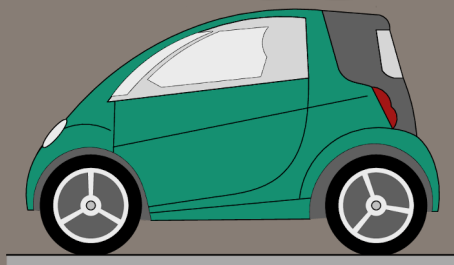
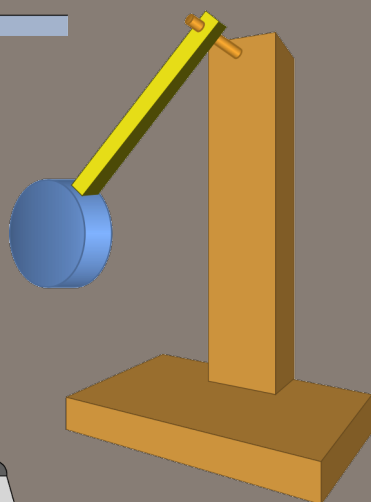
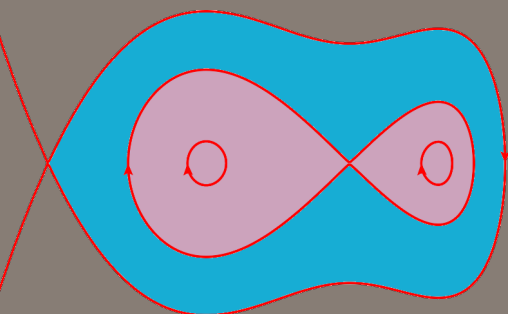
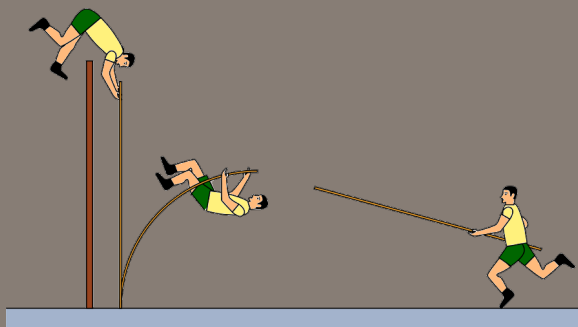


Exercícios Resolvidos de Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Quinta edição



Jaime E. Villate

Exercícios Resolvidos de Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Jaime E. Villate

Faculdade de Engenharia

Universidade do Porto

Exercícios Resolvidos de Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Copyright © 2021, Jaime E. Villate

E-mail: villate@fe.up.pt

Este trabalho está licenciado sob a Licença *Creative Commons Atribuição-Partilha* 4.0 Internacional. Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

A versão mais recente deste trabalho está disponível em <https://def.fe.up.pt/dinamica/problemas.html> onde pode ser consultado, copiado e reproduzido livremente, de acordo com os termos da licença.

Edição do autor.

ISBN: 978-972-752-273-6

DOI: 10.24840/978-972-752-273-6

(<https://doi.org/10.24840/978-972-752-273-6>)

Quinta edição

Fevereiro de 2021

Conteúdo

Prefácio	v
1 Cinemática	1
2 Cinemática vetorial	7
3 Movimento curvilíneo	15
4 Mecânica vetorial	25
5 Dinâmica dos corpos rígidos	33
6 Trabalho e energia	43
7 Sistemas dinâmicos	51
8 Mecânica lagrangiana	61
9 Sistemas lineares	75
10 Sistemas não lineares	87
11 Ciclos limite e dinâmica populacional	101
12 Sistemas caóticos	109
Bibliografia	117

Prefácio

Esta obra complementa o livro *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos* (Villate, quinta edição, 2019). Em cada capítulo apresenta-se uma proposta de resolução de alguns dos problemas no fim de cada capítulo desse livro.

Tal como nesse livro, em alguns casos usa-se o Sistema de Álgebra Computacional (CAS) *Maxima* na resolução dos problemas. Espera-se que os comandos de *Maxima* usados sejam também compreensíveis para quem não use esse software, e sirvam como indicação dos passos a seguir na resolução com outras ferramentas de cálculo.

O tema central do livro é a mecânica, incluindo-se também alguns temas contemporâneos, como sistemas não lineares e sistemas caóticos. A abordagem adotada situa-se no âmbito da mecânica clássica, admitindo-se a existência de um espaço absoluto e de um tempo absoluto, independentes dos observadores.

Os seis primeiros capítulos seguem o programa tradicional das disciplinas de introdução à mecânica para estudantes de ciências e engenharia, sem incluir sistemas de vários corpos nem mecânica dos fluidos. O capítulo 7 é uma introdução aos sistemas dinâmicos. O capítulo 8 aborda a mecânica lagrangiana e os capítulos 9, 10 11 e 12 são sobre sistemas dinâmicos.

Todas as figuras são originais e são licenciadas sob a mesma licença do livro: *Creative Commons Atribuição-Partilha 4.0 Internacional*.

Jaime E. Villate

E-mail: villate@fe.up.pt

Porto, fevereiro de 2021

1 Cinemática

Problema 3

A expressão da aceleração tangencial de um objeto é $a_t = -4 \text{ m/s}^2$. Se em $t = 0$, $v = +24 \text{ m/s}$ e a posição na trajetória é $s = 0$, determine a velocidade e a posição em $t = 8 \text{ s}$ e a distância total percorrida, ao longo da trajetória, entre $t = 0$ e $t = 8 \text{ s}$.

Para calcular a velocidade em $t = 8$, substitui-se a expressão da aceleração constante na equação que relaciona a aceleração com a velocidade e o tempo

$$-4 = \frac{dv}{dt}$$

Separando variáveis e integrando, encontra-se a velocidade em $t = 8$

$$-4 \int_0^8 dt = \int_{24}^v dv' \implies v = -8$$

Para calcular a posição final, substitui-se a expressão da aceleração constante na equação que relaciona a aceleração com a velocidade e a posição

$$-4 = v \frac{dv}{ds}$$

Separando variáveis e integrando,

$$-4 \int_0^s ds' = \int_{24}^{-8} v dv \implies s = 64$$

O valor negativo da velocidade final quer dizer que o objeto deslocou-se até um ponto onde parou e em $t = 8$ está de regresso na direção da origem. Para calcular a distância total percorrida é necessário determinar a posição do ponto onde parou

$$-4 \int_0^s ds' = \int_{24}^0 v dv \implies s = 72$$

Como tal, o objeto deslocou-se desde $s = 0$ até $s = 72$ m e depois deslocou-se outros 8 metros até $x = 64$ m. A distância total percorrida foi então 80 m.

Problema 4

Em $t_i = 0$, um objeto encontra-se em repouso na posição $s_i = 5$ cm num percurso. A partir desse instante o objeto começa a deslocar-se no sentido positivo de s , parando novamente num instante t_1 . A expressão da aceleração tangencial, entre t_i e t_1 , é: $a_t = 9 - 3t^2$, onde o tempo mede-se em segundos e a aceleração em cm/s^2 . Determine: (a) O instante t_1 em que o objeto volta a parar. (b) A posição no percurso nesse instante.

A expressão dada para a aceleração tangencial em função do tempo pode ser substituída na equação cinemática $a_t = \dot{v}$

$$9 - 3t^2 = \frac{dv}{dt}$$

com variáveis v e t . Separando as variáveis, integrando t desde 0 até t_1 e integrando v desde zero até zero novamente, obtém-se a seguinte expressão

$$\int_0^{t_1} (9 - 3t^2) dt = \int_0^0 dv$$

que pode ser resolvida no Maxima

```
(%i1) integrate(9-3*t^2, t, 0, t1) = integrate(1, v, 0, 0);
(%o1)      9 t1 - t1^3 = 0
(%i2) solve(%);
(%o2)      [ t1 = -3, t1 = 3, t1 = 0 ]
```

O objeto volta a parar então em $t_1 = 3$ s.

Para calcular a posição em função do tempo, é necessário saber a expressão da velocidade em função do tempo, que pode ser obtida separando variáveis novamente na equação $a_t = \dot{v}$, mas deixando os limites superio-

res como variáveis t e v .

$$\int_0^t (9 - 3t^2) dt = \int_0^v dv$$

E resolvendo os integrais encontra-se a expressão de v em função de t

```
(%i3) integrate(9-3*t^2, t, 0, t) = integrate(1, v, 0, v);
(%o3)      9t - t^3 = v
```

Substitui-se essa expressão na equação cinemática $v = \dot{s}$, conduzindo a uma equação de variáveis separáveis:

$$9t - t^3 = \frac{ds}{dt}$$

Separando variáveis, integrando t desde $t_0 = 0$ até $t_1 = 3$ e s desde a posição inicial $s_0 = 5$ até a posição final s_1 obtém-se

$$\int_0^3 (9t - t^3) dt = \int_5^{s_1} ds$$

E o valor de s_1 determina-se resolvendo os integrais

```
(%i4) integrate(lhs(%), t, 0, 3) = integrate(1, s, 5, s1);
(%o4)      81/4 = s1 - 5
(%i5) solve(%);
(%o5)      [ s1 = 101/4 ]
```

A posição final do objeto é $s_1 = 25.25$ cm.

Problema 7

A expressão da aceleração tangencial de um objeto que oscila numa calha é $a_t = -ks$, onde k é uma constante positiva. Determine:

- O valor de k para que a velocidade seja $v = 15$ m/s em $s = 0$ e $v = 0$ em $s = 3$ m.
- A velocidade do objeto em $s = 2$ m.

A expressão da aceleração tangencial permite resolver a seguinte equação

$$-k s = v \frac{d v}{d s}$$

Separando variáveis e integrando entre os dois valores de s e de v dados, obtém-se o valor da constante k (unidades SI)

$$\int_0^3 -k s \, d s = \int_{15}^0 v \, d v$$

$$-9 k = -225 \implies k = 25$$

Para calcular a velocidade em $s = 2$, resolvem-se os mesmos integrais, mas agora o valor de k é conhecido e a variável desconhecida é a velocidade em $s = 2$

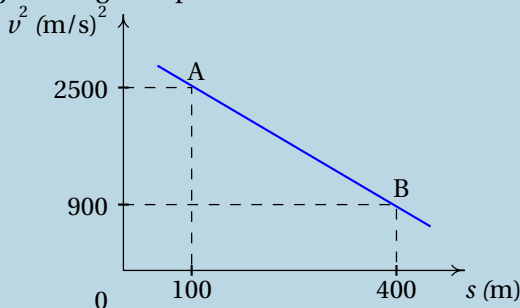
$$\int_0^2 -25 s \, d s = \int_{15}^v v' \, d v'$$

$$-100 = v^2 - 225 \implies v = \pm 11.18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Os valores positivos e negativos de v são devidos a que, como a partícula oscila, passa muitas vezes por $s = 2$, umas vezes no sentido positivo e outras vezes no sentido negativo.

Problema 9

O quadrado da velocidade v de um objeto diminui linearmente em função da posição na sua trajetória, s , tal como se mostra no gráfico. Calcule a distância percorrida durante os dois últimos segundos antes do objeto chegar ao ponto B.



Encontra-se a equação da reta, usando os dois pontos dados no gráfico e tendo em conta que a variável no eixo das abcissas é s e a variável no eixo das ordenadas é v^2

$$v^2 - 900 = \left(\frac{900 - 2500}{400 - 100} \right) (s - 400)$$

$$v^2 = \frac{9100}{3} - \frac{16}{3}s$$

Como o enunciado diz que a velocidade diminui, então o objeto deslocou-se de A para B e a sua velocidade é positiva. A expressão para v em ordem a s é então a raiz positiva do lado direito na equação anterior:

$$v = \sqrt{\frac{9100 - 16s}{3}}$$

Substituindo na equação $v = \dot{s}$, obtém-se uma equação diferencial de variáveis separáveis

$$\sqrt{\frac{9100 - 16s}{3}} = \frac{ds}{dt}$$

Para separar variáveis, a expressão no lado esquerdo passa a dividir ao lado direito:

$$dt = \frac{\sqrt{3} ds}{\sqrt{9100 - 16s}}$$

Dois segundos antes de chegar ao ponto B, o objeto encontra-se num outro ponto C, onde podemos arbitrar t igual a zero. Como tal, a variável t será integrada desde 0 até 2 e a variável s desde s_C até 400

```
(%i6) integrate(1,t,0,2)=integrate(sqrt(3)/sqrt(9100-16*s),s,sC,400);
Is sC - 400 positive, negative or zero?

neg;
(%o6) 2 = sqrt(3) * ( (sqrt(9100-16*sC)/8) - (5 * 3^(3/2)/4) )
(%i7) float (solve (%));
(%o7) [sC = 334.6666666666667]
```

A distância percorrida nos últimos dois segundos antes de chegar a B, é $s_B - s_C$. O resultado %07 pode substituir-se nessa expressão para obter a distância

```
(%i8) subst (%, 400-sC);  
(%o8) 65.33333333333331
```

A resposta é 65.33 m.

2 Cinemática vetorial

Problema 2

Um berlinde é lançado sobre a superfície horizontal no topo de umas escadas e sai no início das escadas com velocidade horizontal igual a 3 m/s. Cada degrau tem 18 cm de altura e 30 cm de largura. Qual será o primeiro degrau onde o berlinde bate?

No eixo horizontal x , a projeção da velocidade permanece constante e é igual à velocidade inicial $v_x = 3$ (unidades SI). A distância que o berlinde se desloca na horizontal é então $x = 3t$, a partir de $t = 0$, quando abandona a superfície horizontal. Como a largura de cada degrau é 0.3, então o tempo que o berlinde demora em avançar cada degrau é 0.1 segundos. Se durante o tempo que demora até avançar algum degrau a distância vertical que cai chega a ultrapassar a distância que esse mesmo degrau desce, em relação ao ponto inicial, então o berlinde não chegará a ultrapassar esse degrau, batendo nele.

Como tal, é necessário calcular a sequência de posições verticais y_n em $t_n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots$ e compará-las com as posições verticais dos degraus: $h_n = -0.18, -0.36, -0.54, \dots$. O primeiro valor de n na sequência que faça com que y_n seja menor que h_n , será o degrau em que o berlinde bate.

A projeção vertical da velocidade em $t_0 = 0$ é $v_y = 0$, porque o berlinde é lançado horizontalmente. Integrando a aceleração, $a_y = -9.8$, em ordem a t , obtém-se:

$$v_y = -9.8 t$$

Arbitrando $y_0 = 0$, a posição y em qualquer instante t é então o integral de $-9.8 t$, desde zero até t :

$$y = -4.9 t^2$$

E a sequência de posições verticais é então,

$$y_n = -0.049, -0.196, -0.441, -0.784, \dots$$

Comparando com $h_n = -0.18 n$, conclui-se que o berlinde bate no quarto degrau (-0.784 é menor que -0.72).

Problema 6

A velocidade de uma partícula em movimento no plano xy é dada pela expressão: $\vec{v} = 3e^{-2t}\hat{i} - 5e^{-t}\hat{j}$ (unidades SI). No instante $t = 0$ a partícula encontra-se no eixo dos y , na posição $2\hat{j}$.

- (a) Determine em que instante passará pelo eixo dos x e a que distância da origem estará nesse instante.
- (b) Calcule a aceleração em $t = 0$ e no instante em que passa pelo eixo dos x .

A expressão da posição obtém-se somando a posição inicial mais o integral da velocidade, em ordem ao tempo, desde o instante inicial até um instante qualquer

```
(%i1) v: [3*exp(-2*t), -5*exp(-t)]&dollar;
(%i2) r0: [0, 2]&dollar;
(%i3) r: r0 + integrate(v,t,0,t);
(%o3) [3*(1/2 - e^-2t)/2, 2-5(1-e^-t)]
(%i4) float(solve(r[2]=0, t));
(%o4) [t=0.5108]
(%i5) float(subst(%,r));
(%o5) [0.96, 0.0]
```

Ou seja, a partícula passa pelo eixo dos x no instante $t = 0.5108$ s e a uma distância de 0.96 m da origem.

```
(%i6) a: diff(v,t);
(%o6) [-6e^-2t, 5e^-t]
(%i7) subst(t=0,a);
(%o7) [-6, 5]
(%i8) subst(%o4,a);
(%o8) [-2.16, 3.0]
```


A aceleração no instante inicial é $(-6\hat{i} + 5\hat{j}) \text{ m/s}^2$ e quando passa pelo eixo dos x é $(-2.16\hat{i} + 3\hat{j}) \text{ m/s}^2$.

Problema 9

Uma pedra roda pelo telhado de uma casa, que faz um ângulo de 20° com a horizontal. No instante em que a pedra abandona o telhado e cai livremente, o valor da sua velocidade é 4 m/s e encontra-se a uma altura de 6 m . Admitindo que a resistência do ar é desprezável,

- Calcule o tempo que demora a cair ao chão, desde o instante em que abandona o telhado.
- A que distância horizontal bate a pedra no chão, em relação ao ponto onde abandonou o telhado?
- Calcule o ângulo que a velocidade da pedra faz com a vertical no instante em que bate no chão.

(a) Com x na horizontal e y na vertical, a velocidade inicial é (unidades SI)

$$\vec{v}_i = 4 \cos(20^\circ) \hat{i} - 4 \sin(20^\circ) \hat{j} = 3.759 \hat{i} - 1.368 \hat{j}$$

A posição inicial é $6\hat{j}$ e a aceleração é constante: $\vec{a} = -9.8\hat{j}$. A expressão da velocidade obtém-se integrando a aceleração desde o instante inicial até um instante qualquer

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_i + \int_0^t \vec{a}(t') \, dt' = 3.759 \hat{i} - (1.368 + 9.8 t) \hat{j}$$

e a expressão da posição obtém-se integrando essa expressão da velocidade desde o instante inicial até um instante qualquer

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \int_0^t \vec{v}(t') \, dt' = 3.759 t \hat{i} + (6 - 1.368 t - 4.9 t^2) \hat{j}$$

O tempo que demora até bater no chão é o tempo que faz com que a componente y da posição seja nula

$$t = \frac{1.368 - \sqrt{1.368^2 + 4 \times 4.9 \times 6}}{-9.8} = 0.9757 \text{ s}$$

(b) A distância horizontal entre o ponto onde a pedra bate no chão e o ponto onde abandonou o telhado é o valor da componente x da posição no instante em que bate no chão

$$3.759 \times 0.9757 = 3.668 \text{ m}$$

(c) A velocidade no instante em que bate no chão é

$$3.759 \hat{i} - (1.368 + 9.8 \times 0.9757) \hat{j} = 3.759 \hat{i} - 10.93 \hat{j}$$

e o ângulo que faz com a vertical é a tangente inversa da componente x dividida pelo valor absoluto da componente y

$$\theta = \arctan\left(\frac{3.759}{10.93}\right) = 18.98^\circ$$

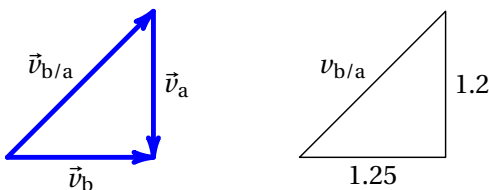
Problema 10

Um barco transporta passageiros de uma margem de um rio para a outra margem, seguindo o percurso mais curto de 1.5 km entre as duas margens. Quando o motor do barco funciona na potência máxima, a travessia demora 20 minutos, num dia em que o valor da velocidade da corrente no rio é 1.2 m/s; calcule o valor da velocidade do barco, nesse dia, (a) em relação à Terra e (b) em relação à água. (c) Determine o tempo mínimo que o barco demorava a atravessar o mesmo rio, num dia em que o valor da velocidade da corrente fosse 0.8 m/s.

(a) O barco desloca-se 1500 m entre as duas margens, durante 20 minutos, com velocidade constante. Como tal, a sua velocidade em relação à terra é igual a

$$v_b = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1500}{20 \times 60} = 1.25 \text{ m/s}$$

(b) A velocidade do barco em relação à água, $\vec{v}_{b/a}$, mais a velocidade da corrente, \vec{v}_a , é igual à velocidade do barco em relação à Terra, \vec{v}_b , como se mostra na figura seguinte.



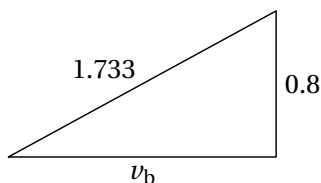
Como o barco atravessa o rio na direção perpendicular às margens, a velocidade da corrente é perpendicular à velocidade do barco e essas duas velocidades são os catetos num triângulo retângulo onde $v_{b/a}$ é a hipotenusa.

Como tal, a velocidade do barco em relação à água é

$$v_{b/a} = \sqrt{1.25^2 + 1.2^2} = 1.733 \text{ m/s}$$

(c) O motor do barco é responsável pela sua velocidade em relação à água, $\vec{v}_{b/a}$. A velocidade em relação à Terra depende também da corrente no rio. O valor de $v_{b/a}$ calculado na alínea anterior corresponde à velocidade máxima produzida pelo motor. No segundo dia, para atravessar o rio no tempo mínimo, o motor deverá funcionar à sua potência máxima produzindo esse mesmo valor da velocidade, $v_{b/a}$, mas a direção do vetor $\vec{v}_{b/a}$ deverá ser diferente, para que $\vec{v}_b = \vec{v}_{b/a} + \vec{v}_a$ seja novamente perpendicular às margens do rio.

No triângulo retângulo da figura acima, o comprimento da hipotenusa será então 1.733, mas os catetos terão valores diferentes. O cateto vertical (velocidade da corrente) terá comprimento 0.8.



Como tal, o comprimento do cateto horizontal será:

$$v_b = \sqrt{1.733^2 - 0.8^2} = 1.537 \text{ m/s}$$

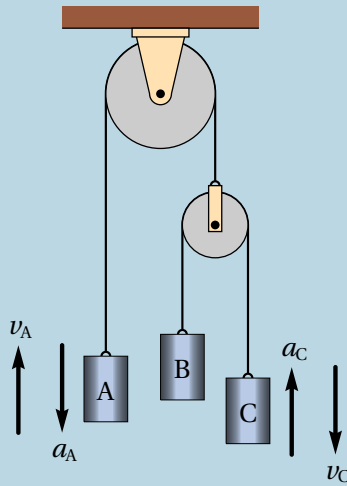
Com essa velocidade, o tempo mínimo necessário para atravessar o rio será

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_b} = \frac{1500}{1.537} = 975.9 \text{ s}$$

ou seja, aproximadamente 16 minutos e 16 segundos.

Problema 13

Três cilindros A, B e C foram pendurados no sistema de duas roldanas que mostra a figura. Num instante, a velocidade do bloco A é $v_A = 3 \text{ m/s}$, para cima, e a sua aceleração é $a_A = 2 \text{ m/s}^2$, para baixo; no mesmo instante, a velocidade e aceleração do bloco C são: $v_C = 1 \text{ m/s}$, para baixo, $a_C = 4 \text{ m/s}^2$, para cima. Determine a velocidade e aceleração do bloco B, no mesmo instante, indicando se são para cima ou para baixo.



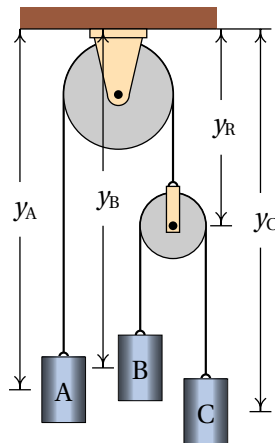
Definem-se 4 variáveis y_A , y_B , y_C e y_R para medir as posições dos cilindros e da roldana móvel, em relação a algo fixo, por exemplo o teto, tal como mostra a figura ao lado.

Como o cilindro A e a roldana móvel estão ligados por um fio, então

$$y_A + y_R = \text{constante}$$

e a ligação dos cilindros B e C com outro fio que passa pela roldana móvel implica:

$$(y_B - y_R) + (y_C - y_R) = \text{constante}$$



Derivando essas duas equações em ordem ao tempo, obtêm-se as relações para as velocidades:

$$\begin{cases} v_A + v_R = 0 \\ v_B + v_C - 2 v_R = 0 \end{cases} \Rightarrow v_B = -2 v_A - v_C$$

Como as distâncias y aumentam quando os objetos descem, então as velocidades para baixo são positivas e para cima são negativas. Assim sendo, as velocidades dadas no enunciado são $v_A = -3$ e $v_C = 1$ e a equação acima dá $v_B = 5$; ou seja, a velocidade do cilindro B é 5 m/s, para baixo.

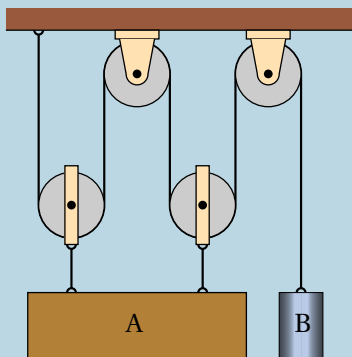
Derivando novamente a relação entre as velocidades obtêm-se a relação entre as acelerações:

$$a_B = -2 a_A - a_C$$

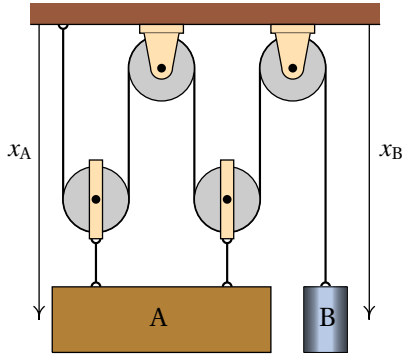
e substituindo os valores dados, $a_A = 2$ e $a_C = -4$, obtêm-se $a_B = 0$; ou seja, a aceleração do cilindro B é nula.

Problema 14

No sistema da figura, encontre a relação entre os valores das velocidades e das acelerações da barra A e do cilindro B, admitindo que a barra A permanece sempre horizontal.



Há dois movimentos diferentes: o movimento da barra e das duas roldanas móveis e o movimento do cilindro. Esses dois movimentos são a variação da posição da barra e do cilindro em relação a algum objeto fixo; usando como referência o teto (ver figura) as posições da barra e do cilindro são x_A e x_B .



A distância entre o centro de uma das roldanas móveis e o centro de uma das roldanas fixas é x_A menos uma constante. Assim sendo, o comprimento do fio é

$$L = 4 x_A + x_B + \text{constantes}$$

Derivando esta equação em ordem ao tempo obtém-se

$$v_B = -4 v_A$$

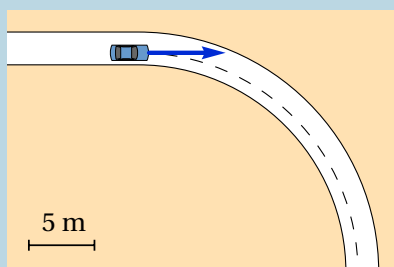
e derivando novamente

$$a_B = -4 a_A$$

3 Movimento curvilíneo

Problema 2

Um motorista entra numa curva a 72 km/h, e trava, fazendo com que o valor da velocidade diminua a uma taxa constante de 4.5 km/h cada segundo. Observando a figura, faça uma estimativa do raio de curvatura da estrada e calcule o valor da aceleração do automóvel 4 segundos após ter iniciado a travagem.



O raio é aproximadamente 16.7 m. A aceleração tangencial (taxa de aumento da velocidade) é igual a

$$a_t = -4.5 \frac{\text{km/h}}{\text{s}} = -\frac{4500 \text{ m}}{3600 \text{ s}^2} = -1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Resolvendo a equação que relaciona a aceleração tangencial com a velocidade e o tempo obtém-se a velocidade após os 4 segundos (72 km/h equivale a 20 m/s)

$$\int_{20}^v dv = -\int_0^4 1.25 dt \quad \Rightarrow \quad v = 15$$

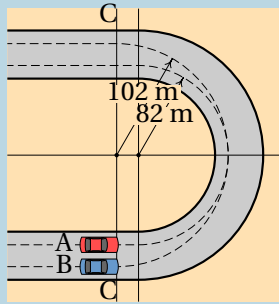
E a aceleração total é

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1.25^2 + \frac{15^4}{16.7^2}} = 13.53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Este valor é uma aproximação, porque o raio foi calculado de forma aproximada.

Problema 5

Dois carros A e B passam por uma curva usando trajetórias diferentes. A figura mostra a curva delimitada pela reta C. O carro B faz um percurso semicircular com raio de 102 m; o carro A avança uma distância em linha reta, a seguir segue um semicírculo com raio 82 m e termina com outro trajeto em linha reta. Os dois carros deslocam-se à velocidade máxima que podem ter para conseguir fazer a curva, que para o tipo de pneus usados corresponde à velocidade que produz uma aceleração normal de $0.8g$, onde g é a aceleração da gravidade. Calcule o tempo que demora cada um dos carros a fazer a curva.



Como cada carro faz a curva com velocidade constante, o tempo que demora é

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

A velocidade de cada carro é a que conduz ao valor máximo da aceleração normal, ou seja

$$\frac{v^2}{R} = 0.8g \implies v = \sqrt{7.84 R}$$

No caso do automóvel B, o percurso é metade da circunferência de 102 metros de raio

$$\Delta s = 102\pi \quad v = \sqrt{7.84 \times 102} = 28.279$$

E como tal, o tempo que demora é

$$\Delta t = \frac{102\pi}{28.279} = 11.33 \text{ s}$$

No caso do automóvel A, o percurso é metade da circunferência de 82 metros de raio, mais dois segmentos retos de 20 m cada um

$$\Delta s = 2 \times 20 + 82\pi \quad v = \sqrt{7.84 \times 82} = 25.355$$

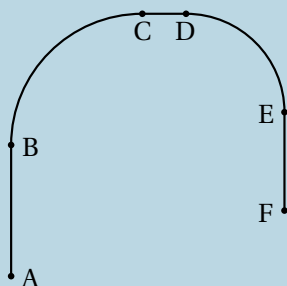
E o tempo que demora o carro A é

$$\Delta t = \frac{40 + 82\pi}{25.355} = 11.74 \text{ s}$$

Problema 7

Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura, partindo do repouso em A e aumentando a velocidade com aceleração constante até o ponto B. Desde B até E mantém velocidade constante de 10 m/s e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 60 cm, CD é 20 cm e EF é 45 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Determine:

- O módulo da aceleração da partícula em cada um dos trajetos AB, BC, CD, DE e EF.
- O tempo total do movimento desde A até F e a velocidade média nesse percurso.



(a) No trajeto AB,

$$a_t = v \frac{dv}{ds} \implies a_t \int_0^{0.6} ds = \int_0^{10} v dv \implies a_t = 83.33 \text{ m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 83.33 m/s^2 . No trajeto EF,

$$a_t = v \frac{dv}{ds} \implies a_t \int_0^{0.45} ds = \int_{10}^0 v dv \implies a_t = -111.11 \text{ m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 111.11 m/s^2 . No trajeto CD, o módulo da aceleração é nulo, porque o movimento é retilíneo e uniforme. No trajeto BC, a aceleração tem unicamente componente normal:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.6} = 166.67 \text{ m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 166.67 m/s^2 . No trajeto DE, a aceleração também tem unicamente componente normal:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.45} = 222.22 \text{ m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 222.22 m/s^2 .

(b) A distância total percorrida é a soma dos três segmentos AB, CD e EF, mais os dois arcos BC e DE, ambos com ângulo de $\pi/2$ radianos:

$$d = 0.6 + 0.2 + 0.45 + \frac{\pi}{2} (0.6 + 0.45) = 2.90 \text{ m}$$

O tempo que a partícula demora a percorrer o trajeto BCDE é:

$$t_1 = \frac{0.2 + \frac{\pi}{2} (0.6 + 0.45)}{10} = 0.185 \text{ s}$$

Para calcular o tempo que demora no trajeto AB, integra-se uma equação de movimento

$$a_t = \frac{dv}{dt} \implies t_2 = \frac{1}{a_t} \int_0^{10} dv = \frac{10}{83.33} = 0.120 \text{ s}$$

e usa-se o mesmo procedimento para calcular o tempo que demora no trajeto EF:

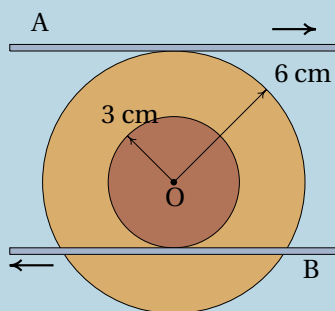
$$a_t = \frac{dv}{dt} \implies t_3 = \frac{1}{a_t} \int_{10}^0 dv = \frac{10}{111.11} = 0.090 \text{ s}$$

A velocidade média é igual à distância percorrida dividida pelo tempo que demorou:

$$v_m = \frac{d}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{2.90}{0.185 + 0.120 + 0.090} = 7.34 \text{ m/s}$$

Problema 8

A roda na figura tem duas partes com raios de 3 cm e 6 cm, que estão em contacto com duas barras horizontais A e B. A barra A desloca-se para a direita, com valor da velocidade de 10 m/s e a barra B desloca-se para a esquerda com valor da velocidade de 35 m/s, enquanto a roda mantém o contacto com as duas barras, sem derrapar. Determine para que lado se desloca o centro O da roda e calcule os valores da velocidade do ponto O e da velocidade angular da roda.



Admitindo sentido positivo de esquerda para direita, as velocidades das barras A e B são

$$v_A = 10 \quad v_B = -35$$

E a velocidade do ponto da roda em contacto com a barra A, em relação ao ponto da roda em contacto com a barra B, é igual a

$$v_{A/B} = v_A - v_B = +45$$

Por ser positiva, conclui-se que a roda está a rodar no sentido horário e com velocidade angular

$$\omega = \frac{v_{A/B}}{AB} = \frac{45}{0.09} = 500$$

em unidades SI (radianos por segundo). A velocidade do ponto O, relativa ao ponto da roda em contacto com a barra B é positiva, porque a velocidade angular é no sentido horário, e com valor

$$v_{O/B} = \overline{OB} \omega = 0.03 \times 500 = +15$$

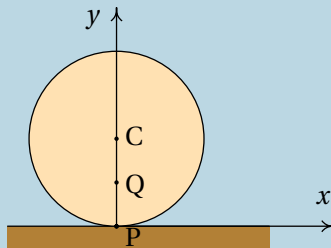
Finalmente, a velocidade do ponto O é

$$v_O = v_{O/B} + v_B = 15 - 35 = -20$$

em m/s. O sinal negativo indica que o ponto O desloca-se para a esquerda.

Problema 9

Uma roda com 20 cm de raio desloca-se, sem derrapar, sobre uma superfície plana, ao longo do eixo dos x . No instante $t = 0$ o centro da roda encontra-se em $x = 0$ e $y = 20$ cm e os pontos P e Q da roda são os pontos que estão em $x = 0$ com $y = 0$ e $y = 10$ cm. O valor da velocidade do centro da roda é 2 m/s, constante. (a) Calcule quanto tempo demora a roda a dar duas voltas completas. (b) Represente os gráficos das trajetórias dos pontos P e Q durante o tempo que a roda demora a dar duas voltas.



(a) Como a velocidade do ponto P é nula, a velocidade de C relativa a P é igual a 2 m/s e a velocidade angular da roda é

$$\omega = \frac{2}{0.20} = 10$$

e por ser constante, o tempo que a roda demora a dar duas voltas é

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{4\pi}{10} = 1.26 \text{ s}$$

(b) O ângulo que a reta CP faz com a vertical é dado pela expressão

$$\theta = \omega t = 10 t$$

E a posição dos pontos P e Q, relativas a C, são

$$\vec{r}_{P/C} = -0.2(\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) = -0.2(\sin(10 t) \hat{i} + \cos(10 t) \hat{j})$$

$$\vec{r}_{Q/C} = -0.1(\sin(10 t) \hat{i} + \cos(10 t) \hat{j})$$

A posição do ponto C, em função do tempo é

$$\vec{r}_C = 2 t \hat{i} + 0.2 \hat{j}$$

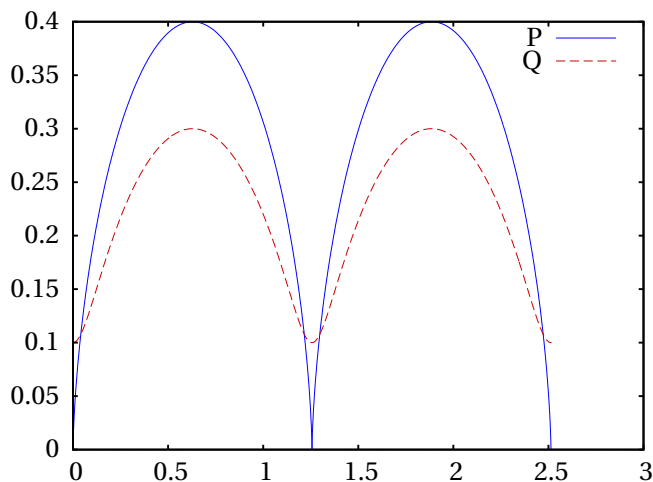
Assim sendo, as posições dos pontos P e Q, em função do tempo, são

$$\vec{r}_P = (2 t - 0.2 \sin(10 t)) \hat{i} + (0.2 - 0.2 \cos(10 t)) \hat{j}$$

$$\vec{r}_Q = (2 t - 0.1 \sin(10 t)) \hat{i} + (0.2 - 0.1 \cos(10 t)) \hat{j}$$

O gráfico das trajetórias desses dois pontos, durante duas voltas, obtém-se com o seguinte comando do Maxima

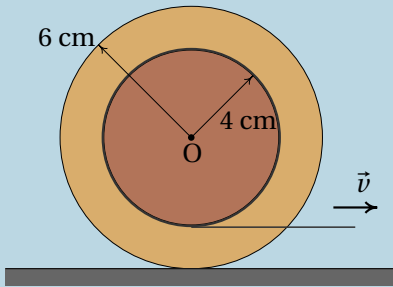
```
(%i1) plot2d([[parametric, 2*t-0.2*sin(10*t), 0.2-0.2*cos(10*t)],
              [parametric, 2*t-0.1*sin(10*t), 0.2-0.1*cos(10*t)]],
              [t,0,1.26], [legend,"P","Q"]);
```



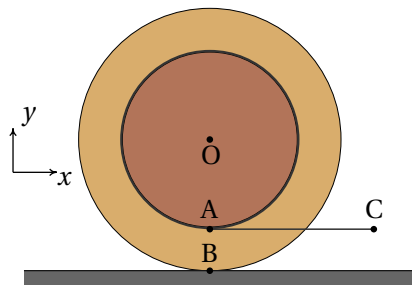
Problema 10

Um cilindro com raio de 4 cm está colado a uma roda com 6 cm de raio que se encontra sobre uma superfície horizontal plana, tal como mostra a figura. Uma corda foi enrolada à volta do cilindro e está a ser puxada horizontalmente para a direita, com velocidade constante \vec{v} de valor 2.5 cm/s. O movimento da corda faz rodar a roda sobre a superfície horizontal, sem derrapar.

- Determine o valor da velocidade angular da roda.
- Diga em que sentido se desloca o ponto O, no eixo da roda e do cilindro, e determine o valor da sua velocidade.
- Determine quantos centímetros de corda são enrolados à volta do cilindro a cada segundo.



(a) Como a roda não derrapa, a velocidade do ponto B na figura ao lado é nula. Como tal, a velocidade $\vec{v}_{A/B}$ de A relativa a B, é $\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{v}_A$. Escolhendo o sistema de eixos indicado na figura e distâncias em centímetros, a velocidade do ponto A, que é a mesma velocidade com que a corda está a ser puxada no ponto C, é igual a:



$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A = 2.5 \hat{i}$$

Essa velocidade está também relacionada com a velocidade angular pela expressão:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{BA} = (\omega \hat{k}) \times (2 \hat{j}) = -2\omega \hat{i}$$

onde o versor \hat{k} aponta para fora da figura. Igualando as duas expressões anteriores, obtém-se a velocidade angular:

$$\omega = \frac{2.5}{-2} = -1.25 \text{ s}^{-1}$$

o sinal negativo indica que o vetor $\vec{\omega}$ aponta para dentro da figura, ou seja, a rotação é no sentido dos ponteiros do relógio.

(b) Como a velocidade angular da roda é no sentido dos ponteiros do relógio, o ponto O desloca-se para a direita com velocidade de valor igual a:

$$v_O = \overline{OB} \omega = 7.5 \text{ cm/s}$$

(c) A velocidade do ponto C, em relação ao ponto O, é:

$$\vec{v}_{C/O} = \vec{v}_C - \vec{v}_O = 2.5 \hat{i} - 7.5 \hat{i} = -5 \hat{i}$$

o sentido dessa velocidade, no sentido negativo do eixo dos x , indica que os pontos O e C estão a aproximarem-se, ou seja, a corda está a enrolar-se ainda mais e cada segundo enrolam-se 5 cm de corda.

4 Mecânica vetorial

Problema 1

Uma pessoa com 70 kg sobe num elevador até o sexto andar de um prédio. O elevador parte do repouso no rés de chão, acelera até o segundo andar, com aceleração uniforme de 2 m/s^2 , mantém a velocidade constante entre o segundo e o quarto andar e trava entre o quarto e o sexto andar, com aceleração uniforme de -2 m/s^2 . Determine o módulo da reação normal nos pés da pessoa, em cada parte do percurso.

A figura mostra o diagrama de corpo livre da pessoa, onde \vec{R}_n é a reação normal do chão do elevador nos seus pés. Definindo o sentido positivo de baixo para cima, a soma das duas forças externas é então

$$R_n - m g = R_n - 686$$

Entre o rés de chão e o segundo andar a força resultante aponta para cima e, assim sendo

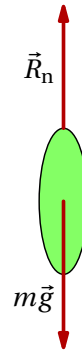
$$R_n - 686 = 70 \times 2 \quad \Rightarrow \quad R_n = 826 \text{ N}$$

Entre o segundo e o quarto andar, a força resultante é nula

$$R_n - 686 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n = 686 \text{ N}$$

Finalmente, entre o quarto e o sexto andar, a força resultante é negativa, porque aponta para baixo

$$R_n - 686 = -70 \times 2 \quad \Rightarrow \quad R_n = 546 \text{ N}$$



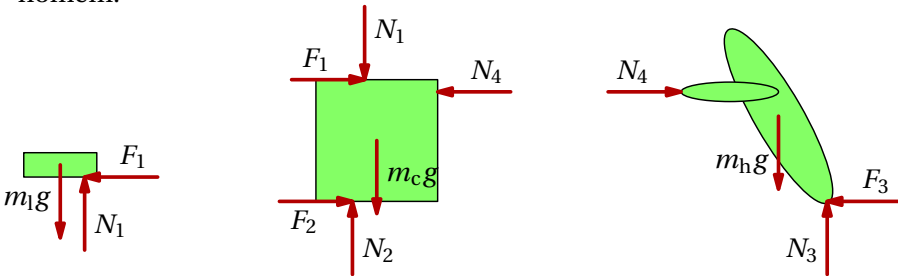
Problema 5

Um homem com 72 kg empurra uma caixa de madeira com 8 kg sobre um chão horizontal, exercendo uma força horizontal nela que a faz deslizar no chão. Sobre a caixa está pousado um livro com 0.6 kg. O homem, a caixa e o livro deslocam-se conjuntamente, com aceleração igual a 0.5 m/s^2 . Determine os valores das forças de atrito entre o chão e a caixa, entre a caixa e o livro e entre o chão e os pés do homem, ignorando a resistência do ar e sabendo que os coeficientes de atrito estático (μ_e) e atrito cinético (μ_c) são: entre o chão e a caixa, $\mu_e = 0.25$ e $\mu_c = 0.2$; entre a caixa e o livro, $\mu_e = 0.35$ e $\mu_c = 0.28$; entre o chão e os pés do homem, $\mu_e = 0.4$ e $\mu_c = 0.3$.

Existem quatro pontos de contacto entre corpos rígidos:

1. Entre a base do livro e a tampa da caixa.
2. Entre a base da caixa e o chão.
3. Entre os pés do homem e o chão.
4. Entre as mãos do homem e a parede lateral direita da caixa (admitindo que está a ser empurrada para a esquerda).

Em 1 há reação normal, N_1 , vertical, e força horizontal, F_1 , de atrito estático porque o livro não está a deslizar sobre a caixa. Em 2 há força de reação normal, N_2 , vertical, e força horizontal, F_2 , de atrito cinético, porque a caixa desliza sobre o chão. Em 3 há reação normal, N_3 , vertical, e força horizontal, F_3 , de atrito estático porque os pés do homem não derrapam sobre o chão. Em 4 há apenas reação normal, N_4 , porque o enunciado diz que a força que o homem exerce na caixa é horizontal. A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre do livro, da caixa e do homem.



No livro, F_1 aponta para a esquerda, porque o livro acelera para a esquerda. O mesmo acontece com a força F_3 no homem. Essas duas forças

de atrito estático não podem ultrapassar o valor máximo, $\mu_e N$, mas podem ter qualquer valor entre 0 e esse valor máximo. A força de atrito cinético F_2 é no sentido oposto ao movimento da caixa e tem módulo igual a $F_2 = \mu_c N_2 = 0.2 N_2$. Os pesos do livro, da caixa e do homem são: $P_l = 5.88 \text{ N}$, $P_c = 78.4 \text{ N}$ e $P_h = 705.6 \text{ N}$.

As duas equações de movimento de translação do livro são (unidades SI):

$$N_1 = 5.88 \qquad F_1 = m_l a = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

As equações de movimento de translação da caixa são:

$$\begin{aligned} N_2 &= 78.4 + N_1 = 84.28 & N_4 - F_1 - F_2 &= m_c a \\ \Rightarrow N_4 &= 8 \times 0.5 + 0.3 + 0.2 \times 84.28 = 21.156 \end{aligned}$$

E as equações de movimento de translação do homem são:

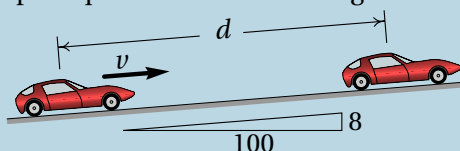
$$\begin{aligned} N_3 &= 705.6 & F_3 - N_4 &= m_h a \\ \Rightarrow F_3 &= 72 \times 0.5 + 21.156 = 57.156 \end{aligned}$$

O valor máximo que pode ter F_1 é $0.35 N_1 = 2.058$ e o valor máximo possível de F_3 é $0.4 N_3 = 282.24$. Como os resultados obtidos não ultrapassam esses valores máximos, esses resultados são válidos e a resposta é: a força de atrito entre a caixa e o livro é 0.3 N , a força de atrito entre a caixa e o chão é $0.2 \times 84.28 = 16.856 \text{ N}$ e a força de atrito entre o chão e os pés do homem é 57.156 N .

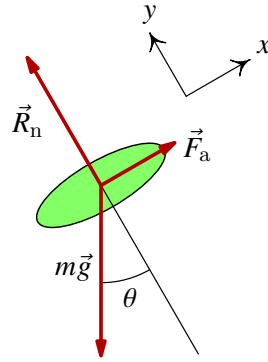
Problema 6

Um automóvel com 1230 kg sobe uma rampa com declive de 8 por cento, com velocidade constante. Determine:

- O valor da força de atrito total (soma das forças nos quatro pneus).
- O valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a estrada e os pneus para que o automóvel consiga subir a rampa.



A figura mostra o diagrama de corpo livre do automóvel, onde \vec{R}_n e \vec{F}_a são a soma das reações normais e das forças de atrito nos quatro pneus (para que \vec{F}_a aponte no sentido do movimento, deve ser atrito estático, pelo menos em alguns dos pneus). Como a velocidade é linear e constante, a aceleração é nula e a soma das forças externas também. Usando os dois eixos indicados na figura, as somas das componentes x e y das forças devem ser ambas nulas



$$R_n - m g \cos \theta = 0 \quad F_a - m g \sin \theta = 0$$

(a) Como o ângulo θ é igual à inclinação da rampa, então a segunda equação conduz a

$$F_a = m g \sin \theta = \frac{1230 \times 9.8 \times 8}{\sqrt{100^2 + 8^2}} = 961.2 \text{ N}$$

(b) A reação normal determina-se resolvendo a condição da soma das componentes y das forças

$$R_n = m g \cos \theta = \frac{1230 \times 9.8 \times 100}{\sqrt{100^2 + 8^2}} = 12015.6 \text{ N}$$

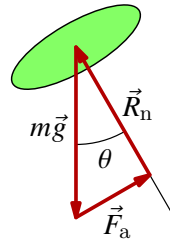
E como

$$F_a \leq \mu_e R_n$$

então

$$\mu_e \geq \frac{F_a}{R_n} \implies \mu_e \geq 0.08$$

Este problema também podia ser resolvido colocando as três forças uma a continuação da outra, como se mostra na figura ao lado. Como a força resultante é nula, os três vetores formam um triângulo, que neste caso é retângulo e semelhante ao triângulo da rampa. Por semelhança de triângulos conclui-se que a força de atrito é igual a $8 m g / \sqrt{10064}$, a reação normal é igual a $100 m g / \sqrt{10064}$ e o coeficiente de atrito mínimo é $8/100$.

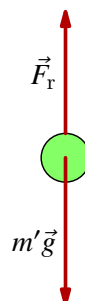


Problema 8

Uma esfera de raio R e massa volúmica ρ_e cai livremente dentro de um fluido com massa volúmica ρ e coeficiente de viscosidade η . (a) Encontre as expressões para a velocidade terminal quando a resistência do fluido é proporcional à velocidade ou quando é proporcional ao quadrado da velocidade. (b) Calcule a velocidade terminal dentro de glicerina, água e ar de uma esfera de aço (massa volúmica 7800 kg/m^3) e diâmetro de 1 cm; em cada caso determine o valor do número de Reynolds. Use os dados na tabela seguinte:

Fluido	Viscosidade (kg/(m·s))	Massa volúmica (kg/m ³)
Glicerina	1.5	1200
Água	10^{-3}	1000
Ar	1.8×10^{-5}	1.2

(a) A figura mostra o diagrama de corpo livre da esfera, onde m' é igual à massa da esfera menos a massa do fluido que ocuparia o mesmo volume da esfera e \vec{F}_r é a força de resistência do fluido, que inicialmente é nula, mas aumenta à medida que a velocidade da esfera aumenta. No instante em que o módulo da força de resistência seja igual ao peso, a aceleração será nula, a esfera atingirá a velocidade limite constante e a força de resistência permanecerá também constante. Como tal, a condição que permite determinar a velocidade terminal é



$$m'g = F_r \implies \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho) g = F_r$$

No caso da força de resistência proporcional à velocidade, a equação 4.12 para uma esfera conduz à seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho) g &= 6\pi\eta R v \\ v &= \frac{2R^2 g}{9\eta} (\rho_e - \rho) \end{aligned}$$

E no caso da força de resistência proporcional ao quadrado da velocidade, a equação 4.14 para uma esfera conduz à seguinte expressão

$$\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho) g = \frac{\pi}{4} \rho R^2 v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{16}{3} R g \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1 \right)}$$

(b) Na glicerina, como a viscosidade é elevada, admite-se que a força de resistência seja proporcional à velocidade e, assim sendo, a velocidade terminal da esfera é

$$v = \frac{2 \times 0.005^2 \times 9.8}{9 \times 1.5} (7800 - 1200) = 0.240 \text{ m/s}$$

Usando o raio da esfera, o número de Reynolds é

$$N_R = 0.005 \times 0.240 \left(\frac{1200}{1.5} \right) = 0.958$$

Que por ser da ordem de grandeza das unidades corrobora que a força de resistência sim é proporcional à velocidade. Os mesmos cálculos no caso da água conduzem aos seguintes resultados

$$v = \frac{2 \times 0.005^2 \times 9.8}{9 \times 10^{-3}} (7800 - 1000) = 370.2 \text{ m/s}$$

$$N_R = 0.005 \times 370.2 \left(\frac{1000}{10^{-3}} \right) = 1.85 \times 10^6$$

Que é um resultando inconsistente, porque o número de Reynolds é da ordem dos milhões. Isso implica que é necessário repetir os cálculos admitindo que a força de resistência é proporcional ao quadrado da velocidade

$$v = \sqrt{\frac{16}{3} \times 0.005 \times 9.8 \left(\frac{7800}{1000} - 1 \right)} = 1.33 \text{ m/s}$$

$$N_R = 0.005 \times 1.33 \left(\frac{1000}{10^{-3}} \right) = 6665$$

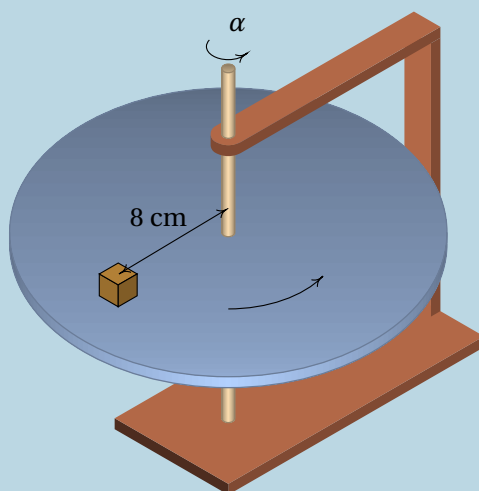
Que sim é um resultado consistente. Repetindo os mesmos cálculos para o caso do ar, encontra-se

$$v = \sqrt{\frac{16}{3} \times 0.005 \times 9.8 \left(\frac{7800}{1.2} - 1 \right)} = 41.2 \text{ m/s}$$

$$N_R = 0.005 \times 41.2 \left(\frac{1.2}{1.8 \times 10^{-5}} \right) = 13737$$

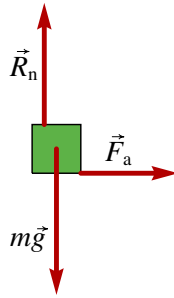
Problema 10

Para medir o coeficiente de atrito estático entre um bloco e um disco, fez-se rodar o disco com uma aceleração angular $\alpha = 5 \text{ rad/s}^2$ constante. O disco parte do repouso em $t = 0$ e no instante $t = 0.82 \text{ s}$ o bloco começa a derrapar sobre o disco. Determine o valor do coeficiente de atrito estático.



A figura seguinte mostra o diagrama de corpo livre do bloco, onde \vec{R}_n é a reação normal e \vec{F}_a a força de atrito estático. Como não há movimento vertical, a reação normal é igual ao peso e a força de atrito é a força resultante $F_a = m a$. Enquanto o bloco acompanha o movimento do disco, a sua aceleração a é a mesma aceleração do movimento circular do disco, ou seja

$$F_a = m \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = m \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} = m r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



No instante em que o bloco começa a derrapar, a força de atrito estático é máxima, e

$$\mu_e = \frac{F_a}{R_n} = \frac{r}{g} \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Para encontrar a velocidade angular no instante em que o bloco começa a derrapar, integra-se a equação que relaciona a aceleração angular com a velocidade angular e o tempo, $\alpha = \dot{\omega}$. Usando o método de separação de variáveis,

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{0.82} 5 dt \implies \omega = 4.1$$

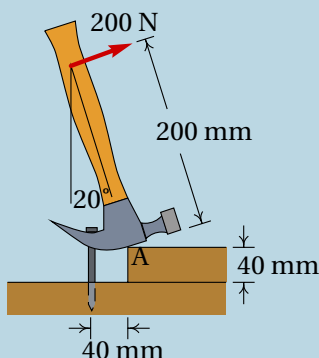
E substituindo na expressão para o coeficiente de atrito

$$\mu_e = \frac{0.08}{9.8} \sqrt{5^2 + 4.1^4} = 0.143$$

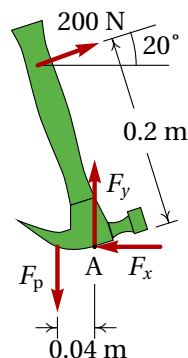
5 Dinâmica dos corpos rígidos

Problema 1

O martelo na figura apoia-se sobre um bloco de madeira de 40 mm de espessura, para facilitar a extração do prego. Sabendo que é necessária uma força de 200 N (perpendicular ao martelo) para extrair o prego, calcule a força sobre o prego e a reação no ponto A. Admita que o peso do martelo pode ser desprezado e em A existe suficiente atrito para evitar que o martelo escorregue.



Para extrair o prego sem dobrá-lo, o martelo é usado para produzir uma força F_p sobre o prego, que aponta para cima. A reação dessa força é a força que o prego exerce sobre o martelo, que tem o mesmo módulo F_p , mas aponta para baixo, como se mostra no diagrama de corpo livre do martelo ao lado. O peso do martelo foi ignorado e a força de reação no ponto A foi dividida nas suas componentes F_x e F_y para facilitar os cálculos.



Se o prego é extraído lentamente e com velocidade uniforme, as acelerações tangencial e normal do martelo são ambas nulas e, como tal, o martelo é um sistema em equilíbrio. Assim sendo, a soma dos momentos das forças externas, em relação a qualquer ponto, é nula. Em relação ao ponto A, unicamente as forças de 200 N e F_p produzem momento e tem-se que

$$0.04 F_p - 0.2 \times 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_p = 1000 \text{ N}$$

A soma das componentes horizontais das forças deve ser nula

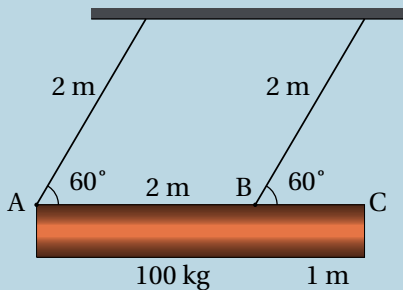
$$200 \cos 20^\circ - F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = 187.9 \text{ N}$$

E a soma das componentes verticais também

$$200 \sin 20^\circ + F_y - F_p = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 931.6 \text{ N}$$

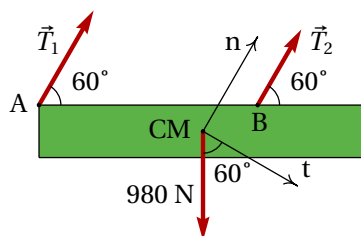
Problema 5

Um tronco uniforme tem forma cilíndrica com 48 cm de diâmetro, 3 m de comprimento, massa de 100 kg e está pendurado em posição horizontal, por meio de dois cabos de 2 m, como mostra a figura. O tronco larga-se a partir do repouso na posição em que cada cabo faz um ângulo de 60° com a horizontal. Determine a tensão e a aceleração angular de cada um dos cabos, no preciso instante em que o tronco é largado a partir do repouso.



A figura seguinte mostra o diagrama de corpo livre do tronco, onde \vec{T}_1 e \vec{T}_2 são as tensões nos dois cabos e o centro de massa encontra-se no centro do tronco. Como o tronco permanece sempre em posição horizontal, a

sua velocidade angular é nula; o movimento do tronco é então translação sem rotação, em que as trajetórias de todos os pontos do tronco são arcos de círculo perpendiculares aos dois cabos.



É conveniente usar o sistema de eixos tangencial e normal indicados no diagrama, com a origem no centro de massa. As equações para este sistema são 3: a soma das componentes tangenciais das forças externas é igual à massa vezes a aceleração tangencial, a soma das componentes normais das forças é igual à massa vezes a aceleração normal, que no instante inicial é zero, porque a velocidade inicial é nula e a soma dos momentos das forças externas em relação à origem (centro de massa) é zero. As duas primeiras equações são então

$$980 \cos 60^\circ = 100 a_t \quad T_1 + T_2 - 980 \sin 60^\circ = 0$$

E a soma dos momentos em relação à origem é

$$\begin{vmatrix} -1.5 & 0.24 \\ T_1 \cos 60^\circ & T_1 \sin 60^\circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.5 & 0.24 \\ T_2 \cos 60^\circ & T_2 \sin 60^\circ \end{vmatrix} = 0$$

$$(0.5 T_2 - 1.5 T_1) \sin 60^\circ - 0.24 (T_1 + T_2) \cos 60^\circ = 0$$

A solução destas 3 equações é a seguinte

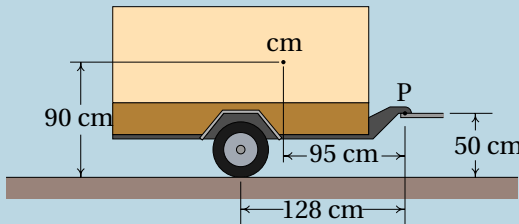
```
(%i1) float (solve ([9.8*cos(%pi/3)=at, T1+T2-980*sin(%pi/3)=0,
(0.5*T2-1.5*T1)*sin(%pi/3)-0.24*(T1+T2)*cos(%pi/3)=0]));
(%o1) [[ T2 = 695.3, T1 = 153.4, at = 4.9 ]]
```

Os extremos dos dois cabos, nos pontos A e B, têm a mesma aceleração tangencial do tronco, igual a 4.9 m/s^2 . Assim sendo, a aceleração angular dos cabos é igual a essa aceleração tangencial, dividida pelo comprimento dos cabos (2 m), ou seja

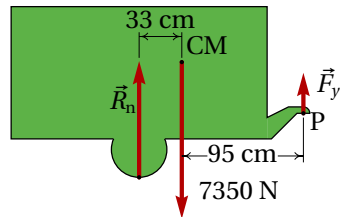
$$\alpha = 2.45 \text{ rad/s}^2$$

Problema 7

A massa do reboque na figura é 750 kg e está ligado no ponto P a uma trela de um automóvel. A estrada é horizontal e os dois pneus idênticos podem ser considerados como um só, com uma única reação normal e força de atrito desprezável; a resistência do ar também será desprezada. (a) Calcule a reação normal nos pneus e a força vertical no ponto P, quando a velocidade for constante. (b) Quando o automóvel estiver a acelerar, com $a_t = 2 \text{ m/s}^2$, a força em P terá componentes horizontal e vertical. Calcule essas componentes e a reação normal nos pneus (o momento de inércia das rodas e o atrito com a estrada são desprezáveis).



(a) A figura mostra o diagrama de corpo livre do reboque. Como a velocidade é constante, o reboque está em equilíbrio. A reacção normal, R_n , pode ser calculada somando os momentos em relação ao ponto P, que deve ser igual a zero

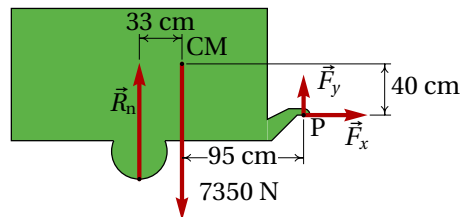


$$95 \times 7350 - 128 R_n = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n = 5455 \text{ N}$$

E a força em P, F_y , encontra-se a partir da soma dos momentos em relação ao ponto de contacto entre o pneu e a estrada

$$128 F_y - 33 \times 7350 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 1895 \text{ N}$$

(b) A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do reboque, quando está a acelerar. Como a aceleração é na direcção x (horizontal) e o reboque não roda, a soma das componentes x das forças deve ser igual a ma , a soma



das componentes y (verticais) das forças deve ser nula e a soma dos momentos em relação ao centro de massa deve ser nula:

$$F_x = 750 \times 2 = 1500 \text{ N}$$

$$R_n + F_y - 7350 = 0$$

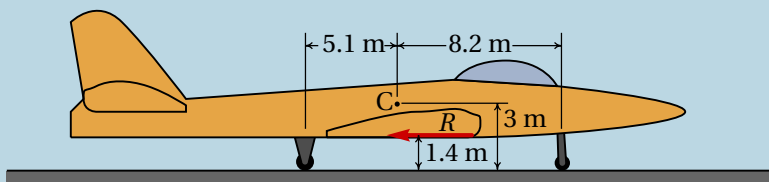
$$33 R_n - 95 F_y - 40 F_x = 0$$

A solução da segunda e terceira equações conduz aos valores de reação normal e da componente vertical da força em P:

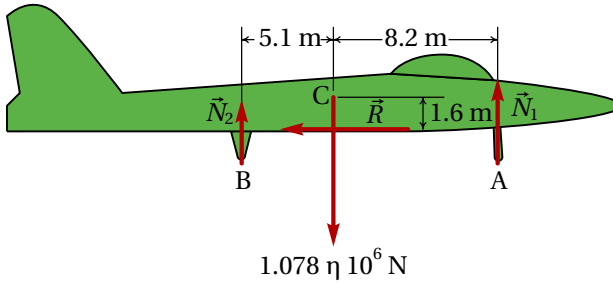
```
(%i2) float (solve ([Rn+Fy-7350=0, 33*Rn-95*Fy-40*1500=0]));
(%o2)      [[ Rn = 5923.8, Fy = 1426.2 ]]
```

Problema 8

O avião na figura, com massa total de 1.1×10^5 kg, aterra numa pista horizontal. O ponto C representa o centro de gravidade. No instante em que a velocidade é de 210 km/h (para a direita), o piloto liga as turbinas em modo inverso, produzindo a força constante R (representada na figura) e após ter percorrido 580 m na pista a velocidade diminui para 70 km/h. Durante esse percurso, as forças de atrito nos pneus e a resistência do ar podem ser ignoradas, em comparação com a força R que é muito maior. Calcule a reação normal na roda da frente.



A figura seguinte mostra o diagrama de corpo livre do avião, onde \vec{N}_1 é a reação normal na roda da frente e \vec{N}_2 é a soma das reações normais nas duas rodas traseiras.



Como o movimento do avião é acelerado mas sem rotação, as expressões da soma das componentes horizontais e verticais das forças e da soma dos momentos em relação ao centro de massa são:

$$\begin{aligned} R &= m a_t \\ N_1 + N_2 - 1.078 \times 10^6 &= 0 \\ 8.2 N_1 - 5.1 N_2 - 1.6 R &= 0 \end{aligned}$$

Como a força R permanece constante, a primeira equação implica que a aceleração também é constante e pode integrar-se a equação que relaciona a aceleração com a velocidade e a posição

$$\begin{aligned} a_t &= v \frac{dv}{ds} \\ a_t \int_0^{580} ds &= \int_{210/3.6}^{70/3.6} v dv \\ 580 a_t &= \frac{1}{2 \times 3.6^2} (70^2 - 210^2) \\ a_t &= -2.61 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

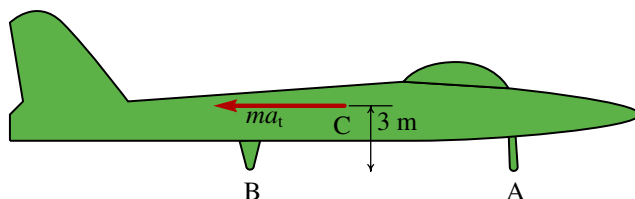
O sinal negativo indica que é no sentido oposto à velocidade. Como tal,

$$R = 1.1 \times 10^5 \times 2.61 = 287 \times 10^3 \text{ N}$$

Substituindo esse valor na equação da soma dos momentos, pode resolver-se o sistema de duas equações para N_1 e N_2 . Mas outra forma mais direta de obter N_1 consiste em escrever a equação para a soma dos momentos em relação ao ponto B:

$$\begin{aligned} 13.3 N_1 - 5.1 \times 1.078 \times 10^6 + 1.4 \times 287 \times 10^3 &= 3 \times 287 \times 10^3 \\ \Rightarrow N_1 &= 448 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

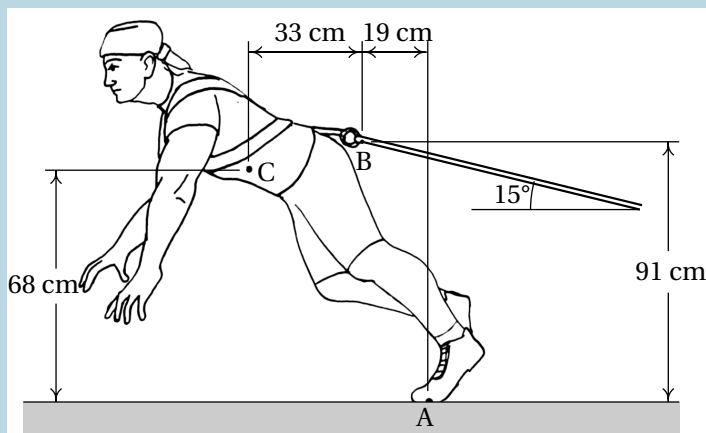
Observe-se que a soma dos momentos em relação a um ponto diferente do centro de massa não é nula, mas é igual ao momento da força resultante, colocada no centro de massa, em relação a esse ponto. Ou seja, a equação anterior obteve-se comparando as forças no diagrama de corpo livre com o seguinte sistema equivalente:



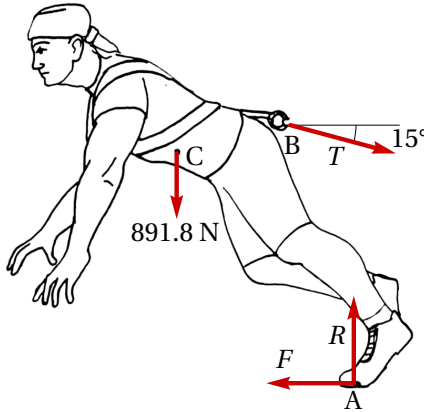
Como os dois sistemas de forças são equivalentes, o momento em relação a qualquer ponto, em particular B, tem de ser igual nos dois sistemas.

Problema 9

Um atleta com massa de 91 kg puxa um caminhão numa estrada horizontal, com velocidade constante, por meio de uma corda amarrada às suas costas. A figura mostra as posições relativas do centro de gravidade do atleta, C, do ponto de apoio do seu pé com o chão, A, e do ponto de ligação com a corda, B. (a) Calcule o módulo da tensão na corda. (b) Faça um diagrama com as forças que julga que poderão estar a atuar no caminhão.



(a) As forças externas sobre o atleta são o seu peso, de 891.8 N, a tensão na corda, \vec{T} , a reação normal do chão, \vec{R} , e a força de atrito estático no chão, \vec{F} :



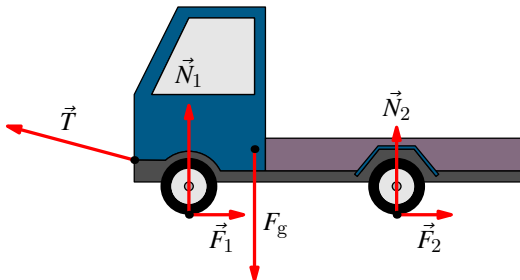
A soma dos binários em qualquer ponto deve ser nula. Somando as forças no ponto A, as forças \vec{R} e \vec{F} não produzem nenhum binário e a soma dos binários de do peso e de T em A é:

$$0.52 \times 891.8 + 0.19 T \sin(15^\circ) - 0.91 T \cos(15^\circ) = 0$$

como tal, a tensão na corda é:

$$T = \frac{0.52 \times 891.8}{0.91 \cos(15^\circ) - 0.19 T \sin(15^\circ)} = 559 \text{ N}$$

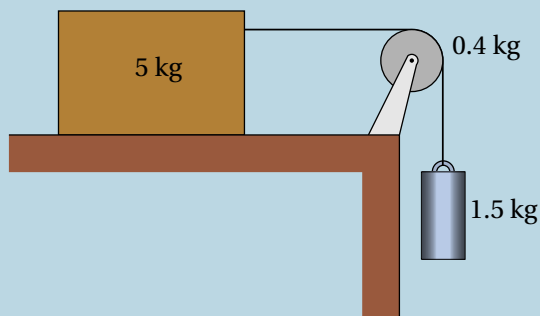
(b) As forças sobre o caminhão são a tensão na corda, o peso total do caminhão e da sua carga, e as reações normais e forças de atrito nos pneus. A direção e sentido dessas forças está indicado no diagrama seguinte:



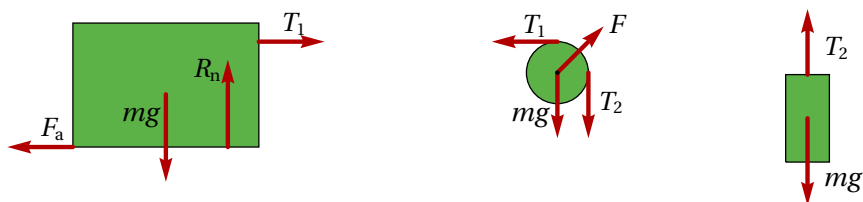
O atrito é estático e as forças de atrito apontam na direção oposta ao movimento, porque nenhuma das rodas tem tração. A força da resistência do ar foi desprezada, porque a velocidade deverá ser muito baixa, mas se fosse considerada teria a mesma direção e sentido das forças de atrito.

Problema 10

O cilindro de 1.5 kg na figura desce verticalmente, fazendo acelerar o bloco de 5 kg sobre a mesa horizontal. A roldana pode ser considerada um disco uniforme de massa 0.4 kg. O fio faz rodar a roldana, sem deslizar sobre a sua superfície. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é 0.2. Determine o valor da aceleração do bloco e do cilindro, desprezando o atrito no eixo da roldana, a massa do fio e a resistência do ar.



A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre do bloco, da roldana e do cilindro:



Há quatro forças a atuar no bloco: o peso, mg , a reação normal, R_n , a tensão no fio, T_1 , e a força de atrito, F_a (diagrama ao lado). Como não há aceleração na vertical, a soma das forças verticais é nula, ou seja, R_n é igual ao peso, igual a 49 N. Como o atrito é cinético, a força de atrito é

igual $0.2 R_n = 9.8 \text{ N}$ e a soma das forças horizontais é

$$T_1 - 9.8 = 5 a \quad \Rightarrow \quad T_1 = 9.8 + 5 a$$

Na roldana atuam 4 forças: o peso, as tensões nos dois lados do fio, T_1 e T_2 , e uma força F no eixo. Se r for o raio da roldana, o seu momento de inércia, em relação ao seu eixo, é $m r^2 / 2 = 0.2 r^2$. Como o fio não desliza sobre a roldana, então a aceleração angular é igual a a/r , onde a é a aceleração do bloco e do cilindro. A equação de movimento para a roldana é:

$$(T_2 - T_1) r = 0.2 r^2 \left(\frac{a}{r} \right)$$

E substituindo a expressão já obtida para a tensão T_1 obtém-se,

$$T_2 = 9.8 + 5.2 a$$

No cilindro atuam o peso e a tensão T_2 no fio e a equação de movimento é:

$$14.7 - T_2 = 1.5 a$$

E substituindo a expressão obtida para a tensão T_2 obtém-se,

$$14.7 = 9.8 + 6.7 a \quad \Rightarrow \quad a = 0.7313 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

6 Trabalho e energia

Problema 2

A lei da gravitação universal estabelece que qualquer corpo celeste de massa M produz uma força atrativa sobre qualquer outro corpo de massa m , dada pela expressão:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

onde G é a constante de gravitação universal, r é a distância entre os dois corpos e \hat{r} é o versor radial, que aponta desde o corpo de massa M até o corpo de massa m . (a) Determine a expressão para a energia potencial gravítica U_g devida ao corpo de massa M . (b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, como se justifica a equação 6.17, $U_g = m g z$, para a energia potencial gravítica de um objeto na Terra?

(a) Em coordenadas esféricas, o deslocamento infinitesimal é

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{e}_\phi + r \sin \phi d\theta \hat{e}_\theta$$

Onde ϕ e θ são dois ângulos (medidos desde o semieixo positivo dos z e no plano xy desde o semieixo positivo dos x) e os três versores \hat{r} , \hat{e}_ϕ e \hat{e}_θ são perpendiculares entre si. Assim sendo, o produto escalar da força gravítica com o deslocamento infinitesimal é igual a:

$$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr$$

Como depende de apenas uma variável, conclui-se que o integral de linha de \vec{F}_g não depende do percurso de integração e a força gravítica é uma força conservativa. A energia potencial associada a essa força conservativa é igual a menos uma primitiva qualquer da força

$$U_g = -\int \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r}$$

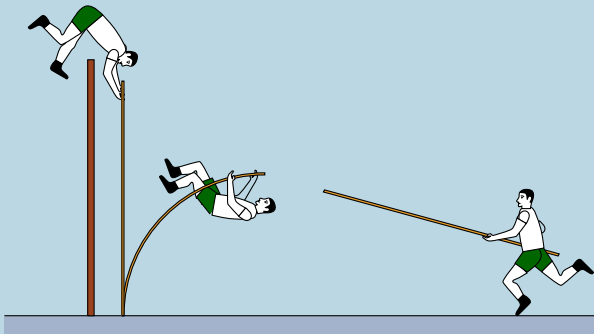
(b) Para um valor qualquer r_0 , a série de Taylor de U_g é:

$$-\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMm}{r_0^2}(r - r_0) - \dots$$

O primeiro termo é uma constante, que pode ser ignorada, porque a energia potencial pode incluir sempre uma constante arbitrária com qualquer valor. No segundo termo, substituindo r_0 pelo raio da Terra, $r - r_0$ é então a altura z desde a superfície da Terra e GM/r_0^2 é igual à constante g . Ignorando o resto da série, que para valores de z muito menores que r_0 não altera significativamente a soma dos dois primeiros termos, obtém-se $U_g \approx mgz$.

Problema 3

Num salto com vara, um atleta de 70 kg usa uma vara uniforme de 4.5 kg com 4.9 m de comprimento. O salto do atleta tem três fases: primeiro o atleta corre, com o seu centro de gravidade a 1 m de altura e com o centro de gravidade da vara a 1.5 m de altura, com velocidade de 9 m/s no instante em que passa a vara no chão. Na segunda fase, a energia da corrida é transferida para a vara, que se deforma e volta a esticar ficando vertical e elevando o atleta até uma altura próxima da altura da fasquia (desprezando forças dissipativas, até aqui a energia mecânica é constante). Finalmente o atleta estende os braços, aumentando a sua energia mecânica até o seu centro de gravidade subir a 5.8 m de altura, conseguindo ultrapassar a fasquia a 5.6 m. (a) Determine o trabalho realizado pelo saltador quando estende os braços. (b) Determine a força média que o saltador exerce sobre a vara na terceira fase.



Na primeira fase, a energia mecânica do sistema é igual à energia cinética do conjunto atleta-vara, mais as energias potenciais gravíticas do atleta e da vara. Medindo as alturas desde o chão, essa energia mecânica é:

$$E_1 = \frac{1}{2} 74.5 \times 9^2 + 70 \times 9.8 + 4.5 \times 9.8 \times 1.5 = 3769.4 \text{ J}$$

(a) Na terceira fase, após o atleta ter estendido os braços alcançando o ponto mais alto, ele e a vara estão em repouso nesse instante: a altura do centro de massa do atleta é 5.8 m e a altura do centro de massa da vara, na posição vertical, é metade do seu comprimento. A energia mecânica nessa terceira fase é igual à soma das energia potenciais gravítica do atleta e da vara:

$$E_3 = 70 \times 9.8 \times 5.8 + 4.5 \times 9.8 \times 2.45 = 4086.8 \text{ J}$$

O trabalho realizado pelo atleta é igual ao aumento da energia mecânica desde a fase 1 até a fase 3:

$$W = E_3 - E_1 = 4086.8 - 3769.4 = 317.4 \text{ J}$$

(b) A energia mecânica na segunda fase, E_2 , é igual a E_1 , porque nas fases 1 e 2 há conservação da energia mecânica. Como na fase dois o atleta e a vara estão em repouso, a energia mecânica é igual à energia potencial gravítica:

$$E_2 = 70 \times 9.8 \times h + 4.5 \times 9.8 \times 2.45$$

Igualando essa expressão ao valor obtido para E_1 , encontra-se a altura que o atleta atinge, antes de estender os braços:

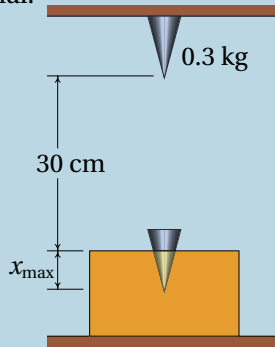
$$h = 5.337 \text{ m}$$

A força média é igual ao trabalho dividido pelo aumento da altura entre a segunda e a terceira fase:

$$F = \frac{317.4}{5.8 - 5.337} = 686 \text{ N}$$

Problema 4

Resolva o problema 7 do capítulo 4 aplicando o teorema do trabalho e a energia mecânica: Para determinar a rigidez de um material, coloca-se um bloco do material 30 cm por baixo de um cone metálico de 0.3 kg; o cone deixa-se cair livremente, a partir do repouso, penetrando o bloco até parar após ter penetrado uma distância x_{\max} . Sabe-se que enquanto o cone está a penetrar o bloco, este exerce sobre o cone uma força oposta ao movimento, proporcional ao quadrado da distância penetrada, ou seja, com módulo $k x^2$, onde x é a distância penetrada pela ponta do cone e k é uma constante que mede a rigidez do material. Sabendo que a distância máxima que o cone penetrou até parar foi $x_{\max} = 5$ cm, determine o valor da constante k de esse material.



A força exercida pelo bloco sobre o cone, quando o cone penetra no bloco, é uma força conservativa ou não?

Como o cone está em repouso nas posições inicial e final, quando estava 30 cm acima do bloco e após penetrar 5 cm no bloco, não há variação da energia cinética nesse percurso e a diminuição da energia mecânica é igual à diminuição da energia potencial gravítica nesse percurso:

$$\Delta E_m = -m g \Delta h = -0.3 \times 9.8 \times 0.35 = -1.029 \text{ J}$$

Valor esse igual ao trabalho da força do bloco no cone, enquanto este penetra o bloco (a resistência do ar está a ser desprezada):

$$-1.029 = \int_0^{0.05} -k x^2 dx = -\frac{0.05^3}{3} k$$

Essa expressão conduz ao valor $k = 24696$. Como as unidades de $k x^2$ são newton, então as unidades da constante k são N/m^2 . A força do bloco não é conservativa, porque só atua quando o cone está a penetrar; se o cone voltasse a subir, após ter penetrado no bloco, o bloco já não produzia nenhuma força sobre o cone. Ou seja, a força do bloco depende implicitamente da velocidade, porque é diferente quando o cone está a descer (velocidade negativa) ou quando está a subir (velocidade positiva) e quando o cone pára, essa força não é proporcional a x^2 .

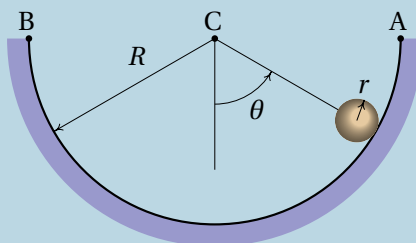
Problema 7

Uma esfera de raio r roda, sem deslizar, dentro de uma calha semi-circular de raio R , que está num plano vertical (ver figura).

- (a) Demonstre que, em função da derivada do ângulo θ , a energia cinética da esfera é

$$E_c = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2$$

- (b) Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica é constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão da aceleração angular $\ddot{\theta}$ em função do ângulo.
- (c) Entre que valores deve estar a energia mecânica para que a esfera permaneça oscilando dentro da calha?
- (d) A partir do resultado da alínea b, determine a expressão para $\ddot{\theta}$, no limite quando o raio da esfera é muito menor que o raio da calha ($R - r \approx R$) e explique porque o resultado é diferente do resultado obtido para o pêndulo simples no problema 6.



(a) A trajetória do centro de massa da esfera é um arco de círculo com ângulo θ e raio $R - r$; como tal, a velocidade do centro de massa é

$$v_e = (R - r)\dot{\theta}$$

Como a esfera não desliza, a velocidade do ponto de contacto com a calha é 0. A velocidade angular é a velocidade do centro de massa, menos a velocidade do ponto de contacto, dividida pela distância entre eles

$$\omega = \frac{(R - r)\dot{\theta}}{r}$$

A energia cinética da esfera é

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

Usando as expressões do momento de inércia da esfera (tabela 5.1), da velocidade do centro de massa e da velocidade angular, obtém-se

$$E_c = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2 m r^2}{5} \right) \frac{(R - r)^2 \dot{\theta}^2}{r^2} = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2$$

(b) A energia mecânica é

$$E_m = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2 - m g (R - r) \cos \theta$$

e a sua derivada em ordem ao tempo é

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{7}{5} m (R - r)^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m g (R - r) \dot{\theta} \sin \theta$$

Igualando a zero obtém-se

$$\ddot{\theta} = - \frac{5 g}{7(R - r)} \sin \theta$$

(c) A energia mínima é quando a esfera fica no ponto mais baixo da calha ($\theta = 0$) com velocidade nula ($\dot{\theta} = 0$):

$$E_{\text{min}} = - m g (R - r)$$

e a energia máxima é quando a esfera chega até o ponto A ($\theta = 90^\circ$) com velocidade nula ($\dot{\theta} = 0$):

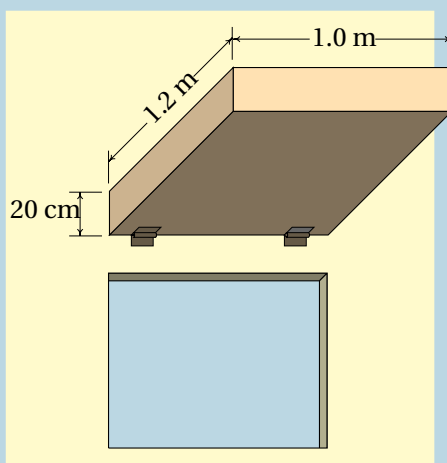
$$E_{\text{max}} = 0$$

(d) O valor absoluto de $\ddot{\theta}$ é menor num fator $5/7$, devido a que parte da energia potencial gravítica é transformada em energia cinética de rotação da esfera. A energia cinética de rotação é sempre $2/5$ da energia cinética de translação, independentemente do valor de r ; no limite $r \rightarrow 0$ também $2/7$ da energia gravítica são convertidos em energia de rotação e apenas os restantes $5/7$ fazem aumentar θ .

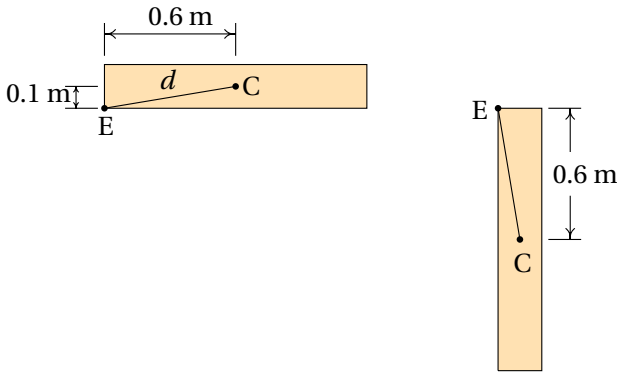
Do ponto de vista das forças, no caso do pêndulo não há nenhuma força oposta ao movimento do centro de massa, enquanto que neste caso a força de atrito estático é oposta ao movimento do centro de massa. No entanto, essa força não realiza nenhum trabalho porque o ponto da esfera onde é aplicada não se desloca e a força de atrito não reduz a energia mecânica da esfera; simplesmente faz com que a energia fornecida pela gravidade seja distribuída entre energias cinéticas de translação e de rotação.

Problema 9

Resolva o problema 8 do capítulo 5 aplicando o princípio de conservação da energia mecânica: A caixa retangular homogénea na figura está ligada a duas dobradiças que lhe permitem rodar para fechar a janela, ou abrir até a posição horizontal apresentada na figura, para dar sombra durante o dia. A corrente que segura a caixa na posição horizontal quebra-se repentinamente e a caixa cai batendo na parede. Desprezando o atrito nos eixos das dobradiças e a resistência do ar, calcule a velocidade angular com que a caixa bate na parede.



A figura seguinte mostra as posições inicial e final da tampa da janela. C é o centro de massa e E o eixo das dobradiças.



Como a velocidade do ponto E é nula, a velocidade do centro de massa é $v_C = d\omega$, onde ω é a velocidade angular da tampa. O momento de inércia, em torno do eixo perpendicular à figura, passando pelo centro de massa C, é dado pela expressão para um paralelepípedo na tabela 5.1:

$$I_C = \frac{1}{12} m (2d)^2 = \frac{1}{3} m d^2$$

A expressão da energia cinética da tampa, em função da velocidade angular é:

$$E_c = \frac{m}{2} v_C^2 + \frac{I_C}{2} \omega^2 = \frac{m}{2} d^2 \omega^2 + \frac{m}{6} d^2 \omega^2 = \frac{2}{3} m d^2 \omega^2$$

Em função da altura h_C do centro de massa, a energia potencial gravítica é:

$$U_g = m g h_C$$

Por conservação da energia mecânica, $E_c + U_g$ deve ser igual nas posições inicial e final. Medindo h_C desde o ponto E, obtém-se:

$$0 + 0.1 m g = \frac{2}{3} m d^2 \omega^2 - 0.6 m g$$

Que conduz ao valor da velocidade angular na posição final:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \times 0.7 g}{2 d^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.7 \times 9.8}{2(0.6^2 + 0.1^2)}} = 5.274 \text{ s}^{-1}$$

7 Sistemas dinâmicos

Problema 1

Uma bola com 0.150 kg é lançada verticalmente para cima, desde $y = 0$ (o eixo dos y aponta para cima, na vertical). Desprezando o atrito com o ar, a energia permanece constante.

- (a) Represente o retrato de fase, para $y > 0$, mostrando 4 curvas de evolução diferentes (use o valor 9.8 m/s^2 para g). Para cada curva, explique o significado dos pontos em que a curva intersesta os eixos.
- (b) Explique como seria, no retrato de fase da alínea anterior, a curva de evolução de uma bola largada em queda livre, que bate no chão sendo projetada novamente para cima.

(a) A equação de movimento da bola é

$$\ddot{y} = -9.8$$

E as duas equações de evolução são

$$\dot{y} = v \quad \dot{v} = -9.8$$

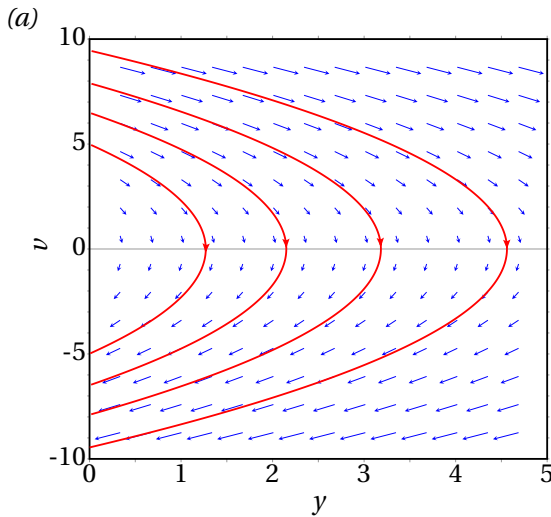
O retrato de fase obtém-se com o seguinte comando

```
(%i1) plotdf ([v,-9.8], [y,v], [y,0,5], [v,-10,10]);
```

O gráfico obtido mostra-se na página seguinte.

As quatro curvas de evolução na figura foram obtidas entrando no menu de configuração, escrevendo “1 0” no campo “Trajectory at” e clicando na tecla “Enter” e o mesmo para os pontos “2 0”, “3 0” e “4 0”. Os intervalos para y e v foram escolhidos, após algumas tentativas, de forma a mostrar bem as quatro curvas, para valores positivos da altura y .

O ponto onde cada curva intersesta o eixo y corresponde ao instante em que a bola atinge a sua altura máxima e a velocidade é nula. Os dois pontos onde a curva intersesta o eixo v são o instante inicial em que a bola é lançada desde $y = 0$, com velocidade positiva, e o instante em que a bola cai regressando a $y = 0$, com velocidade negativa. Por exemplo, a curva mais à direita apresentada no retrato de fase corresponde a quando a bola é lançada desde $y = 0$ com velocidade aproximadamente 8.8 m/s, atingindo a altura máxima de 4 m e caindo novamente até $y = 0$ onde chega com velocidade igual a -8.8 m/s.



(b) Quando a curva de evolução chega até o ponto $y = 0$ com velocidade negativa (a bola bate no chão), a curva continua num arco elíptico no lado negativo de y , que corresponde à ação da força elástica enquanto a bola está em contacto com o chão, sendo deformada e recuperando logo a sua forma esférica inicial (oscilador harmónico simples, admitindo que não há perdas de energia durante a deformação). O arco elíptico descreve metade de uma elipse, terminando no ponto inicial da curva de evolução, com $y = 0$ e velocidade positiva e a curva repete-se indefinidamente. Quanto mais rígida for a bola, menor será o semieixo do arco elíptico no lado negativo do eixo y .

Problema 2

Em todos os problemas do capítulo 1, diga quais correspondem a sistemas autônomos ou não autônomos e conservativos ou não conservativos. Represente o retrato de fase do sistema do problema 6, mostrando a curva de evolução com as condições iniciais dadas.

Para determinar se um sistema com um grau de liberdade é ou não autônomo, há que conhecer a expressão da aceleração tangencial. No problema 1 essa expressão é desconhecida, mas nos restantes problemas a expressão de a_t é dada ou pode ser calculada. As respostas mostram que no problema 5, $a_t = 3t^2 - 2t - 2$ e no problema 11, $a_t = 15t - 124$. No problema 7, o gráfico mostra que $v^2 = b - ms$, onde b e m são constantes; derivando os dois lados dessa equação obtém-se a expressão da aceleração tangencial:

$$2v \frac{dv}{ds} = -m \implies a_t = v \frac{dv}{ds} = -\frac{m}{2}$$

Como tal, há quatro problemas (2, 4, 5 e 11), em que a expressão da aceleração é uma função que depende do tempo. Isso implica que os sistemas nesses 4 problemas não são autônomos e, como tal, também não são conservativos.

Nos restantes 6 problemas (3, 6, 7, 8, 9 e 10), o respetivo sistema é autônomo, porque a expressão da aceleração (equação de movimento) não depende do tempo. Nesses 6 casos a equação de movimento, $a_t = f(s, v)$, escreve-se como o sistema de duas equações de evolução:

$$\dot{s} = v \quad \dot{v} = f(s, v)$$

E a divergência da velocidade de fase será:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f(s, v)}{\partial v} = \frac{\partial f(s, v)}{\partial v}$$

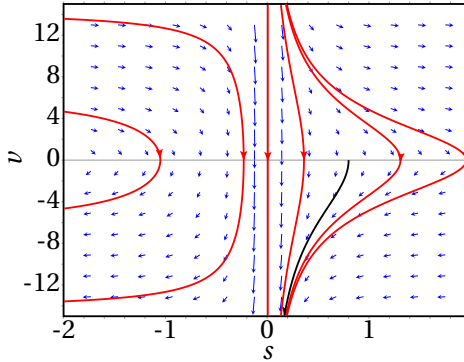
Unicamente no problema 10 a expressão da aceleração tangencial, $f(s, v)$, depende de v , ou seja, a divergência é diferente de zero e, como tal, o sistema não é conservativo.

Nos problemas 3, 6, 7, 8 e 9, o sistema é conservativo, porque a expressão $f(s, v)$ não depende realmente de v , ou seja, a divergência é nula.

O retrato de fase do problema 6 obtém-se com o seguinte comando

```
(%i2) plotdf ([v,-24/s^2], [s,v], [s,-2,2], [v,-15,15]);
```

E o resultado é o seguinte



A curva de evolução correspondente às condições iniciais dadas ($s = 0.8$ m e $v = 0$) foi obtida entrando no menu de configuração, mudando o campo “direction” para “forward” a cor no campo “fieldlines” para “black”, escrevendo “0.8 0” no campo “Trajectory at” e clicando na tecla “Enter”.

Problema 4

Uma partícula com massa de 1 kg desloca-se ao longo do eixo dos x . Em unidades SI, a força tangencial sobre a partícula é dada pela expressão $F = x^3 - 4x$.

- Determine os pontos de equilíbrio do sistema.
- Encontre as expressões para a energia potencial e a energia mecânica, em função da posição x e da velocidade v .
- Escreva as equações de evolução e diga que tipo de sistema dinâmico representam.
- Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.
- Determine se o sistema tem ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas e, nos casos afirmativos represente uma dessas curvas no retrato de fase.

(a) Os pontos de equilíbrio são os pontos onde a velocidade e a aceleração $a = F/m$ são nulas, ou seja, onde a força é nula. Fatorizando a expressão

da força (pode também usar-se o comando `solve` do Maxima):

$$F = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

Conclui-se que há 3 pontos de equilíbrio, em $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$, com $v = 0$. No espaço de fase (x, v) , as coordenadas dos pontos de equilíbrio são $(-2, 0)$, $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

(b) A energia potencial é igual a uma primitiva qualquer da expressão da força, multiplicada por -1

$$U(x) = - \int (x^3 - 4x) dx = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$$

E a expressão da energia mecânica é:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + U = \frac{v^2}{2} - \frac{x^4}{4} + 2x^2$$

(c) As duas equações de evolução são (unidades SI):

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = \frac{F}{m} = x^3 - 4x$$

Trata-se de um sistema dinâmico autónomo, porque o tempo não aparece explicitamente no lado direito das equações, e conservativo, porque a divergência da velocidade de fase é:

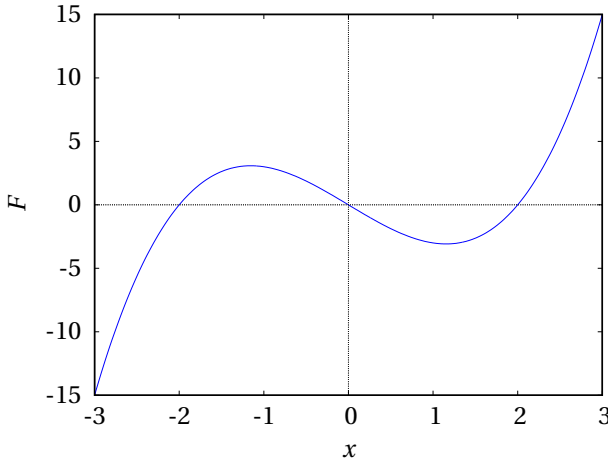
$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (x^3 - 4x)}{\partial v} = 0$$

A função hamiltoniana é, neste caso, a própria energia mecânica.

(d) O gráfico da força, apresentado na página seguinte, foi obtido som o comando:

```
(%i3) plot2d (x^3-4*x, [x,-3,3], [ylabel,"F"]);
```

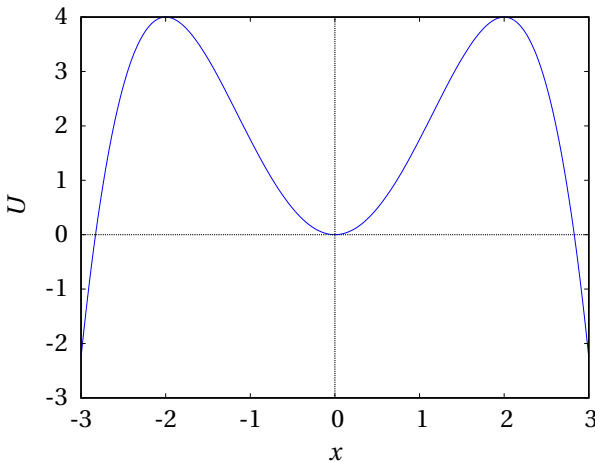
E mostra os três pontos de equilíbrio (raízes da função $F(x)$). Nos pontos $x = -2$ e $x = 2$, a força é negativa ao lado esquerdo do ponto e positiva ao lado direito; isso quer dizer que na vizinhança do ponto de equilíbrio, a força aponta no sentido oposto do ponto e, como tal, os pontos de equilíbrio $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ no espaço de fase são instáveis.



No ponto $x = 0$, a força é positiva no lado esquerdo, ou seja, aponta no sentido de $x = 0$, e negativa no lado direito: também aponta no sentido de $x = 0$. Como tal, o ponto $(0, 0)$ no espaço de fase é ponto de equilíbrio estável.

(e) Os ciclos e órbitas encontram-se mais facilmente analisando o gráfico da energia potencial:

```
(%i4) plot2d (-x^4/4+2*x^2, [x,-3,3], [ylabel,"U"]);
```



Se a energia mecânica for maior que 0 e menor que 4, o sistema pode estar a oscilar à volta do ponto de equilíbrio em $x = 0$. Como tal, existem infinitos ciclos. Se a energia mecânica for exatamente igual a 4, há seis possíveis movimentos:

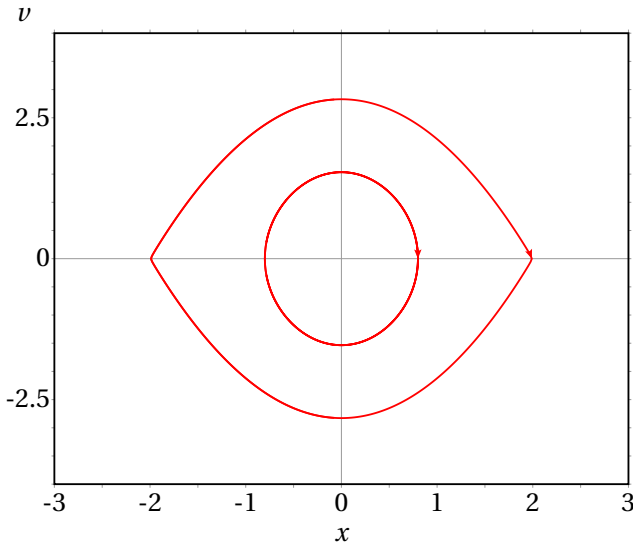
1. O sistema, inicialmente em $x < -2$, com velocidade positiva, aproxima-se assintoticamente de $x = -2$.
2. O sistema, inicialmente em $x < -2$, com velocidade negativa, afasta-se até $x \rightarrow -\infty$. (em $t \rightarrow -\infty$ aproxima-se de $x = -2$).
3. O sistema, inicialmente em $x > 2$, com velocidade negativa, aproxima-se assintoticamente de $x = 2$.
4. O sistema, inicialmente em $x > 2$, com velocidade positiva, afasta-se até $x \rightarrow \infty$ (em $t \rightarrow -\infty$ aproxima-se de $x = 2$).
5. O sistema, inicialmente em $-2 < x < 2$, com velocidade positiva, aproxima-se assintoticamente de $x = 2$ (em $t \rightarrow -\infty$ aproxima-se de $x = -2$).
6. O sistema, inicialmente em $-2 < x < 2$, com velocidade negativa, aproxima-se assintoticamente de $x = -2$ (em $t \rightarrow -\infty$ aproxima-se de $x = 2$).

As curvas de evolução correspondentes aos últimos dois movimentos na lista anterior formam uma órbita heteroclínica. Não existem órbitas homoclínicas; para que existissem seria necessário que houvesse um nível de energia mecânica que passasse por apenas um ponto de equilíbrio instável e por um ponto de retorno, mas isso não acontece no gráfico de U .

O retrato de fase obtém-se com o seguinte comando (a opção **vectors** é usada neste caso para que não seja mostrado o campo de direções):

```
(%i5) plotdf ([v,x^3-4*x], [x,v], [x,-3,3], [v,-3,3], [vectors,""]);
```

Se no instante inicial a partícula estiver na região $-2 < x < 2$ com velocidade zero, ficará oscilando em torno do ponto $x = 0$. Como tal, para mostrar um ciclo no gráfico produzido por plotdf basta clicar num ponto com coordenada $v \approx 0$ e x no intervalo $]-2, 2[$. Ou, com maior precisão, entra-se no menu de configuração e escrevem-se as coordenadas x e v do estado inicial, separadas por espaço; por exemplo: 0.8 0. A seguir clica-se na tecla “Enter” e aparecerá o respetivo ciclo no gráfico. A trajetória heteroclínica pode ser traçada usando como estado inicial um ponto próximo dum dos pontos de equilíbrio instável $(-2, 0)$ ou $(2, 0)$. No entanto, a instabilidade do ponto faz com que o método numérico usado por plotdf para traçar a trajetória seja instável. É necessário experimentar com diferentes valores do estado inicial; o resultado na figura seguinte foi obtido usando como estado inicial $(1.99, 0)$.

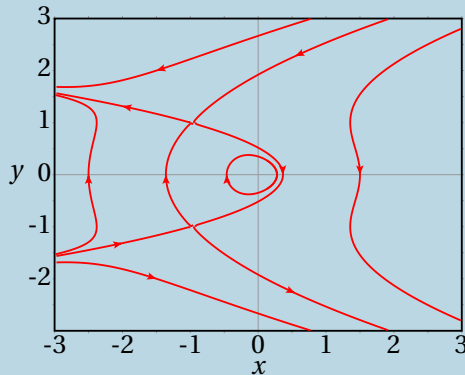


Problema 6

A figura mostra o retrato de fase do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = y - y^3 \quad \dot{y} = -x - y^2$$

- (a) Indique se o sistema tem algum ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica.
- (b) Explique porque a seguinte afirmação é errada: “O retrato de fase inclui duas curvas de evolução parabólicas que se cruzam em dois pontos”.



(a) A primeira componente da velocidade de fase, $y - y^3$, é nula quando y for igual a 0, 1 ou -1 . Existem então unicamente 3 pontos de equilíbrio, $(0, 0)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$, que aparecem todos na figura e, como tal, as curvas de evolução importantes já estão todas na figura. A figura mostra que não existe nenhuma órbita homoclínica, existem infinitos ciclos em torno da origem e uma órbita heteroclínica entre os pontos $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$.

(b) As duas parábolas são realmente 2 pontos de equilíbrio e 6 curvas de evolução diferentes, que se aproximam assintoticamente ou se afastam desses dois pontos, sem tocá-los. As curvas de evolução nunca podem cruzar-se.

Problema 9

A equação de movimento de um pêndulo simples é (problema 6 do capítulo 6)

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

As variáveis de estado são o ângulo com a vertical, θ e a derivada desse ângulo, ω .

(a) Escreva as equações de evolução do sistema.

(b) Determine a função hamiltoniana $H(\theta, \omega)$ a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \omega} \quad \dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

(c) Analisando o gráfico da energia potencial (função hamiltoniana com $\omega = 0$), demonstre que o sistema tem muitas órbitas heteroclínicas e ciclos mas nenhuma órbita homoclínica.

(a) Introduzindo a velocidade angular ω , a equação de movimento transforma-se num sistema de duas equações de primeira ordem

$$\dot{\theta} = \omega \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

(b) Substituindo as equações de evolução nas equações de Hamilton obtém-se

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial \omega} \quad \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{\partial H}{\partial \theta}$$

A primeira equação implica que H é igual a $\omega^2/2$, mais uma função f que depende de θ . Derivando essa expressão em ordem a θ e substituindo na segunda equação acima, obtém-se

$$\frac{g}{l} \sin \theta = \frac{df}{d\theta} \implies f = -\frac{g}{l} \cos \theta$$

e a função hamiltoniana é

$$H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta$$

observe-se que é igual à energia mecânica E_m , dividida pelo momento de inércia ml^2 .

(c) A energia potencial é igual a uma constante negativa vezes $\cos \theta$. Assim sendo, o seu gráfico tem a mesma forma do gráfico de $-\cos \theta$, mas oscila entre $-g/l$ e g/l , em vez de -1 e 1 . O gráfico tem mínimos (pontos de equilíbrio estável) em $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ e pontos máximos (pontos de equilíbrio instável) em $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ Qualquer valor de H entre $-g/l$ e g/l produz um segmento horizontal que corta o gráfico de U em dois pontos e, assim sendo, corresponde a um ciclo. A recta horizontal $H = g/l$ passa por todos os pontos máximos de U e, portanto, corresponde a uma órbita heteroclínica entre $-\pi$ e π , outra órbita heteroclínica entre 3π e 5π , etc. Não existem órbitas homoclínicas porque qualquer segmento na reta $H = g/l$ começa e termina em dois pontos máximos diferentes e não interseca a curva U em nenhum outro ponto.

8 Mecânica lagrangiana

Problema 3

Uma partícula com massa $m = 2$ kg desloca-se sobre uma calha parabólica vertical com equação $y = x^2$, onde x é medida na horizontal e y na vertical (ambas em metros). Assim sendo, o movimento da partícula tem apenas um grau de liberdade, que pode ser escolhido como a coordenada x .

- (a) Escreva a equação da energia cinética em função de x .
- (b) Escreva a equação da energia potencial gravítica em função de x (use o valor $g = 9.8$ m/s²).
- (c) Admitindo que sobre a partícula não atua nenhuma força não conservativa, use a equação de Lagrange para encontrar a sua equação de movimento.
- (d) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema no espaço de fase, e determine se são estáveis ou instáveis.

(a) A relação entre \dot{y} e \dot{x} encontra-se derivando a equação da calha $y = x^2$

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

Em função da coordenada generalizada x e da velocidade generalizada \dot{x} , a energia cinética da partícula é:

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dot{x}^2 (4x^2 + 1)$$

(b) Arbitrando energia potencial gravítica nula em $y = 0$, A energia potencial gravítica da partícula é:

$$U_g = mgy = 19.6x^2$$

(c) A equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U_g}{\partial x} = 0$$

$$\ddot{x} (8x^2 + 2) + 16\dot{x}^2 x - 8\dot{x}^2 x + 39.2x = 0$$

e a equação de movimento:

$$\ddot{x} = -\frac{x(4\dot{x}^2 + 19.6)}{4x^2 + 1}$$

(d) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = -\frac{x(4v^2 + 19.6)}{4x^2 + 1}$$

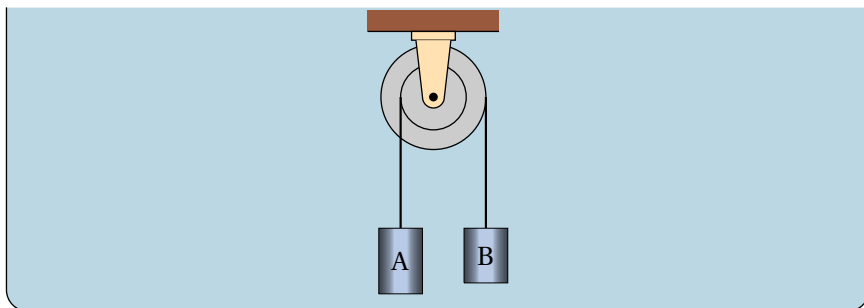
Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} v = 0 \\ -\frac{x(4v^2 + 19.6)}{4x^2 + 1} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

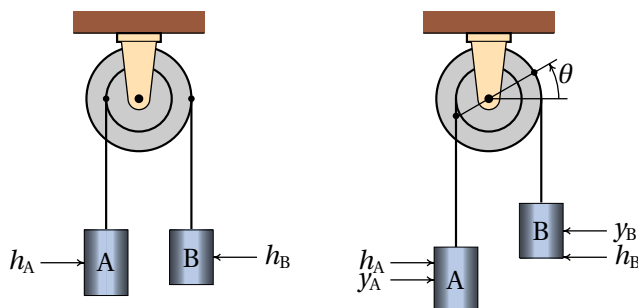
Ou seja, o único ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase, que corresponde a quando a partícula se encontra em repouso, no ponto mais baixo da calha. Nessa situação, se a partícula fosse afastada do ponto mais baixo da calha, a sua tendência será regressar a esse ponto; como tal, trata-se de um ponto de equilíbrio estável. Pode também traçar-se o retrato de fase correspondente às equações de evolução e conferir que a origem é ponto de equilíbrio estável, com infinitos ciclos à sua volta.

Problema 4

O cilindro A na figura tem massa de 36 gramas, o cilindro B tem massa de 24 gramas e o momento de inércia da roldana dupla é $4.43 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. A roldana está formada por dois discos, de raios 5 cm e 8 cm, colados um ao outro. Cada cilindro está ligado a um fio com o extremo oposto ligado à roldana, de forma que o fio enrola-se ou desenrola-se, sem deslizar sobre a roldana, quando esta roda. (a) Desprezando o atrito no eixo da roldana e a resistência do ar, determine os valores das acelerações de cada cilindro e diga se são para cima ou para baixo. (b) Determine o valor das tensões nos dois fios.



(a) Se h_A e h_B são as alturas dos centros de massa dos dois cilindros, num instante inicial, como mostra o lado esquerdo da figura seguinte,



num instante posterior a roldana terá rodado um ângulo θ , que se for no sentido contrário aos ponteiros do relógio, como no lado direito da figura, faz diminuir a altura do cilindro A num comprimento igual ao arco de círculo com 5 cm e ângulo θ , e a altura do cilindro B aumenta uma distância igual ao arco de círculo de 8 cm e ângulo θ . Como tal, num instante qualquer as alturas dos dois cilindros serão

$$y_A = h_A - 0.05\theta \quad y_B = h_B + 0.08\theta \quad (8.1)$$

Onde h_A e h_B são duas constantes (alturas iniciais). Como tal, o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo θ . As expressões para as velocidades e acelerações dos cilindros são então:

$$\begin{aligned} v_A &= -0.05\omega & v_B &= 0.08\omega \\ a_A &= -0.05\alpha & a_B &= 0.08\alpha \end{aligned}$$

onde $\omega = \dot{\theta}$ é a velocidade angular da roldana e $\alpha = \ddot{\theta}$ é a sua aceleração

angular. A expressão da energia cinética total do sistema é:

$$E_c = \frac{0.036}{2}(-0.05\omega)^2 + \frac{0.024}{2}(0.08\omega)^2 + \frac{4.43 \times 10^{-7}}{2}\omega^2$$

$$= 1.220215 \times 10^{-4} \omega^2$$

E a energia potencial gravítica, excluindo a energia potencial da roldana e outros termos constantes, é:

$$U = -0.036 \times 9.8 \times 0.05\theta + 0.024 \times 9.8 \times 0.08\theta$$

$$= 1.176 \times 10^{-3} \theta$$

Aplicando a equação de Lagrange, obtém-se a aceleração angular:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$2.44043 \times 10^{-4} \alpha - 0 + 1.176 \times 10^{-3} = 0$$

$$\alpha = -4.8188 \text{ s}^{-2}$$

O sinal negativo indica que a roldana acelera no sentido dos ponteiros do relógio. Como tal, a aceleração do bloco A é para cima e a do bloco B é para baixo, e os seus valores absolutos são:

$$a_A = 0.05 \times 4.8188 = 0.2409 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_B = 0.08 \times 4.8188 = 0.3855 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(b) Para determinar as tensões nos fios, faz-se de conta que as alturas dos cilindros podem variar independentemente do ângulo que a roldana rode. Ou seja, o sistema passa a ter três graus de liberdade, θ , y_A e y_B , com três equações de Lagrange. Nessas 3 equações de Lagrange introduzem-se dois multiplicadores de Lagrange λ_A e λ_B , que correspondem às duas condições nas equações 8.1 da alínea anterior, que devem ser escritas como funções com valor constante:

$$f_A(y_A, \theta) = y_A + 0.05\theta \tag{8.2}$$

$$f_B(y_B, \theta) = y_B - 0.08\theta$$

A expressão da energia cinética do sistema deve ser escrita agora em função das três velocidades ω , v_A e v_B , consideradas independentes entre si

$$E_c = 0.018 v_A^2 + 0.012 v_B^2 + 2.215 \times 10^{-7} \omega^2$$

E a energia potencial gravítica, excluindo a energia potencial da roldana que permanece constante, é:

$$U = 0.036 \times 9.8 y_A + 0.024 \times 9.8 y_B = 0.3528 y_A + 0.2352 y_B$$

A equação de Lagrange associada a y_A e v_A é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial v_A} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial y_A} + \frac{\partial U}{\partial y_A} - \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial y_A} - \lambda_B \frac{\partial f_B}{\partial y_A} &= 0 \\ 0.036 a_A + 0.3528 - \lambda_A &= 0 \end{aligned}$$

A equação associada a y_B e v_B é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial v_B} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial y_B} + \frac{\partial U}{\partial y_B} - \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial y_B} - \lambda_B \frac{\partial f_B}{\partial y_B} &= 0 \\ 0.024 a_B + 0.2352 - \lambda_B &= 0 \end{aligned}$$

E a equação associada a θ e ω é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} - \lambda_A \frac{\partial f_A}{\partial \theta} - \lambda_B \frac{\partial f_B}{\partial \theta} &= 0 \\ 4.43 \times 10^{-7} \alpha - 0.05 \lambda_A + 0.08 \lambda_B &= 0 \end{aligned}$$

Estas três equações de Lagrange devem ser resolvidas junto com as duas expressões obtidas derivando duas vezes as funções constantes f_A e f_B (equações 8.2):

$$a_A + 0.05 \alpha = 0$$

$$a_B - 0.08 \alpha = 0$$

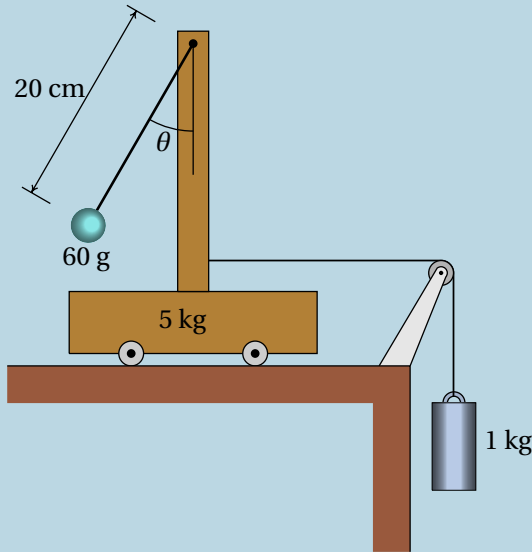
No Maxima, usa-se o comando `solve`. Observe-se que os dois multiplicadores de Lagrange, λ_A e λ_B , são as próprias tensões nos dois fios, T_A e T_B

```
(%i1) float(solve([0.036*aA+0.3528-TA, 0.024*aB+0.2352-TB,
                  4.43e-7*a-0.05*TA+0.08*TB, aA+0.05*a, aB-0.08*a]));
(%o1) [[a=-4.819, TB=0.2259, aB=-0.3855, TA=0.3615, aA=0.2409]]
```

Que corrobora os resultados obtidos na alínea anterior para as acelerações e mostra que a tensão no fio ligado ao cilindro A é 0.3615 N e a tensão no fio ligado ao cilindro B é 0.2259 N. Observe-se que, apesar de que a tensão T_A é maior que T_B , a roldana roda no sentido dos ponteiros do relógio, porque o momento produzido por T_B é maior do que o produzido por T_A .

Problema 5

No sistema representado na figura, a massa das rodas e da roldana e o atrito nos seus eixos podem ser desprezados. (a) Determine as expressões para as energias cinética e potencial do sistema, em função do ângulo θ e do deslocamento horizontal x do carrinho. (b) Determine as expressões da aceleração do carrinho e da aceleração angular $\ddot{\theta}$. (c) Encontre o valor do ângulo θ na posição de equilíbrio do pêndulo e diga se o equilíbrio é estável ou instável. (d) Determine o valor da aceleração do carrinho, no caso em que o pêndulo permaneça na posição de equilíbrio.



(a) Este sistema tem dois graus de liberdade, o ângulo θ de oscilação do pêndulo e a posição horizontal x do carrinho. As velocidades do carrinho e do cilindro são ambas iguais a \dot{x} . O vetor velocidade da esfera é a soma do vetor velocidade do carrinho, mais o vetor velocidade de rotação da

esfera em relação ao ponto de contacto do fio com o poste; escolhendo o eixo x horizontal e para a direita e o eixo y vertical e para cima, o vetor velocidade da esfera é:

$$\vec{v}_e = (\dot{x} - 0.2\dot{\theta} \cos\theta) \hat{i} + 0.2\dot{\theta} \sin\theta \hat{j}$$

Representando no Maxima o ângulo θ pela variável q , $\dot{\theta}$ pela variável w e \dot{x} pela variável v

```
(%i2) ve: [v-0.2*w*cos(q), 0.2*w*sin(q)]$
```

A energia cinética do sistema é a soma das energias cinéticas do carrinho, do cilindro e da esfera

```
(%i3) Ec: float(expand(trigsimp(5*v^2/2 + 1*v^2/2 + 0.06*ve.ve/2)));
(%o3)      0.0012 w^2 - 0.012 cos(q) v w + 3.03 v^2
```

E as energias potenciais que não permanecem constantes são as energias potenciais gravíticas da esfera e do cilindro; a energia potencial do sistema é igual à soma dessas duas energias

```
(%i4) U: -1*9.8*x - 0.06*9.8*0.2*cos(q);
(%o4)      -9.8 x - 0.1176 cos q
```

(b) Antes de usar as equações de Lagrange, definem-se as derivadas das duas coordenadas e duas velocidades generalizadas, em ordem ao tempo

```
(%i5) gradef (x, t, v)$
(%i6) gradef (q, t, w)$
(%i7) gradef (v, t, a)$
(%i8) gradef (w, t, f)$
```

As duas equações de Lagrange são

```
(%i9) eq1: diff (diff(Ec,v),t) - diff(Ec,x) + diff(U,x) = 0;
(%o9)      0.012 sin(q) w^2 - 0.012 f cos(q) + 6.06 a - 9.8 = 0
(%i10) eq2: diff (diff(Ec,w),t) - diff(Ec,q) + diff(U,q) = 0;
(%o10)      0.1176 sin(q) - 0.012 a cos(q) + 0.0024 f = 0
```

E as expressões para a aceleração do carrinho, a , e a aceleração angular do pêndulo, f , são

```
(%i11) sol: trigsimp (solve( [eq1,eq2], [a,f]))$
```

```
(%i12) [a,f]: subst (sol, [a,f]);
```

```
(%o12) [ 
$$\left[ \begin{array}{l} \frac{3 \sin(q) w^2 + 147 \cos(q) \sin(q) - 2450}{15 \cos^2(q) - 1515}, \\ \frac{3 \cos(q) \sin(q) w^2 + 14847 \sin(q) - 2450 \cos(q)}{3 \cos^2(q) - 303} \end{array} \right]$$

```

(c) Este sistema nunca chega a estar em equilíbrio porque o cilindro desce sem parar. No entanto, o pêndulo sim pode ficar em equilíbrio. As duas equações de evolução só do pêndulo são

$$\frac{dq}{dt} = w \quad \frac{dw}{dt} = f$$

onde f é a expressão obtida em (%o12). As condições de equilíbrio do pêndulo são então $w=0$ e $f=0$.

```
(%i13) solve (subst (w=0, f=0));
```

```
(%o13) [sin(q) =  $\frac{50 \cos(q)}{303}$ ]
```

`solve` não consegue resolver problemas com infinitas soluções mas como só interessa a solução no primeiro quadrante, o ângulo da posição de equilíbrio, em graus, é

```
(%i14) float (180*atan (50/303)/%pi);
```

```
(%o14) 9.37
```

Para determinar a estabilidade desse ponto de equilíbrio, calcula-se o valor da derivada de f no ponto de equilíbrio.

```
(%i15) subst ([w=0, q=atan(50/303)], diff (f, q));
```

```
(%o15) - $\frac{4994309^{\frac{3}{2}}}{28300200}$ 
```

este resultado negativo implica que o ponto de equilíbrio é estável.

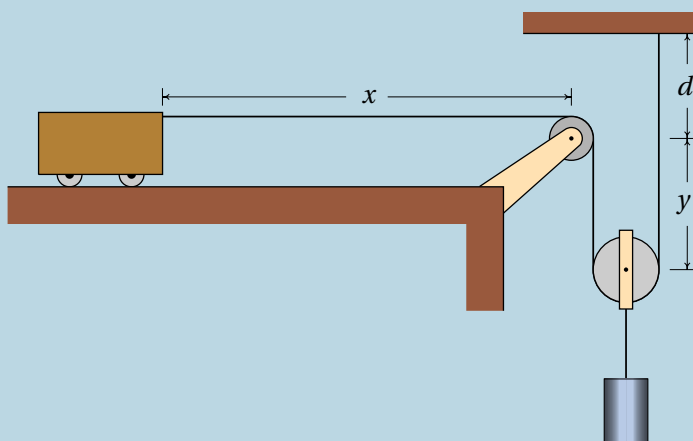
Problema 6

A roldana fixa no sistema da figura tem massa m e a roldana móvel tem massa $2m$ (ambas podem ser consideradas discos uniformes). A massa do carrinho é $20m$ e a massa do cilindro mais o suporte que o liga à roldana móvel é $8m$. Admita que a massa do fio e das rodas do carrinho, a força de atrito cinético nos eixos das roldanas e das rodas do carrinho e a resistência do ar são desprezáveis.

- (a) Mostre que, em função da altura y que o cilindro desce, as energias cinética e potencial do sistema são

$$E_c = \frac{93}{2} m \dot{y}^2 \quad U = -10 m g y$$

- (b) Determine o valor das acelerações do cilindro e do carrinho.



- (a) O comprimento constante do fio implica $x + 2y$ constante e, como tal, a relação entre as velocidades do carrinho, $v_x = \dot{x}$, e do cilindro, $v_y = \dot{y}$, é

$$v_x = -2v_y$$

A energia cinética do sistema é a soma das energias de translação do carrinho, do cilindro e da roldana móvel, mais as energias de rotação das duas roldanas.

(%i16) $v_x = -2*v_y$

(%i17) $E_c = 20*m*v_x^2/2 + (m*r1^2/2)*(v_x/r1)^2/2 +$

$$\begin{aligned}
 & (2*m*r^2/2)*(v_y/r)^2/2 + 2*m*v_y^2/2 + 8*m*v_y^2/2; \\
 (\%o17) \quad & \frac{93 m v_y^2}{2}
 \end{aligned}$$

A única energia potencial que está a mudar é a energia potencial gravítica do cilindro mais a roldana móvel. O peso total desses dois objetos é $10 m$ e, ignorando termos constantes, a energia potencial do sistema é

$$(\%i18) \quad U: -10*m*g*y$$

(b) A aceleração do cilindro, $a_y = \dot{v}_y$, encontra-se a partir da equação de Lagrange

$$(\%i19) \quad \text{gradef}(y, t, v_y)$$

$$(\%i20) \quad \text{gradef}(v_y, t, a_y)$$

$$(\%i21) \quad \text{eq: diff(diff(Ec, v_y), t) - diff(Ec, y) + diff(U, y) = 0}$$

$$(\%i22) \quad \text{solve}(eq, a_y);$$

$$(\%o22) \quad \left[a_y = \frac{10g}{93} \right]$$

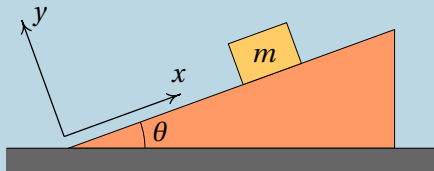
$$(\%i23) \quad \text{subst}(g=9.8, \%);$$

$$(\%o23) \quad [a_y = 1.054]$$

O valor absoluto da aceleração do carrinho, $a_x = \dot{v}_x$, é o dobro, ou seja, $|a_x| = 20g/93 = 2.108 \text{ m/s}^2$.

Problema 7

Um bloco de massa m desce um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e plano inclinado é μ_c . Usando a equação de Lagrange com um multiplicador, encontre as expressões para a reação normal do plano sobre o bloco e da aceleração do bloco, \ddot{x} (despreze a resistência do ar).



Fazendo de conta que o bloco não mantém o contacto com o plano inclinado, há duas coordenadas generalizadas, x e y . A equação da restrição que faz com que o bloco esteja sempre em contacto com o plano inclinado é:

$$y = 0$$

A energia cinética do bloco é

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

A altura do bloco, em relação à mesa é

$$h = x \sin \theta + y \cos \theta$$

e a energia potencial gravítica do bloco é

$$U = m g (x \sin \theta + y \cos \theta)$$

As duas componentes da força generalizada são $\vec{F}_a \cdot \partial \vec{r} / \partial x$ e $\vec{F}_a \cdot \partial \vec{r} / \partial y$, onde $\vec{F}_a = \mu_c R_n \hat{i}$ é a força de atrito cinético e $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ é o vetor posição do bloco

$$Q_x = \mu_c R_n \hat{i} \cdot \hat{i} = \mu_c R_n \quad Q_y = \mu_c R_n \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

Introduz-se um multiplicador de Lagrange λ e as duas equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial y}{\partial x} = Q_x$$

$$\Rightarrow m (\ddot{x} + g \sin \theta) = \mu_c R_n$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda \frac{\partial y}{\partial y} = Q_y$$

$$\Rightarrow m (\ddot{y} + g \cos \theta) - \lambda = 0$$

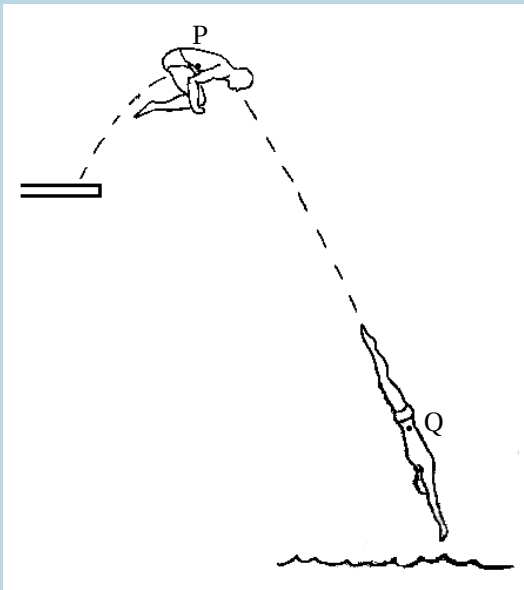
As componentes da força de ligação, $\lambda \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ e $\lambda \frac{\partial y}{\partial y} = \lambda$, são as componentes da reação normal. Ou seja, o multiplicador de Lagrange é a reação normal: $\lambda = R_n$. Substituindo $\ddot{y} = 0$ nas equações de Lagrange, obtém-se

$$R_n = m g \cos \theta \quad \ddot{x} = (\mu_c \cos \theta - \sin \theta) g$$

Problema 10

O saltador na figura encolhe o corpo no ponto P, para rodar mais rapidamente, e estende-o novamente em Q, para reduzir a rotação na entrada para a água. As alterações da velocidade angular são consequência da alteração do momento de inércia.

- (a) Se o momento de inércia do saltador em relação ao centro de massa é I , que depende do tempo, escreva as expressões para as suas energias cinética e potencial em função da posição (x, y) do centro de massa e do ângulo de rotação θ .
- (b) Usando a equação de Lagrange para θ , demonstre que o **momento angular**, $L = I\dot{\theta}$, permanece constante.
- (c) Se no ponto P mais alto da trajetória o momento de inércia é $3.28 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ e a velocidade angular $\dot{\theta} = 4 \text{ s}^{-1}$ e no ponto Q o momento de inércia é $28.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, determine a velocidade angular do saltador no ponto Q.



- (a) A velocidade do centro de massa é $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ e a velocidade angular é $\dot{\theta}$. A energia cinética do saltador é então

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

e a sua energia potencial gravítica é

$$U = m g y$$

(b) Como nenhuma das duas energias depende explicitamente de θ , as suas derivadas parciais em ordem a θ , são nulas e a equação de Lagrange para θ é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

Que é equivalente a dizer que a função

$$L = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}$$

permanece constante em qualquer tempo t . Derivando a energia cinética em ordem a $\dot{\theta}$ obtém-se a expressão do momento angular

$$L = I \dot{\theta}$$

Como tal, quando o saltador encolhe o corpo, diminuindo o valor de I , a velocidade angular $\dot{\theta}$ terá de aumentar.

(c) A conservação do momento angular implica

$$I_1 \dot{\theta}_1 = I_2 \dot{\theta}_2$$

e substituindo os valores dados

$$\dot{\theta}_2 = \frac{I_1 \dot{\theta}_1}{I_2} = \frac{3.28 \times 4}{28.2} = 0.465 \text{ s}^{-1}$$

9 Sistemas lineares

Problema 1

Em cada caso, use o Maxima para encontrar os valores e vetores próprios do sistema. Diga que tipo de ponto de equilíbrio tem cada sistema e represente os retratos de fase.

(a) $\dot{x} = x + y$ $\dot{y} = 4x + y$

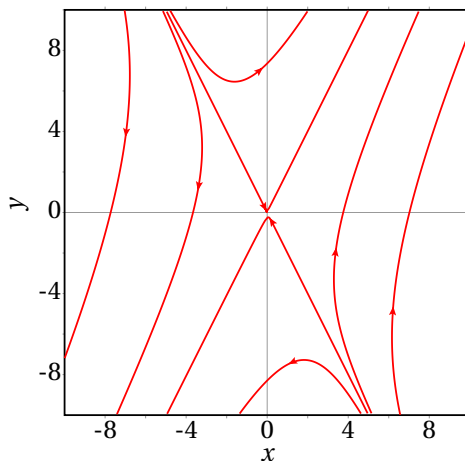
(b) $\dot{x} = -3x + \sqrt{2}y$ $\dot{y} = \sqrt{2}x - 2y$

(c) $\dot{x} = x - y$ $\dot{y} = x + 3y$

(a) No Maxima

```
(%i1) vars: [x, y]$  
(%i2) A: matrix ([1,1], [4,1])$  
(%i3) eigenvectors (A);  
(%o3)  [[ [3,-1], [1, 1] ], [[ [1, 2 ] ], [[1,-2 ] ] ]]  
(%i4) plotdf (list_matrix_entries (A.vars), vars, [vectors,""]);
```

E após traçar algumas curvas de evolução, o retrato de fase é

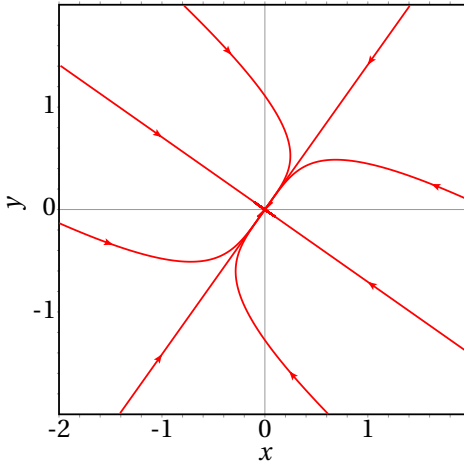


Os valores próprios são 3, com vetor próprio $(1, 2)$, e -1 , com vetor próprio $(1, -2)$. O ponto de equilíbrio é ponto de sela.

(b)

```
(%i5) A: matrix ([-3,sqrt(2)], [sqrt(2),-2])$
(%i6) eigenvectors (A);
(%o6)  [[[-4,-1], [1, 1]], [[ [ [1, -1/sqrt(2) ] ], [[1, sqrt(2) ] ]]]
(%i7) plotdf (list_matrix_entries (A.vars), vars, [vectors,""],
             [x,-2,2], [y,-2,2]);
```

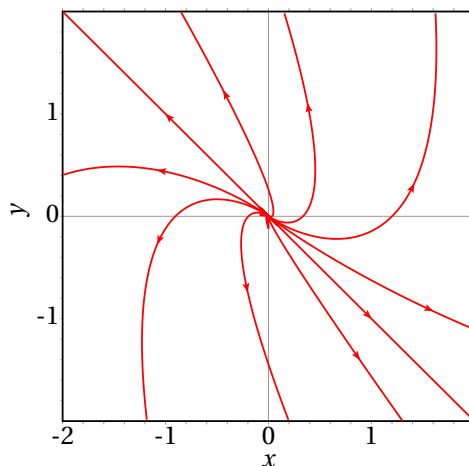
Os valores próprios são -4 , com vetor próprio $(1, -1/\sqrt{2})$, e -1 , com vetor próprio $(1, \sqrt{2})$. O ponto de equilíbrio é nó atrativo.



(c)

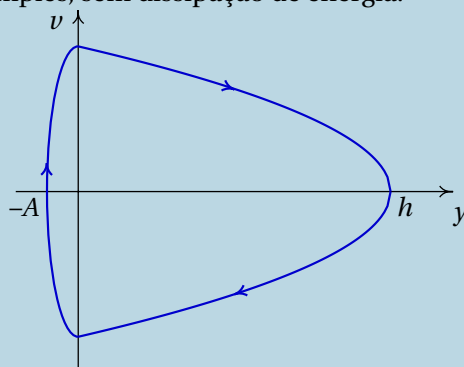
```
(%i8) A: matrix ([1,-1], [1,3])$
(%i9) eigenvectors (A);
(%o9)  [[ [2], [2 ] ], [[ [1, -1 ] ]]]
(%i10) plotdf (list_matrix_entries (A.vars), vars, [vectors,""],
             [x,-2,2], [y,-2,2]);
```

Existe um único valor próprio igual a 2, com vetor próprio $(1, -1)$. O ponto de equilíbrio é nó impróprio repulsivo.



Problema 2

A figura mostra a curva de evolução hipotética de uma bola que cai em queda livre e é disparada para cima novamente após ter batido no chão, se não existisse nenhuma força dissipativa. A parte do gráfico para valores positivos de y corresponde ao lançamento vertical de um projétil, ignorando a resistência do ar. A parte do gráfico para valores negativos de y corresponde à deformação elástica da bola quando choca com o chão; durante o tempo de contacto com o chão, admite-se que o movimento vertical da bola é um movimento harmónico simples, sem dissipação de energia.



Sabendo que a altura máxima atingida pela bola é $h = 10$ m e que a deformação máxima quando a bola bate no chão é $A = 1$ cm, determine:

- (a) A velocidade máxima da bola ao longo do seu movimento.
 (b) A frequência angular da deformação elástica da bola.
 (c) O tempo que a bola permanece em contacto com o chão.

(a) No ponto de altura máxima, com coordenadas (10, 0) no espaço de fase, a energia mecânica é

$$E_m = \frac{m}{2} v^2 + m g h = 0 + 98 m$$

e no ponto (0, v_m), onde a velocidade é máxima, a energia potencial é nula e a energia mecânica é então igual à energia cinética

$$98 m = \frac{m}{2} v_m^2 \quad \Rightarrow \quad v_m = \sqrt{196} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) No ponto (-0.01, 0), onde a deformação elástica é máxima, a energia cinética é nula e a energia mecânica é igual à energia potencial de um oscilador harmónico com constante elástica k

$$98 m = \frac{k}{2} 0.01^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = 1960000$$

A frequência angular de oscilação é então

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1960000} = 1400 \text{ s}^{-1}$$

(c) Como a curva de evolução da bola em contacto com o chão é metade de uma elipse, o tempo de contacto com o chão é metade do período do oscilador harmónico

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{1400} = 2.24 \text{ ms}$$

Problema 4

Um cilindro de massa m está pendurado, na vertical, de uma mola com constante elástica k , tal como na figura 6.2; se y é a altura do centro de massa do cilindro, na posição em que a mola não está nem esticada nem comprimida, despreze a resistência do ar.

(a) Encontre a equação de movimento, a partir da equação de Lagrange, ou se preferir, a partir da segunda lei de Newton.

(b) Encontre o valor de y no ponto de equilíbrio.

(c) Mostre que o sistema pode escrever-se como sistema linear, com uma mudança de variável de y para uma nova variável z e que a equação de movimento em função de z é a equação de um oscilador harmónico simples com frequência angular $\sqrt{k/m}$.

(a) As energias cinética e potencial gravítica mais potencial elástica são

$$E_c = \frac{m}{2} \dot{y}^2 \quad U = m g y + \frac{k}{2} y^2$$

A equação de Lagrange é

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = m \ddot{y} + m g + k y = 0$$

e a equação de movimento é

$$\ddot{y} = -g - \frac{k}{m} y$$

(b) No ponto de equilíbrio \dot{y} e \ddot{y} são nulas, ou seja

$$-g - \frac{k}{m} y_e = 0 \quad \Rightarrow \quad y_e = -\frac{m g}{k}$$

(c) Para que o sistema fosse linear, não podia aparecer o termo constante $-g$ na equação de movimento. Introduce-se então uma nova variável z tal que

$$-g - \frac{k}{m} y = -\frac{k}{m} z$$

ou seja, $z = y + \frac{m g}{k}$ e, assim sendo, $\ddot{z} = \ddot{y}$ e a nova equação de movimento é

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m} z$$

que é a equação de um oscilador harmónico simples, com frequência angular

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Problema 5

Um cilindro tem base circular de área $A = 10 \text{ cm}^2$, altura $h = 16 \text{ cm}$ e massa volúmica $\rho = 0.9 \text{ g/cm}^3$. Como essa massa volúmica é menor que a da água, $\rho_{ag} = 1 \text{ g/cm}^3$, quando o cilindro é colocado num recipiente com água flutua na superfície, com uma parte x da sua altura por fora da água, como mostra a figura ($0 \leq x \leq h$). Empurrando o cilindro para baixo, começa a oscilar com x a variar em função do tempo. Use o seguinte procedimento para analisar a oscilação do cilindro:

(a) Sabendo que a força da impulsão da água, para cima, é igual ao peso da água que ocupava a parte do volume do cilindro que está dentro da água, ou seja, $I = A(h - x) \rho_{ag} g$

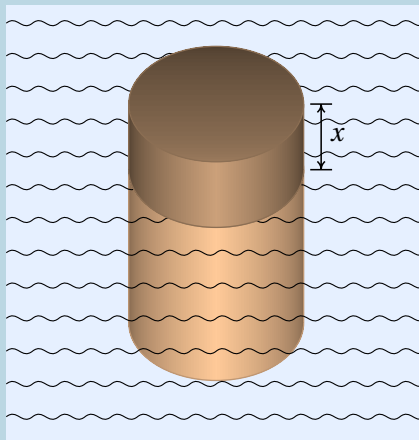
Encontre a expressão para a força resultante no cilindro, em função de x (pode ignorar a força de resistência da água, que é muito menor que o peso e a impulsão).

(b) Encontre a equação de movimento do cilindro (expressão para \ddot{x} em função de x).

(c) Encontre o valor de x na posição de equilíbrio do cilindro.

(d) Mostre que o sistema dinâmico associado ao movimento do cilindro é linear e encontre a matriz do sistema.

(e) Mostre que o ponto de equilíbrio é um centro, implicando que o movimento é oscilatório e determine o valor do período de oscilação do cilindro.



(a) A força resultante é vertical e com valor (positivo para cima ou negativo para baixo) igual a:

$$F = I - mg = A(h - x)\rho_{ag}g - Ah\rho g = Ag(h(\rho_{ag} - \rho) - \rho_{ag}x) \\ = 10 \times 980(16 \times 0.1 - x) = 15680 - 9800x$$

em gramas vezes cm/s^2 e x em centímetros.

(b) A massa do cilindro, em gramas, é

$$m = Ah\rho = 10 \times 16 \times 0.9 = 144$$

e a equação de movimento é

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = \frac{980}{9} - \frac{1225}{18}x$$

(em cm/s^2 e x em cm).

(c) O valor de x que faz com que a expressão da aceleração, $980/9 - 1225x/18$ seja nula é

$$x = \frac{980 \times 18}{9 \times 1225} = 1.6 \text{ cm}$$

(d) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = \frac{980}{9} - \frac{1225}{18}x$$

Define-se $y = x - 1.6$; como tal, $\dot{y} = \dot{x}$ e as equações de movimento são equivalentes a

$$\dot{y} = v \quad \dot{v} = -\frac{1225}{18}y$$

que correspondem a um sistema dinâmico linear com matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1225}{18} & 0 \end{bmatrix}$$

(e) A equação característica da matriz é $\lambda^2 + 1225/18 = 0$. Os dois valores próprios são então números imaginários

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{1225}{18}} = \pm i 8.250$$

Ou seja, o ponto de equilíbrio em $x = 1.6$ cm é um centro e o movimento do cilindro é oscilatório com frequência angular Ω igual a 8.250 e período (em segundos):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.762$$

Problema 7

Num transformador há duas bobinas, a primária, com resistência R_1 e indutância L_1 e a secundária, com resistência R_2 e indutância L_2 . Quando se liga uma fonte na primeira bobina, produzindo corrente I_1 nela, na segunda bobina é induzida outra corrente I_2 . Quando se desliga a fonte na primeira bobina, as duas correntes começam a diminuir gradualmente, de acordo com as seguintes equações:

$$L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 + R_1 I_1 = 0 \quad L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1 + R_2 I_2 = 0$$

onde M é a indutância mútua entre as duas bobinas e todas as constante M , L_1 , L_2 , R_1 e R_2 são positivas.

(a) Escreva as equações do transformador como equações de evolução de um sistema dinâmico linear e encontre a matriz do sistema.

(b) Num transformador real, M^2 é menor que $L_1 L_2$. Considere o caso $L_1 = 2$, $L_2 = 8$, $M = 3$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ (num sistema de unidades escolhido para obter números entre 0 e 10) e determine que tipo de ponto é o ponto de equilíbrio.

(c) Com os mesmos valores da alínea anterior, trace o retrato de fase do sistema.

(d) Os valores $L_1 = 2$, $L_2 = 8$, $M = 5$, $R_1 = 1$ e $R_2 = 2$, correspondem a um caso hipotético que não pode descrever um transformador real porque $M^2 > L_1 L_2$. Diga que tipo de ponto seria o ponto de equilíbrio nesse caso e explique porque esse sistema não pode descrever um transformador real.

(a) Resolvem-se as duas equações do transformador para encontrar expressões para \dot{I}_1 e \dot{I}_2 . O comando `coefmatrix` pode ser usado para extrair a matriz num sistema de combinações lineares; é necessário indicar as expressões lineares e as variáveis:

```
(%i11) eq1: L1*dI1+M*dI2+R1*I1=0$
(%i12) eq2: L2*dI2+M*dI1+R2*I2=0$
(%i13) sys: solve ([eq1, eq2], [dI1, dI2]);
(%o13) [[dI1 = (I1*L2*R1 - I2*M*R2) / (M^2 - L1*L2), dI2 = -(I1*M*R1 - I2*L1*R2) / (M^2 - L1*L2)]]
(%i14) vars: [I1, I2]$
(%i15) A: coefmatrix (map (rhs, sys[1]), vars);
```

$$(\%o15) \begin{bmatrix} \frac{L_2 R_1}{M^2 - L_1 L_2} & -\frac{M R_2}{M^2 - L_1 L_2} \\ -\frac{M R_1}{M^2 - L_1 L_2} & \frac{L_1 R_2}{M^2 - L_1 L_2} \end{bmatrix}$$

(b) Substituem-se os valores dos parâmetros na matriz do sistema e determinam-se os valores próprios:

```
(%i16) A1: subst ([L1=2, L2=8, M=3, R1=1, R2=2], A);
```

$$(\%o16) \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

```
(%i17) eigenvectors (A1)$
```

```
(%i18) float (%);
```

```
(%o18) [[[-1.527, -0.1871], [1.0, 1.0]], [[1.0, -0.4484]], [[1.0, 1.115]]]
```

Como os valores próprios são reais e ambos negativos, o ponto de equilíbrio é um nó atrativo.

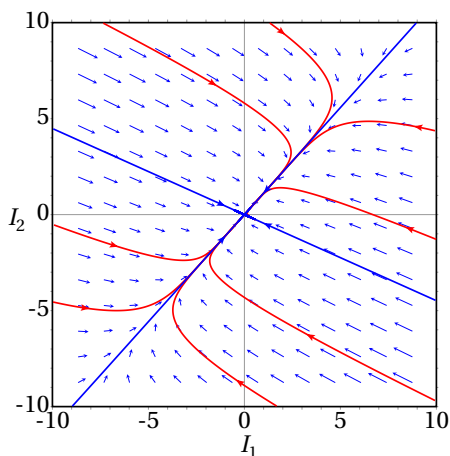
(c) As componentes da velocidade de fase são os lados direitos das equações na lista `sys`

```
(%i19) u1: subst ([L1=2, L2=8, M=3, R1=1, R2=2], map (rhs, sys[1]));
```

$$(\%o19) \left[-\frac{8I_1 - 6I_2}{7}, \frac{3I_1 - 4I_2}{7} \right]$$

```
(%i20) plotdf (u1, vars)$
```

E traçando algumas curvas de evolução, incluindo as que passam pelos vetores próprios, obtém-se o seguinte retrato de fase:



(d) Com os valores dos parâmetros dados, a matriz do sistema e os seus valores próprios são:

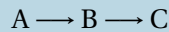
```
(%i21) A2: subst ([L1=2, L2=8, M=5, R1=1, R2=2], A);
(%o21) 
$$\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

(%i22) eigenvectors (A2)$
(%i23) float (%);
(%o23) [[[-0.1498, 1.483], [1.0, 1.0]], [[1.0, 0.9348], [1.0, -0.5348]]]
```

O ponto de equilíbrio seria, nesse caso, um ponto de sela. Não pode descrever um transformador real, porque é um ponto instável, em que as correntes aumentariam até valores infinitos.

Problema 8

Um isótopo radioativo A, decai produzindo outro isótopo radioativo B e este decai produzindo um isótopo estável C.



Sendo N_1 e N_2 o número de isótopos das espécies A e B existentes em qualquer instante t , as suas derivadas em ordem ao tempo verificam as seguintes equações:

$$\dot{N}_1 = -k_1 N_1 \quad \dot{N}_2 = k_1 N_1 - k_2 N_2$$

onde k_1 é a constante de decaimento dos isótopos A (probabilidade de que um isótopo da espécie A se desintegre durante uma unidade de tempo) e k_2 é a constante de decaimento dos isótopos B.

(a) Determine a matriz do sistema e os seus valores próprios.

(b) Tendo em conta que as constantes de decaimento k_1 e k_2 são positivas, explique que tipo de ponto pode ser o ponto de equilíbrio para os possíveis valores dessas constantes.

() Se num instante inicial o número de isótopos A, B e C for, respetivamente, $N_1 = 3 N_A$, $N_2 = 1.5 N_A$ e $N_3 = 4.5 N_A$, onde $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro, quais serão os valores de N_1 , N_2 e N_3 após um tempo muito elevado?

(a) A matriz do sistema e os seus valores próprios são:

```
(%i24) A: matrix ([-k1, 0], [k1, -k2]);
```

```
(%o24) 
$$\begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i25) eigenvectors (A);
```

```
(%o25) [[[-k2, -k1], [1, 1]], [[0, 1], [1,  $\frac{k_1}{k_2 - k_1}$ ]]]
```

(b) Existem dois casos diferentes. Primeiro, se k_1 e k_2 , são diferentes, há dois valores próprios, reais e negativos, ou seja, o ponto de equilíbrio é um nó atrativo. Mas se as duas constantes k_1 e k_2 são iguais, existe um único valor próprio, real e negativo, e o ponto de equilíbrio é um nó impróprio atrativo.

(c) Como o ponto de equilíbrio na origem é atrativo, após um tempo elevado o sistema aproxima-se desse ponto de equilíbrio, ou seja, $N_1 = 0$ e $N_2 = 0$. Se já não existem mais isótopos das espécies A nem B, isso quer dizer que todos os isótopos iniciais transformaram-se na espécie C e, como tal, N_3 será igual ao número total de isótopos das 3 espécies no início, $9 N_A$.

Problema 9

No sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y \quad \dot{y} = 10x + k(x + y)$$

onde k é um parâmetro real que pode ter qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$, determine para quais possíveis valores de k o ponto $(x, y) = (0, 0)$ é nó atrativo ou repulsivo, foco atrativo ou repulsivo, centro ou ponto de sela.

Existem várias formas possíveis de resolver este problema; um método simples é o seguinte. Trata-se de um sistema linear com matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 + k & k \end{bmatrix}$$

com traço t e determinante d iguais a:

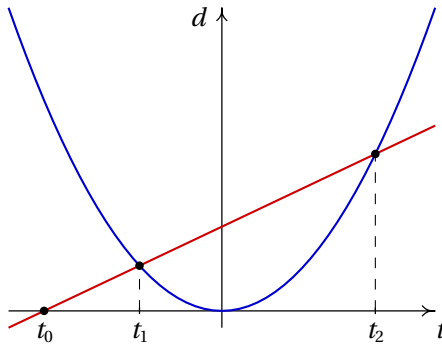
$$t = k \quad d = k + 10$$

A relação entre o traço e o determinante é $d = t + 10$. Num plano em que o eixo das abcissas representa o traço t e o eixo das ordenadas representa o determinante d , esta relação é uma reta com declive igual a 1, que corta o eixo das abcissas em $t_0 = -10$.

A curva que delimita a região dos focos da região dos nós é a parábola $d = t^2/4$, que corta a reta $d = t + 10$ nos dois pontos onde:

$$\frac{t^2}{2} - 2t - 20 = 0 \implies t_1 = 2 - 2\sqrt{11} \approx -4.633 \quad t_2 = 2 + 2\sqrt{11} \approx 8.633$$

O gráfico seguinte mostra a reta e a parábola:



O ponto de equilíbrio é ponto de sela, se o traço for menor que t_0 , nó atrativo, se o traço estiver entre t_0 e t_1 , foco atrativo, se o traço estiver entre t_1 e 0, centro se o traço for nulo, foco repulsivo, se o traço estiver entre 0 e t_2 ou nó repulsivo, se o traço for maior que t_2 . Tendo em conta que k é igual ao traço, o resultado é então:

- Ponto de sela, se $k < -10$
- Nó atrativo, se $-10 < k \leq 2 - 2\sqrt{11}$
- Foco atrativo, se $2 - 2\sqrt{11} < k < 0$
- Centro, se $k = 0$
- Foco repulsivo, se $0 < k < 2 + 2\sqrt{11}$
- Nó repulsivo, se $k \geq 2 + 2\sqrt{11}$

Note-se que quando $k = 2 \pm 2\sqrt{11}$, o ponto é nó impróprio, que já foi incluído nas categorias acima. Se $k = -10$, o determinante é zero, que indica que o sistema se reduz a uma única equação, $\dot{y} = -10y$, que representa um sistema com espaço de fase de dimensão 1, em que $y = 0$ é ponto de equilíbrio atrativo; nesse caso a outra equação de evolução mostra que x é igual a $y/10$ mais uma constante.

10 Sistemas não lineares

Problema 1

Uma partícula com massa m , desloca-se ao longo do eixo dos x sob a ação de uma força resultante F_x que depende da posição x e da componente da velocidade v_x . Para cada um dos casos seguintes encontre os pontos de equilíbrio, diga que tipo de ponto equilíbrio é cada um (estável ou instável; centro, foco, nó ou ponto de sela) e desenhe o retrato de fase mostrando as órbitas mais importantes:

(a) $F_x = -m x (1 + v_x)$

(b) $F_x = -m x (x^2 + v_x - 1)$

As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v_x \quad \dot{v}_x = \frac{F_x}{m}$$

(a) Nos pontos de equilíbrio, $v_x = 0$ e $-x(1 + v_x) = 0$, ou seja, existe um único ponto de equilíbrio em $(x, v_x) = (0, 0)$. A matriz jacobiana é:

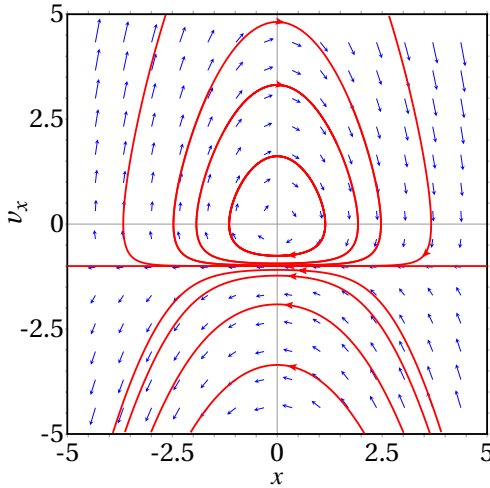
$$\mathbf{J}(x, v_x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_x} \\ \frac{\partial(-x(1+v_x))}{\partial x} & \frac{\partial(-x(1+v_x))}{\partial v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - v_x & -x \end{bmatrix}$$

E a matriz da aproximação linear na vizinhança do ponto de equilíbrio é:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Que tem traço negativo e determinante (positivo) igual a 1. Como tal, o ponto de equilíbrio é um centro. O retrato de fase traça-se com o comando:

```
(%i1) plotdf ([vx, -x*(1+vx)], [x, vx], [x, -5, 5], [vx, -5, 5]);
```



(b) Nos pontos de equilíbrio, $v_x = 0$ e $-x(x^2 - 1) = 0$, ou seja, existem três pontos de equilíbrio em $(x, v_x) = (0, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. A matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J}(x, v_x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_x} \\ \frac{\partial(-x(x^2 + v_x - 1))}{\partial x} & \frac{\partial(-x(x^2 + v_x - 1))}{\partial v_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2 - v_x + 1 & -x \end{bmatrix}$$

A matriz da aproximação linear na vizinhança do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com determinante negativo e, como tal, o ponto de equilíbrio é um ponto de sela.

No ponto de equilíbrio $(1, 0)$ a matriz da aproximação linear é:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{J}(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Com traço $t = -1$ e determinante $d = 2$. Como d é maior que $t^2/4$, o ponto $(1, 0)$ é um foco atrativo.

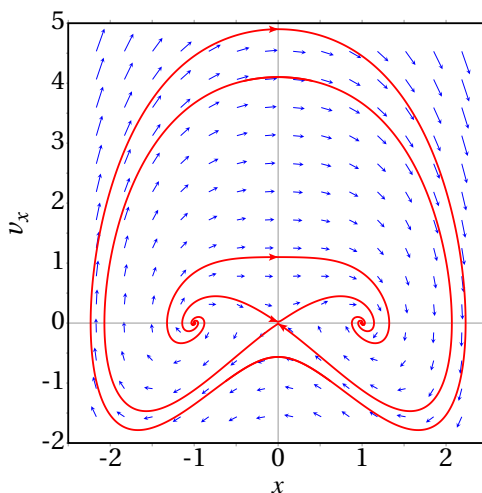
No ponto de equilíbrio $(-1, 0)$ a matriz da aproximação linear é:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{J}(-1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Com traço $t = 1$ e determinante $d = 2$. Como d é maior que $t^2/4$, o ponto $(-1, 0)$ é um foco repulsivo.

O retrato de fase traça-se com o comando:

```
(%i2) plotdf ([vx, -x*(x^2+vx)], [x, vx], [x, -2.5, 2.5], [vx, -2, 5]);
```



Problema 4

A amplitude de oscilação de um pêndulo decresce, devido à força de resistência do ar e ao atrito no eixo. Admita um pêndulo de comprimento $l = 50$ cm e massa $m = 0.150$ kg, em que o atrito no eixo é desprezável mas a resistência do ar não. A equação de movimento é a equação 8.8.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{Cl}{m} |\dot{\theta}| \dot{\theta}$$

Se a massa m estiver concentrada numa esfera de raio $R = 2$ cm, a expressão para a constante C é dada pela equação 4.14: $C = \pi \rho R^2/4$, onde $\rho = 1.2$ kg/m³ é a massa volúmica do ar. Trace os gráficos de $\theta(t)$, $\omega(t)$ e da curva de evolução no espaço de fase e explique o significado físico da solução, para os dois casos seguintes:

- O pêndulo parte do repouso com um ângulo inicial $\theta = 120^\circ$.
- O pêndulo é lançado desde $\theta = 60^\circ$, com velocidade angular inicial $\omega = -7.8$ s⁻¹.

(a) Usando o programa `rk`, com intervalos de tempo de 0.1, desde $t = 0$ até $t = 50$,

```
(%i3) [g, l, m]: [9.8, 0.5, 0.15]$
(%i4) C: %pi*1.2*0.02^2/4$
(%i5) s: rk ([w,-g*sin(q)/l-C*l*abs(w)*w/m], [q,w], [2*%pi/3,0],
            [t,0,50,0.1])$
(%i6) last (s);
(%o6) [ 50.0, 0.408596821360162, 6.193790347574476 ]
```

Executando novamente o programa `rk` com intervalos de tempo dez vezes menores,

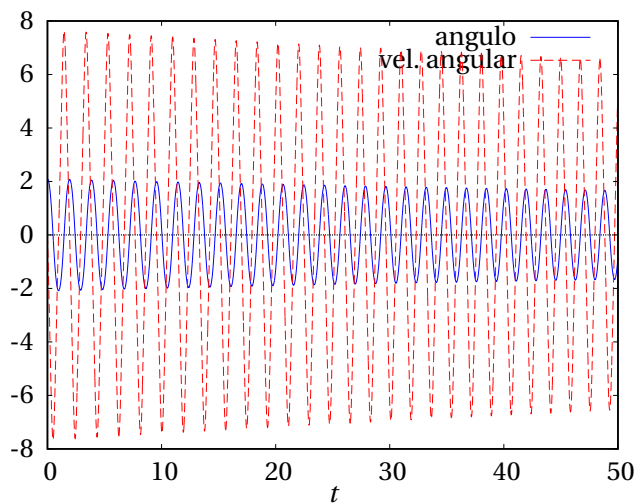
```
(%i7) s: rk ([w,-g*sin(q)/l-C*l*abs(w)*w/m], [q,w], [2*%pi/3,0],
            [t,0,50,0.01])$
(%i8) last (s);
(%o8) [ 50.0, - 0.8184365726225941, 5.503739362621793 ]
```

Mostrando que é necessário reduzir ainda mais o valor dos intervalos de tempo, para obter uma solução convergente:

```
(%i9) s: rk ([w,-g*sin(q)/l-C*l*abs(w)*w/m], [q,w], [2*%pi/3,0],
            [t,0,50,0.005])$
(%i10) last (s);
(%o10) [ 50.0, - 0.8184437883132009, 5.503721542035767 ]
```

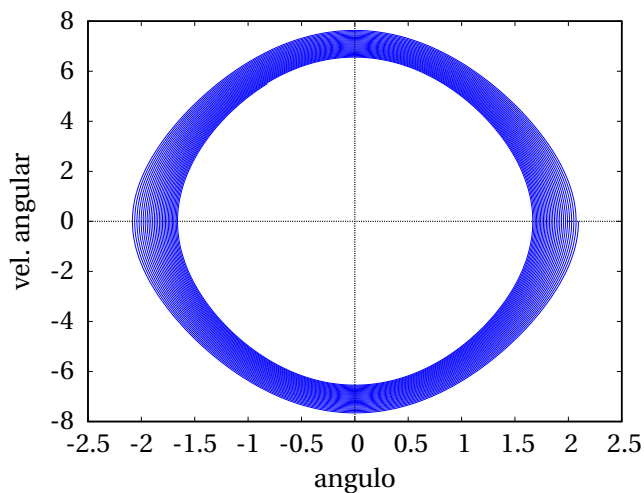
Que é um resultado convergente com 4 algarismos significativos. O gráfico do ângulo e da velocidade angular, em função do tempo, obtém-se com o comando:

```
(%i11) plot2d([[discrete,makelist([p[1],p[2]],p,s)],
              [discrete,makelist([p[1],p[3]],p,s)],
              [legend,"angulo","vel. angular"],[xlabel,"t"]]);
```



E a curva de evolução no espaço de fase é o gráfico da velocidade angular em função do ângulo, obtido com o seguinte comando:

```
(%i12) plot2d ([discrete, makelist([p[2],p[3]],p,s)],
               [xlabel, "angulo"], [ylabel, "vel. angular"]);
```

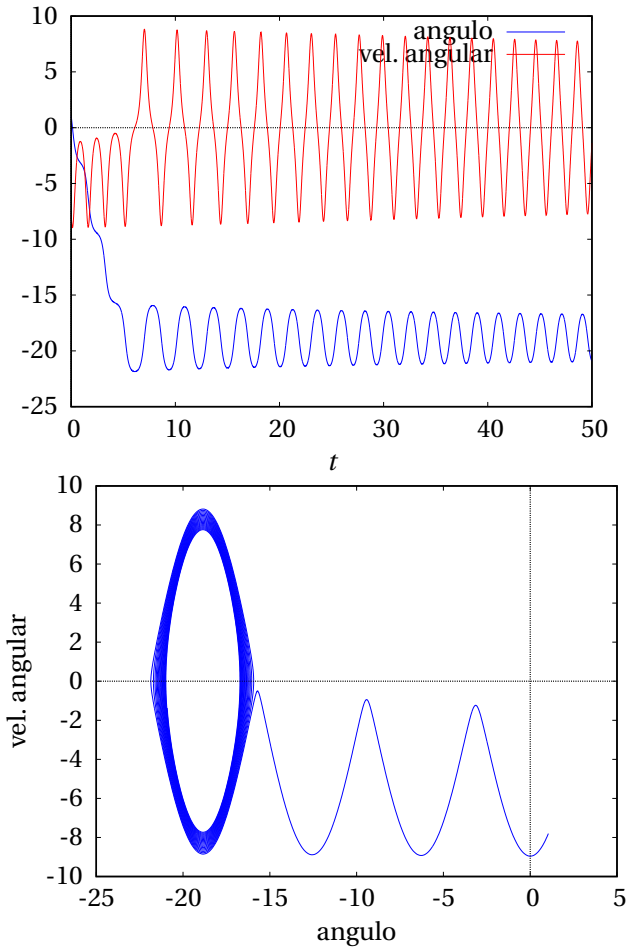


Os dois gráficos mostram que pêndulo oscila com amplitude que decresce lentamente.

(b) Usando o programa `rk`, com os mesmos intervalos de tempo usados para obter os gráficos na alínea anterior,

```
(%i13) s: rk ([w,-g*sin(q)/1-C*1*abs(w)*w/m], [q,w], [%pi/3,-7.8],
            [t,0,50,0.005])$
```

Os gráficos do ângulo e da velocidade angular, em função do tempo, e da curva de evolução no espaço de fase, obtêm-se repetindo os mesmos comandos da alínea anterior:



O pêndulo faz três voltas completas, rodando no sentido horário, e quando passa a quarta vez pela posição de equilíbrio estável, começa a oscilar com amplitude que decresce lentamente.

Problema 7

Para analisar a equação diferencial não linear $\ddot{x} + \dot{x}^2 + 4x^2 = 4$,

(a) Escreva as equações de evolução do sistema dinâmico associado à equação.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema.

(c) Determine a matriz jacobiana.

(d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.

(e) Se em $t = 0$ os valores da variável x e da sua derivada são $x_0 = 1$ e $\dot{x}_0 = 1$, determine (numericamente) os valores da variável e da sua derivada em $t = 2$.

(a) Define-se uma segunda variável de estado:

$$v = \dot{x}$$

e substitui-se na equação do sistema:

$$\dot{v} + v^2 + 4x^2 = 4$$

Como tal, as duas equações de evolução —expressões das derivadas das duas variáveis de estado— são:

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = 4 - v^2 - 4x^2$$

(b) Para resolver esta alínea não é necessário ter resolvido a alínea anterior. Basta observar que nos pontos de equilíbrio x permanece constante e, assim sendo, $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. Substituindo na equação do sistema,

$$4x^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$

(c) Usando as equações obtidas na alínea (a),

$$\mathbf{J}(x, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial(4 - v^2 - 4x^2)}{\partial x} & \frac{\partial(4 - v^2 - 4x^2)}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8x & -2v \end{bmatrix}$$

(Também pode usar-se a função **jacobian** do Maxima, para determinar a matriz).

(d) Substituindo $x = 1$ e $v = 0$ na matriz jacobiana obtém-se:

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o traço dessa matriz é nulo e o determinante é 8, os valores próprios são números imaginários e o ponto $x = 1$, $v = 0$ é um centro.

Substituindo $x = -1$ e $v = 0$ na matriz jacobiana obtém-se:

$$J(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Como o traço dessa matriz é nulo e o determinante é -8, os valores próprios são reais, com sinais opostos. O ponto $x = -1$, $v = 0$ é então ponto de sela.

(e) Usa-se a função `rk` do Maxima várias vezes, com valores decrescentes dos intervalos de tempo, até se obterem valores convergentes do resultado:

```
(%i14) last(rk([v,4-v^2-4*x^2],[x,v],[1,1],[t,0,2,0.1]));
(%o14) [ 2.0, 0.58688, 0.82753 ]
(%i15) last(rk([v,4-v^2-4*x^2],[x,v],[1,1],[t,0,2,0.05]));
(%o15) [ 2.0, 0.58687, 0.82768 ]
```

Ou seja, os valores aproximados de x e \dot{x} , em $t = 2$, são: 0.5869 e 0.8277

Problema 8

O sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = 2x y^3 - x^4 \quad \dot{y} = y^4 - 2x^3 y$$

tem um único ponto de equilíbrio na origem. A matriz jacobiana nesse ponto é igual a zero e, portanto, os valores próprios (nulos) não podem ser usados para caracterizar o ponto de equilíbrio. Use o seguinte método para analisar o retrato de fase do sistema:

(a) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto do eixo dos x e em qualquer ponto do eixo dos y .

(b) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto das duas retas $y = x$ e $y = -x$.

(c) Faça a mão um gráfico mostrando os versores que encontrou nas alíneas a e b , em vários pontos nos 4 quadrantes do espaço de fase, e trace algumas curvas de evolução seguindo as direções da velocidade de fase. Com base nesse gráfico, que tipo de ponto de equilíbrio julga que é a origem?

(d) Diga se existem ciclos, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas e no caso afirmativo quantas.

(a) No eixo dos x , y é igual a zero e a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = -x^4 \hat{i} \implies \hat{u} = -\hat{i}$$

No eixo dos y , x é igual a zero e a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = y^4 \hat{j} \implies \hat{u} = \hat{j}$$

(b) Na reta $y = x$, a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = x^4 \hat{i} - x^4 \hat{j}$$

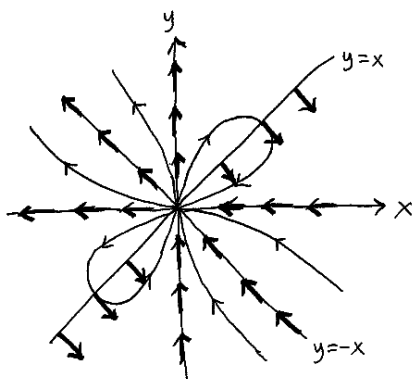
com módulo igual a $\sqrt{2}x^4$ e versor:

$$\vec{e}_u = \frac{x^4 \hat{i} - x^4 \hat{j}}{\sqrt{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} - \hat{j})$$

Na reta $y = -x$,

$$\vec{u} = -3x^4 \hat{i} + 3x^4 \hat{j} \implies \vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})$$

(c) A figura seguinte mostra os versores encontrados nas duas alíneas anteriores e algumas curvas de evolução. Como há curvas que se aproximam da origem e curvas que se afastam dele, a origem é um ponto de sela.



(d) Não existem ciclos nem órbitas heteroclínicas. Existem um número infinito de órbitas homoclínicas: todas as curvas de evolução no primeiro e terceiro quadrantes são órbitas homoclínicas.

Problema 10

Qualquer corpo celeste (planeta, cometa, asteróide, sonda espacial, etc) de massa m no sistema solar tem uma energia potencial gravítica produzida pelo Sol, que é responsável pelas órbitas elípticas desses corpos. A expressão para a energia potencial é,

$$U = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

onde G é a constante de gravitação universal, M é a massa do Sol, e as coordenadas x e y são medidas no plano da órbita do corpo celeste, com origem no Sol. Se as distâncias forem medidas em unidades astronómicas, UA, e os tempos em anos, o produto GM será igual a $4\pi^2$.

(a) Encontre as equações de movimento do corpo celeste, em unidades de anos para o tempo e UA para as distâncias.

(b) O cometa Halley chega até uma distância mínima do Sol igual a 0.587 UA. Nesse ponto, a sua velocidade é máxima, igual a 11.50 UA/ano, e perpendicular à sua distância até o Sol. Determine numericamente a órbita do cometa Halley, a partir da posição inicial $0.587 \hat{i}$, com velocidade inicial $11.50 \hat{j}$, com intervalos de tempo $\Delta t = 0.05$ anos. Trace a órbita desde $t = 0$ até $t = 100$ anos. Que pode concluir acerca do erro numérico?

(c) Repita o procedimento da alínea anterior com $\Delta t = 0.02$ anos e trace a órbita desde $t = 0$ até $t = 150$ anos. Que pode concluir acerca do erro numérico?

(d) Diga qual é, aproximadamente, a distância máxima que o cometa Halley se afasta do Sol, e compare a órbita do cometa com as órbitas do planeta mais distante, Neptuno (órbita entre 29.77 UA e 30.44 UA) e do planeta mais próximo do Sol, Mercúrio (órbita entre 0.31 UA e 0.39 UA) (Plutão já não é considerado um planeta).

(a) Há quatro variáveis de estado: x , y , \dot{x} e \dot{y} . As expressões das energias cinética e potencial são:


```
(%i16) Ec: m*(xp^2 + yp^2)/2$
```

```
(%i17) U: -4*pi^2*m/sqrt(x^2 + y^2)$
```

Onde xp e yp representam as velocidades generalizadas \dot{x} e \dot{y} . Para aplicar as equações de Lagrange é necessário definir xp e yp como derivadas x e y em ordem ao tempo, e definir também xpp e ypp como derivadas de xp e yp :

```
(%i18) gradef (x,t,xp)$
```

```
(%i19) gradef (y,t,yp)$
```

```
(%i20) gradef (xp,t,xpp)$
```

```
(%i21) gradef (yp,t,ypp)$
```

As duas equações de Lagrange conduzem às duas equações de movimento:

```
(%i22) diff(diff(Ec,xp),t) - diff(Ec,x) + diff(U,x) = 0;
```

```
(%o22)  $\frac{4\pi^2 m x}{(y^2 + x^2)^{3/2}} + m xpp = 0$ 
```

```
(%i23) eq1: solve(%,xpp)[1];
```

```
(%o23)  $xpp = -\frac{4\pi^2 x}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$ 
```

```
(%i24) diff(diff(Ec,yp),t) - diff(Ec,y) + diff(U,y) = 0;
```

```
(%o24)  $m ypp + \frac{4\pi^2 m y}{(y^2 + x^2)^{3/2}} = 0$ 
```

```
(%i25) eq1: solve(%,ypp)[1];
```

```
(%o25)  $ypp = -\frac{4\pi^2 y}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$ 
```

As equações de movimento são:

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi^2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \ddot{y} = -\frac{4\pi^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

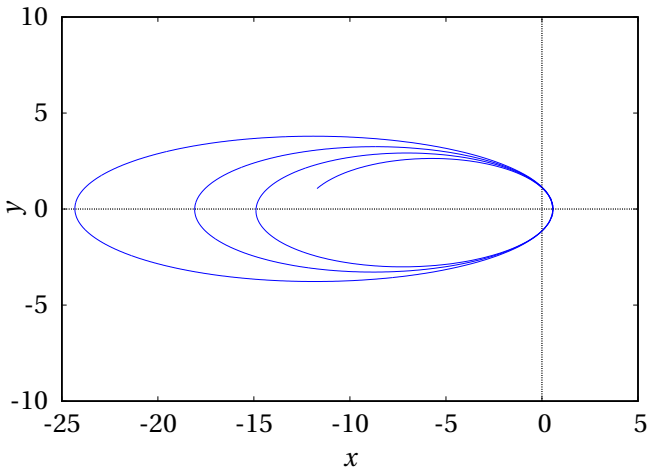
(b) Usando as condições iniciais dadas e o intervalo de tempo desde 0 até 100, com incrementos de 0.05, a solução numérica do problema obtém-se com o programa `rk`:

```
(%i26) o: rk([xp,yp,rhs(eq1),rhs(eq2)], [x,y,xp,yp], [0.587,0,0,11.5],
            [t,0,100,0.05])$
```

onde `o` é uma lista com várias listas de cinco elementos, com os valores de $(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ em diferentes instantes entre 0 e 100. Como tal, o gráfico de trajetória do cometa (y vs x) pode ser obtido com o seguinte comando:

```
(%i27) plot2d ([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, o)],
              [xlabel,"x"], [ylabel,"y"], [y,-10,10], same_xy);
```

Usou-se a opção `same_xy` para que a escala nos dois eixos seja igual, mostrando a forma real da trajetória. O resultado é o gráfico seguinte:

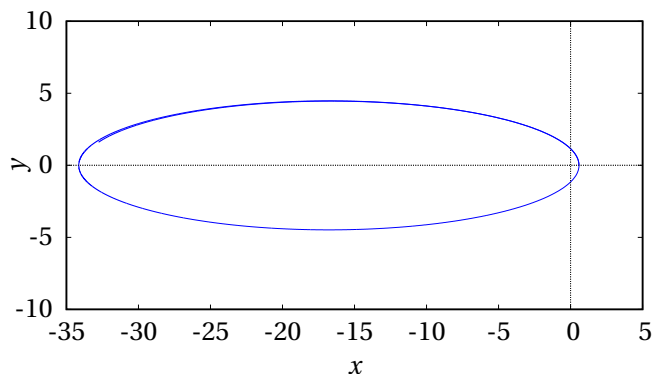


O facto de que o satélite não repete a mesma trajetória, mas aproxima-se cada vez mais do Sol, indica que a sua energia mecânica diminuiu, em vez de permanecer constante, como era suposto acontecer. Conclui-se então que o intervalo $\Delta t = 0.05$ não é suficientemente pequeno e os dados obtidos têm um erro numérico muito elevado.

(c) Reduzindo o valor dos incrementos de tempo:

```
(%i28) o: rk([xp,yp,rhs(eq1),rhs(eq2)], [x,y,xp,yp], [0.587,0,0,11.5],
            [t,0,100,0.02])$
```

```
(%i29) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, o)], [xlabel,"x"],
              [ylabel,"y"], [y,-10,10], same_xy);
```



O erro numérico é muito menor, mas o cometa continua a perder energia; seria necessário reduzir ainda mais o valor de Δt para diminuir o erro.

(d) O comando

```
(%i30) plot2d ([discrete,makelist([p[1],p[2]],p,o)]);
```

Mostra que o cometa está mais afastado do Sol em t aproximadamente 36 anos. Como foram usados incrementos de t iguais a $0.02 = 1/50$, 36 anos aparecerá na posição 1801 da lista. Observando a lista de valores de x nessa parte da lista:

```
(%i31) makelist (o[i][2], i, 1780, 1820);
```

Conclui-se que o valor mínimo de x (distância máxima ao Sol) é aproximadamente 34.14 UA. Essa distância máxima é maior do que a órbita de Neptuno e a distância mínima, 0.587 UA, está entre as órbitas de Mercúrio e Vénus.

11 Ciclos limite e dinâmica populacional

Problema 3

Uma população de dragões, y , e uma população de águias, x , evoluem de acordo com um modelo de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(2 - y) \quad \dot{y} = \frac{y}{2}(x - 3)$$

Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase do sistema. Qual será o estado limite? alguma das duas espécies será extinta?

As componentes da velocidade de fase são:

```
(%i1) u: [x*(2-y), y*(x-3)/2] $
```

e os pontos de equilíbrio são os pontos onde as duas componentes da velocidade de fase são nulas:

```
(%i2) p: solve (u);
```

```
(%o2)  [ [y = 0, x = 0], [y = 2, x = 3] ]
```

A matriz jacobiana do sistema é:

```
(%i3) J: jacobian (u, [x,y]);
```

```
(%o3)  
$$\begin{bmatrix} 2-y & -x \\ \frac{y}{2} & \frac{x-3}{2} \end{bmatrix}$$

```

e os valores próprios da matriz da aproximação linear, na vizinhança do primeiro ponto de equilíbrio, $(0, 0)$, são,

```
(%i4) eigenvalues (subst (p[1], J));
```

```
(%o4)  
$$\left[ \left[ -\frac{3}{2}, 2 \right], [ 1, 1] \right]$$

```

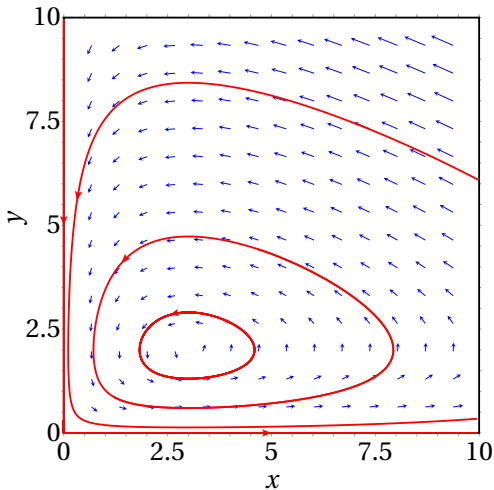
Ou seja, o ponto de equilíbrio em $(0, 0)$ é ponto de sela. Os valores próprios da matriz da aproximação linear, na vizinhança do segundo ponto de equilíbrio, $(3, 2)$, são:

```
(%i5) eigenvalues (subst (p[2],J));
(%o5)  [ [ -√3i , √3i ] , [ 1 , 1 ] ]
```

E, por serem números imaginários puros, o segundo ponto de equilíbrio é um centro.

O retrato de fase, na região relevante onde as duas populações x e y são positivas ou nulas, constrói-se com o seguinte comando:

```
(%i6) plotdf (u, [x,y], [x,0,10], [y,0,10]);
```



O estado limite é um ciclo, em que as populações das duas espécies oscilam, sem que nenhuma das duas seja nunca extinta.

Problema 4

Considere o modelo de Verhulst para duas populações:

$$\dot{x} = x(1 - x - 2y) \quad \dot{y} = y(1 + 5x - y)$$

diga se é um sistema com competição ou um sistema predador presa (e nesse caso quais as presas e quais os predadores). Analise a estabilidade e desenhe o retrato de fase.

O termo $-2y$ na expressão de \dot{x} implica que a população y faz diminuir a população x . E o termo $+5x$ na expressão de \dot{y} implica que a população x faz aumentar a população y . Como tal, trata-se de um sistema predador presa, onde x são as presas e y os predadores.

As componentes da velocidade de fase são:

```
(%i1) u: [x*(1-x-2*y), y*(1+5*x-y)]$
```

e os pontos de equilíbrio são os pontos onde as duas componentes da velocidade de fase são nulas:

```
(%i2) p: solve (u);
(%o2) [[y=0, x=0], [y=0, x=1], [y=1, x=0], [y=6/11, x=-1/11]]
```

Como só interessam os valores positivos das variáveis de estado, o sistema tem então 3 pontos de equilíbrio, nos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ do espaço de fase (x, y) .

A matriz jacobiana do sistema é:

```
(%i3) J: jacobian (u, [x,y])$
```

As matrizes das aproximações lineares nas vizinhanças dos 3 pontos de equilíbrio são então:

```
(%i4) makelist (subst (p[i], J), i, 1, 3);
(%o4) [[ [1 0], [-1 -2], [-1 0] ],
        [ [0 1], [0 6], [5 -1] ] ]
```

A primeira matriz é diagonal e com um único valor próprio, igual a 1. Como tal, o primeiro ponto de equilíbrio, na origem do espaço de fase, é um nó próprio repulsivo.

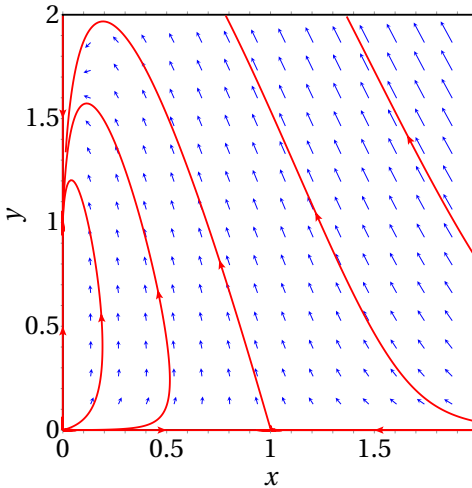
Os valores próprios nos outros dois pontos de equilíbrio são os seguintes:

```
(%i5) makelist (eigenvalues (subst (p[i], J))[1], i, 2, 3);
(%o5) [[ -1, 6 ], [ -1 ]]
```

Ou seja, o segundo ponto de equilíbrio, $(1, 0)$, é ponto de sela e terceiro ponto de equilíbrio, $(0, 1)$, é um nó impróprio atrativo.

O retrato de fase, na região relevante onde as duas populações x e y são positivas ou nulas, constrói-se com o seguinte comando:

```
(%i5) plotdf (u, [x,y], [x,0,2], [y,0,2]);
```



Se inicialmente existem predadores (y maior que zero), o sistema evolui sempre até extinguiem-se todas as presas, ficando a população de predadores igual a uma unidade.

Problema 6

O sistema dinâmico:

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2) \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)$$

tem um ponto de equilíbrio na origem. Encontre as equações de evolução em coordenadas polares, nomeadamente, as expressões para \dot{r} e $\dot{\theta}$ em função de r e θ . Explique que tipo de ponto de equilíbrio é a origem e quantos ciclos limite existem.

As derivadas das expressões $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ são:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

Substituindo nas equações de evolução, obtém-se as equações de evolução em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta &= r \sin \theta + r^3 \cos \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta &= -r \cos \theta + r^3 \sin \theta\end{aligned}$$

que são duas equações lineares para \dot{r} e $\dot{\theta}$. Aplicando qualquer método de resolução de equações lineares, obtém-se essas duas expressões. Por exemplo, o método de eliminação; multiplicando a primeira equação por $\cos \theta$ e a segunda por $\sin \theta$,

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos^2 \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= r \sin \theta \cos \theta + r^3 \cos^2 \theta \\ \dot{r} \sin^2 \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= -r \sin \theta \cos \theta + r^3 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

e somando as duas equações obtém-se a expressão para \dot{r}

$$\dot{r} = r^3$$

Multiplicando a primeira equação de evolução por $\sin \theta$ e a segunda por $\cos \theta$,

$$\begin{aligned}\dot{r} \sin \theta \cos \theta - r \dot{\theta} \sin^2 \theta &= r \sin^2 \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta \\ \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta &= -r \cos^2 \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

e subtraindo a primeira equação da segunda obtém-se a expressão para $\dot{\theta}$

$$r \dot{\theta} = -r \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -1 \quad (\text{se: } r \neq 0)$$

Fora da origem, r é positiva e, como tal, $\dot{r} = r^3$ é sempre positiva. Ou seja, o estado do sistema afasta-se sempre da origem (r aumenta). Enquanto o estado se afasta da origem, dá várias voltas no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio), porque $\dot{\theta}$ é igual a -1 . Isso implica que a origem é um foco repulsivo e não existe nenhum ciclo limite.

As expressões para \dot{r} e $\dot{\theta}$ também podem ser obtidas no Maxima com os seguintes comandos:

```
(%i1) x: r*cos(q)$
(%i2) y: r*sin(q)$
(%i3) gradef(r,t,v)$
```

```
(%i4) gradef(q,t,w)$
(%i5) e1: diff(x,t) = y+(x^2+y^2)*x;
(%o5)      cos(q) v - sin(q) r w = cos(q) r (sin^2(q) r^2 + cos^2(q) r^2) + sin(q) r
(%i6) e2: diff(y,t) = -x+(x^2+y^2)*y;
(%o6)      cos(q) r w + sin(q) v = sin(q) r (sin^2(q) r^2 + cos^2(q) r^2) - cos(q) r
(%i7) trigsimp(solve([e1,e2],[v,w]));
(%o7)      [ [ v=r^3 , w=-1 ] ]
```

Problema 7

Em relação ao seguinte sistema não linear:

$$\dot{x} = x - y - x^3 - xy^2 \qquad \dot{y} = x + y - x^2y - y^3$$

(a) Encontre as equações de evolução em coordenadas polares (sugestão: use o comando `trigreduce` para simplificar o resultado).

(b) Trace o gráfico de \dot{r} em função de r (r não pode ser negativo), demonstre que o sistema tem um único ciclo limite e determine se é atrativo ou repulsivo.

(c) Escreva a equação do ciclo limite, em função das coordenadas cartesianas (x, y) .

(d) Corrobre a resposta traçando o retrato de fase no plano cartesiano (x, y) .

(a) Substituem-se as coordenadas cartesianas por coordenadas polares nas duas equações de evolução, e resolvem-se em simultâneo para encontrar as expressões para $\dot{\theta}$ e \dot{r} (designadas por w e v nos comandos seguintes):

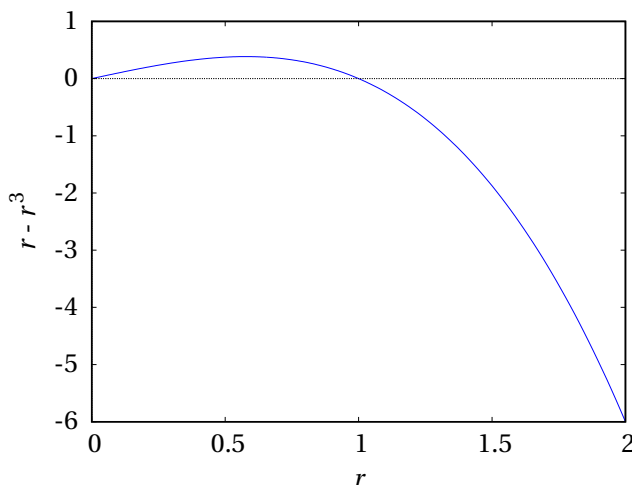
```
(%i1) [x, y]: [r*cos(q), r*sin(q)]$
(%i2) gradef(x,t,v)$
(%i3) gradef(q,t,w)$
(%i4) trigsimp(solve([diff(x,t)=x-y-x^3-x*y^2,
diff(y,t)=x+y-x^2*y-y^3],[v,w]));
```

```
(%o4) [[v = r - r^3, w = 1]]
```

As duas equações de evolução, em coordenadas polares, são então: $\dot{r} = r - r^3$, $\dot{\theta} = 1$.

(b) O gráfico de \dot{r} em função de r obtém-se com o comando:

```
(%i5) plot2d (rhs(%[1][1]), [r,0,2]);
```



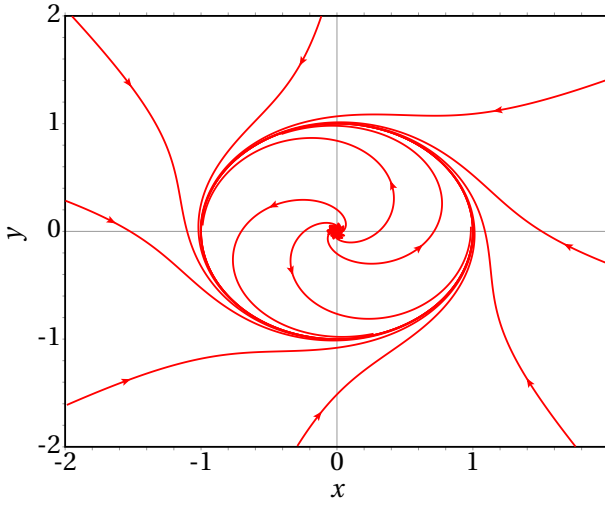
e mostra que existe uma única raiz diferente de zero, em $r = 1$, e r aumenta se for menor que 1 e diminui se for maior que 1. Assim sendo, existe um único ciclo limite, atrativo, que é uma circunferência de raio 1.

(c) O ciclo limite é a circunferência de raio 1 e centro na origem, que em coordenadas cartesianas tem equação $x^2 + y^2 = 1$

(d) Para criar o retrato de fase, em coordenadas cartesianas, é necessário eliminar primeiro a definição das coordenadas polares:

```
(%i6) remvalue(x,y)$
```

```
(%i7) plotdf([x-y-x^3-x*y^2,x+y-x^2*y-y^3],[x,y],[x,-2,2],[y,-2,2],  
[vectors,""]);
```



12 Sistemas caóticos

Problema 3

O sistema de Rössler é definido pelas seguintes equações de evolução, com 3 parâmetros positivos a , b e c :

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + c y$$

$$\dot{z} = a + (x - b) z$$

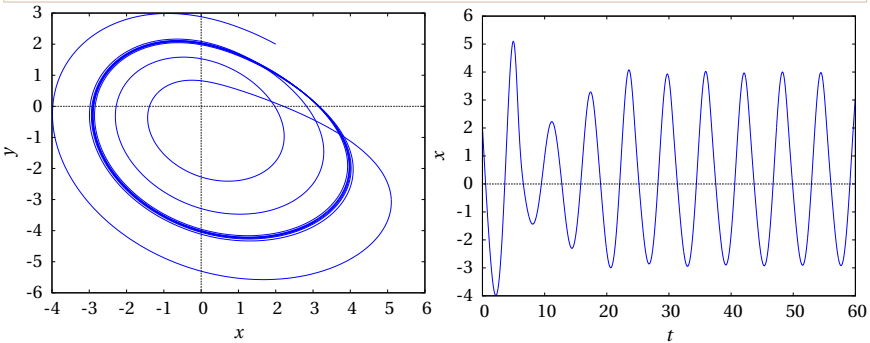
Investigue a solução do sistema com $a = 2$ e $b = 4$ fixos e com os seguintes valores de c : (a) $c = 0.3$ (b) $c = 0.35$ (c) $c = 0.375$ (d) $c = 0.398$.

Em cada caso use o programa `rk` para obter a solução, com incrementos de tempo $\Delta t = 0.01$ e de forma a que sejam feitas 6000 iterações. Pode usar como valores iniciais $x = y = z = 2$. Trace os gráficos da curva projetada no plano xy e de x em função de t . Volte a executar 6000 iterações do programa `rk`, mas agora usando como valores iniciais os valores finais obtidos na primeira execução do programa (o comando `rest (last (lista))` extrai o último vetor na lista anterior, excluindo o tempo). Trace novamente os mesmos gráficos e repita o procedimento até conseguir concluir qual é o conjunto limite positivo da curva considerada e se for um ciclo, determine o seu período. Em cada alínea diga qual é o conjunto limite, o seu período (se for um ciclo) e mostre um gráfico que justifique a sua conclusão.

(a) Os quatro comandos seguintes do Maxima definem uma lista com as expressões nos três lados direitos das equações de evolução, com os parâmetros $a = 2$, $b = 4$ e $c = 0.3$. A seguir, usa-se o programa `rk` usando a lista anterior para definir a velocidade de fase, com variáveis de estado (x, y, z) , valores iniciais $(2, 2, 2)$ e incrementos de tempo iguais a 0.01 . Como o sistema é autónomo, o valor inicial de t pode ser qualquer, por exemplo, 0 ; com esse valor inicial, o valor final de t deverá ser 60 , para

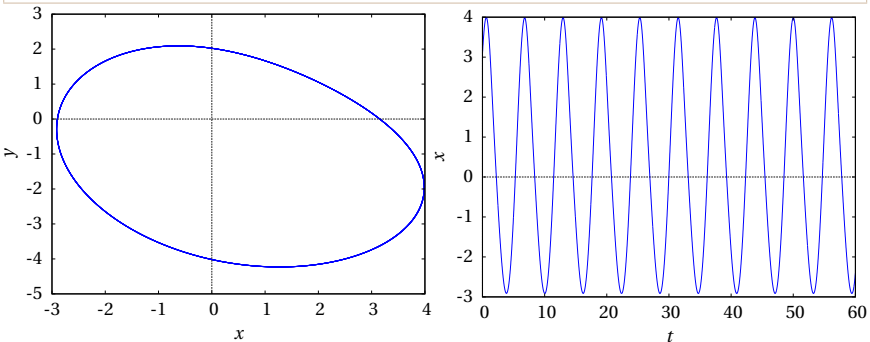
que sejam executadas 6000 iterações. A solução, na lista `sol`, usa-se para traçar os gráficos da sua projeção no plano xy e de x em função de t . A seguir aos comandos mostram-se os gráficos obtidos.

```
(%i1) f: [-y-z, x+0.3*y, 2+(x-4)*z]$\n(%i2) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])$\n(%i3) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$\n(%i4) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],\n              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



Para saber se a curva de evolução já está próxima do seu conjunto limite positivo, convém executar os mesmos comandos anteriores, usando agora como valores iniciais os valores finais da última iteração, para observar a continuação da curva no próximo intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i5) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$\n(%i6) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$\n(%i7) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],\n              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```

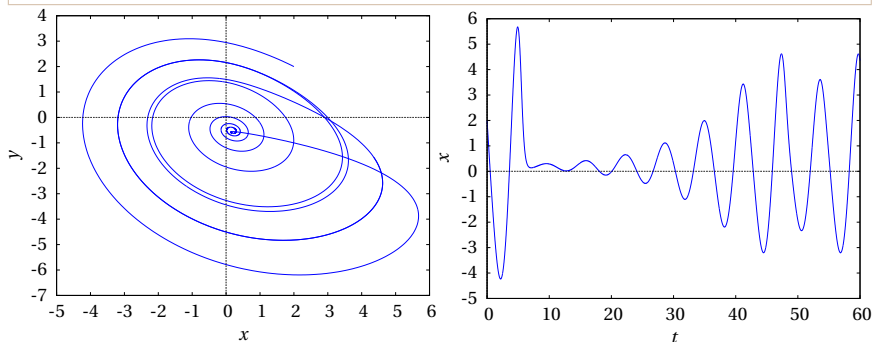


Estes últimos gráficos mostram que o sistema entrou num ciclo limite atrativo (conjunto limite positivo). O período desse ciclo pode obter-se, de forma aproximada, colocando o cursor por cima de dois dos valores máximos no gráfico de $x(t)$ e registando os valores de t indicados pelo Maxima. Convém usar dois máximos que estejam o mais afastados possível no gráfico e dividir pelo número de oscilações entre esses dois máximos. No gráfico acima, com 9 oscilações, o valor medido para o período é:

$$T_1 = \frac{\Delta t}{n} = \frac{56.1828 - 0.634997}{9} = 6.172$$

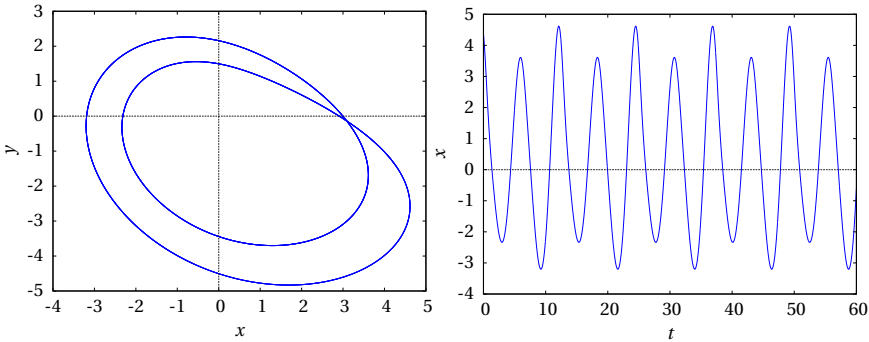
(b) Com $c = 0.35$, repete-se o mesmo procedimento da alínea anterior.

```
(%i8) f: [-y-z, x+0.35*y, 2+(x-4)*z]
(%i9) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])
(%i10) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])
(%i11) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])
```



E mais 6000 iterações a partir dos valores finais das variáveis de estado após as primeiras 6000 iterações.

```
(%i12) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])
(%i13) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])
(%i14) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])
```



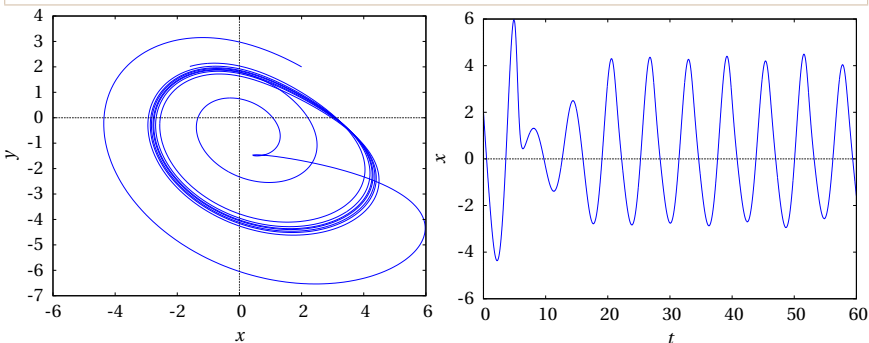
O sistema entrou novamente num ciclo limite atrativo (conjunto limite positivo), que dá duas voltas no espaço de fase antes de se repetir. No gráfico de $x(t)$ observam-se 4 oscilações completas, cada uma com dois máximos locais e dois mínimos locais. O valor medido para o período é:

$$T_2 = \frac{\Delta t}{n} = \frac{55.4849 - 5.92202}{4} = 12.39$$

que é aproximadamente o dobro do período T_1 no ciclo simples obtido com $c = 0.3$. Diz-se que existe uma bifurcação do sistema entre $c = 0.3$ e $c = 0.35$, que se manifesta por uma duplicação do período de oscilação.

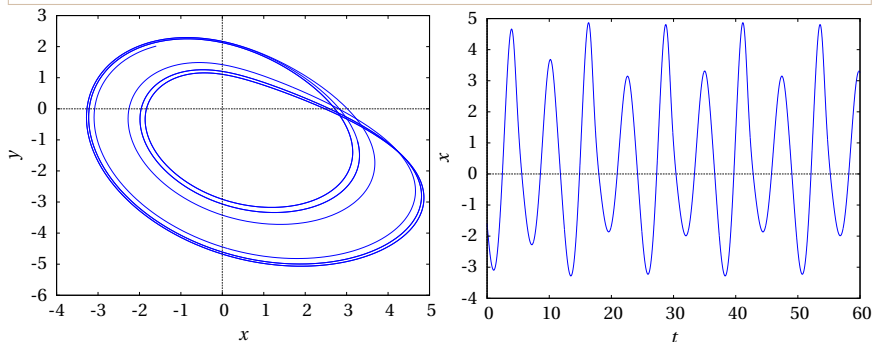
(c) Repetem-se novamente os comandos das alíneas anteriores, agora com $c = 0.375$.

```
(%i15) f: [-y-z, x+0.375*y, 2+(x-4)*z]$
(%i16) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])$
(%i17) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i18) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



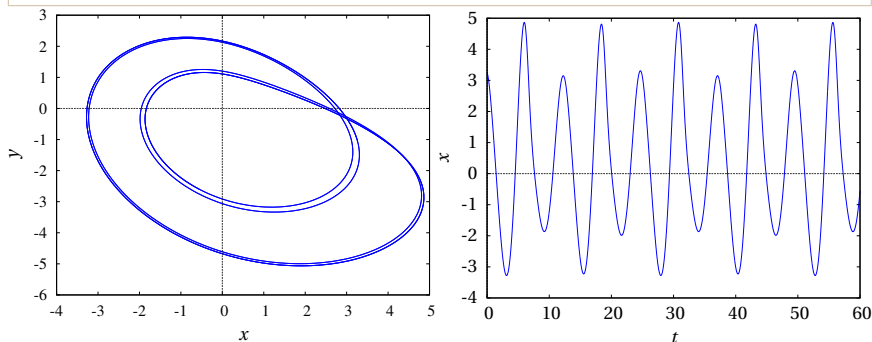
E deixa-se evoluir a solução durante outro intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i19) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i20) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i21) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
[xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



O gráfico no plano xy mostra que o sistema ainda não entrou no ciclo limite, porque a curva não é fechada. Deixaremos evoluir a solução durante mais um intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i22) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i23) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i24) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
[xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



O sistema já entrou no ciclo limite atrativo que é agora de quarta ordem: há 4 máximos locais e 4 mínimos locais em cada oscilação e o ciclo dá

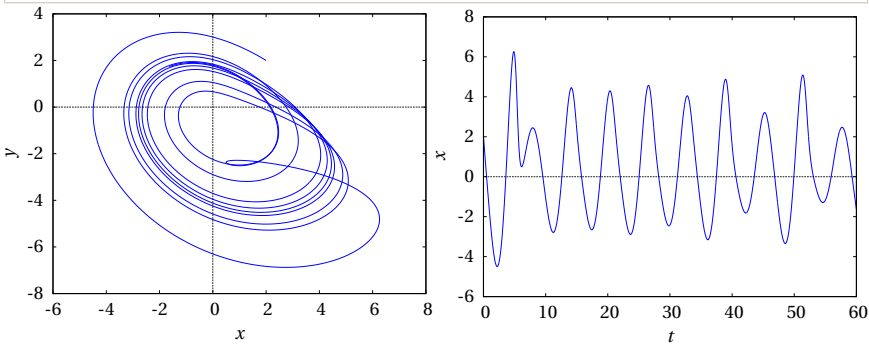
quatro voltas no espaço de fase antes de se repetir. No gráfico de $x(t)$ observam-se apenas 2 oscilações completas e o valor medido para o período é:

$$T_4 = \frac{\Delta t}{n} = \frac{55.4849 - 5.92202}{2} = 24.81$$

que é aproximadamente o dobro do período T_2 no ciclo de segunda ordem obtido com $c = 0.35$. Existe uma segunda bifurcação do sistema entre $c = 0.35$ e $c = 0.375$ que conduz a uma nova duplicação do período de oscilação.

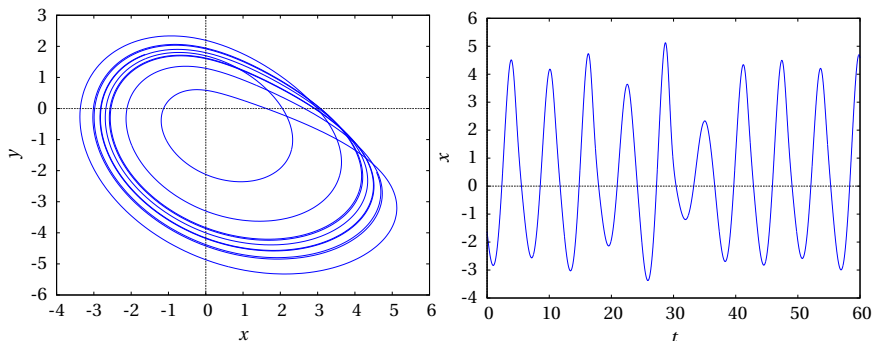
(d) Repetem-se novamente os comandos das alíneas anteriores, agora com $c = 0.398$.

```
(%i25) f: [-y-z, x+0.398*y, 2+(x-4)*z]$
(%i26) sol: rk(f, [x,y,z], [2,2,2], [t,0,60,0.01])$
(%i27) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i28) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



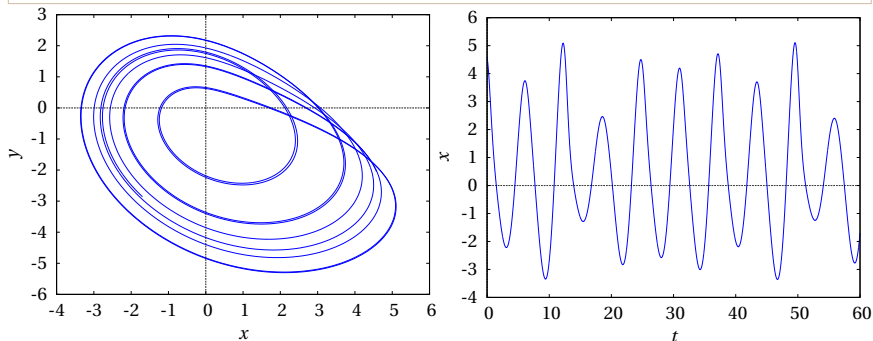
E deixa-se evoluir a solução durante outro intervalo $\Delta t = 60$.

```
(%i29) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i30) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i31) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
              [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



Continuando com mais intervalos $\Delta t = 60$ observa-se que nunca se consegue reproduzir o mesmo resultado do intervalo anterior:

```
(%i32) sol: rk(f, [x,y,z], rest(last(sol)), [t,0,60,0.01])$
(%i33) plot2d([discrete, makelist([p[2],p[3]], p, sol)])$
(%i34) plot2d([discrete, makelist([p[1],p[2]], p, sol)],
               [xlabel,"t"], [ylabel,"x"])$
```



No aumento de c de 0.375 para 0.398 houve infinitas bifurcações. O intervalo entre os valores de c onde há novas bifurcações é cada vez menor, de forma que o período de oscilação aproxima-se de infinito. O sistema é caótico quando $c = 0.398$ e os últimos dois gráficos mostram duas partes do ciclo limite, que é um atrator estranho.

Bibliografia

- Acheson, D. (1997). *From calculus to chaos. An introduction to dynamics*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Alonso, M. & Finn, E. J. (1999). *Física*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Antunes, F. (2012). *Mecânica Aplicada. Uma Abordagem Prática*. Lisboa, Portugal: Lidel, edições técnicas, Lda.
- Beer, F. P. & Johnston Jr, E. R. (2006, 7a edição). *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica*. Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill editora.
- Fowles, G. R. & Cassiday, G. L. (2005, 7a edição). *Analytical mechanics*. Belmont, CA, USA: Thomson Brooks/Cole.
- French, A. P. (1971). *Newtonian Mechanics*. New York, NY, USA: W. W. Norton & Company.
- Gerthsen, C., Kneser & Vogel, H. (1998, 2a edição). *Física*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Gregory, R. D. (2006). *Classical Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Hand, L. N. & Finch, J. D. (1998). *Analytical Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- José, J. V. & Saletan, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Kibble, T. W. B. & Berkshire, F. H. (1996, 4a edição). *Classical Mechanics*. Essex, UK: Addison Wesley Longman.
- Kittel, C., Knight, W. D. & Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics. Berkeley physics course, volume 1*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Lynch, S. (2001). *Dynamical systems with applications using MAPLE*. Boston, MA, USA: Birkhäuser.
- Meriam, J. L. & Kraige, L. G. (1998, 4a edição). *Engineering Mechanics: Dynamics*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.

- Strogatz, S. H. (2000). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Cambridge, MA, USA: Perseus Books.
- Taylor, J. R. (2005). *Classical Mechanics*. Sausalito, CA, USA: University Science Books.
- Thornton, S. T. & Marion, J. B. (2004, 5a edição). *Classical dynamics of particles and systems*. Belmont, USA: Thomson, Brooks/Cole.
- Villate, J. E. (2019). *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos (5ª edição)*. Porto, Portugal: Edição do autor.
- DOI: <https://doi.org/10.24840/978-972-99396-5-5>

Esta obra complementa o livro
Dinâmica e Sistemas Dinâmicos.
Apresenta-se a resolução de alguns dos
problemas desse livro.
Em alguns casos usa-se o software de
computação algébrica Maxima na
resolução, mas os comandos usados
servem também como sumário dos
passos a seguir sem usar esse software.

Este livro pode ser consultado e
descarregado livremente no sítio:

<http://def.fe.up.pt/dinamica/problemas.html>

