

# La modelització matemàtica dels processos de competició entre llengües: estudi comparatiu de l'evolució dels usos a Catalunya i al País Valencià

**Manel Perucho i Pla<sup>1</sup>, Francisco Grimaldo Moreno<sup>2</sup>, Clara Miralles Vila<sup>3</sup>, Ernest Querol Puig<sup>4</sup>, Emilia López Iñesta<sup>5</sup>**

Universitat de València<sup>1,2</sup>, Universitat de Heidelberg<sup>3</sup>, Universitat Oberta de Catalunya<sup>4</sup>, Universitat Catòlica de València<sup>5</sup>  
equerolp@uoc.edu

Recepció: 12/03/2017, acceptació: 31/08/2017

**Resum:** L'article vol respondre la pregunta següent: és aplicable el model dinàmic de la desaparició de les llengües proposat el 2003 per Abrams i Strogatz a les dades demolingüístiques del País Valencià i de Catalunya de què disposem?

Les dues recerques que presentem —elaborades pel nostre grup de recerca— s'inscriuen en l'anàlisi dels processos de substitució i de reversió lingüística. La modelització del sistema mitjançant equacions diferencials ens permet estudiar si la dinàmica del sistema és de desaparició o no. En el segon cas, serien necessaris nous models que permeteren canvis de tendència. Aquesta modelització és una eina fonamental per a l'estudi de sistemes socials.

Concloem que el model d'Abrams i Strogatz és aplicable a la tendència decreixent del nombre de parlants de català que es dona al País Valencià, però, per contra, no és aplicable a l'evolució del sistema a Catalunya.

**Mots clau:** models matemàtics, sociolingüística, procés de substitució lingüística

## La modelización matemática de los procesos de competición entre lenguas: estudio comparativo de la evolución de los usos lingüísticos en Cataluña y el País Valenciano

**Resumen:** El artículo pretende responder la siguiente pregunta: ¿es aplicable el modelo dinámico de la desaparición de las lenguas propuesto en 2003 por Abrams i Strogatz a los datos lingüísticos del País Valenciano y Cataluña que tenemos?

Las dos investigaciones que presentamos —elaboradas por nuestro equipo de investigación— se inscriben en el análisis de los procesos de substitución lingüística. La modelización del sistema mediante ecuaciones diferenciales nos permite estudiar si la dinámica del sistema es la desaparición o no. En el segundo caso, serían necesarios Nuevos modelos que permiten cambios de tendencia. Esta modelización es una herramienta fundamental para el estudio de sistemas sociales.

Concluimos que el modelo de Abrams y Strogatz es aplicable a la tendencia decreciente del número de hablantes de catalán que se da en el País Valenciano, pero no es aplicable a la evolución del sistema en Cataluña.

**Palabras clave:** modelos matemáticos, sociolingüística, proceso de sustitución lingüística

**Abstract:** The article wants to answer the following question: is the dynamic model of the disappearance of languages proposed in 2003 by Abrams and Strogatz applicable to the demolinguiistic data of the Valencian Country and Catalonia?

The two research works we present - elaborated by our research group - are part of the analysis of the substitution and linguistic reversal processes. The modeling of the system through differential equations allows us to study whether the dynamics of the system is disappearing or not. In the second case, new models would be necessary to allow changes in trend. This modeling is a fundamental tool for the study of social systems.

We conclude that the model of Abrams and Strogatz is applicable to the decreasing trend in the number of Catalan speakers in the Valencian Country, but, on the contrary, is not applicable to the evolution of the system in Catalonia.

**Key words:** mathematical models, sociolinguistics, linguistic substitution process

## 1. INTRODUCCIÓ

Un dels efectes de la minorització lingüística és el debat interminable sobre la viabilitat de la llengua minoritzada (sobre la de la minoritzadora ni se'n parla); sempre hi ha com a mínim dues posicions: els qui consideren la llengua minoritzada inviable i els qui veuen possibilitats que ho siga. Al País Valencià aquesta discussió és especialment agra i recurrent.

Qui té raó? Com podem donar una resposta a aquesta qüestió? L'opció usual és la de fixar-se en l'entorn més immediat i traure'n conclusions. No cal dir que aquesta aproximació proporciona respostes esbiaixades. El recurs a les enquestes aporta dades molt més objectives, però tampoc no són transparents perquè, si bé ens forneixen informació, també hi contenen l'error. Els models matemàtics són filtres estadístics que no només separen la informació de l'error sinó que també la quantifiquen, si reeixim a destriar-los. Podem dir, doncs, que, en aquest cas, la modelització matemàtica és el mètode d'estudiar de manera objectiva les dades obtingudes d'enquestes.

El desenvolupament matemàtic en els camps del càlcul, la topologia diferencial i la teoria de sistemes dinàmics ha afavorit l'evolució de moltes ciències naturals. Les recerques que esmentem en aquesta petita introducció són els reculls dels intents de modelar en les ciències socials i, concretament, en el camp de la sociologia del llenguatge, els processos de substitució lingüística.

En aquest article presentem, doncs, una comparació directa entre un model d'extinció lingüística, desenvolupat per Abrams i Strogatz (2003), amb dades d'usos lingüístics, recollides mitjançant enquestes al País Valencià i a Catalunya. Com trobarà el lector, el nostre estudi sembla indicar que les dades valencianes encaixen en el model de substitució lingüística, mentre que les catalanes no semblen ajustar-se a aquesta evolució.

Aquest model inicial, que tracta el problema com un sistema dinàmic de competència entre dues espècies, va ser modificat per Mira i Paredes (2005) per incorporar-hi una tercera població, la dels bilingües, a fi d'estudiar el contacte del gallec amb el castellà. Altres autors han fet millores en altres línies, com ara introduint-hi una dependència territorial (Patriarca i Leppänen 2004) i un procés de difusió de les tendències d'ús, o adaptant-hi un model epidèmic en què els parlants no canvien de llengua directament, sinó mitjançant un procés (Pinasco i Domanelli, 2006). En el nostre cas, ens limitarem a un estudi introductori que revele si, segons en quin territori, el català entra en una clara dinàmica de substitució lingüística, o no.

Altres models matemàtics es basen en descripcions estadístiques en què cada individu és tractat de manera separada, com una partícula del sistema (*agent-based models*, Castelló *et al.* 2006, 2007, Stauffer *et al.* 2007).

Amb la finalitat de posar ordre a totes aquestes propostes, Kabatek (2012) va fer una valoració dels principals models de substitució lingüística presentats fins aleshores. A més, va fer una crítica molt encertada de la simplificació i del que anomena suaument “salts argumentatius” per a no dir-ne inadequació d’alguns models proposats, ja que, en algunes ocasions, transgredeixen les regles del raonament lògic per voler forçar-ne la validesa.

A més d’aquest aperitiu de Kabatek, si volem entaular-nos, un primer plat podria ser la tesi doctoral de Sorolla (2016: 160-164), que té un apartat titulat “Els models per a explicar el comportament sociolingüístic: Txillardegui, Querol, Fabà i Grimaldo” aquí Sorolla inclou l’anàlisi de les xarxes socials i una referència a Castelló (2010), que se centra també en les xarxes socials, però que inclou les variables de prestigi i la volatilitat que decantaran la situació sociolingüística cap a l’extinció d’una llengua o cap a la viabilitat de la coexistència lingüística.

L’article de Mühlenbernd i Quinley (2013) podria ser el segon plat d’aquest àpat de models matemàtics perquè ens presenta les possibilitats de la combinació entre les xarxes socials, la teoria de jocs i les simulacions d’interaccions. Aquest recurs a la simulació ha facilitat l’aparició d’una branca que s’anomena sociologia computacional, que té publicacions ja iniciades el 1971 com el *Journal of Mathematical Sociology*.

Per a postres, remetem el lector interessat en les aplicacions dels models matemàtics a l’estudi dels processos de substitució lingüística a la nostra comunicació al Sociolinguistics Symposium 21 (Querol *et al.*, 2016) en què en fem una presentació de com han evolucionat.

## 2. MODELITZACIÓ DE SISTEMES DE COMPETICIÓ LINGÜÍSTICA

### 2.1. De l’ecologia a la dinàmica de sistemes lingüístics

La idea de l’aplicació d’una modelització matemàtica a sistemes complexos ve del desenvolupament de la coneguda teoria del caos, en el fonament de la qual es troba la complexitat dels sistemes físics anomenats ‘no lineals’. Així, un dels primers sistemes que va donar peu al desenvolupament de la teoria va ser precisament el d’evolució de poblacions d’espècies en sistemes ecològics (equació de Verhulst, veieu, per exemple, Strogatz 1994). En el cas de l’equació de Verhulst, s’estudia l’evolució d’una sola espècie de manera discreta, és a dir amb passes de temps regulars. Així, la població de l’instant de temps  $t_{n+1}$  dependrà de la població de l’instant  $t_n$  i del ritme de creixement,  $r$ . D’aquesta manera  $p_{n+1} = p_n + r p_n$ . És a dir, la població serà la que hi havia a l’instant anterior més la que hi havia pel ritme de creixement. Si  $r=0.1$ , significa que hi haurà un augment de la població d’un 10%. Si, pel contrari,  $r=-0.1$ , hi haurà un descens de la població de la mateixa proporció.

Aquest model tan senzill i intuïtiu necessita una primera modificació per tal d’incorporar el fet conegut que les poblacions no poden créixer sense límits, sinó que es troben limitades pels recursos al seu abast. Per tant, el ritme de creixement s’ha d’expressar com  $r = a (p_{max} - p_n)$ , on  $p_{max}$  és el màxim de població que els recursos permeten. D’aquesta manera,  $r$  es fa petit a mesura que la població s’apropa a aquesta població màxima, o negatiu si la supera. És a dir, aquesta nova expressió permet modelitzar caigudes de població a causa d’un excés de població d’una espècie en relació amb els recursos que té al seu abast.

Anant una miqueta més enllà, què ocorre si en lloc d’haver-hi una sola espècie, n’hi ha dues que competeixen per uns mateixos recursos? Diguem-ne ovelles i conills, i l’herba com recurs que genera competència. Aquest sistema va ser modelitzat per Lotka i Volterra (vegeu, per exemple, Strogatz 1994), com un sistema de dues equacions (una per espècie), en què s’incorporaven termes creuats per tal de tenir en compte que quan la població d’una

espècie creix, l'altra ha de minvar. En aquest cas, la modelització es va fer ja contínua, mitjançant equacions diferencials. Les equacions diferencials ens permeten estudiar la variació contínua d'una magnitud en funció dels paràmetres de què depèn aquesta evolució.

Anys després, Abrams i Strogatz (2003) van aplicar el fonament d'aquesta mateixa idea a l'estudi de sistemes de competència lingüística, en què l'ús d'una de les dues llengües està en clar retrocés. Així, el model reproduceix l'extinció lingüística, tal com diu el títol del treball publicat a la revista *Nature*. El model es fonamenta en la següent equació per a l'evolució de la població del percentatge parlants de la llengua X (indicat mitjançant la variable  $x$ ):  $dx/dt = y P_{yx}(x,s) - x P_{xy}(x,s)$ , on l'expressió  $dx/dt$  indica la derivada temporal de la variable  $x$ , és a dir, ens diu com canvia  $x$  amb el temps. Aquesta variació és igual, a la part dreta de l'equació, al percentatge de parlants de l'altra llengua, Y (indicat per la variable  $y$ ) multiplicat per una funció que determina la probabilitat que els parlants de la llengua Y passen a ser-ho de la llengua X,  $P_{yx}(x,s)$  (amb signe positiu perquè faria augmentar el percentatge de parlants de X), menys el terme recíproc que indica el pas de parlants de X a Y (el signe negatiu indica una variació negativa per la pèrdua de parlants d'X en aquest cas). La probabilitat que els parlants d'Y passen a ser parlants d'X,  $P_{xy}(x,s)$ , depèn del percentatge de parlants d'X ( $x$ ) i de l'estatus de la llengua X, determinat pel paràmetre  $s$ . Abrams i Strogatz van expressar aquesta dependència com  $P_{yx}(x,s) = c x^a s$ , on el paràmetre  $c$  regula el ritme del canvi, mentre que l'exponent  $a$  controla la dependència de la probabilitat de canvi amb el percentatge de parlants d'X. Per altra banda, com que treballarem amb proporcions,  $x+y=1$ , i, si suposem que l'estatus total també és 1 (de manera que  $s=0.5$  indicaria igualtat d'estatus), tenim que la probabilitat del canvi invers és  $P_{xy}(x,s) = c (1-x)^a (1-s)$ . D'aquesta manera, el sistema queda tancat per una equació equivalent per a la variació del percentatge de parlants d'Y.

Els autors van recollir dades de quaranta-dues regions de Perú, Bolívia, Irlanda, Escòcia, Gal·les i Alsàcia-Lorena, i van demostrar que la dinàmica d'extinció lingüística de les llengües minoritàries respon a un valor d'estatus d'aquestes llengües  $s < 0.5$ , i a un exponent  $a = 1.31 (\pm 0.25)$  per a tots el casos. Com a conclusió del treball, Abrams i Strogatz (2003) van valorar el fet que les decisions i l'activitat política, que influïrien en el valor de l'estatus d'una llengua (paràmetre  $s$ ), tenen un paper crucial en el futur d'aquestes llengües en recessió.

## 2.2. Una millora del model original i una reflexió

El model d'Abrams i Strogatz (2003) és un model senzill que reproduceix de manera aproximada un procés molt complex. Però, insistim, només és útil per reproduir el cas en què una llengua domine sobre l'altra i aquesta segona entre en un procés clar de desaparició. Com a millora del model d'Abrams i Strogatz, els físics gallecs Mira i Paredes (2005) van introduir un tercer grup que tingués en compte l'existència de bilingües. Els autors indiquen que aquest grup potser no siga necessari en el cas de llengües tan diferents com el quítxua i l'espanyol o com el gaèlic i l'anglès, però sí en el cas de llengües semblants com el gallec i el castellà. De fet, al seu model s'introdueix una variable que té en compte la *proximitat* entre les llengües en competència. Amb aquesta modificació els autors aconseguen modelitzar l'evolució del gallec al llarg de les darreres dècades. En aquest article no entrarem en els detalls del model de Paredes i Mira perquè al treball de fi de grau de Miralles (2014) es va demostrar que té una aplicabilitat molt limitada en el cas que ens ocupa.

En qualsevol cas, cal deixar clares les limitacions d'aquests models simplificats i simplificadors: en primer lloc, tal com indiquen els autors dels dos treballs, l'estatus pot

variar en el temps i cap dels models no incorpora aquesta possibilitat i, en segon lloc, en cap dels dos no es tenen en compte les variables derivades de la immigració, l'emigració o les taxes de naixement i mortalitat. Tot i això, hi ha trets significatius i rellevants dels sistemes que sí que són recollits pels models, tal com es demostra en els treballs corresponents i que hem explicat ací. Per això vam intentar aplicar aquests models al cas del català al País Valencià (Miralles, 2014, Miralles *et al.* 2016) i, ara, a Catalunya.

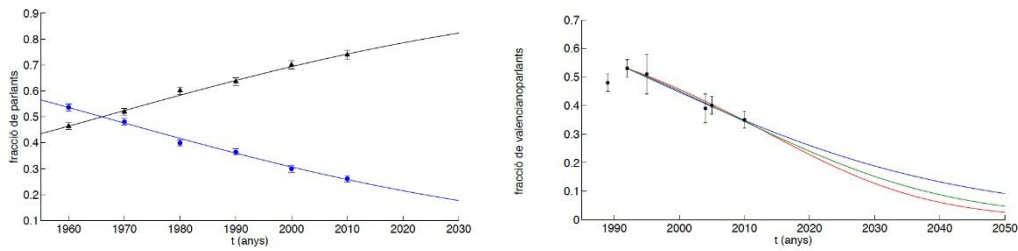
### 3. ELS USOS LINGÜÍSTICS AL PAÍS VALENCIÀ

Vam obtenir les dades dels usos lingüístics al País Valencià de dues fonts diferents: En primer lloc, les dades del Llibre Blanc de l'Ús del Valencià, corresponents a l'Enquesta sobre la Situació Social del Valencià promoguda per l'Acadèmia Valenciana de la Llengua (AVL) l'any 2004. En particular, vam fer servir les dades tractades per Querol (2008) restringides a l'àmbit familiar. En segon lloc, les dades proporcionades directament per l'arxiu del Servei d'Investigació i Estudis Sociolingüístics (SIES), corresponents a les enquestes realitzades els anys 1989, 1992, 1995, 2005 i 2010 sota la direcció de Rafael L. Ninyoles. Com a aspecte destacable pel que fa a la consistència de les dades, podem assenyalar que el percentatge total donat per la primera enquesta (any 2004) coincideix, dintre del marge d'error de l'estudi, amb el de la segona, de l'any 2005, i restringit a l'àmbit familiar (Miralles 2014, Miralles *et al.*, 2016). Tot i tractar-se d'una dada per a dos anys diferents, aquests són consecutius i considerem, tal com exposem al panell dret de la figura 1, que aquestes dades són perfectament compatibles.

En tots dos casos ens vam limitar a les dades que feien referència a l'ús de la llengua a la llar, és a dir, al nucli dur d'una llengua, atès que el català al País Valencià presenta un ús més domèstic que social. A més, vam introduir un element nou en el tractament del sistema: com que les dades de l'AVL indiquen l'edat de l'enquestat, vam poder associar aquesta edat a una època passada. Així, per exemple, si una persona de més de 64 anys respon que parlava valencià amb els seus pares a casa, això significa que ho feia fa entorn de 50 anys. Amb aquest canvi vam poder convertir una sola enquesta en una font d'informació aproximada de l'ús de la llengua al llarg de mig segle (des de la dècada dels anys 60 del segle XX fins a l'actualitat).

El gràfic 1 mostra, a l'esquerra, l'evolució del valencià (punts blaus) i el castellà (punts negres) partint de les dades de l'AVL i de la transformació edats-temps explicada en el paràgraf anterior. Els punts, gràcies a aquesta transformació, corresponen al percentatge d'ús entre les persones que tenen entre vint i trenta anys en cada dècada. Les línies marquen el millor ajust del model d'Abrams i Strogatz a les dades. El fet que l'ajust siga bo, en la mesura que reproduïx correctament l'evolució donada per les enquestes d'ús, significa que el català està en clar retrocés al País Valencià. Les línies mostrades representen el model prenent  $a=1$ ,  $c=0.1$ , i  $s=0.38$ . Atesa la complexitat del model i la manca de dades per fer un ajust paramètric, vam trobar aquest millor ajust escombrant diferents valors dels paràmetres. En el treball de fi de grau de Miralles (2014) es pot trobar un estudi de la variació de la corba amb els paràmetres. Forçant el valor de la variable  $a$  al resultat del treball original,  $a=1.3$ , obtingut pels autors com valor mitjà de tots els casos estudiats, el nostre ajust empitjora lleugerament, però reproduïx correctament l'evolució de les dades amb  $c=0.06$  i  $s=0.27$ . En qualsevol dels dos ajusts s'observa que l'estatus és menor que el del castellà (fet necessari per explicar l'evolució del sistema) i que el ritme de retrocés, indicat per la variable  $c$ , és lent (de l'ordre de  $0.1$ ). El lector interessat pot trobar els detalls dels ajusts a Miralles (2014).

GRÀFIC 1. Evolució de l'ús del català al País Valencià (dades de l'AVL, esquerra; SIES i AVL, dreta)



En el cas de les dades del SIES, el model d'Abrams i Strogatz (2003) només es pot aplicar des de l'any 1992, perquè, com hem dit anteriorment, només reproduïx tendències decreixents. Les corbes que s'observen al gràfic 1, a la dreta, corresponen a la solució numèrica de l'equació d'Abrams-Strogatz prenent com a condició inicial la fracció de parlants en 1992 i els paràmetres:  $c = 0.08$ ,  $a = 1$ ,  $s = 0.24$  (blau);  $c = 0.12$ ,  $a = 1.3$ ,  $s = 0.30$  (verd);  $c = 0.15$ ,  $a = 1.5$ ,  $s = 0.33$  (roig). L'extrapolació de les línies cap al futur dóna una idea de l'evolució i les escales de temps, si res no la modifica.

Si comparem les figures del gràfic 1 pel que fa als valors obtinguts per a l'ús del valencià, observem que les dades del SIES donen percentatges més elevats que els de l'AVL. Aquesta diferència es deu al fet que en la figura de la dreta cada punt representa el conjunt de la població, de manera que la gent més gran fa augmentar el percentatge respecte a la figura de l'esquerra, en què cada punt representa només els individus en un interval d'edat de 20 a 30 anys durant cada dècada. Així i tot, els ajusts ens donen una imatge molt semblant i valors també semblants als dels paràmetres del model d'Abrams i Strogatz. Podem concloure, per tant, que el català està en retrocés al País Valencià.

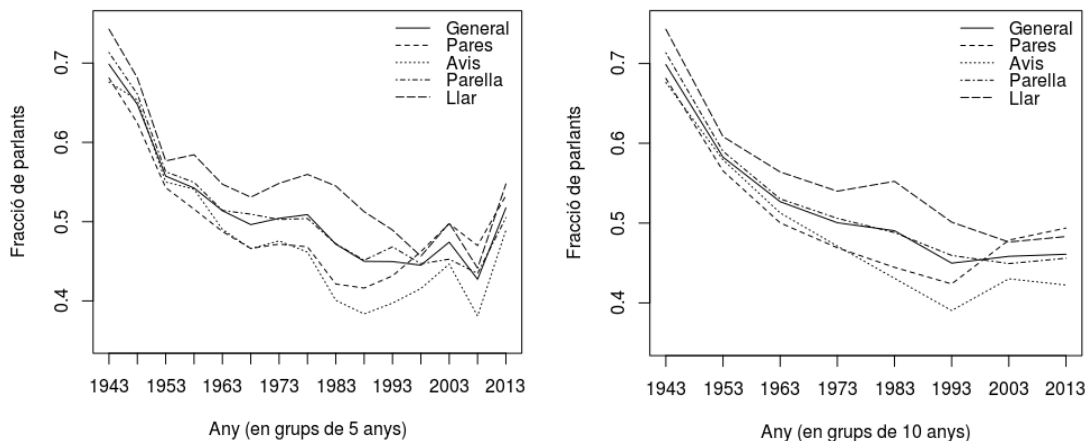
Així, doncs, aquestes anàlisis de les diferents enquestes corroboren el que la teoria sociolingüística sempre ha assenyalat: que el prestigi o estatus inferior d'una llengua la pot dur a la desaparició, encara que el procés no siga accelerat.

#### 4. ELS USOS LINGÜÍSTICS A CATALUNYA

En el cas de Catalunya, hem tingut accés a dades proporcionades per l'Institut d'Estadística de Catalunya (Idescat) de les enquestes d'usos de la població (EULP) realitzades els anys 2003 i 2013. Hem fet un tractament semblant al del País Valencià, convertint les edats dels enquestats en temps. En aquest cas, però, hem fet la conversió considerant l'interval d'anys de la població que tenia entre 15 i 24 anys (fet que provoca un desplaçament de 5 anys a l'eix de les abscisses). Per altra banda, també hem agrupat els enquestats en grups de 5 anys i hem considerat l'interval d'anys de la població que tenia entre 15 i 19 anys.

El gràfic 2 mostra l'evolució de l'ús del català en l'àmbit familiar en intervals de cinc i deu anys, fusionant les enquestes de 2003 i 2013. Cada línia mostra la comunicació de l'enquestat amb diferents persones que formen part del seu entorn; i la línia de color sòlid es mostra el valor mitjà. Tot i que la gràfica de l'esquerra mostra més oscil·lacions perquè els intervals són més curts, la tendència en tots dos gràfics és la mateixa: la caiguda en l'ús que s'observa des dels anys quaranta va començar a mostrar símptomes de detenir-se cap a finals de la dècada dels setanta i, després d'una nova caiguda durant la dècada dels vuitanta, aquesta sembla estancada i fins i tot s'observa una lleugera recuperació en l'ús.

GRÀFIC 2. Percentatge d'ús del català a Catalunya (dades de l'Idescat EULP 2003 i 2013)



Aquesta evolució no pot ser reproduïda per un model com el d'Abrams i Strogatz, atesos els canvis de tendència, açò és, l'increment o la saturació del decreixement de la fracció de parlants en els darrers anys. En qualsevol dels dos casos (canvi de tendència o saturació), el model d'Abrams i Strogatz de substitució lingüística no podria explicar-ne l'evolució. El que suggereix aquest resultat, fixant-nos en els canvis i en els moments en què aquests s'han produït, és que, tal com van anticipar els autors d'aquell treball, el català a Catalunya no s'ajusta a un model de mort lingüística, cosa que indica que les polítiques lingüístiques que s'implementen poden tenir un impacte en l'ús de les llengües.

## 5. CONCLUSIONS

En aquest article hem presentat resultats sobre l'evolució de l'ús del català al País Valencià i a Catalunya i l'hem comparat amb un model d'evolució desenvolupat per explicar el procés d'extinció lingüística (Abrams i Strogatz, 2003). Segons les dades recollides, mentre que respecte als usos del català al País Valencià el model ajusta l'evolució de les dades i, per tant, podem concloure que la dinàmica és d'extinció, a Catalunya el procés de descens en l'ús del català s'ha detingut en la darrera dècada i, possiblement, indica una lleugera recuperació.

Aquest treball mostra, per una banda, la utilitat de la realització d'enquestes d'ús tant des de la perspectiva d'estudiar-ne la situació en un moment donat com també d'estudiar-ne la seua evolució i modelització. Per una altra banda, dona indicis de la importància de les polítiques d'ús i ensenyament d'una llengua a l'hora d'afavorir-ne la recuperació.

Finalment, fem notar que l'estudi de l'evolució del català a Catalunya demostra que calen models matemàtics que incorporen la possibilitat de canvis d'estatus i tendència en l'ús. Només així es podran modelitzar matemàticament sistemes complexos com aquests en situacions diverses. Evidentment, aquestes innovacions exigiran continuar l'obertura teòrica de la sociologia del llenguatge, d'una banda, amb l'estudi més freqüent dels processos de capgirament de la substitució lingüística i, de l'altra, amb la consideració seriosa de la possibilitat d'uns desenllaços intermedis entre la substitució i la normalització, que requeriran la inclusió del concepte d'equilibri (més o menys estable).

## 6. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- ABRAMS, DANIEL M.; STROGATZ, STEVEN H. (2003). «Modelling the dynamics of language death». *Nature*, 424, 900.  
<[https://www.math.uh.edu/~zpkilpat/teaching/math4309/project/nature03\\_abrams.pdf](https://www.math.uh.edu/~zpkilpat/teaching/math4309/project/nature03_abrams.pdf)>
- CASTELLÓ, XAVIER (2010). *Collective phenomena in social dynamics: consensus problems, ordering dynamics and language competition*. Tesi doctoral. Departament de Física, Universitat de les Illes Balears. < <https://ifisc.uib-csic.es/en/publications/collective-phenomena-in-social-dynamics-consensus/> >
- CASTELLÓ, X.; EGUÍLUZ, V. M.; I SAN MIQUEL, M. (2006). «Ordering Dynamics with two non-excluding options: Bilingualism in language competition». *New Journal of Physics*, 8, 308-322.
- CASTELLÓ, X.; TOIVONEN, R.; EGUÍLUZ, V. M.; SARAMÄKI, J.; KASKI, K.; SAN MIQUEL, M. (2007). «Anomalous lifetime distributions and topological traps in ordering dynamics». *Europhysics Letters*, 79, 66006 (1-6).
- GRIMALDO, FRANCISCO, LÓPEZ-IÑESTA, EMILIA, PERUCHO, MANEL, QUEROL, ERNEST (2016). «Predicció de l'ús del català mitjançant la classificació supervisada». *Treballs de Sociolingüística Catalana*, 26, 181-197.  
<<http://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000238/00000088.pdf>>.
- INSTITUT D'ESTADÍSTICA DE CATALUNYA (IDESCAT) *Enquesta d'usos lingüístics de la població*. < <http://www.idescat.cat/pub/?id=eulp&geo=cat> >
- KABATEK, JOHANNES (2012). «Modelos matemáticos e substitución lingüística». *Estudos de Lingüística Galega*, 4, 27-43.  
<<http://www.usc.es/revistas/index.php/elg/article/viewFile/402/399>>
- MIRALLES, CLARA (2014). *Models dinàmics de competició entre llengües*. Treball de Grau. Universitat de València. <<http://www.uv.es/perucho/TESI/TGF-CMiralles.pdf>>
- MIRALLES, CLARA ; PERUCHO, MANEL; QUEROL, ERNEST (2016). «Models dinàmics de competició entre llengües, aplicats al cas català-castellà, al País Valencià». *Anuari de Psicologia de la Societat Valenciana de Psicologia*, 2015, Vol. 16, no. 1, 31-55.  
<<http://roderic.uv.es/handle/10550/53718?show=full>>.
- MIRA, JORGE; PAREDES, ÀNGEL (2005). «Interlinguistic similarity and language death Dynamics». *Europhysics Letters*, 69, 1031-4. <  
<http://iopscience.iop.org/article/10.1209/epl/i2004-10438-4/meta>>
- MÜHLENBERND, ROLAND; QUINLEY, JASON (2013). «Signaling and Simulations in Sociolinguistics». *University of Pennsylvania Working Papers in Linguistics*: Vol. 19 : Iss. 1 , 129-138. <http://repository.upenn.edu/pwpl/vol19/iss1/16>.
- PATRIARCA, M I LAPPANEN, T. (2004). «Modeling language competition» *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 338 (1-2), 296-299.
- Pinasco, J.P i Romanelli, L. (2006). «Coexistence of Languages is possible». *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 361 (1), 355-360
- QUEROL, ERNEST; PERUCHO, MANEL; MIRALLES, CLARA; GRIMALDO, FRANCISCO; LÓPEZ, EMILIA (2016). «Mathematical Models of Language Shift and Reversing Language Shift». *Sociolinguistics Symposium 21*. Múrcia, 15-18 juny.
- QUEROL, ERNEST (2008). «A cada bugada es perden molts llençols: el procés de substitució lingüística en l'àmbit familiar des de l'inici del segle XX: el rei va nu». *Llibre blanc de l'ús del valencià – II. Iniciatives per al foment del valencià*. València: Publicacions de l'Acadèmia Valenciana de la Llengua, col. Recerca, 9, 168-169.





QUEROL, ERNEST (1997) «Un nou model per a l'estudi del comportament lingüístic: La teoria de les catàstrofes». *Caplletra*, 21, 161-184.  
<[http://www.lluïsvives.com/servlet/SirveObras/34693954321469640965679/200293\\_0040.pdf](http://www.lluïsvives.com/servlet/SirveObras/34693954321469640965679/200293_0040.pdf)>.

SERVICI D'INVESTIGACIÓ I ESTUDIS SOCIOLINGÜÍSTICS (SIES). Conselleria d'Educació, Cultura i Esports. Generalitat Valenciana. *Fons estadístic i documental*.  
[http://www.cece.gva.es/polin/val/sies/sies\\_fonum.htm](http://www.cece.gva.es/polin/val/sies/sies_fonum.htm)

SOROLLA, NATXO (2016). *Tria de llengües i rols sociolingüístics a la Franja des de la perspectiva de l'anàlisi de xarxes socials*. Tesis doctoral. Departament de Sociologia i Anàlisi de les Organitzacions, Universitat de Barcelona.  
< <http://www.tdx.cat/handle/10803/373905>>

STAUFFER, JOHN R (*et. al*). (2007). «Near and Mid-IR Photometry of the Pleiades, and a New List of Substellar Candidate Members». *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 172, 663-685.

STROGATZ, STEVEN H. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos*. Nova York, Perseus Books.