: 10.1103/PhysRevD.25.1864.
- [13] S. Chadha y Holger Bech Nielsen. «Lorentz invariance as a low-energy phenomenon». En: *Nucl. Phys. B* 217 (1983), págs. 125-144. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90081-0.
- [14] David Mattingly. «Modern tests of Lorentz invariance». En: *Living Rev.Rel.* 8 (2005), pág. 5. arXiv: gr-qc/0502097 [gr-qc].
- [15] Jay D. Tasson. «The Standard-Model Extension and Gravitational Tests». En: *Symmetry* 8 (2016), pág. 111. arXiv: 1610.05357 [gr-qc].

- [16] Rodrigo Guedes Lang, Humberto Martínez-Huerta y Vitor de Souza. «Improved limits on Lorentz invariance violation from astrophysical gamma-ray sources». En: *Phys. Rev. D* 99.4 (2019), pág. 043015. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.043015. arXiv: 1810.13215 [astro-ph.HE].
- [17] Giovanni Amelino-Camelia. «Testable scenario for relativity with minimum length». En: *Phys. Lett. B* 510 (2001), págs. 255-263. DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00506-8. arXiv: hep-th/0012238.
- [18] Giovanni Amelino-Camelia. «Relativity in space-times with short distance structure governed by an observer independent (Planckian) length scale». En: *Int. J. Mod. Phys. D* 11 (2002), págs. 35-60. DOI: 10.1142/S0218271802001330. arXiv: gr-qc/0012051.
- [19] Giovanni Amelino-Camelia. «Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues». En: *Symmetry* 2 (2010), págs. 230-271. DOI: 10.3390/sym2010230. arXiv: 1003.3942 [gr-qc].
- [20] Jerzy Kowalski-Glikman. «Introduction to doubly special relativity». En: *Lect. Notes Phys.* 669 (2005). Ed. por G. Amelino-Camelia y J. Kowalski-Glikman, págs. 131-159. DOI: 10.1007/11377306_5. arXiv: hep-th/0405273.
- [21] Seyed Yaser Ayazi, Sina Esmaili y Mojtaba Mohammadi-Najafabadi. «Single top quark production in t -channel at the LHC in Noncommutative Space-Time». En: *Phys. Lett. B* 712 (2012), págs. 93-96. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.04.063. arXiv: 1202.2505 [hep-ph].
- [22] Giovanni Amelino-Camelia. «Doubly special relativity». En: *Nature* 418 (2002), págs. 34-35. DOI: 10.1038/418034a. arXiv: gr-qc/0207049.
- [23] Giovanni Amelino-Camelia y col. «The principle of relative locality». En: *Phys. Rev. D* 84 (2011), pág. 084010. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.084010. arXiv: 1101.0931 [hep-th].
- [24] Vernon Barger, Danny Marfatia y Kerry Whisnant. *The physics of neutrinos*. Princeton, USA: Princeton Univ. Pr., 2012. ISBN: 978-0-691-12853-5.
- [25] Antonio Ereditato, ed. *The State of the Art of Neutrino Physics*. World Scientific, 2018. ISBN: 978-981-322-608-1, 978-981-322-610-4. DOI: 10.1142/10600.
- [26] K. Abe y col. «Constraint on the matter-antimatter symmetry-violating phase in neutrino oscillations». En: *Nature* 580.7803 (2020), págs. 339-344. DOI: 10.1038/s41586-020-2177-0. arXiv: 1910.03887 [hep-ex].
- [27] P.A. Zyla y col. «Review of Particle Physics». En: *Prog. Theor. Exp. Phys.* (2020), pág. 083C01. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001.
- [28] Markus Ackermann y col. «Fundamental Physics with High-Energy Cosmic Neutrinos». En: *Bull. Am. Astron. Soc.* 51 (2019), pág. 215. arXiv: 1903.04333 [astro-ph.HE].
- [29] Francis Halzen y Dan Hooper. «High-energy neutrino astronomy: The Cosmic ray connection». En: *Rept. Prog. Phys.* 65 (2002), págs. 1025-1078. DOI: 10.1088/0034-4885/65/7/201. arXiv: astro-ph/0204527.
- [30] Markus Ahlers y Francis Halzen. «Opening a New Window onto the Universe with IceCube». En: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 102 (2018), págs. 73-88. DOI: 10.1016/j.ppnp.2018.05.001. arXiv: 1805.11112 [astro-ph.HE].

- [31] M. G. Aartsen y col. «Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector». En: *Science* 342 (2013), pág. 1242856. DOI: 10.1126/science.1242856. arXiv: 1311.5238 [astro-ph.HE].
- [32] J. M. Carmona, J. L. Cortés y J. J. Relancio. «Relativistic deformed kinematics from locality conditions in a generalized spacetime». En: *Phys. Rev. D* 101.4 (2020), pág. 044057. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.044057. arXiv: 1912.12885 [hep-th].