Maria Manuela Subtil Brito Pedro

Licenciada em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo e Ensino Secundário
Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo e Ensino Secundário

A tecnologia no desenvolvimento do currículo de Matemática no Ensino Básico - o contributo da Teoria da Mediação Semiótica

Dissertação para obtenção do Grau de Doutora em Ciências da Educação

Orientador: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Professora Doutora Maria Alessandra Mariotti, Senior Professor at the Department of Information Engineering and Mathematics Science of the University of Siena

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Paula Pires dos Santos Diogo, Professora Catedrática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Arguentes: Professora Doutora Nélia Maria Pontes Amado, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve
Professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, Professor Auxiliar da Universidade do Minho

Vogais: Professor Doutor Francisco José Brito Peixoto, Professor Associado do ISPA
Professora Doutora Ana Elisa Esteves Santiago, Professora Adjunta Convidada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra
Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

abril, 2020

A tecnologia no desenvolvimento do currículo de Matemática no Ensino Básico - o contributo da Teoria da Mediação Semiótica

Aos meus pais, marido e filha.

Agradecimentos

Ao longo deste período, desde a inscrição no Doutoramento até à conclusão desta Dissertação, muitas foram as pessoas que se cruzaram na minha vida e de uma forma direta ou indireta me ajudaram, na concretização deste projeto de investigação. Na impossibilidade de me referir a todas, faço-o àquelas que se torna imprescindível o meu agradecimento.

Ao Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, meu orientador, pelas sugestões, ensinamentos, aconselhamentos, apelo à reflexibilidade, por ter proporcionado a minha presença em congressos nacionais e internacionais, por ter confiado nas minhas potencialidades em participar na organização de um congresso e de um seminário e sobretudo por me ter proposto um trabalho tão gratificante.

À Professora Doutora Maria Alessandra Mariotti, minha coorientadora, pela disponibilidade que demonstrou desde o início até ao fim, essencialmente no que concerne à leitura deste trabalho, pelas sugestões de melhoria, pelos ensinamentos, pela indicação de bibliografia, pelas palavras de incentivo, pela gentileza e subtileza, com que me orientou.

À Professora Doutora Nélia Amado pelas palavras de encorajamento que sempre me transmitiu, quando nos encontrámos em congressos.

Ao Diretor da escola onde leciono a disciplina de Matemática e desempenho o cargo de Subdiretora, por me ter autorizado a realizar a experiência de ensino e ter facilitado a minha participação em congressos nacionais e internacionais.

Aos Encarregados de Educação dos alunos, por terem autorizado os seus educandos a participar na experiência de ensino.

Aos alunos, pela sua disponibilidade e motivação em participar na experiência de ensino, cujos nomes são confidenciais, tendo sido adotados os pseudónimos de Maria, José, Berta e Pedro. Sem a sua cooperação, seria impossível a concretização desta dissertação.

À Texas Instruments, pela disponibilização de calculadoras gráficas TI-nspire CX, nos dois anos consecutivos em que decorreu a experiência de ensino.

À minha amiga Fátima, que foi uma das principais impulsionadoras da minha inscrição no Doutoramento, que fez um acompanhamento extraordinário sobre o desenvolvimento do mesmo, fazendo-me acreditar que era possível a sua concretização.

Aos meus amigos, Alexandra Espadaneira, Bruno Gil e Vanda Rosa pelos seus preciosos esclarecimentos.

Aos meus pais, António Pedro e Berta Subtil, pela força, incentivo e disponibilidade em ajudar, dentro das suas possibilidades.

Ao meu marido, José Silva e à minha filha Maria Beatriz Subtil, pela força, compreensão, ajuda e amor que demonstraram ter por mim, onde tantas vezes, me encorajaram a não desistir e foram privados da minha companhia.

Este trabalho é suportado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., no contexto dos projetos:

- UID/CED/02861/2016
- PTDC/CED-EDG/32422/2017
- UID/CED/02861/2019.

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Resumo

Este estudo refere-se a uma experiência de ensino que se realizou no âmbito de um projeto de desenvolvimento curricular, em algumas unidades de ensino, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade. Recorreu-se a tarefas diversificadas de índole exploratória, que envolveram o uso da calculadora gráfica, artefacto que não é prevista a sua utilização no ensino básico, cujo objetivo foi criar uma dinâmica curricular inovadora.

A Teoria da Atividade, a Génese Instrumental e a Teoria da Mediação Semiótica, foram as linhas teóricas que compõem os quadros teóricos deste estudo e suportaram a análise dos dados. Procurou-se compreender como é que o aluno, envolvido no seu sistema de atividade, na resolução de tarefas com o artefacto mediador, calculadora gráfica, promoveu signos de artefacto através do desenvolvimento de esquemas de uso e de ação instrumentada. E posteriormente, na discussão coletiva, com a orquestração da professora, se operacionalizou a passagem desses signos de artefacto para signos matemáticos.

Metodologicamente, adotou-se um paradigma qualitativo, de natureza interpretativa e descritiva, fundamentado num processo de *Design Research,* recorrendo a uma experiência de ensino, na modalidade, estudo de caso. Os métodos para recolher os dados basearam-se em gravações áudio de algumas aulas, relatórios escritos dos alunos e imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, decorrentes da realização das tarefas, observação participante e diário de bordo da professora-investigadora. A análise dos dados incidiu nos trabalhos de dois pares de alunos, que constituíram o grupo, estudo de caso, em quatro tarefas do 7.º ano de escolaridade.

Concluiu-se que no ambiente social da sala de aula, o artefacto calculadora gráfica, funcionou como um instrumento de mediação semiótica. Os alunos evidenciaram o desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada e de uso. Os primeiros esquemas, fundamentados na função de arrastamento e de visualização, articularam-se com os segundos, e conjuntamente, com a orquestração da professora, deu-se o desenvolvimento do potencial semiótico do artefacto, resultando a construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Calculadora Gráfica; Desenvolvimento curricular; Tarefas; Potencial semiótico do artefacto; Mediação Semiótica.

Abstract

This study refers to a teaching experiment that was carried out as part of a curriculum development project, in some teaching units, in the 7th form and 8th form. Diverse exploratory tasks were used, which involved the use of the graphing calculator, an artifact that is not intended to be use in basic education, with the objective to create an innovative curriculum dynamic

The Activity Theory, the Instrumental Genesis and the Theory of Semiotic Mediation, were the theoretical lines that make up the theoretical frameworks of this study and supported the data analysis. It was sought to understand how the student, involved in his activity system, in solving tasks with the mediating artifact, graphing calculator, promoted signs of artifact through the development of use schemes and instrumented action schemes. And later, in the collective discussion, with the teacher's orchestration, the transition from these artifact signs to mathematical signs became operational.

Methodologically, was adopted a qualitative paradigm, of interpretative and descriptive nature, which was based on a Design Research process, based on a teaching experiment. We opted for the case study modality, in two pairs of students. The methods to collect the data were based on audio recordings of some classes, written reports of the students and images of the graphic representations of the screens of the graphing calculator screens, resulting from the performance of the tasks, participant observation and the teacher-researcher's logbook. Date analysis focused on the work of two pairs of students who formed the group, case study, in four tasks of the 7th form.

It was concluded that, in the social environment of the class, the graphing calculator artifact functioned as an instrument semiotic mediation. The students evidenced the development of instrumented action schemes and of use. The first schemes, based on the dragging and visualization function, articulated with the second schemes and, together with the teacher's orchestration, developed the semiotic potential of the artifact, resulting in the construction of mathematical knowledge.

Keywords: Graphing calculator; Curriculum development; Tasks; Semiotic potential of the artifact; Semiotic mediation.

Índice de Matérias

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Lista de Siglas

AGD - Ambiente de Geometria Dinâmica

ALG8 - Domínio da Álgebra do 8º ano de escolaridade

CAS - Cálculo Algébrico Simbólico

CE1- Primeiro ciclo de experimentação

CE2 - Segundo ciclo de experimentação

FSS7 - Domínio das Funções, Sequências e Sucessões do 7º ano de escolaridade

FSS8 - Domínio das Funções, Sequências e Sucessões do 8º ano de escolaridade

GM5 - Domínio da Geometria e Medida do 5º ano de escolaridade

GM7 - Domínio da Geometria e Medida do 7º ano de escolaridade

GM9 - Domínio da Geometria e Medida do 9º ano de escolaridade

TAREFA A-CE1 - Tarefa A do primeiro ciclo de experimentação

TAREFA B-CE1 - Tarefa B do primeiro ciclo de experimentação

TAREFA C-CE1 - Tarefa C do primeiro ciclo de experimentação

TAREFA D-CE1 - Tarefa D do primeiro ciclo de experimentação

TAREFA E-CE1 - Tarefa E do primeiro ciclo de experimentação

TAREFA F-CE1 - Tarefa F do primeiro ciclo de experimentação

TAREFA A-CE2 - Tarefa A do segundo ciclo de experimentação

TAREFA B-CE2 - Tarefa B do segundo ciclo de experimentação

TAREFA C-CE2 - Tarefa C do segundo ciclo de experimentação

TAREFA D-CE2 - Tarefa D do segundo ciclo de experimentação

TAREFA E-CE2 - Tarefa E do segundo ciclo de experimentação

TAREFA F-CE2 - Tarefa F do segundo ciclo de experimentação

TAREFA G-CE2 - Tarefa G do segundo ciclo de experimentação

TAREFA H-CE2 - Tarefa H do segundo ciclo de experimentação

TAREFA I-CE2 - Tarefa I do segundo ciclo de experimentação

TAREFA J-CE2 - Tarefa J do segundo ciclo de experimentação

TAREFA L-CE2 - Tarefa L do segundo ciclo de experimentação

TAREFA M-CE2 - Tarefa M do segundo ciclo de experimentação

TMS - Teoria da Mediação Semiótica

OTD5 - Domínio da Organização e Tratamento de Dados do 5º ano de escolaridade

CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo começo por justificar a pertinência e as motivações para o desenvolvimento deste estudo. Posteriormente, apresento os objetivos e questões de investigação que nortearam o estudo e a conjetura de ensino-aprendizagem. Por último, faço uma descrição sobre a organização do mesmo.

1.1. Pertinência do estudo

O crescimento económico e desenvolvimento social de um país estão relacionados com as competências básicas em Matemática, Ciências e Literatura da sua população. Não interessa apenas que todos os jovens tenham acesso à escolaridade, mas sim que desenvolvam certas capacidades como a criatividade, o pensamento crítico e as competências colaborativas, proporcionando-lhes certos atributos, como atenção, curiosidade, coragem e resistência, cujo objetivo é prepará-los para a vida e o mundo do trabalho (Organisation for Economic Co-opration and Development [OECD], 2015).

Numa sociedade tecnológica competitiva e exigente, urge cada vez mais a necessidade de os cidadãos adquirirem competências que lhes permitam responder a essas exigências e desafios, proporcionando-lhes o sucesso pessoal, profissional e social, reduzindo os riscos de uma exclusão social. Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007), apresentam a Matemática como uma forma de conhecimento importante na mediação e resolução desses requisitos, na medida em que a mesma permite o desenvolvimento de capacidades e competências, como a argumentação, a comunicação, a observação, a resolução de problemas, a formulação e teste de conjeturas.

Em Portugal, segundo Almeida (2011), numa investigação que realizou, o insucesso na disciplina de Matemática tem-se mantido ao longo de muitos anos. A autora conclui que o problema pode ser colmatado através da sensibilização dos professores para a diversificação de metodologias no processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente no recurso às TIC – Tecnologias de Informação e Comunicação. Também para Serrão (2014), um ambiente favorável à aprendizagem é fundamental para a promoção de atitudes positivas e consequente motivação dos alunos, pelos conteúdos lecionados. Considera que o facto de se terem proporcionado certas medidas tais como o Plano de Ação para a Matemática[1] ou a reformulação do currículo[2], para que este estivesse de acordo com os interesses dos alunos e com as competências consideradas necessárias a uma sociedade de conhecimento, originou que os dados do PISA - *Programme for Internacional Student Assessment*, em 2012, mostrassem que os alunos portugueses melhoraram o seu desempenho médio em literacia matemática, comparativamente com anos anteriores.

"Na Matemática como nas outras disciplinas escolares, a aprendizagem dos alunos depende em grande medida do que acontece na sala de aula" (Ponte, 2014, p. 5). De acordo com o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013), em Portugal, compete às escolas e aos professores decidir quais as metodologias[3] e os recursos mais adequados para auxiliar os alunos a alcançar os desempenhos definidos nesse documento. No entanto, o uso da calculadora é recomendado apenas em situações pontuais, como, por exemplo, na resolução de problemas que envolvam um elevado número de cálculos. Mas, Lopes e Domingos (2015) argumentam que no ensino básico também é possível utilizar de forma eficiente a calculadora gráfica promovendo ambientes ricos e motivadores de aprendizagem.

Na perspetiva de Pacheco (2001), o professor é o árbitro de toda a decisão curricular, tendo a responsabilidade de moldar o currículo sucessivamente prescrito, apresentado, programado e planificado. Compete então aos professores reorganizar a proposta curricular central, adaptando, transformando, inovando, arranjando estratégias metodológicas de ensino que culminem com uma maior motivação e consequentemente melhoria dos resultados na disciplina, por parte dos alunos.

Segundo Silva (2003), há aproximadamente duas dezenas de anos: "A integração da tecnologia na escola e na disciplina de Matemática é um dos maiores desafios da educação atual" (p.1). Para o autor, a inclusão eficaz da tecnologia nos currículos escolares, em detrimento do ensino tradicional, em que os resultados não têm sido os melhores, é que poderá culminar com a capacidade de resposta da escola e da Matemática atenderem aos desafios da atualidade. Também na perspetiva do NCTM (2017), um programa de Matemática de excelência deverá promover a integração da tecnologia, na medida em que favorece a aprendizagem e compreensão das ideias matemáticas, o raciocínio matemático e a comunicação de raciocínios. E ainda refere que os

[1] O Ministério da Educação, em Portugal, no âmbito do XII Governo Constitucional, criou o Plano de Ação para a Matemática I, regulamentado pelo Despacho conjunto nº 812/2005 de 24 de outubro, com alterações introduzidas pelo Despacho n.º 6754/2008 de 7 de março. Posteriormente, no XIII Governo Constitucional, de modo a dar continuidade ao Plano anterior, foi implementado o Plano de Ação para a Matemática II conjuntamente com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação [ME], 2007), regulamentados pelo Despacho nº 8783/2010 de 24 de maio. Estas políticas educativas visaram promover a melhoria das condições de ensino e aprendizagem da Matemática e a valorização das competências dos professores nesta disciplina, com o objetivo de melhorar os níveis de sucesso dos alunos na disciplina de Matemática.

[2] Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).

[3] De acordo com as características dos alunos, no que concerne aos seus níveis de desempenho.

alunos devem de construir o conhecimento pela via da experiência, aprendendo assim Matemática com compreensão.

Neste contexto, tendo em consideração o que foi referido anteriormente, a pertinência deste estudo prende-se com o facto de pretender desenvolver competências matemáticas nos alunos, que culminem com o seu sucesso educativo na disciplina. Por conseguinte, de acordo com o currículo prescrito, apresentado, programado e planificado, o meu objetivo é moldar o mesmo, e criar um ambiente de ensino e aprendizagem, no ensino básico, diferente do tradicional[4], que envolva o recurso à calculadora gráfica na realização de tarefas diversificadas.

1.2. Motivações para o estudo

No que concerne à minha experiência profissional, como docente da disciplina de Matemática há mais de duas dezenas de anos, tenho-me debatido com algum insucesso na mesma. Ao longo desta caminhada, tenho sentido necessidade de tomar opções metodológicas no processo de ensino e aprendizagem que contrariem esta problemática e por outro lado, envolver-me em projetos que motivem a participação dos alunos e consequente apetência pela Matemática.

No ano de 1999/2000 estive envolvida com os meus alunos na concretização de um projeto que a APM - Associação de Professores de Matemática fez a todas as escolas a nível nacional. Fundamentou-se na sugestão de construir um poliedro de grandes dimensões, desejavelmente em material durável, cuja colocação poderia ser ao ar livre, para comemoração do ano 2000, Ano Mundial da Matemática. Através da construção deste monumento, usando materiais[5] fora do comum, objetivei facilitar a aprendizagem de certos conceitos matemáticos, na resolução de um problema significativo, promovendo nos alunos uma predisposição para fazer matemática aliada a um desenvolvimento do seu espírito crítico e reflexivo, no que concerne por exemplo, aos cálculos que foram exigidos. Tratou-se de um ícone da Geometria denominado por dual cubo-octaedro, que foi colocado no recinto envolvente ao edifício da escola.

Entre os anos letivos de 2006/2007 e 2011/2012 estive envolvida nos Planos de Ação para a Matemática I e II e fui coordenadora do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Desde a colocação de computadores na escola, através da dinamização do Plano de Ação para a Matemática I, tenho promovido ambientes de ensino e aprendizagem com recurso às TIC - Tecnologias de Informação e Comunicação, nomeadamente ao *software* de matemática dinâmica, denominado por GeoGebra. Mediante a formação que me foi facultada e dos materiais didáticos que me foram fornecidos pelos professores acompanhantes, tenho desenvolvido ambientes de ensino e aprendizagem, que envolvem os alunos na resolução de tarefas desafiantes,

---

[4] Exposição dos conteúdos programáticos por parte do professor.
[5] O dual cubo-octaedro foi construído em ferro.

promovendo o raciocínio matemático, a reflexão, o espírito crítico, o estabelecimento de conexões e através da comunicação oral e escrita, a construção de significados matemáticos de uma forma partilhada, que visam um enquadramento coerente de ideias matemáticas.

Por outro lado, num estudo realizado recentemente, referente a uma experiência de ensino nos 3.º e 4.º anos[6], entre 1972 e 1975, pude constatar que a experiência decorreu com sucesso, tendo sido promovido o método heurístico, onde os alunos envolvidos tomaram uma atitude criativa, reflexiva, critica e autónoma, fase à disciplina de Matemática (Pedro, 2013).

Ao longo dos anos, tenho tido a perceção que o professor é o principal protagonista pela mudança no processo de ensino e aprendizagem. Compete ao professor desenvolver atividades matemáticas que incitem a inteligência, a motivação dos alunos, assim como a utilização da tecnologia em investigações matemáticas. Neste sentido, os alunos devem de "ganhar autoridade" dentro da sala de aula, quando transmitem as suas descobertas, conexões, conjeturas e constroem significados matemáticos, em discussões coletivas, sob a monitorização do docente. Também para Domingos (1994), a utilização do computador como ferramenta de auxílio na resolução de fichas de trabalho, permite ao aluno a construção e consequente teste de conjeturas, colocando-o numa posição central do processo de ensino e aprendizagem.

Apesar da calculadora gráfica não ser uma ferramenta recomendada no Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), a motivação para a realização deste estudo baseia-se no facto de querer mostrar evidências de como é possível promover ambientes de ensino exploratório, com recurso a este artefacto, na realização de tarefas diversificadas. Neste sentido, pretendo desenvolver um estudo inovador de ensino e aprendizagem, com a integração da tecnologia, que contribua para uma melhoria dos resultados na disciplina de Matemática e, ao mesmo tempo, enriquecer a minha experiência profissional.

1.3. Objetivos, questões de investigação e conjetura de ensino-aprendizagem

Segundo Freire (2000), "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção" (p. 25).

Como investigadora, pretendo analisar e compreender como é que, enquanto professora[7], representante de uma comunidade cultural de referência, promovo a construção de significados matemáticos, no sistema de atividade dos alunos, através da integração do artefacto mediador, calculadora gráfica, na resolução de tarefas. Neste sentido, pretendo analisar e compreender como é que num ambiente cooperativo de aprendizagem, os alunos, ao se apropriarem do artefacto,

[6] O 3.º ano referia-se ao atual 7.º ano de escolaridade e o 4.º ano referia-se ao atual 8.º ano de escolaridade.
[7] Neste estudo, assumi o duplo papel de investigadora e professora titular da turma.

calculadora gráfica, através da sua atividade instrumentada desenvolvem o processo de mediação semiótica, com a orquestração da professora.

A Teoria da Atividade de Engeström (2001), a Génese Instrumental de Rabardel (1995) e a Teoria da Mediação Semiótica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), constituem-se como linhas teóricas que compõem os quadros teóricos deste estudo e suportam a análise dos dados.

Deste modo, este estudo tem como principal objetivo investigar como é que a integração do artefacto, calculadora gráfica, na realização de tarefas, promove a construção de significados matemáticos no desenvolvimento de algumas unidades de ensino. Elencado a este objetivo, pretende-se analisar: • Como é que os alunos usam as funcionalidades específicas da calculadora gráfica quando realizam uma tarefa; • Como é que é possível relacionar o uso da calculadora gráfica com a aprendizagem matemática dos alunos; • Qual é o papel da professora na exploração das potencialidades didáticas da calculadora gráfica.

Para atingir estes objetivos, pretendo dar resposta ao seguinte problema central:

Como é que a integração do artefacto, calculadora gráfica, na resolução das tarefas e a orquestração da professora na discussão coletiva, apoiam a construção de significados matemáticos, no desenvolvimento de algumas unidades de ensino presentes no currículo?

Este problema central compreende um conjunto de outras questões de âmbito mais específico, nomeadamente:

• *Quais os esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada, desenvolvidos pelos alunos, quando usam o artefacto, calculadora gráfica?*

• *Como é que os esquemas mobilizados pelos alunos, contribuem para o desenvolvimento do potencial semiótico do artefacto, calculadora gráfica?*

• *No ambiente social, a aula, como é que o professor orienta a evolução de significados pessoais, relacionados com a tarefa e o artefacto, calculadora gráfica, para significados matemáticos?*

Na sequência das questões acima referidas, apresento um estudo enquadrado numa experiência de ensino de cunho exploratório. O mesmo realizou-se no âmbito de um projeto de desenvolvimento curricular e integrou a calculadora gráfica, na realização de tarefas diversificadas. Um projeto inovador que abrangeu uma forte componente tecnológica, num nível de ensino onde tradicionalmente este tipo de abordagem com recurso à calculadora gráfica não é privilegiado.

A experiência decorreu em dois ciclos de experimentação e foram moldadas algumas unidades de ensino dos currículos de Matemática nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, tendo por base o currículo prescrito e apresentado (Gimeno, 2000). O primeiro ciclo de experimentação realizou-se no 7.º ano de escolaridade, no final do 3.º período do ano letivo de 2016/2017, e é designado por CE1 - Ciclo de Experimentação 1. O segundo ciclo de experimentação implementou-se no 8.º ano de escolaridade, entre o final do 1º período e o meio do 3º período do ano letivo de 2017/2018 e foi designado por CE2 - Ciclo de Experimentação 2.

Em articulação com os objetivos, problema central e questões de investigação, a experiência de ensino apresentada é sustentada por uma conjetura de ensino-aprendizagem (Cobb et al., 2003), que se traduz no pressuposto, de que, *quando a aprendizagem decorre no ambiente social da aula e se promovem produções individuais ou em pequeno grupo, resultantes da realização de tarefas com recurso à calculadora gráfica e posterior discussão coletiva, orquestrada pela professora, pode gerar-se um percurso potente na construção de significados matemáticos.*

1.4. A organização do estudo

Este estudo é composto por seis capítulos, a bibliografia e um conjunto de anexos. Posteriormente a este primeiro capítulo inerente à Introdução, apresento um segundo capítulo, relativo às linhas teóricas que nortearam o estudo e os outros quatro capítulos são dedicados à parte empírica do mesmo, que se refere a uma experiência de ensino, composta por dois ciclos de experimentação[8].

No primeiro capítulo, Introdução, justifico a pertinência e as motivações para o desenvolvimento deste estudo. Posteriormente, apresento os objetivos e questões de investigação que nortearam o estudo e a conjetura de ensino-aprendizagem. Por último, faço uma descrição sobre a organização do mesmo.

No segundo capítulo, Revisão de Literatura, apresento as principais linhas teóricas que orientaram e sustentaram o estudo.

No terceiro capítulo, Metodologia, apresento as opções metodológicas que sustentam o estudo empírico, tendo em consideração as suas peculiaridades, os objetivos, problema central, questões de investigação e conjetura de ensino-aprendizagem ancorada à experiência de ensino. Posteriormente faço referência às questões éticas que regem uma investigação. De seguida apresento o contexto da investigação e participantes, onde é realizada uma descrição da escola e da sala onde decorreu a experiência de ensino, assim como dos alunos que fizeram parte do grupo, estudo de caso. Por último, evidencio os procedimentos específicos à recolha e análise de dados.

No quarto capítulo, Experiência de Ensino, apresento os princípios orientadores da implementação da mesma. Posteriormente, faço uma descrição das aulas que foram dedicadas à manipulação da calculadora gráfica, assim como da planificação das tarefas inerentes ao primeiro e segundo ciclos de experimentação, respetivamente.

[8] CE1 – Ciclo de experimentação 1 e CE2 – Ciclo de experimentação 2.

No quinto capítulo, Análise dos Dados, apresento a análise dos dados, em quatro tarefas, respeitantes ao primeiro ciclo de experimentação (CE1) da experiência de ensino. Esta análise é feita, tendo como foco o trabalho desenvolvido pelos alunos que constituem o grupo, estudo de caso, de acordo com as linhas teóricas que sustentaram o estudo, cujo objetivo é responder às questões de investigação e validar a conjetura de ensino-aprendizagem.

No sexto e último capítulo, intitulado, Conclusões, exponho os principais resultados deste estudo. Inicia-se com uma síntese, onde evidencio as questões de investigação fundamentadas nos objetivos do estudo e no problema central e por último apresento a conjetura de ensino-aprendizagem associada à experiência de ensino. De seguida dou resposta às questões de investigação e valido a conjetura de ensino-aprendizagem, tendo em consideração o referencial teórico descrito no capítulo dois. Por fim, apresento uma reflexão pessoal relativamente à investigação realizada.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo apresento as principais linhas teóricas que orientaram e sustentaram o estudo.

Lobato, Ellis, Charles e Zbiek (2010), consideram essencial que os professores tenham conhecimento sobre os materiais curriculares de modo a planificar uma boa experiência de ensino e aprendizagem. Neste sentido, interessa definir os conceitos de currículo, desenvolvimento curricular, níveis de decisão curricular e referir o que a literatura diz, relativamente ao conceito de tarefas, estratégias de ensino, algumas perspetivas do uso da tecnologia, assim como resultados que evidenciam o uso da mesma na educação matemática.

De modo a compreender melhor o processo de apropriação da calculadora gráfica, na resolução de tarefas com este artefacto, este estudo é sustentado pela Teoria da Atividade, desenvolvida por Engertröm (2001) com base nos trabalhos de Vygotsky. Tratando-se de uma teoria em que o desenvolvimento cognitivo do sujeito resulta da sua interação com o meio sociocultural, mediado por instrumentos e signos (Vygotsky, 1991), procura-se compreender os processos de Génese Instrumental e Mediação Semiótica desenvolvidos pelos alunos, no seu sistema de atividade, assim como o papel da comunicação e representações no processo de ensino e aprendizagem.

2.1. Conceito de Currículo

O programa de uma disciplina é denominado por currículo. Currículo esse que é definido pelo Ministério da Educação e adaptado à instituição de ensino onde o mesmo vai ser replicado (Ribeiro, 1991).

Segundo Pacheco (2001) não existe uma definição única e verdadeira de currículo, tratando-se de um campo em constante debate e investigação. No entanto, para o autor "o currículo é uma construção permanente de práticas, com um significado marcadamente cultural e social, e um instrumento obrigatório para a análise e melhoria das decisões educativas" (p.19).
O currículo é um projeto cuja construção e desenvolvimento se encontram em interatividade, culminando com uma interdependência no que concerne às decisões oficiais, a nível real ou no processo de ensino e aprendizagem. Entende-se como uma prática pedagógica que resulta da comunicação e convergência de certas estruturas políticas, administrativas, económicas, culturais, sociais, escolares, onde existem objetivos comuns (Gimeno, 2000; Pacheco, 2001).

Para Gimeno (2000), tendo em conta a perspetiva pedagógica e humanista do currículo, que respeita as características e necessidades dos alunos, tanto do ponto de vista do seu desenvolvimento como da sua relação com a sociedade, o mesmo é interpretado como um conjunto de experiências planificadas que os estudantes têm sob a orientação de uma escola. A conceção do currículo como experiência dá um grande impacto aos processos educativos, além dos conteúdos, onde interessa fazer a ligação entre estes e a cultura predominante na sociedade, tendo sempre em conta as necessidades dos alunos. Valorizando adequadamente os conteúdos, promove-se uma conexão entre a cultura escolar e a cultura social. As aprendizagens que os alunos realizam, dependem das funções que a escola deve cumprir como instituição, para com aqueles que a frequentam. A qualidade da educação fica restringida pelas características da aprendizagem pedagógica realizada na instituição escolar modelada pela cultura escolar inerente à mesma. Potenciar a qualidade da educação exige a melhoria das condições nas quais essa aprendizagem pedagógica se produz, tanto ao nível das metodologias ou práticas dos professores, conteúdos curriculares ou todos os elementos contextuais peculiares à cultura escolar da instituição que condicionam a aprendizagem. Neste sentido, o currículo refere-se a um projeto cultural, social e político que tem em conta os interesses dos alunos e que a escola torna exequível (Gimeno, 2000; Pacheco, 2001).

2.1.1. Desenvolvimento curricular

Tal como sucede em relação ao conceito de currículo, existem também várias definições e interpretações no que concerne ao conceito de desenvolvimento curricular. Segundo Gaspar e Roldão (2007) o desenvolvimento curricular ocorre ao transferir o conceito de currículo para o domínio prático. Coll (1987) é mais minucioso ao considerar que se trata de um processo complexo e dinâmico, traduzindo-se num plano de ação pedagógica que faz a ponte entre a intenção (projeto educativo) e a prática (projeto didático), onde se elaboram questões como: o que ensinar, quando ensinar, como ensinar, como e quando avaliar. De acordo com Ribeiro (1990) o desenvolvimento curricular é um processo dinâmico e contínuo que compreende várias fases, nomeadamente a justificação do currículo, conceção, elaboração, implementação e avaliação. Também Pacheco (2001) entende este conceito como sendo utilizado para expressar uma prática dinâmica e complexa que se implementa em vários momentos e em fases distintas, de modo a conceber um conjunto estruturado, agregando quatro componentes principais: justificação teórica, elaboração/planeamento, operacionalização e avaliação. Por outro lado, para Ornstein e Hunkins (2004) a ideia subjacente ao desenvolvimento curricular está na possibilidade da escola e da população escolar realizar certos objetivos educacionais através de vários processos (técnico, humanístico e artístico). Na perspetiva de Ponte, no que diz respeito à disciplina de Matemática:

> O desenvolvimento curricular diz respeito à produção de documentos e artefactos de natureza diversa, incluindo tanto normativos gerais como materiais para suporte ao trabalho na sala de aula e outros documentos de apoio para alunos e professores. Uma

> atividade específica de desenvolvimento curricular é a conceção e desenvolvimento de unidades de ensino sobre tópicos do programa de Matemática. Estas unidades são um elemento importante na concretização das orientações curriculares, mostrando como estas podem ganhar forma na sala de aula e ajudando a identificar eventuais dificuldades de realização.
> Na conceção de uma unidade de ensino sobre um certo tópico, para além das orientações gerais do programa, é preciso ter em conta o conhecimento já existente sobre o ensino e a aprendizagem desse tópico bem como os recursos didáticos e tecnológicos disponíveis (Ponte, 2011, pp. 55-56).

Em cada ano letivo, uma escola, um grupo de professores, ou apenas um professor, pode desenvolver o currículo prescrito de formas diferentes, na medida em que o interpreta, adapta, planifica e aplica de acordo com as condições de trabalho e as características dos seus alunos (Ponte, 2005; Rebelo & Gomes, 2012).

Pacheco (2001) defende que os professores devem envolver-se ativamente no desenvolvimento do currículo, gozando da autonomia que têm em termos curriculares. Os professores não têm que estar sujeitos a um referencial prescritivo em termos curriculares. Depois das sugestões metodológicas patentes nos programas serem filtradas nos manuais e/ou livros de texto, os docentes planificam em grupo e projetam individualmente fazendo uma gestão concertada do tempo. Neste sentido, compete aos professores diligenciar por operacionalizar mudanças que proporcionem a transformação e melhoria dos processos e práticas de ensino e aprendizagem e consequente sucesso educativo dos alunos, culminando com uma inovação curricular.

No entanto, Clements (2008) alerta que o desenvolvimento de um currículo deve ser operacionalizado, tendo em conta a formulação de questões no que concerne às repercussões e condicionantes do currículo, nos domínios político, teórico e prático. No domínio político convém compreender se os objetivos do currículo são importantes, quais os seus efeitos nos professores e nos alunos, quais os requisitos de apoio aos vários conteúdos e as variações e grau de eficácia nos alunos. Ao nível prático, deve-se indagar se um currículo identifica os objetivos específicos de aprendizagem pretendidos e ajuda os alunos a atingi-los, sendo aconselhável identificar as condições que o tornam eficaz. No domínio teórico, convém questionar porque é que o currículo é eficaz, quais as bases teóricas utilizadas, para que graus de ensino é direcionado, quais as mudanças cognitivas ocorridas e quais os métodos utilizados. Relativamente às condicionantes é imprescindível entender porque é que certos ambientes de aprendizagem diminuem ou aumentam a eficácia de um currículo, como é que certas estratégias de ensino produzem resultados nunca alcançados anteriormente, e porquê? Segundo o autor, para responder a estas questões, os investigadores devem: (a) enumerar as implicações da investigação existente de modo que o que é conhecido possa ser aplicado ao currículo antecipado; (b) conceber estratégias de ensino aplicadas aos conteúdos curriculares que facilitem a aprendizagem dos alunos; (c) promover avaliações formativas e refinar os currículos sequencialmente de acordo com os graus de ensino, ampliando progressivamente contextos sociais; (d) realizar avaliações sumativas, desenvolvendo também contextos sociais, cujo objetivo é fornecer evidências de modo a garantir a eficácia do currículo.

Existem vários fatores que condicionam o desenvolvimento curricular, nomeadamente o modelo de organização e gestão institucional e o modelo de formação de professores. O primeiro modelo torna-se percetível pelos índices que atinge ao nível de intervenção macro (político-administrativo central), ao nível de intervenção meso (político-administrativo regional e local) e ao nível de intervenção micro (político-administrativo institucional – estabelecimento de ensino e sala de aula). O segundo modelo está relacionado com os diferentes modelos da formação de professores, estando limitado pelo grau de liberdade que cada um confere relativamente ao envolvimento dos docentes na aplicação do currículo, tornando-o operacional (Gaspar & Roldão, 2007).

2.1.2. Níveis de decisão curricular

Para Gimeno (2000) existem vários níveis de decisão curricular inerentes ao desenvolvimento do currículo, subjacentes ao projeto socioeducativo de um país e ao projeto curricular e didático da instituição escolar. Inicialmente surge o currículo prescrito, que é reconhecido pela administração central e é adotado pela estrutura organizacional escolar. A seguir surge o currículo apresentado aos professores por intermédio dos mediadores curriculares, como manuais e livros de texto. Posteriormente ocorre o currículo moldado no âmbito do projeto educativo da escola com a inserção do plano global de formação, onde o mesmo é programado em grupo e planificado individualmente. Seguidamente surge o currículo em ação, quando os professores o expressam através da práxis, correspondendo ao currículo que acontece na prática diária de sala de aula. Entretanto ocorre o currículo realizado, que advém da comparação entre o que consta no currículo prescrito e no currículo em ação. Quando o currículo realizado não coincide com o currículo prescrito, promove-se o currículo oculto.[9] Este currículo está presente quando os autores dos manuais fazem a sua leitura do programa, quando os professores moldam os conteúdos e planificam as situações de ensino e aprendizagem ou quando os alunos são sujeitos ativos na interação didática, através de experiências vivenciadas. Por último ocorre o currículo avaliado, que diz respeito à avaliação dos alunos, dos planos curriculares, dos programas, das orientações, dos manuais e livros de texto, dos professores, da escola e da administração central.

[9] Refere-se ao que contempla a aquisição de saberes, competências, valores, sentimentos, sem figurar no currículo prescrito.

2.2. Estratégias de ensino

Na sua prática letiva, o professor pode assumir uma estratégia de "ensino direto" ou uma estratégia de "ensino exploratório[10]".

Ao invés dos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), que sublinha a importância dos alunos construírem e compreenderem o conhecimento através da experiência e conhecimentos prévios, o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) refere que o desenvolvimento da compreensão, resulta da mobilização de regras, procedimentos, factos, conceitos e relações. Na perspetiva dos autores deste documento é essencial desenvolver a memorização para alcançar a compreensão (Trindade, 2014).

No ensino direto o professor funciona como um transmissor de conhecimento, fazendo-o tanto quanto possível, de uma forma clara, sistematizada e atrativa. O aluno assume uma postura pacífica, ouve o que o professor diz, explica, exemplifica e sintetiza, para posteriormente exercitar de modo a consolidar o que foi lecionado. Por outro lado, no ensino exploratório, o professor incentiva os alunos a descobrirem e construírem o conhecimento, havendo, no entanto, momentos de exposição e sistematização das aprendizagens coordenadas por ele. A partir da realização de tarefas, os alunos são estimulados a refletir e a interagir com os colegas da turma, promovendo-se momentos de discussão, processando-se a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Para Canavarro:

> o propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa; o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento colectivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos (Canavarro, 2011, p. 16).

Segundo Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), uma aula que contemple o ensino exploratório deverá desenvolver-se em três fases: lançamento da tarefa, exploração, discussão e sintetização. Na primeira fase dá-se a distribuição da tarefa aos alunos. Na fase seguinte operacionaliza-se autonomamente a exploração da tarefa pelos alunos, monitorizada pelo professor. Por último, fomenta-se a discussão, gerida e incentivada pelo professor, em torno das estratégias de resolução apresentadas pelos alunos. Nesta fase cabe ao professor sintetizar as ideias mais importantes, que vão ao encontro dos objetivos inerentes à planificação da tarefa. Para estes autores, existem cinco práticas que permitem ao professor melhores condições para orquestrar produtivamente discussões matemáticas (figura 2.1):

---

[10] Também se usa o termo "ensino por descoberta" ou "ensino ativo".

1. Antecipar - ao realizar a planificação, o professor tenta prever através da experimentação, o modo como os alunos vão interpretar e se envolver na resolução da tarefa, produzindo estratégias de resolução da mesma, relacionando-as com os conceitos, representações, práticas ou competências que os mesmos podem apreender ou desenvolver.

2. Monitorizar - prática inerente à monitorização das respostas dos alunos na fase da exploração, que podem ter sido ponderadas e previstas na antecipação;

3. Selecionar - seleção dos alunos que apresentam respostas que evidenciam ideias matemáticas importantes de acordo com o propósito da aula, para serem discutidas e sintetizadas com a turma. Esta seleção é muito facilitada pelo trabalho do professor na monitorização.

4. Sequenciar - propositadamente o professor sequencia as respostas dos alunos que serão exibidas na turma, tendo em conta os objetivos da aula, de modo que a discussão e síntese final sejam matematicamente bem-sucedidas.

5. Estabelecer conexões - prática subjacente à intervenção do professor que ajuda os alunos a estabelecerem conexões matemáticas entre as diferentes respostas da turma e as ideias chave, relacionadas com o propósito da aula.

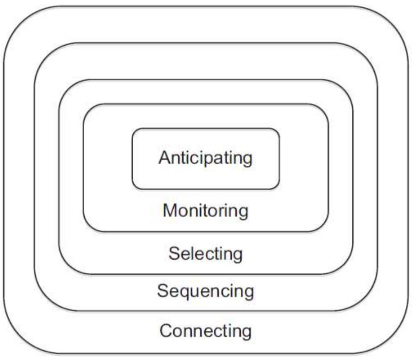


Figura 2.1 Diagrama esquemático das cinco práticas em que cada prática subsequente depende da prática anterior (Stein et al., 2008, p. 322).

Para Canavarro (2011) o desenvolvimento do ensino exploratório requer tempo e continuidade, tanto para o professor como para os alunos. Somente assim, o professor consegue melhorar e aperfeiçoar as suas práticas e os alunos aprendem conteúdos matemáticos e modos de produção de conhecimento matemático.

2.3. Tarefas

Segundo Christiansen e Walther (1986) a principal metodologia para o ensino da Matemática é a implementação de tarefas, sendo as mesmas responsáveis pelo objeto de atividade dos alunos, conjuntamente com a condução das ações do professor inerentes à sua resolução. A atividade que as tarefas desencadeiam é que se vai refletir na aprendizagem dos alunos.

Ponte (2014) apresenta diferentes tipos de tarefas que se podem implementar na sala de aula, nomeadamente, problemas, exercícios, investigações, explorações, projetos e tarefas de modelação.

Na planificação de tarefas, o professor deve ter em consideração o currículo prescrito (Brown, 2009) de acordo com as orientações plasmadas pela administração central (Gimeno, 2000). Por outro lado, deve-se ter em consideração o tipo de tarefas que inclui na planificação, sendo importante a sua diversificação, pois cada uma apresenta um potencial diferente no que concerne à aprendizagem. Deste modo, esta situação vai influenciar o modo como os alunos aprendem a pensar matematicamente (Ponte, 2005; Stein, Remillard, & Smith, 2007).

No que concerne à estrutura da tarefa, Ponte (2005) considera que os exercícios e problemas são tarefas fechadas, enquanto as investigações e explorações são tarefas abertas. Relativamente ao grau de desafio das tarefas, um exercício apresenta um desafio reduzido, um problema e uma investigação tem um desafio elevado e uma exploração encontra-se acessível à maioria dos alunos. No entanto, o autor partilha da mesma opinião de Skovsmose (2000), na medida que nem sempre se consegue demarcar os diferentes tipos de tarefas. Por exemplo, uma certa tarefa pode ser uma exploração ou um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos alunos.

Para Stein e Smith (2009) uma tarefa passa por três fases que influenciam e determinam o que os alunos aprendem, como mostra a figura 2.2.

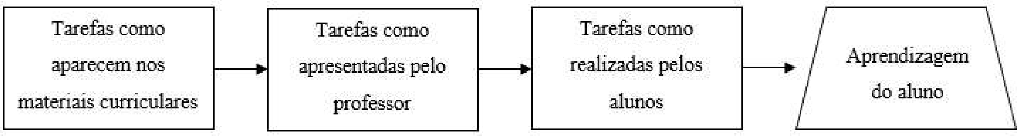


Figura 2.2- O quadro das tarefas matemáticas (Stein & Smith, 2009, p. 24).

Os autores referem que o seu grau de desafio pode ser alterado quando se muda de fase, argumentando que as tarefas que têm como objetivo estimular o pensamento dos alunos em níveis elevados de exigência cognitiva, mudam drasticamente de natureza quando os mesmos se envolvem na sua concretização. Rosa e Domingos (2013) numa investigação que realizaram, chegaram à mesma conclusão. Stein e Smith (2009) apontam vários fatores que podem estar associados com a manutenção de exigências cognitivas de nível elevado:

> **1.** É dado apoio ao pensamento e raciocínio do aluno;
> **2.** São dados aos alunos os meios para avaliar o seu próprio progresso;
> **3.** O professor ou alguns alunos ilustram desempenhos de nível elevado;
> **4.** O professor estimula justificações, explicações e significados através de questões, comentários e *feedback*;
> **5.** As tarefas baseiam-se no conhecimento prévio dos alunos;
> **6.** O professor estabelece frequentes conexões conceptuais;
> **7.** É permitido tempo suficiente para explorar nem de menos, nem de mais (Stein & Smith, 1998, p. 27).

No entanto, também apontam fatores associados com o declínio de exigências cognitivas de nível elevado:

> **1.** Aspetos problemáticos da tarefa tornam-se rotineiros (por exemplo, os alunos pressionam o professor para reduzir a complexidade da tarefa especificando procedimentos explícitos ou passos para a realizar; o professor «toma conta» do pensamento e raciocínio e diz aos alunos como resolver o problema);
> **2.** O professor muda a ênfase dos significados, conceitos ou compreensão para a correção ou perfeição das respostas;
> **3.** Não é dado tempo suficiente para lidar com aspetos exigentes da tarefa, ou é dado demasiado tempo e os alunos distraem-se da tarefa;
> **4.** Problemas de gestão da sala de aula impedem o envolvimento apoiado em atividades cognitivas de nível elevado;
> **5.** A tarefa é inadequada para um dado grupo de alunos (por exemplo, os alunos não se envolvem em atividades cognitivas de nível elevado devido à sua falta de interesse, motivação ou conhecimento prévio necessário para a realizar; as expectativas das tarefas não estão suficientemente claras para colocar os alunos num adequado espaço cognitivo);
> **6.** Os alunos não são responsabilizados pelos resultados ou processos de nível elevado (por exemplo, embora se lhes diga para explicar o seu pensamento, são aceites explicações incorretas ou pouco claras; é dada a impressão aos alunos que o seu trabalho não será tido em consideração para a avaliação) (Stein & Smith, 2009, p. 27).

Segundo Skovsmose (2000), uma tarefa pode-se apresentar em vários contextos. No contexto da matemática pura, quando uma tarefa se encontra representada de uma forma abstrata e os alunos não conseguem associar um significado às variáveis ou expressões existentes na mesma. Num plano intermédio designado por contexto da semi-realidade existem as tarefas que se aproximam do nível da matemática pura, na medida em que envolvem conceitos reais num enquadramento abstrato, e que podem não fazer sentido para o aluno. No contexto real, apresentam-se as tarefas onde os alunos são confrontados com situações do quotidiano. As tarefas de modelação, tendo em consideração a estrutura do enunciado, podem ser encaradas como problemas ou investigações e encontram-se num contexto real. No entanto, para o autor existem modelos matemáticos que não necessitam obrigatoriamente de descrever a realidade, pois apenas podem ser concebidos para que sejam potencializados os conhecimentos matemáticos dos alunos de uma forma argumentativa. Mas, para Ponte (1992b), os problemas de modelação matemática envolvem uma situação de aprendizagem onde os alunos são confrontados com situações da vida real e através do método heurístico ao fazerem conexões matemáticas, criam modelos matemáticos. Neste contexto, os alunos, além de aprenderem Matemática, também desenvolvem o seu espírito crítico e criativo (Biembengut & Hein, 2000). É importante que exista uma ligação entre o contexto das tarefas e as vivências dos alunos de modo que estes encontrem um fundamento real na sua concretização (Wells, 2000).

No que concerne ao papel que cada tipo de tarefa representa na aprendizagem: as tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos; as tarefas de natureza mais acessível (explorações, exercícios) ajudam no desenvolvimento da autoconfiança dos alunos, na medida em que existe uma certa facilidade na sua resolução; as tarefas de natureza mais desafiante (investigações, problemas) contribuem para o desenvolvimento de uma experiência matemática; as tarefas mais abertas (explorações, investigações) são importantes pois melhoram a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. Igualmente importante para o desenvolvimento da aprendizagem são os momentos de exploração, reflexão e discussão, inerentes à resolução da tarefa. No que respeita à duração de uma tarefa, os exercícios são encarados como tarefas de curta duração, as explorações e as investigações são consideradas tarefas de média duração, enquanto os projetos são classificados como tarefas de longa duração (Ponte, 2005).

2.4. Diferentes perspetivas do uso da tecnologia no ensino e aprendizagem

De grande relevância é o facto de na conceção das tarefas, o professor ter subjacente uma conjetura de como é que em certas condições de aprendizagem, os alunos podem apreender um conteúdo (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Lopes e Domingos (2015) argumentam que em certos ambientes potencializados pela tecnologia, os alunos são capazes de desenvolver raciocínios que de outra forma seria mais complicado ou até mesmo impossível. Também para Papert (1980) o computador possibilita o tratamento de conceitos abstratos que de outra forma só seriam possíveis através de processos formais.

De acordo com Drijvers et al. (2010), desde o desenvolvimento do computador em 1942, a primeira calculadora de quatro funções em 1967, o microcomputador em 1978 e a calculadora gráfica em 1985, matemáticos e educadores de matemática têm-se questionado sobre as potencialidades da integração da tecnologia na educação.

Segundo o NCTM (2007), a implementação da tecnologia eletrónica no ensino da Matemática, nomeadamente computadores e calculadoras, influencia a maneira como esta disciplina é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos. São dispositivos que possibilitam a visualização das ideias matemáticas, propiciam a organização e análise de dados, fazem cálculos de forma eficiente e exata e poderão servir de apoio a investigações dos alunos em qualquer área da Matemática, nomeadamente na Geometria, Estatística, Álgebra, Medida e Números. Por outro lado, permitem suavizar algumas fronteiras existentes nessas áreas, possibilitando que os alunos usem as suas ideias sobre uma determinada área para melhor compreenderem outra área da matemática.

Em 2017, o NCTM é bem explícito:

> Um programa de matemática de excelência integra o uso de ferramentas matemáticas e de tecnologia como recursos essenciais para ajudar os alunos a aprender e perceber as ideias matemáticas, raciocinar matematicamente e comunicar o seu raciocínio (NCTM, 2017, p. 79).

Neste sentido, todos os alunos devem ter acesso à tecnologia que deve de ser monitorizada por um professor, que promova a reflexão, o raciocínio e a resolução de problemas. A formulação e exploração de conjeturas fica mais facilitada, tendo em conta que os alunos podem analisar mais formas de representação, mais modelos visuais e executar procedimentos rotineiros de cálculo, de forma rápida e precisa, comparativamente quando utilizam processos manuais. Por exemplo, as aplicações gráficas facilitam a visualização de várias representações de funções e dados, a partir da construção de gráficos, tabelas e expressões simbólicas que se encontram dinamicamente relacionadas. Essa capacidade de alternar entre várias representações (visual/gráfica, simbólica ou numérica) pode incrementar uma maior facilidade no desenvolvimento de uma compreensão mais consistente dos conceitos matemáticos. A folha de cálculo permite a realização e apresentação dos resultados de vários cálculos repetidos e organização de tabelas com valores, possibilitando a conversão entre várias representações diferentes (NCTM, 2007; NCTM, 2017).

O uso da tecnologia fomenta a comunicação entre os alunos e o professor tendo em consideração o *feedback* que estes dispositivos podem proporcionar, no que concerne aos objetos que podem ser visualizados no ecrã e dos efeitos das diversas transformações dinâmicas que podem ocorrer, como por exemplo, a função de arrastamento. Isto é, as aplicações de geometria dinâmica e interativa possibilitam a exploração de conjeturas geométricas, inclusive em contextos que usem coordenadas, transformações ou sistemas axiomáticos diferentes, dado que é preservada a relação subjacentes entre os objetos, através da função de arrastamento (NCTM, 2007; NCTM, 2017). No entanto, Jones (2005), argumenta que inicialmente a técnica de arrastamento não é um recurso muito usual para os alunos, pois pode distraí-los ou interfere na resolução da tarefa, na medida em que usualmente não estão habituados a ver objetos geométricos a mover-se no papel. Mas, também admite que quando começam a experimentar, entendem o poder do arrastamento, de acordo com o que é referido pelo NCTM (2007) e NCTM (2017). Este autor ainda descreve que vários estudos mostraram que as tecnologias dinâmicas podem ser usadas para incentivar a exploração, conjetura, construção e explicação de relações geométricas.

A utilização da tecnologia, aumenta a possibilidade de envolver os alunos em desafios matemáticos, tendo em conta as necessidades especiais de cada um. Por exemplo, o computador pode funcionar como um mediador para os alunos distraídos, na medida em que os mantêm mais concentrados e empenhados (NCTM, 2007). Por outro lado, a inclusão da calculadora gráfica no desempenho dos alunos de diferentes níveis de rendimento escolar, mostra que todos têm benefícios positivos, quando é feita uma abordagem de ensino com esse artefacto (Tan, 2012; Tan & Tan, 2015). Li (2010) vai mais longe, ao concluir que essa ênfase é mais significativa em alunos com necessidades educativas especiais.

Cabe ao professor uma utilização eficaz da tecnologia nas aulas de Matemática. Este deve de ter a preocupação de selecionar e planificar tarefas matemáticas, que tirem partido das potencialidades da tecnologia, de forma correta e proficiente, nomeadamente na construção de gráficos, visualização e cálculo (NCTM, 2007). Se a tecnologia não for usada de maneira adequada, não produz grande efeito na aprendizagem (Smith, 2002). As tarefas que são realizadas com computador devem ser ricas e apropriadas, diferindo das que são feitas de papel e lápis. Não devem de ser tarefas limitadas a confirmar respostas ou a ilustrar objetos matemáticos, mas orientadas para promover o raciocínio dos alunos e a sua participação ativa na aula (Amado, 2011).

Segundo Domingos (1994), os alunos ao serem confrontados com uma abordagem pedagógica que utilize a tecnologia, constroem eles próprios o conhecimento através da conceção de premissas. Lee e McDougall (2010) partilham da mesma opinião, quando referem que a utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática, funciona como uma ferramenta poderosa para os professores, na medida em que facilita a construção do conhecimento matemático com compreensão para os alunos. Com maior especificidade, Lopes e Domingos (2015) referem que a mesma potencia "as competências algébricas e gráficas dos alunos quando lidam com as diferentes representações dos conceitos" (p. 48). Também para Domingos (2014), o computador é uma ferramenta que desempenha um papel eficaz na compreensão de conceitos, pois permite a sua abordagem a partir das suas múltiplas representações.

A tecnologia pode ser usada para realizar manipulações ou obter soluções dentro de modelos matemáticos, simplificando os aspetos rotineiros do trabalho e permitindo uma concentração mais forte sobre certas particularidades que são verdadeiramente importantes relativamente à aprendizagem da matemática: a compreensão do significado dos conceitos, a formulação de problemas, a compreensão da sua natureza, a elaboração de estratégias adequadas, discussão aprofundada e análise crítica (Bittar, 2011; Ponte, 1992a).

Por outro lado, apesar da calculadora gráfica potenciar a participação e envolvimento dos alunos em contexto sala de aula, assim como a apetência para a Matemática, é crucial estabelecer-se um equilíbrio entre o uso dessa tecnologia e as técnicas de papel e lápis. É essencial que os alunos ao desenvolverem tarefas de caráter experimental, com recurso à calculadora gráfica, transitem entre o trabalho realizado com papel e lápis e o trabalho efetuado com esse instrumento, comparando os resultados dos diferentes registos (Guin & Trouche, 1999; Lopes & Domingos, 2015). O uso desta ferramenta não deve estar limitado à realização de cálculos rotineiros ou confirmação de resultados, pois deve ser utilizada como um meio de exploração, que sirva de base à formulação de conjeturas que posteriormente sejam validadas (Romano & Ponte, 2008).

Vários autores mencionam diversos benefícios que enfatizam a incorporação da tecnologia em ambientes didáticos, nomeadamente, aumento da motivação, envolvimento, cooperação, oportunidades de aprendizagem *hands-on*, confiança e habilidades tecnológicas dos alunos (Costley, 2014; Slavin & Lake, 2008). Schwartz (1999) destaca cinco aspetos da atividade matemática: (a) conjeturas e exploração; (b) aquisição, avaliação e análise de dados; (c) modelação; (d) fundamentação concetual de habilidades manipuláveis; (e) aprofundamento e ampliação da compreensão; que se forem explorados através de um *software* ponderado, contribuem para o desenvolvimento de habilidades nos alunos e professores, assim como influenciam na realização dos objetivos educativos da sociedade, presentes no currículo de matemática.

A utilização da calculadora gráfica pode, por vezes, provocar alguns constrangimentos. Por exemplo, para Laborde (2001), cenários de ensino que passem por um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), levam demasiado tempo ao cumprimento do objetivo didático. Consciência (2003) considera que pode ser uma excelente ferramenta para os alunos fazerem as suas conjeturas, mas convém ter algum cuidado, na medida em que se trata de um dispositivo que trabalha com um número finito de dígitos e quando realiza os cálculos faz aproximações que podem influenciar significativamente os resultados. A autora refere que nem sempre é possível ter uma ideia global da representação gráfica de uma função, tendo em conta que a mesma depende da janela de visualização que for escolhida - Zoom. Nestas situações é imprescindível que os alunos tenham espírito critico e não se limitem a interpretar o que veem no ecrã da calculadora gráfica sem se preocuparem se faz ou não faz sentido. Um estudo realizado por Berry e Graham (2005) com alunos do primeiro ano da universidade mostra que mais de um terço dos alunos que participaram num projeto de investigação que envolvia o recurso à calculadora gráfica representaram uma função cúbica, mas visualizaram uma parábola. Não se questionaram que apenas tinham uma vista parcial da função não sendo um gráfico representativo da mesma. Por outro lado, os mesmos autores, referem que os alunos ao transportarem para o papel, o gráfico de uma função que visualizaram no ecrã da calculadora gráfica, não se apercebem da diferença de escala existente entre os dois eixos.

A interação com o computador é influenciada pelas discussões que surgem entre os alunos quando trabalham num ambiente computacional, sendo crucial essa interação para o despoletar de um conflito cognitivo essencial ao desenvolvimento conceptual (Hoyles, Sutherland, & Healy, 1991). Por outro lado, a linguagem do computador facilita a comunicação entre o aluno e a máquina, e entre o aluno e o professor. Deste modo, a relação entre o aluno e o professor pode ser alterada na medida em que a comunicação entre eles se torna mais eficiente e recíproca (Mariotti, 2002).

Artigue (1997) considera que pode existir uma certa confusão entre as pretensões do professor e do aluno, no que concerne à resolução de uma tarefa que envolva um ambiente computorizado. O professor pretende que os alunos construam conhecimento matemático através de um artefacto mediador e o aluno pode percecionar a tarefa como uma forma de encontrar a maneira típica em que esse tipo de ambiente lida com esses conceitos e representa-os.

Contudo, para Mishra e Koehler (2006) a introdução da tecnologia no processo educativo não é suficiente, pois argumentam que os professores aprendem a manejar a tecnologia, mas não como incorporá-la na lecionação dos conteúdos. Consideram que o ensino: "… is a highly complex activity that draws on many kinds of knowledge" (p. 1020). Neste sentido, referem que a integração das tecnologias em diversos níveis: teórico, pedagógico e metodológico, requer o desenvolvimento de um conhecimento complexo denominado *Technological Pedagogical Content Knowledge* - TPCK (atualmente denominado por TPACK) (Mishra & Koehler, 2006; ver também Koehler & Mishra, 2009; Koehler, Mishra, & Cain, 2013; Voogt, Fisser, Roblin, Tondeur, & Van Braak, 2013).

De acordo com Koehler e Mishra (2009), conforme se pode constatar na figura 2.3, o desenvolvimento do TPACK no conhecimento dos professores, resulta da interseção complexa entre três componentes do conhecimento: conteúdo, pedagogia e tecnologia, designados por *Content Knowledge* (CK), *Pedagogical Knowledge* (PK) e *Techonological Knowledge* (TK), respetivamente. A interseção desses componentes, a pares, resulta com: *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), que se trata da capacidade de ensinar um conteúdo curricular; *Technological Content Knowledge* (TCK), inerente ao conhecimento de saber escolher a tecnologia mais adequada para lecionar um conteúdo curricular; *Techonological Pedagogical Knowledge* (TPK) peculiar à capacidade de utilizar criticamente os recursos tecnológicos intrínsecos ao processo de ensino e aprendizagem.

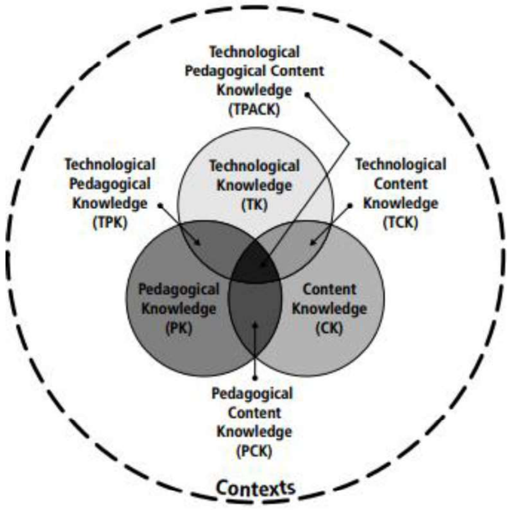


Figura 2.3 - Quadro TPACK e os seus componentes do conhecimento (Koehler, Mishra & Cain, 2013, p. 15).

Segundo os autores, no âmbito do TPACK, é crucial que os professores ao planificarem os conteúdos curriculares, tenham em consideração as metodologias de ensino que vão usar com recurso à tecnologia, de modo que propiciem a conceção do saber por parte dos alunos e que não seja apenas utilizada como ferramenta de apoio para ensinar.

Para Ribeiro e Ponte (2000) "o uso da tecnologia no ensino da Matemática questiona a capacidade do professor para conseguir definir, não só como e quando usar a tecnologia, mas, também, porquê e para quê" (p. 22). O professor que utiliza tecnologia, deve desenvolver uma atitude de experimentação controlada no que concerne à sua prática, fazer uma reflexão sobre as suas aulas e consequente atividade dos alunos, participar em discussões relativamente ao seu uso e trocar ideias e experiências com os seus colegas.

Na perspetiva de Voogt et al. (2011), o incremento do TPACK nos professores dá-se quando estes se envolvem ativamente com tecnologia no processo de ensino e aprendizagem, participam em cursos de formação com tecnologia ou existe uma obrigatoriedade na implementação de materiais curriculares que incluem a tecnologia. TPACK trata-se de um quadro teórico que descreve e orienta como o conhecimento profissional dos professores deve de ser implementado na prática. Os professores não devem usar a tecnologia na sala de aula, só por usar, devem de fazer e saber fazer uma utilização efetiva da mesma, de modo a estabelecer um ensino efetivo (NCTM, 2017). Lopes e Domingos (2015) referem o papel preponderante que uma professora teve numa experiência de ensino com a calculadora gráfica, onde a mesma, a utilizou equilibradamente, na medida em que explorou algumas situações, incentivando que outras fossem investigadas pelos alunos.

Ainda existem muitos docentes que embora se manifestem positivamente, por exemplo, relativamente à importância da integração da calculadora gráfica na sala de aula, não a utilizam na sua prática diária (Romano & Ponte, 2008). Essa relutância na utilização das tecnologias em geral, por parte dos professores, no processo ensino e aprendizagem, deve-se a várias razões, nomeadamente, mudanças rápidas da tecnologia, *design* de *software* inadequado, natureza situacional da aprendizagem e numa tendência para apenas observar a tecnologia e não como é usada (Mishra & Koehler, 2006).

2.5. A Comunicação no ensino e aprendizagem

A comunicação matemática assume grande importância no atual sistema de ensino, sendo visível esse destaque, em vários documentos:

> A comunicação é um processo matemático transversal a todas as outras disciplinas. Por seu intermédio, as ideias matemáticas são partilhadas num determinado grupo e, ao mesmo tempo, são modificadas, consolidadas e aprofundadas por cada individuo. Além disso, a comunicação permite-nos entender o nosso conhecimento matemático, considerando e interagindo com as ideias dos outros. (Ponte & Serrazina, 2000, p. 59)

> Um ensino eficaz da matemática favorece o discurso entre alunos, de modo a construírem uma compreensão partilhada das ideias matemáticas recorrendo à análise e à comparação das suas abordagens e dos seus argumentos. (NCTM, 2017, p. 29)

Segundo o NCTM (2007), no que concerne às normas para a comunicação, os programas de ensino deverão habilitar os alunos para:

> • organizar e consolidar o seu pensamento matemático através da comunicação;
> • comunicar o seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas, professores e outros;
> • analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usado por outros;
> • usar a linguagem da matemática para expressar ideias matemáticas com precisão. (NCTM, 2007, p. 66)

Por outro lado, no que respeita aos objetivos do Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico, em Portugal, relativamente à comunicação matemática:

> Oralmente, deve-se trabalhar com os alunos a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos, identificando as questões que levantam, explicando-as de modo claro, conciso e coerente, discutindo, do mesmo modo, estratégias que conduzam à sua resolução. Os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. Sendo igualmente a redação escrita parte integrante da atividade matemática, os alunos devem também ser incentivados a redigir convenientemente as suas respostas, explicando adequadamente o seu raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, escrevendo em

português correto e evitando a utilização de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas. (MEC, 2013, p. 5)

A comunicação matemática na sala de aula trata-se de um processo de interação entre os alunos e entre alunos e professor cujo objetivo é a compreensão e negociação de significados matemáticos. Esses significados são obtidos através do estabelecimento de conexões entre as ideias do sujeito e os seus conhecimentos prévios, podendo estes não estar limitados ao domínio da matemática (Bishop & Goffree, 1986). "Na verdade, falar, desenhar ou escrever sobre raciocínios matemáticos oferece oportunidades para justificar pensamentos, sintetizar ideias e tomar consciência de intuições" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008).

A comunicação oral ou escrita assume um papel primordial na matemática e na educação matemática. É através da comunicação que é possível partilhar ideias, sendo as mesmas sujeitas a um processo de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção, culminando com a construção de significado, consolidação do conhecimento matemático e divulgação do mesmo. Os alunos quando inseridos em ambientes propícios à discussão, desenvolvem uma linguagem para exprimirem ideias matemáticas, sentindo necessidade de precisão dessa mesma linguagem, pois à medida que progridem ao longo da sua escolaridade, o raciocínio matemático que suporta a sua comunicação deverá tornar-se cada vez mais complexo. Com o decorrer do tempo, quando os alunos são desafiados a pensar, a raciocinar e a comunicar sobre a matemática, aprendem a ser mais claros e convincentes (Fonseca, 2009; NCTM, 2007). É normal que nos primeiros anos de escolaridade, os alunos debatam as suas ideias por escrito ou oralmente de modo informal através de esboços e de uma linguagem comum, propiciando o envolvimento e domínio na aula. No entanto, no final do ensino básico e início do secundário, deverão expressar os seus raciocínios e argumentações de um modo mais formal, utilizando terminologia matemática mais convencional (NCTM, 2007).

É essencial que os alunos tenham oportunidade de explicar, justificar e avaliar as suas ideias e/ou as exibidas pelos seus pares. Pois ouvir e falar são dois aspetos cruciais que os alunos necessitam de desenvolver para otimizar o seu raciocínio matemático (Fonseca, 2009; Martinho, 2007). O professor ao acompanhar o raciocínio dos alunos através do relato e explanação das suas ideias, consegue ter a perceção como decorre o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem (NCTM, 2007; Boavida et al., 2008). Daí que o professor seja o principal interveniente implicado no incremento de ambientes de aprendizagem colaborativos na sala de aula, potenciando a comunicação oral e escrita, pois somente assim é possível uma verdadeira troca de significados matemáticos (Bishop & Goffree, 1986; NCTM, 2007). "Os alunos que têm oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de matemática, beneficiam duplamente: comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 66).

De modo a consolidar-se o desenvolvimento da comunicação na sala de aula, o professor deve construir um ambiente em que os alunos se sintam aliciados e motivados a partilhar as suas ideias e procurar esclarecimentos, até sanarem as dúvidas. Para que isso aconteça, o docente deverá ter em conta certos aspetos, tais como: implementação de normas na sala de aula, enquanto comunidade de aprendizagem, propiciando uma equidade na aprendizagem; seleção e utilização de tarefas matematicamente significativas e aliciantes que fomentem a comunicação; orientação e monitorização das discussões da turma.

Os alunos dos 2.º e 3.º ciclos demonstram por vezes alguma resistência em participar em certas discussões na aula, com receio de errar. À medida que os mesmos se responsabilizam pela sua própria aprendizagem e dos seus pares e o professor implementa aulas onde predomina uma atmosfera de confiança e respeito mútuos, os alunos sentem-se motivados a expor as suas ideias e cometerem erros, pois o principal objetivo é explicar, questionar, atribuir e dar sentido à matemática. Neste tipo de aulas, o professor deverá reconhecer e aplicar tarefas que relacionem conteúdos matemáticos importantes; possam ser resolvidas por diferentes métodos; proporcionem diferentes representações; possibilitem que os alunos interpretem, justifiquem e formulem conjeturas. Por outro lado, o professor no decorrer da resolução de uma tarefa deve de promover a reflexão e o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, evitando "pensar por eles" (NCTM, 2007). O professor deverá assumir a postura de líder participativo, na medida em que desempenha o papel de provocador e desafiador do pensamento matemático dos alunos. "A pergunta deixa de ter por objetivo único o teste aos conhecimentos dos alunos para ser o elemento catalisador de uma comunidade de aprendizagem" (Boavida et al., 2008, p. 64).

De um modo semelhante deve ser encorajada a comunicação escrita, na medida em que os registos escritos contribuem para uma reflexão e clarificação dos pensamentos acerca das ideias desenvolvidas e funciona como catalisador para as discussões dentro da sala de aula. Trata-se de uma forma de comunicação com mais-valias, pois a qualquer momento, é possível consultar os registos escritos que traduzem os raciocínios dos alunos, permitindo um segundo olhar e reflexão sobre aquilo que escreveram, o estabelecimento de conexões que possibilitem um conhecimento mais aprofundado sobre os conteúdos tratados e possibilidade de comunicar à distância (Boavida et al., 2008; Cândido, 2001; NCTM, 2007; Smole & Diniz, 2001). Também "a escrita auxilia o resgate da memória, uma vez que muitas discussões orais poderiam ficar perdidas sem o registo em forma de texto (Smole & Diniz, 2001, p. 23) e "a possibilidade da comunicação à distância no espaço e no tempo e, assim, de troca de informações e descobertas com pessoas que, muitas vezes, nem conhecemos" (Smole & Diniz, 2001, p. 23).

2.6. As representações no ensino e aprendizagem

A comunicação oral e escrita reporta-se para o uso de várias representações que transmitem as ideias matemáticas. Os alunos compreendem as ideias matemáticas tendo em conta a maneira como as mesmas são representadas. As representações podem ser processos observados externamente ou processos que acontecem internamente na mente das pessoas e que expressam raciocínios, isto é, ideias e procedimentos matemáticos, inerentes à realização de uma tarefa (Boavida et al., 2008; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; NCTM, 2007). As representações externas referem-se a organizações simbólicas externas, tais como, por exemplo, símbolos, figuras, diagramas, gráficos, que pretendem descrever um certo raciocínio matemático. As representações internas não se conseguem observar diretamente pois traduzem as imagens mentais construídas pelos sujeitos relativamente à resolução de uma situação problemática (Dufour-Janvier et al., 1987). Neste estudo, focalizamo-nos no uso de representações externas.

De acordo com o NCTM, os programas de ensino do pré-escolar ao 12º ano deverão habilitar todos os alunos para:

> •criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
> •selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
> •usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (NCTM, 2007, p. 75).

Neste sentido, Coulombe e Berenson (2001) consideram importante que os professores incentivem os alunos a criar e usar representações que sustentem o seu raciocínio e comunicação, assim como, relacionar as suas representações pessoais com as representações convencionais. Por outro lado, ao observar as representações dos alunos, os professores poderão captar os modos de interpretação e raciocínio dos mesmos, assim como ajudá-los a desenvolver capacidades de representar (NCTM, 2007).

São várias as definições de representação, segundo alguns autores. Para Janvier (1983) uma representação pode ser vista como a combinação de três componentes: símbolos (escritos), objetos reais e imagens mentais. Na perspetiva de Woleck (2001) as representações são ferramentas usadas para articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios e tratando-se de produtos dinâmicos, capturam o processo de construir um conceito ou uma relação matemática. Segundo Goldin (2008) uma representação é "uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, substituir alguma coisa" (p. 178). Na opinião de Tripathi (2008), uma representação matemática é uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e as interligações entre o conceito e outras ideias. Pode ser vista como uma ideia que nos ajuda a interpretar, comunicar e discutir essa ideia com outros sujeitos, deve incluir componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, pictóricos ou simbólicos que retratam aspetos do conceito. Para o autor, a compreensão de um determinado conceito, ocorre quando os alunos obtêm a destreza de transitarem as ideias de uma representação para outra representação.

Bruner (1999) refere a existência de três tipos de representações: *representações ativas*, *representações icónicas* e *representações simbólicas*. As *representações ativas*. estão relacionadas com a ação. O conhecimento é concebido através da ação, isto é, por meio da manipulação de artefactos didáticos, o sujeito constrói os conceitos. As *representações icónicas* estão associadas a uma disposição visual, nomeadamente ao uso de imagens, desenhos e esquemas que traduzem os conceitos ou conexões entre eles. As *representações simbólicas*, estão ligadas à utilização de linguagem simbólica, no que concerne aos símbolos que retratam ideias matemáticas e restantes linguagens que abarcam um conjunto de regras essenciais ao trabalho com a Matemática e respetiva compreensão da disciplina. Estes diferentes tipos de representação não devem de ser totalmente compreendidos ou interpretados, isoladamente. Apenas fazem sentido, quando estão integrados num vasto sistema estruturado em que se relacionem diferentes representações (Goldin & Shteingold, 2001). O tipo de representação a ser utilizado deve de ter em conta vários fatores, tais como, a natureza da tarefa, a escolha e o raciocínio do sujeito que a resolve, assim como as dificuldades em determinados tipos de representação (Kaput, 1992).

Na opinião de Duval (2006), as dificuldades dos alunos no que concerne à compreensão de conceitos matemáticos, deve-se ao facto da perceção desses conceitos ser apenas possível através de signos e representações semióticas. O autor considera que essas representações semióticas estão relacionadas com registos, sendo possível a sua transformação por meio de *tratamentos* e *conversões*. Os *tratamentos* referentes a transformações realizadas no mesmo registo, como por exemplo, isolar uma das incógnitas num sistema de equações do primeiro grau. As *conversões* são transformações realizadas em diferentes registos, como por exemplo, a passagem da representação de uma função na forma algébrica para a representação da mesma função, graficamente. Requerem "em primeiro lugar, o reconhecimento do mesmo objeto matemático entre duas representações cujos conteúdos não têm, muitas vezes, nada em comum" (Duval, 2006, p. 112), daí que sejam determinantes para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Por conseguinte, para Tripathi (2008), os alunos só começam a compreender um conceito quando o mesmo é observado de diferentes perspetivas, quando têm a capacidade de aplicar diferentes representações e relacioná-las entre si, isto é, "é como examinar o conceito através de uma variedade de lentes, cada lente proporciona perspetivas diferentes que tornam o conceito mais rico e mais profundo" (p. 439). Também para o NCTM:

> Um ensino eficaz da matemática envolve os alunos no estabelecimento de conexões entre representações matemáticas, no sentido do aprofundamento da compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, e assume-se como ferramenta para a resolução de problemas (NCTM. 2017, p. 24).

Coulombe e Berenson (2001) comungam da mesma tese ao considerarem que o desenvolvimento do pensamento, em particular do pensamento algébrico se processa através da utilização de múltiplas representações. Também para Domingos (1994): "A utilização de múltiplas representações vem desenvolver nos alunos a capacidade de as interligar, conseguindo distinguir a mesma função em representações diferentes" (p. 210), pois segundo o autor, o estudo das funções com meios computacionais, permite o estabelecimento de conexões entre as representações algébrica e geométrica, tornando-se uma mais-valia essas representações para os alunos.

2.7. Teoria da Atividade

Segundo Engeström (1991), a Teoria da Atividade assume um papel importante em contextos educacionais tal como refere "a aprendizagem escolar é, obviamente, um sistema de atividade coletivo e relativamente duradouro" (p. 249).

Na perspetiva de Artigue et al. (2006), a Teoria da Atividade é utilizada em situações onde os instrumentos atuam como mediadores do conhecimento num ambiente cooperativo de aprendizagem. Também Kozulin (2003) refere que se trata de uma teoria sociocultural utilizada para analisar o desenvolvimento da mente humana, onde as ferramentas são vistas como artefactos mediadores entre o sujeito e o objeto, num ambiente cooperativo de aprendizagem.

Na perspetiva de Vygotsky (1991), o conhecimento não provém de uma herança genética, mas sim de um processo de mediação que o sujeito desenvolve em atividade com outros sujeitos no meio sociocultural em que está inserido.

Segundo Daniels (2003) a Teoria da Atividade foi concebida a partir da definição de mediação desenvolvida por Vygotsky (1978). De acordo com Oliveira (1993), que tem investigado a teoria de Vygotsky, mediação é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação, ocasionando que a mesma deixe de ser direta e passe a ser mediada por esse elemento. A relação mediada pelo artefacto entre o sujeito e o objeto, descrita por Vygotsky pode ser expressa pelo triângulo básico da figura 2.4. O sujeito é o elemento cujo comportamento se pretende analisar. Os artefactos mediadores[11] são ferramentas (materiais ou

[11] Podem ser físicos ou cognitivos (signos). Os primeiros estão relacionados com o alcance de determinado objetivo na esfera prática, possuindo uma orientação externa. Os segundos estão ligados às atividades mentais ou psicológicas do sujeito, sendo instrumentos de orientação interna (Vygotsky, 1978).

simbólicas) utilizados pelo sujeito para atingir o objeto. O objeto refere-se ao objetivo que o sujeito quer atingir, mediado pelos artefactos, em interações contínuas com outros sujeitos.

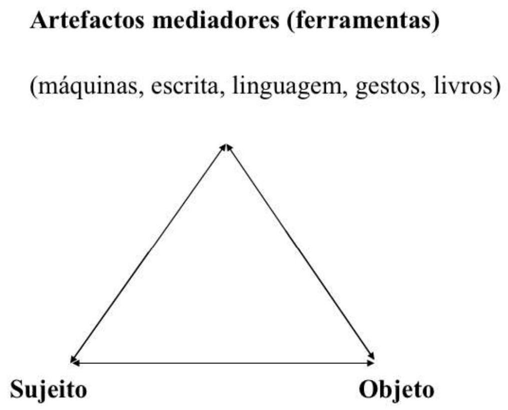


Figura 2.4 - Sistema de mediação segundo Vygotsky (Adaptado de Daniels, 2003, p. 114).

Engeström (1999), um seguidor de Vygotsky, considera que o esquema da figura 2.4 representa a primeira geração da Teoria da Atividade aglutinado ao conceito de mediação. Este autor considerando as limitações do modelo, na medida em que não existe uma alusão ao meio sociocultural em que a atividade se insere, propõe a segunda geração da Teoria da Atividade, baseada na definição da estrutura da atividade por meio de *ações* e *operações* segundo Leontiev[12].

Segundo Leontiev (1978) a atividade humana existe na forma de *ações* ou *conjunto de ações*. Apenas se compreendem as *ações* quando se entende o motivo (material ou ideal) pela qual se realiza a atividade. Empiricamente, a atividade não pode ser compreendida, pois apenas se entendem as *ações* que a compõem. Cada tipo de *ação* pode abarcar diferentes tipos de atividade e cada atividade pode ser concretizada através de diferentes *ações*. Os métodos para realizar as *ações* são denominados de *operações*. O autor justifica o aparecimento da atividade quando o ser humano passou a viver em comunidade, processando-se a divisão do trabalho, ocasionando que a relação entre uma necessidade e a sua satisfação deixasse de ser direta, como no caso dos animais. Essa relação passou a ser mediada por ferramentas e as necessidades passaram a ser satisfeitas através das *ações* coletivas de um grupo em interação com o meio sociocultural.

Tendo em conta o conceito de mediação de Vygotsky e a noção de atividade de Leontiev surgiu o modelo[13] de Engeström (1999) onde existe uma expansão do triângulo inicial, dando lugar a outros intervenientes no sistema de atividade, como a comunidade, as regras e a divisão do trabalho (figura 2.5).

[12] Aluno de Vygotsky, tendo seguido as suas teorias.
[13] Segunda geração da Teoria da Atividade

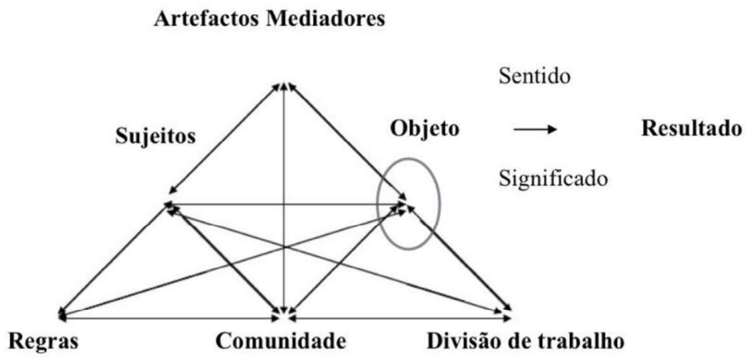


Figura 2.5 - Estrutura do sistema de atividade humana (Adaptado de Engeström, 2001, p. 135).

É um modelo onde estão representadas as várias relações entre os componentes da atividade humana. O sujeito para atingir os resultados, interage com certos objetos que podem incluir experiências, conhecimento, processos ou produtos físicos. A atividade humana é mediada pelos artefactos mediadores[14] (ferramentas ou signos) que se encontram em relação com a atividade em causa. A atividade também é mediada pela comunidade em que esta se desenvolve, que por sua vez impõe regras aos sujeitos, podendo opor-se ou apoiar, facilitar ou negar o acesso aos recursos. Na medida em que a atividade está envolvida com a comunidade, o sujeito partilha com ela a responsabilidade (divisão do trabalho/esforço). Portanto, a noção de atividade segundo Engeström envolve mediações múltiplas, na medida em que todos os elementos se relacionam entre si. A relação entre o sujeito e o objeto é mediada por "artefactos mediadores", a relação entre o sujeito a comunidade é mediada por "regras" e a relação entre o objeto e a comunidade é mediada pela "divisão do trabalho".

Devido à dificuldade de compreender o que acontece quando diferentes sistemas de atividade entram em interação, surge a terceira geração da Teoria da Atividade (figura 2.6), que deve incluir no mínimo dois sistemas de atividade (Engeström, 2001).

[14] Segundo Engeström (1999) não faz sentido fazer uma distinção entre artefactos externos ou práticos (ferramentas) e artefactos internos ou cognitivos (signos), pois à medida que a atividade se desenvolve, ambos encontram-se em fluxo e transformação constante.

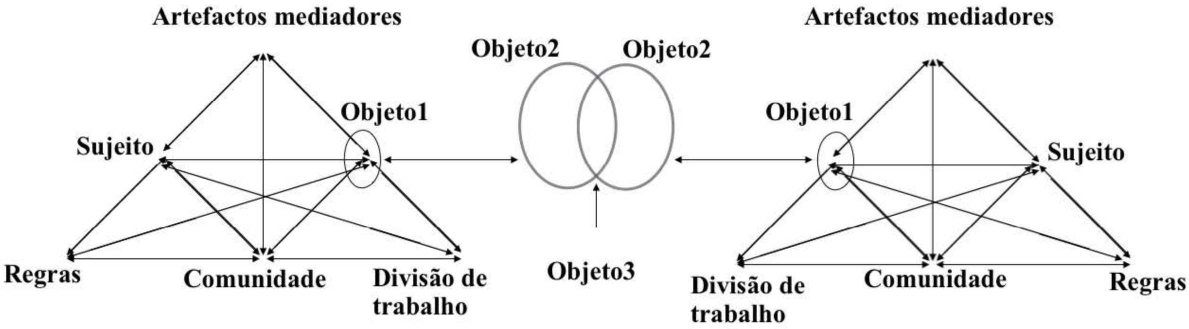


Figura 2.6 - Dois sistemas de atividade em interação (Adaptado de Engeström, 2001, p. 136).

Tendo em conta, por exemplo, uma atividade de ensino que decorre numa sala de aula, o objeto encaminha-se de um resultado inicial – objeto1 (encarado como a resposta do aluno e/ou a solução do professor) para um resultado significativo construído pelos sistemas de atividade – objeto2 (encarado como o resultado esperado por cada aluno e por cada professor) conduzindo à interseção de ambos os resultados esperados, produzindo-se um objeto compartilhado, cuja avaliação se relaciona com a qualidade da aprendizagem dos alunos – objeto3 (encarado como o resultado da interação entre os dois sistemas de atividade). A terceira geração da Teoria da Atividade é resumida por Engeström (2001) como uma atividade em que o objeto dessa atividade é considerado um alvo em movimento resultante de uma transformação expansiva nos sistemas de atividade suportados por *contradições*[15] que representam fontes de mudança ou desenvolvimento.

2.8. Abordagem Instrumental

2.8.1. Artefacto e Instrumento

Um artefacto é um objeto muitas vezes usado como uma ferramenta, não sendo necessariamente físico (Drijvers et al., 2010) mas que tem as suas características intrínsecas, e é projetado com a finalidade de realizar uma tarefa específica (Rabardel, 1995). A ideia de artefacto é muito geral e abrange vários tipos de objetos produzidos pelos seres humanos através dos tempos: sons e gestos; utensílios; formas de linguagem oral e escrita; textos e livros; instrumentos musicais; instrumentos científicos; ferramentas das tecnologias de informação e comunicação (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Por exemplo, no que concerne a um *software* de geometria dinâmica, pode-se considerar o *software* como um todo, isto é, como um único artefacto ou interpretá-lo como um conjunto de artefactos, tais como, por exemplo, artefacto de construção,

[15] Estas contradições não se referem a conflitos, problemas ou obstáculos. Por exemplo, podem ser situações que ocorrem em experiências de ensino, no qual é possível fazer recomendações e tirar conclusões de modo a proporcionar melhorias futuras.

artefacto de medição e artefacto de arrastamento (Leung, 2008). Um único computador pode ser considerado como um conjunto de artefactos (por exemplo, CAS, processamento de texto, etc) (Trouche, 2004b).

A abordagem instrumental, em contextos educacionais, está ligada aos aspetos instrumentais da utilização de um artefacto tecnológico por um sujeito (Gomes, 2001). Trata-se de uma abordagem fundamentada nas ideias de Piaget e desenvolvida por Rabardel (1995). A construção de um instrumento trata-se de uma conceção psicológica e ocorre segundo um processo designado por génese instrumental (figura 2.7).

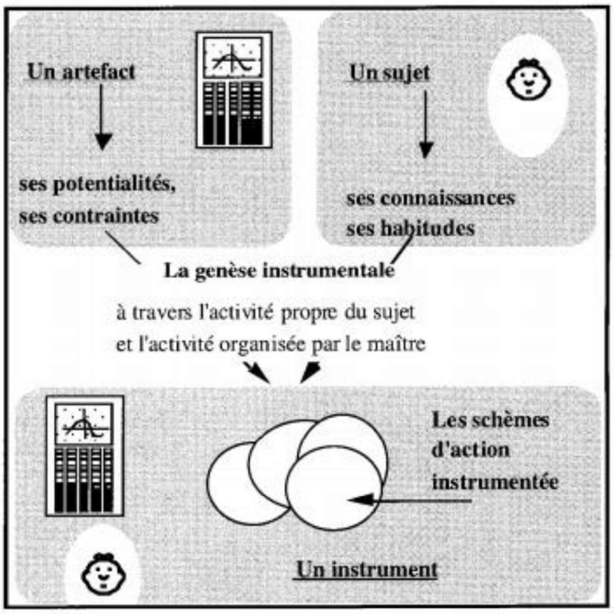


Figura 2.7 - Génese Instrumental (Trouche, 2000, p. 243).

Um instrumento surge quando o sujeito foi capaz de se apropriar do artefacto e o integrou na sua atividade. A utilização de instrumentos técnicos tem uma dupla interpretação. Por um lado, existe o artefacto, que se trata do objeto particular provido das suas características intrínsecas e que é projetado para realizar uma determinada tarefa, por outro lado, existe também o instrumento, que resulta da união do artefacto com os processos utilizados para a resolução da tarefa, os esquemas de utilização. Trata-se de uma entidade mista, na medida em que resulta da apropriação de um artefacto, material ou simbólico, pelo sujeito, através de esquemas (Artigue, 2002; Trouche, 2004b; Rabardel, 1995). Esse processo de apropriação é o que permite que artefacto seja “responsável” pela mediação da atividade (Drijvers & Trouche, 2008).

Para cada tipo de tarefa, um sujeito irá desenvolver um instrumento, usando e apropriando-se de vários artefactos (Trouche, 2004b). Por outro lado, um mesmo artefacto pode dar origem à construção de diferentes instrumentos, pois cada sujeito constrói os seus próprios esquemas, construindo o seu próprio instrumento. À medida que o sujeito continua a manusear e manipular o instrumento de acordo com as suas necessidades, constrói novos esquemas que o vão transformando (o instrumento) (Rabardel, 1995). Esses esquemas são essencialmente individuais, embora se desenvolvam em interação social através da orquestração (Trouche, 2000).

2.8.2. Esquemas

Na abordagem da ergonomia cognitiva (Rabardel, 1995) a noção de esquema mental, coaduna-se com a definição de Vergnaud (1996): "organização invariável do comportamento para uma dada classe de situações", tratando-se de uma entidade funcional dinâmica. Para compreender a função dinâmica de um esquema, é necessário considerar todos os seus componentes: os objetivos e as previsões, as regras de ação, a recolha de informações, a tomada de controle e os invariantes operacionais. Os invariantes operacionais referem-se ao conhecimento implícito contido nos esquemas: teoremas em ação, isto é, proposições tidas como verdadeiras. Um esquema é dotado de três funções principais: uma função pragmática (permite ao sujeito fazer algo, tendo em conta os seus objetivos), uma função heurística (permite que o sujeito antecipe e planifique ações) e uma função epistémica (permite ao sujeito entender o que está a fazer).

Trouche (2004b) alerta para o facto de se fazer a distinção entre gestos e esquemas, tomando como referência a explicação de esquema de acordo com a definição de Vergnaud (1996). Os gestos são comportamentos elementares que estão ligados à ação, tratando-se da parte observável dos esquemas. Por outro lado, aquilo que não se vê refere-se ao pensamento, formado pelos invariantes operacionais. “Um esquema é o lugar psicológico da relação dialética entre gestos e invariantes operacionais, que estão entre a atividade e o pensamento” (Trouche, 2004b, p. 286). Tendo em conta a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas na calculadora gráfica TI-89, pode aparecer uma série de gestos executados no teclado da calculadora que exige um conhecimento significativo, no entanto não necessariamente igual para todos os alunos. Portanto, nesta resolução o esquema é composto pelos gestos observados e pelo conhecimento implicado nos gestos realizados.

Por exemplo, no caso do estudo da álgebra, tendo em conta os aspetos instrumentais do uso da calculadora gráfica como artefacto por parte do sujeito num contexto educativo, a abordagem instrumental de Rabardel (1995) denominada por génese instrumental, permite fazer uma ligação entre as técnicas de manipulação da máquina e o pensamento matemático, desencadeando a construção de esquemas instrumentais[16] e esquemas de compreensão algébrica.

[16] Quando se dá um recurso direto à calculadora gráfica.

Grande parte da atividade cognitiva humana fundamenta-se em esquemas: “metaforicamente, pensar é um gesto, com o sentido amplo de produzir uma sequência de ações ou operações sobre certas circunstâncias; com objetivos, sub-objetivos, recolha e tratamento de informação, controlo, prazer ou desagrado” (Vergnaud, 1998, p. 172). Trata-se de um conceito importante quando se pretende criar teoria através da ação e da atividade. Para este autor, os algoritmos referem-se a casos especiais de esquemas. Alerta, que quando um sujeito utiliza um esquema, não sabe se consegue alcançar o seu objetivo ou se o mesmo poderá ser atingido num número finito de procedimentos.

Rabardel (1995) introduziu a noção de esquema de utilização de um artefacto, que descreve como sendo um conjunto de procedimentos que organiza a atividade com o artefacto, associado à realização de uma determinada tarefa. Existe a diferenciação entre dois tipos de esquemas de utilização: os *esquemas de uso,* direcionados para a gestão do artefacto, como por exemplo, ligar ou ajustar o contraste do ecrã de uma calculadora e os *esquemas de ação instrumentada*, como sendo ações direcionadas para a realização da tarefa, como por exemplo, calcular o limite de uma função (Drijvers & Trouche, 2008). No entanto, Rabardel (1995) alerta que um esquema de *ação instrumentada* para um determinado sujeito, pode-se transformar posteriormente num *esquema de uso* para esse mesmo sujeito. O autor ilustra essa situação, fazendo alusão à realização de uma ultrapassagem de um veículo, por um sujeito que está aprender a conduzir e posteriormente quando ele já é condutor experiente. No primeiro caso foram utilizados *esquemas de ação instrumentada* e no caso do motorista experiente pode interpretar-se que os esquemas envolvidos nesta ação automatizada foram *esquemas de uso*. Em suma, raramente a construção de um instrumento é definitiva, pois os esquemas podem evoluir (Trouche, 2000), tendo em conta as competências matemáticas dos alunos (Drijvers & Trouche, 2008).

Os *esquemas de uso* podem servir como blocos de construção para esquemas de ordem superior, os *esquemas de ação instrumentada*. Os *esquemas de ação instrumentada* concentram-se na realização de tipos específicos de transformações nos objetos da atividade, que são objetos matemáticos, tais como, por exemplo, fórmulas e gráficos (Drijvers & Trouche, 2008).

Olhando para além do simples gesto no teclado da calculadora, convém considerar que esse gesto não se trata de um caso isolado, mas sim de um componente de *esquemas de ação instrumentada* implementado pelo aluno para resolver a tarefa (Trouche, 2004b).

Os *esquemas de ação instrumentada* são esquemas mentais, coerentes e significativos, que são construídos a partir de esquemas elementares de uso, por meio da gênese instrumental. Como é impossível observar diretamente os esquemas mentais, as observações são limitadas às técnicas que os alunos realizam com o artefacto e à forma como os mesmos fazem os seus relatos oralmente ou na forma escrita. Um exemplo de um *esquema de ação instrumentada* refere-se à janela de visualização de uma calculadora gráfica. As habilidades técnicas deste esquema contemplam encontrar o menu de definição de janelas e conhecer o significado dos diferentes campos que precisam ser preenchidos. O aluno deve de ter a perceção que a tela da calculadora tem uma janela de visualização relativamente pequena, através da qual olha para a parte de um plano, teoricamente infinito. Na maioria dos casos nenhuma janela pode mostrar o gráfico completo. O aluno precisa de habilidades para determinar configurações de janela apropriadas para fazer isso acontecer. Também no artefacto, calculadora gráfica, o uso de números negativos e a diferença correspondente entre o sinal negativo para números negativos e o sinal negativo para subtrações, podem ser considerados como um dos componentes de *esquemas de uso*.

Com base em observações realizadas na sala de aula, as dificuldades aparentemente técnicas que os alunos possam transparecer ao estarem envolvidos num ambiente computorizado, muitas vezes acabam por ter um histórico conceptual significativo. Pois a parte conceptual dos esquemas de utilização, inclui tanto objetos matemáticos como o conhecimento sobre a "matemática da máquina". Daí a incompletude dos aspetos conceptuais do esquema ao invés dos aspetos técnicos, pois os alunos podem construir esquemas que não são apropriados, não são eficientes ou que se baseiam em conceções inadequadas. Isto é, o desenvolvimento de esquemas por cada aluno, na resolução de uma tarefa, está relacionado com a evolução e interação simultânea das competências conceptuais e técnicas, inerentes à manipulação da máquina (Drijvers & Trouche, 2008). No entanto, à medida que diferentes esquemas de utilização são construídos, a relação entre o sujeito e o artefacto evolui. Este processo é denominado por Génese Instrumental.

2.8.3. Génese Instrumental

A Génese Instrumental identifica-se por um processo através do qual o sujeito se apropria de um artefacto e o transforma num instrumento, na resolução de tarefas (Drijvers et al, 2010). Trata-se de uma evolução em curso, não trivial e demorada (Hoyles & Noss, 2003) que está ligada à capacidade de cada sujeito tem em desenvolver a sua capacidade conceptual.

Segundo Rabardel (1995) a apropriação do artefacto dá-se quando o sujeito percebe a utilidade do artefacto no que concerne ao tipo de tarefas que pode fazer e a maneira como as pode realizar. Esta atividade pode ser articulada em dois processos: a instrumentalização e a instrumentação, que é traduzida por uma relação bilateral entre o sujeito e o artefacto.

O processo de instrumentalização é dirigido para o artefacto, operando-se um reconhecimento progressivo das suas potencialidades e limitações, o sujeito adapta-o às suas necessidades. Trata-se da investigação da atividade do sujeito no artefacto (Lerman, 2014), onde o conhecimento do sujeito orienta a forma como o artefacto é usado, apropriando-se do mesmo e adaptando-o à resolução das tarefas e de certa forma molda o artefacto.

O processo de instrumentação está dirigido para o sujeito e está relacionado com a construção e desenvolvimento de esquemas de utilização. Trata-se da investigação do artefacto na atividade do sujeito (Lerman, 2014), onde as potencialidades e restrições do artefacto fomentam estratégias de resolução das tarefas, isto é, essas estratégias são influenciadas pelas potencialidades e constrangimentos do artefacto.

A instrumentalização pode passar por várias fases: uma fase de descoberta e seleção de funções relevantes, um estágio de personalização (ajuste do artefacto à mão) e uma fase de transformação do artefacto como por exemplo, a modificação da barra de ferramentas, criação de atalhos do teclado, armazenamento de programas de jogos, execução automática de algumas tarefas (sites de fabricantes de calculadoras disponibilizam programas para funções e métodos e formas de resolver determinadas classes de equações). A instrumentação é precisamente o processo pelo qual o artefacto permite que se desenvolva uma atividade dentro de alguns limites, tendo em conta as suas potencialidades e os seus constrangimentos (Trouche, 2004b).

A natureza dual da instrumentação e da instrumentalização dentro da génese instrumental resume-se ao facto do pensamento do sujeito ser moldado pelo artefacto, mas este também moldar o artefacto (figura 2.8). Isto é, estabelece-se uma relação bilateral entre o sujeito e o artefacto. Na instrumentalização o conhecimento do aluno orienta a forma como a ferramenta é usada e de certa forma molda o artefacto, enquanto que na instrumentação as potencialidades e restrições do artefacto influenciam o pensamento e as estratégias de resolução da tarefa por parte do aluno (Hoyles & Noss, 2003). São processos que se encontram interligados, sendo por vezes difícil indicar em determinada situação qual deles está em desenvolvimento. No entanto, a construção de um instrumento resulta da atividade conjunta dos dois processos: a instrumentalização e a instrumentação (Trouche, 2004b).

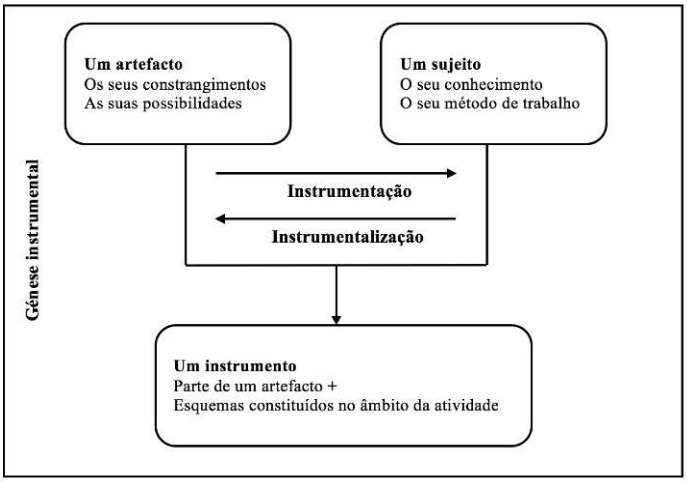


Figura 2.8 - Génese Instrumental como combinação de dois processos (Adaptado de Trouche, 2004a, p. 185).

Tendo em consideração a calculadora gráfica TI-84, a opção "*Calculate intersect*" é um artefacto que calcula as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos. Por um lado, este artefacto enriquece a visão do aluno na resolução de equações através da representação gráfica. Por outro lado, o artefacto pode limitar a conceção do aluno no que diz respeito à natureza das soluções, uma vez que os resultados podem ser restringidos a valores decimais em vez de soluções exatas, estando-se perante um exemplo de instrumentação. Mas o estudante pode programar a calculadora para que a mesma apresente soluções na forma de radicais operacionalizando-se um processo de instrumentalização (Drijvers et al., 2010).

Segundo Guin e Trouche (1999), num estudo realizado com alunos de 15/16 anos registam-se duas fases diferentes da génese instrumental. Numa primeira fase dá-se uma forte dependência da máquina, onde os alunos descobrem os vários comandos da mesma. Opera-se o primeiro nível de instrumentação[17], onde os alunos usam uma grande diversidade de estratégias e técnicas, denotando-se pouco conhecimento teórico e insuficiência de trabalho com papel e lápis. À medida que os alunos compreendem o significado matemático dos comandos, reduzem o número de utilizações dos mesmos na realização das tarefas. Numa segunda fase intensifica-se um aperfeiçoamento das estratégias e técnicas anteriormente utilizadas, denotando-se uma maior consciencialização das limitações e potencialidades da calculadora, assim como uma maior desconfiança nos resultados obtidos.

A Génese Instrumental tem sido tratada como um processo individual, pois diferentes alunos podem desenvolver diferentes esquemas ao realizar o mesmo tipo de tarefa ou usar um comando semelhante num ambiente tecnológico. No entanto, os alunos podem desenvolver esquemas mentais no âmbito da comunidade de sala de aula, ocorrendo um processo coletivo da Génese Instrumental em paralelo com a Génese Individual, conferindo uma dimensão social à primeira (Drijvers et al, 2010). Neste sentido, segundo Drijvers e Trouche (2008) pode existir um ambiente de aprendizagem onde todos os alunos são portadores de uma calculadora gráfica que pode ser conectada a um *viewscreen* e apenas uma delas é ligada a esse dispositivo e a um retroprojetor (figura 2.9). Ao aluno que se estabelece tal ligação é denominado de *aluno Sherpa,* agindo este como um mediador entre o professor e a turma, cujo principal objetivo é socializar - até certo ponto - a génese instrumental dos alunos.

[17] A palavra "instrumentação" no âmbito da génese instrumental, refere-se à forma como o artefacto afeta o comportamento do aluno e, ao contrário da instrumentalização, que se refere à forma como o pensamento do aluno afeta o artefacto. A situação em questão está ligada à teoria da instrumentação como um todo (Drijvers et al., 2010).

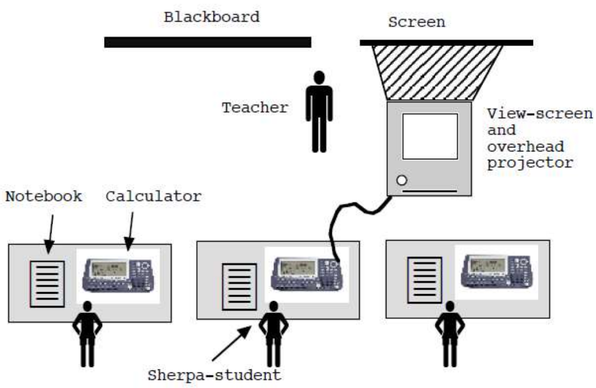


Figura 2.9 - Configuração do aluno *Sherpa* (Drijvers & Trouche, 2008).

Para Drijvers e Trouche (2008) esta configuração apresenta várias vantagens:

- favorece a gestão coletiva de uma parte dos processos de instrumentação e instrumentalização: a atividade realizada pelo aluno com a calculadora pode ser visionada por todos, podendo ser objeto de discussão na sala de aula;

- através da calculadora do aluno, o professor pode orientar as calculadoras de toda a turma (o professor não executa o gesto instrumentado, mas verifica como ele é executado pelo *aluno Sherpa*);

- o professor pode relacionar os resultados obtidos no quadro-negro com os resultados obtidos pela calculadora do *aluno Sherpa*;

- favorece a discussão na turma e a realização de procedimentos explícitos: a existência de outro ponto de referência, distinto do professor, permite que se desenvolvam novas relações entre os alunos da turma e o professor e entre o *aluno Sherpa* e o professor - um resultado matemático, uma conjetura, um gesto ou uma técnica, pode proporcionar meios ao professor para reintegrar os alunos na turma, tendo em conta as suas dificuldades e potencialidades;

A função do *aluno Sherpa* dá aos alunos um estatuto diferente e mais força ao professor, na medida em que este ajusta os seus procedimentos de ensino tendo em conta o trabalho do aluno que seguiu as diretrizes do mestre. Por outro lado, o acompanhamento do trabalho deste aluno que foi retroprojetado, proporciona um *feedback* muito mais rápido entre os professores e os alunos.

Neste tipo de metodologia, o professor pode organizar o trabalho de diferentes maneiras:

- as calculadoras são desligadas (ficando apenas o retroprojetor ligado), potenciando-se o trabalho de papel e lápis;

- os alunos seguem com as suas calculadoras, o que está a ser feito pelo *aluno Sherpa,* sob a orientação do professor.

Segundo os autores, a construção de conhecimento matemático dá-se quando a atividade do *aluno Sherpa* é livre ou é orientada pelo professor, pois este aluno assume na turma, um papel de referência, podendo ser considerado um guia, um auxiliar ou um mediador, de acordo com a metodologia adotada.

2.8.4. Orquestração Instrumental

Tendo em conta o facto de, em cada tarefa, o aluno desenvolver o processo de apropriação do artefacto, convertendo-o num instrumento, existe a necessidade de a partir de um conjunto de artefactos, desenvolver um sistema coerente de instrumentos. Neste sentido, a combinação e articulação de vários instrumentos exigem a monitorização do professor, pois o desenvolvimento de um instrumento por um determinado aluno, nunca é um processo isolado. A Génese Instrumental combina sempre aspetos individuais e sociais, pois vários alunos, ao resolverem a mesma tarefa, ao mesmo tempo, desenvolvem os seus instrumentos, o que requer a combinação dos diferentes instrumentos pelo professor. Então a necessidade de combinar diferentes instrumentos de uma forma coerente, conduzem à noção de orquestração instrumental (Trouche, 2004b).

Assim com o objetivo de descrever este processo da Génese Instrumental coletiva e a gestão pelo professor dos instrumentos individuais no processo de aprendizagem coletiva, Trouche (2004b) e Drijvers e Trouche (2008) introduziram a noção de orquestração instrumental. Uma orquestração instrumental é a organização intencional e sistemática dos vários artefactos disponíveis num ambiente de aprendizagem informatizado pelo professor, numa determinada situação matemática, de modo a orientar a Génese Instrumental dos alunos. Para os autores, a abordagem instrumental é usada para analisar a relação entre os artefactos e o conhecimento matemático. Os artefactos além de terem uma aplicação prática, na medida em que são utilizados para realizar uma ação concreta, também têm um potencial cognitivo, pois são um meio para aceder ao conhecimento matemático. Através das noções de esquemas de utilização e técnicas, no que diz respeito à solução de uma tarefa, são abordadas perspetivas epistemológicas e cognitivas.

Por outro lado, para Bartolini Bussi (1998) o termo orquestração é direcionado para a coordenação das diferentes discussões que surjam em sala de aula, orientadas/mediadas pelo professor. A autora considera que um dos objetivos da atividade de ensino e aprendizagem, é a gestão da turma durante a discussão matemática, descrevendo o processo como "uma polifonia de vozes articuladas num objeto matemático" (p. 68). Em cada fase do processo de ensino e aprendizagem, é essencial a ação do professor, nomeadamente na orquestração das discussões da turma.

2.9. Abordagem Semiótica

Segundo Sàenz-Ludlow e Presmeg (2006), nos últimos anos, alguns estudos adotaram uma perspetiva semiótica, focalizando o papel dos signos (sinais) e símbolos e a sua utilização ou interpretação, de modo a tornar percetível a integração das tecnologias (Noss e Hoyles, 1996) em ambientes educativos.

Na perspetiva de Vygotsky (1978), na esfera prática os seres humanos utilizam artefactos, mas as atividades mentais são suportadas e desenvolvidas por meio de signos que são os produtos dos processos de internalização[18]. Os signos são artefactos cognitivos, denominados por instrumentos psicológicos, como a linguagem, vários sistemas de contagem, técnicas mnemónicas, sistemas de símbolos algébricos, trabalhos de arte, escrita, esquemas, diagramas, mapas e desenhos mecânicos, todos os tipos de sinais convencionais. O uso de signos na realização de uma tarefa tem uma função cognitiva dupla. O sujeito produz signos diretamente relacionados com a realização da tarefa, mas também comunica com os diversos indivíduos envolvidos na tarefa, com o objetivo de proceder ao processo de interpretação da mesma. Segundo este autor, os signos mudam a mente do sujeito, ao contrário dos instrumentos de trabalho manual que mantêm invariável a anatomia da nossa mão. Neste sentido, Nunes (1995) considera que no decorrer de experiências de aprendizagem, os signos têm um papel determinante na formação e tipo de conceitos que se desenvolvem, devido ao modo como condicionam o raciocínio através da sua função mediadora. Como está exemplificado na figura 2.10, existe uma relação entre signos e artefactos que é baseada na função de mediação semiótica que ambos podem ter ao realizar uma tarefa.

Segundo Bartolini Bussi e Mariotti (2008), a relação entre o artefacto e o conhecimento pode ser expressa por signos, culturalmente determinados, produzidos pelo desenvolvimento cultural. Por outro lado, a relação entre o artefacto e a tarefa pode ser evidenciada por signos, muitas vezes contingentes com a situação determinada pela solução particular da tarefa. Em qualquer caso, a característica principal destes signos é que o seu significado mantém uma ligação forte com as operações realizadas. Gestos, desenhos ou palavras podem ser diferentes meios semióticos utilizados para produzir estes signos, cuja produção pode ser espontânea ou explicitamente exigida pela própria tarefa. Sendo assim, a figura 2.10 ilustra que a relação que existe entre dois sistemas paralelos de signos depende do artefacto, não sendo uma relação evidente e espontânea. Assim, a construção desta relação torna-se um objetivo educacional crucial

[18] Vygotsky (1978) entende internalização como "a reconstrução interna de uma operação externa" (p. 56). Descreve o processo de construção do conhecimento individual, gerado por experiências socialmente compartilhadas onde uma operação interna está ligada à operação psíquica e uma operação externa está relacionada com a interação social externa.

que pode ser realizado promovendo a evolução de signos que exprimem a relação entre o artefacto e a tarefa, em signos que expressam a relação entre o artefacto e conhecimento. Devido a esta dupla ligação semiótica, pode-se falar em polissemia de um artefacto.

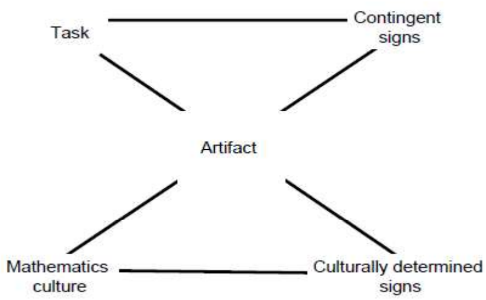


Figura 2.10 - Polissemia de um artefacto (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 753).

Categorias de Signos

Num ambiente de sala de aula, em atividades realizadas com artefactos, surgem vários signos que podem ser usados intencionalmente pelo professor para explorar processos semióticos, visando orientar a evolução de significados pessoais para significados matemáticos. Existem basicamente três categorias de signos: *signos de artefacto, signos de articulação (pivot)* e *signos matemáticos*.

Os *signos de artefacto* referem-se à atividade realizada com o artefacto, os seus significados são pessoais e geralmente implícitos estritamente relacionados com a experiência do sujeito. Embora possa ocorrer que os sinais surjam de forma espontânea, certamente aparecem sinais e significados que podem vir a ser expressos de acordo com a especificação precisa do contexto, em particular sob o estímulo de tarefas específicas:

• Quando a tarefa é solicitada a ser realizada em pares, pode-se gerar a necessidade de se comunicar e, consequentemente, a produção de signos referente ao uso do artefacto.

• Quando é pedido um relatório escrito para ser elaborado durante a resolução de um problema, por exemplo, quando os alunos são convidados a preencher fichas de trabalho.

• Quando os alunos são convidados a elaborar um relatório escrito posterior à realização da tarefa resumindo o conteúdo da discussão, tornando explícitas as suas dúvidas, e assim por diante. Os *signos de artefacto* tendo em consideração a sua referência direta com o artefacto e o seu uso, são utilizados principalmente para identificar ou centrar num aspeto particular do artefacto (uso do) a ser relacionado com os significados matemáticos que são o objeto da intervenção didática. Eles são os elementos básicos do desenvolvimento do processo semiótico centrado sobre a utilização do artefacto evoluindo para a construção do conhecimento matemático.

Os *signos matemáticos* referem-se ao contexto da matemática, estão relacionados com os significados matemáticos partilhados na sala de aula, como por exemplo, uma proposição, uma definição, uma conjetura para ser provada, uma demonstração, de acordo com as normas partilhadas pela comunidade de matemáticos. Estes sinais constituem o objetivo do processo de mediação semiótica orquestrada pelo professor.

Os *signos de articulação (pivot)* surgem quando se promove a passagem dos *signos de artefacto* para *signos matemáticos*, isto é, os significados pessoais dos sujeitos resultantes do uso do artefacto na resolução de uma tarefa, evoluem para significados matemáticos, determinando um processo de generalização, que é o objetivo da intervenção didática.

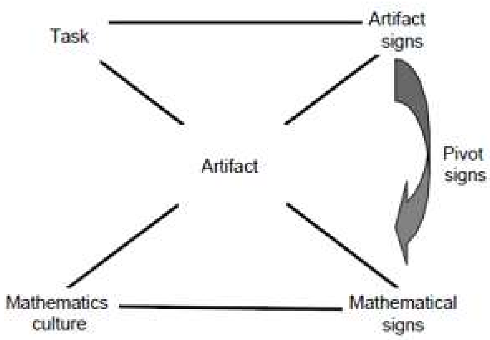


Figura 2.11- Artefactos e signos (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 757).

O potencial semiótico de um artefacto

Do ponto de vista individual, surgem os significados pessoais que estão relacionados com a utilização do artefacto, nomeadamente no que respeita ao objetivo de realizar a tarefa, por outro lado, do ponto de vista social, emergem os significados matemáticos evocados que podem estar relacionados com o artefacto e a sua utilização. Neste sentido, existe uma dupla relação semiótica articulada pelo artefacto, denominada pelo *potencial semiótico do artefacto*, que se caracteriza pela facilidade que o mesmo possui em associar significados matemáticos evocados pelo seu uso, culturalmente determinados, com significados pessoais que cada sujeito desenvolve na utilização do mesmo (atividade instrumentada) na realização de tarefas específicas. Assim, o artefacto desempenha um duplo papel, tanto como um meio de realizar uma tarefa, como uma ferramenta de mediação semiótica para cumprimento de um objetivo didático.

A criação de qualquer plano pedagógico (sequência de ensino e aprendizagem) centrado no uso de um dado artefacto, tem de ser baseado numa descrição a priori do *potencial semiótico do artefacto*, sendo que a sua eficácia depende de uma cuidadosa intervenção do professor. Isto é, de acordo com a Teoria da Mediação Semiótica (TMS) cabe ao professor o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, promovendo a produção de signos específicos pelos alunos que se referem ao uso do artefacto, na realização da tarefa (*signos de artefacto*), orientando a evolução de tais signos para os esperados *signos matemáticos* (Mariotti, 2018).

2.9.1. Teoria da Mediação Semiótica

A Teoria da Mediação Semiótica (TMS) foi elaborada por Bartolini Bussi e Mariotti (2008) com base numa vasta recolha de dados em experiências realizadas a longo prazo, em todos os níveis de ensino (do pré-escolar ao secundário). Essas experiências foram feitas com diferentes tipos de artefactos, como por exemplo, ábaco, compassos ou softwares como o Cabri. A Teoria da Mediação Semiótica é centrada em torno da ideia seminal de mediação semiótica introduzida por Vygotsky (1978) e tem como objetivo descrever e explicar o processo desencadeado por um aluno, que se inicia com o uso de um artefacto específico para realizar uma tarefa e leva à apropriação de um determinado conteúdo matemático específico (Mariotti, 2012a, 2018). Trata-se de uma abordagem teórica que do ponto de vista didático, aborda o ensino e aprendizagem da matemática usando a integração da tecnologia, cujo objetivo é analisar os diferentes tipos de signos[19] compreendidos em atividades orientadas por artefactos.

No processo de Génese Instrumental, a evolução do artefacto num instrumento, pode ocasionar o surgimento de signos e, consequentemente, de significados relacionados com os esquemas de utilização (Radford, 2003). Neste sentido, para Mariotti (2018) a evolução de significados, provenientes das interações entre signos é inerente ao desenvolvimento do processo de mediação semiótica, que só ocorre quando existe conteúdo matemático a ser mediado pelo professor. Segundo a autora, quando um professor propõe uma determinada tarefa ao aluno e este utiliza o artefacto para a concretizar, os alunos podem ser incitados pelo professor a produzir signos pessoais que podem ser colocados em relação com signos matemáticos, cujo objetivo é produzir significados inerentes ao conteúdo a ser tratado. Neste sentido, um professor tendo identificado à priori o potencial semiótico do artefacto, pode intencionalmente orientar a sua ação educativa no sentido de promover a produção, evolução e transformação de signos que expressam a relação entre o artefacto e a tarefa, para os signos que traduzem a relação entre o artefacto e o conhecimento matemático.

O Ciclo Didático

O processo de mediação semiótica é composto por um processo de evolução que se inicia com o aparecimento de signos pessoais, relacionados com significados que emergem da realização da tarefa e o uso do artefacto, desenvolvendo-se a produção coletiva de signos comuns relacionados com a utilização do artefacto e os conteúdos matemáticos para serem aprendidos,

[19] O termo signo refere-se à relação indissolúvel entre significado e significante *"signified and signifier"* inspirado por Pierce.

como se pode exemplificar na figura 2.12. Essa evolução pode ser promovida através da iteração de Ciclos Didáticos[20], onde diferentes categorias de atividades ocorrem, cada

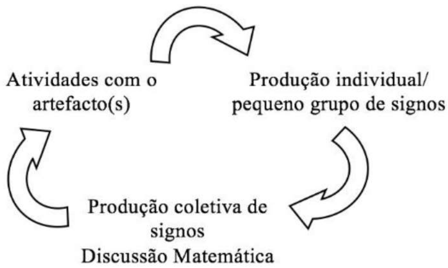


Figura 2.12 - O Ciclo Didático (Adaptado de Mariotti, 2018, p. 23).

uma contribuindo de forma diferente, mas complementando o desenvolvimento do complexo processo de mediação semiótica:

a) *Atividades com o artefacto* - constituem o início de qualquer ciclo e são baseadas na realização de uma tarefa pelos alunos usando o artefacto com o objetivo de promover a emergência de signos (palavras, desenhos, gestos) cujos significados se referem ao uso do artefacto, mas que são igualmente coerentes com os significados matemáticos que são o objetivo da intervenção didática.

b) *Atividades de produção individual de signos* - solicitando a produção individual de signos, por exemplo, o envolvimento dos alunos em atividades semióticas no que concerne a produções escritas, isto é, os alunos podem ser solicitados a escrever relatórios individuais sobre atividades anteriores com artefactos, refletindo a sua própria experiência, colocando dúvidas e questões. As produções escritas podem tornar-se objetos de discussão no trabalho coletivo subsequente.

c) *Discussão coletiva*[21] - no que concerne à produção coletiva de signos. Este tipo de atividade desempenha um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem e constitui o cerne do processo de mediação semiótica. Toda a turma está envolvida: diversas soluções são discutidas coletivamente, os textos escritos pelos alunos ou outros são analisados, comentados e elaborados coletivamente. As intervenções dos alunos são coordenadas pelo professor com o objetivo de promover o avanço para significados

[20] Este trabalho é feito a pares ou em pequeno grupo, promovendo o intercâmbio social.
[21] Discussão entre os alunos da turma, mediada pelo professor, para chegar a significados matemáticos.

matemáticos, explorando as potencialidades semióticas que advêm do uso do artefacto em causa.

Deste modo, a TMS fornece um modelo do processo de ensino e aprendizagem desenvolvido em torno de dois elementos chave: a noção de *potencial semiótico de um artefacto* e a noção *de Ciclo Didático* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2009; 2012a, July; 2018).

O papel do professor no desenvolvimento do processo de mediação semiótica

Um professor tendo consciência do potencial semiótico do artefacto, tanto em termos de significados matemáticos como em termos de significados pessoais, pode atuar intencionalmente como mediador[22] usando o artefacto para mediar o conteúdo matemático através da intervenção de um *Ciclo Didático*, onde se desenvolvem várias atividades e se incrementa a discussão coletiva. Portanto, o professor tendo em conta as potencialidades semióticas do artefacto, pode usá-lo como uma ferramenta de mediação semiótica na resolução de uma tarefa, cujo objetivo é mover os significados pessoais para os significados matemáticos, através das contribuições individuais de cada aluno num ambiente cooperativo de aprendizagem, envolvendo toda a turma. Sendo o professor um representante de uma comunidade cultural de referência, o interesse está concentrado na análise da mediação que o mesmo realiza, no que concerne aos significados pessoais dos estudantes que emergem da sua atividade instrumentada e correspondentes significados matemáticos (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2006; 2009; 2012a, July; Mariotti, 2018). Na perspetiva de várias autoras (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti 2012a, July), a mediação ocorre, porque existe um conhecimento matemático (conteúdo) que é objeto de mediação e é mediado pelo professor (mediador) responsável pela mediação dos alunos (mediados) para quem a mediação tem efeito, existindo intervenções didáticas específicas que se denominam por *Ciclos Didáticos*, criando-se condições para que os mesmos ocorram. Neste sentido, na opinião de Radford (2003) os artefactos contribuem não só para realizar uma tarefa, mas também para a construção do conhecimento.

Assim, segundo Mariotti (2018) em cada uma das fases do *Ciclo Didático* o professor desempenha um papel crucial, para o desenvolvimento do mesmo, onde a sua intervenção inclui:

- a criação de tarefas dedicadas a favorecer o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto* selecionado;
- a análise das soluções e dos relatórios escritos, pelos alunos, após a conclusão das tarefas, identificando a emergência dos sinais esperados;
- o planeamento da discussão coletiva com base nos resultados da análise anterior;

[22] O professor desempenha o papel de mediador cultural na medida em que promove a cultura matemática dos alunos.

- a gestão da discussão coletiva promovendo a evolução dos significados pessoais dos alunos em direção aos signos matemáticos pretendidos.

Por outro lado, existem dois pares de *Ações Complementares* do professor, que Mariotti (2018) denominou o primeiro par por "*ação de retorno à tarefa* e *ação de focalização*" e o segundo par por "*solicitar uma síntese* e *oferecer uma síntese*", que descrevem, como durante uma discussão coletiva o professor pode promover tanto a construção conjunta de sinais partilhados, como também a evolução destes sinais para os sinais matemáticos pretendidos.

De acordo com a autora, o primeiro e crucial passo no processo de mediação semiótica consiste em promover o emergir de signos relacionados com o próprio uso do artefacto, e então uma primeira classe de situações pode ser caracterizada pela necessidade de promover a produção de signos pelos alunos. Geralmente, essa necessidade ocorre logo no início de uma discussão em sala de aula, mas pode também surgir no decorrer da discussão: por exemplo, quando as contribuições dos alunos falham ou param de acrescentar conteúdo à discussão. Em suma, em todos estes momentos em que a produção de signos deverá começar ou recomeçar, deverá dar-se uma intervenção intencional e explícita, por parte do professor, denominada por retorno *à tarefa* com o objetivo de:

- promover a produção de signos pessoais pelos alunos, relacionados com o uso do artefacto;
- construir um contexto partilhado com estes signos através do evocação do real contexto do artefacto;
- obter contribuições de todos os alunos, no maior número possível.

Uma intervenção típica poderá ser "quem quer relatar a tarefa que foi proposta?... Como concluíste a tarefa?... O que foi pedido na tarefa?".

A *ação de retorno* à tarefa será considerada eficaz se produzir um grande número de contribuições, no entanto, nem todos os elementos emergentes poderão ser relacionados com o potencial semiótico, o que leva à necessidade de selecionar os aspetos pertinentes dos conceitos partilhados no que respeita ao desenvolvimento dos signos matemáticos que constituem o objetivo educativo. Nesses momentos em que existe a necessidade de selecionar aspetos específicos, torna-se essencial uma intervenção intencional (*focalização*) do professor, dirigida a:

- realçar signos (partilhados) específicos, produzidos até esse momento;
- selecionar aspetos pertinentes dos conceitos destes signos (partilhados);
- circunscrever a referência de certos signos a aspetos específicos do uso do artefacto;
- suportar o desenvolvimento da consciência destes aspetos chave nos alunos.

O objetivo é destacar e limitar uma parte da experiência comum dos alunos com o artefacto, em relação ao seu potencial semiótico. Neste caso, são frequentemente observados gestos, e ocasionalmente a simulação de aspetos específicos do uso do artefacto. A mobilização, repetida e alternada, dos dois tipos de ação descritos acima pretende promover a construção de uma rede partilhada de signos que, por um lado, são ancorados ao artefacto em si, e por outro lado, retêm os elementos chave dos seus significados que são pertinentes no que respeita ao desenvolvimento dos signos matemáticos, inerentes ao objetivo da intervenção didática.

No entanto, para Mariotti (2018), a evolução para os signos matemáticos esperados, requer mais intervenções para obter a descontextualização dos signos produzidos do artefacto e o seu uso e a correta e esperada caracterização matemática. Dois tipos adicionais de intervenção podem ser mobilizados para conseguir esta evolução: *solicitar uma síntese* e *oferecer uma síntese*. O desenrolar do *potencial semiótico*, ou seja, o emergir de signos partilhados condensando os aspetos chave, relacionando o artefacto, tanto com a experiência do seu uso, como com a Matemática evocada por esse uso, requer a intervenção do professor para promover a necessidade de generalizar e de descontextualizar os conceitos que emergiram. Neste sentido, o professor ao *pedir uma síntese* tem o objetivo de:
- promover a descontextualização do uso do artefacto;
- promover a generalização com respeito às tarefas específicas;
- manter em ambos os processos anteriores (descontextualização e generalização) os aspetos dos conceitos pessoais reconhecidos como pertinentes ao signo matemático esperado.

Um tal complexo processo semiótico pode ser promovido por uma intervenção do professor que convida os alunos a sumariar o que foi discutido até àquele ponto, e/ou o que os alunos consideram como partilhado na discussão coletiva em curso. De facto, *solicitar uma síntese* não apenas induz os alunos a tornar explícitos os seus significados pessoais, mas também os induz a condensar diferentes experiências numa única frase, o que os pode levar a procurar por semelhanças e, ao fazê-lo, promover a generalização. Além do mais, sínteses produzidas durante a discussão coletiva tendem a envolver signos que emergiram previamente, mas também podem incluir signos matemáticos já em uso ou recentemente introduzidos pelo professor. No entanto, segundo a autora, *solicitar uma síntese,* pode ser um procedimento demasiado difícil para ser completamente realizado pelos alunos, mas também é claro que desempenha um papel crucial no processo de mediação semiótica, contribuindo para o desenvolvimento do ambiente semiótico partilhado dentro do qual o professor pode introduzir o ponto de vista da matemática e, eventualmente, uma terminologia padrão.

De facto, quando a discussão já colocou em movimento a descontextualização e a generalização de significados no contexto de uso do artefacto, mas a evolução não pode ainda ser considerada completa, o professor pode intervir com a *oferta da síntese,* referindo-se explicitamente ao contexto matemático e aos seus significados com o objetivo de:
- tornar explícitas as relações entre significados matemáticos e os significados construídos através da discussão na sala de aula;
- introduzir os signos matemáticos pretendidos e fornecer uma formulação matemática;

- ratificar a aceitação e o estatuto matemático de um signo específico.

A *oferta de uma síntese* não pretende parar o processo de mediação semiótica, mas pode constituir um passo intermédio na evolução, providenciando exemplos de descontextualização e de generalização. Por outro lado, a complexidade do processo de mediação semiótica envolvendo a esfera individual e coletiva requer que o professor alterne repetidamente entre *pedidos e ofertas de sínteses* (Mariotti, 2018).

Em suma, o processo de mediação semiótica desenvolve-se em dois níveis diferentes. Por um lado, os alunos usam o artefacto construindo determinados esquemas de utilização para atingir o objetivo de resolver a tarefa. O artefacto pode funcionar como mediador semiótico, ou seja, os significados emergem do envolvimento do sujeito na atividade em relação aos esquemas de utilização e signos individuais que construíram. Por outro lado, o professor utiliza o artefacto e os signos que derivam do seu uso, na realização das tarefas, de acordo com o objetivo educacional específico, que se direciona para os significados matemáticos a abordar. O significado matemático, relacionado ao artefacto, torna-se acessível ao aluno através do seu uso, mas a construção de significados é suportada pela orientação do professor, ao longo da organização das tarefas, motivo pela qual se dá a evolução/construção de significados reconhecidos e aceitáveis matematicamente. Na dialética entre estes dois níveis, a construção social de significados matemáticos ocorre como produto de um processo de internalização orientado pelo professor (Mariotti, 2002, 2005, 2006, 2018).

Tendo em conta uma perspetiva semiótica, o objetivo de orquestrar uma discussão matemática é o de promover o desenvolvimento de significados compartilhados na comunidade sala de aula, reconhecíveis e aceitáveis matematicamente. Este objetivo não contrasta com o objetivo de promover e apoiar a Génese Instrumental dos alunos, mas os dois objetivos além de permanecerem separados, complementam-se (Mariotti, 2006).

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Neste capítulo apresento as opções metodológicas que sustentam o estudo, tendo em consideração as suas peculiaridades, os objetivos, problema central, questões de investigação e conjetura de ensino-aprendizagem ancorada à experiência de ensino.

Posteriormente faço uma menção às questões éticas que regem uma investigação. De seguida apresento o contexto da investigação e participantes, onde é realizada uma descrição da escola e da sala onde decorreu a experiência de ensino, assim como dos alunos que fizeram parte do grupo, estudo de caso. Por último, evidencio os procedimentos inerentes à recolha e análise de dados.

3.1. Opções metodológicas

Sendo a Matemática uma disciplina "onde se regista um elevado insucesso, a introdução de pequenas mudanças no processo de ensino, podem ajudar os alunos a modificar a sua atitude face a esta disciplina" (Pedro, 2013, p. 107). Tendo em consideração esta problemática, os investigadores devem de ter o cuidado de promover ambientes de ensino e aprendizagem mais proveitosos e que decorram num período de tempo mais alargado (Gravemeijer & Cobb, 2006) de modo a percecionar a evolução dos alunos (Steffe & Thompson, 2000).

Por conseguinte, as opções metodológicas subjacentes a este estudo, tendo em consideração os objetivos, têm por base uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa e descritiva (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2012). O estudo assume uma metodologia de investigação *Design Research*[23] (Cobb, 2000; Confrey, et al., 2001; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), na modalidade de experiência de ensino, que segundo Clements (2008) é um importante meio de investigação no desenvolvimento curricular.

Dado que a experiência de ensino se realizou em dois ciclos de experimentação[24], com todos os alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade e, posteriormente, com os mesmos alunos no 8.º ano de escolaridade[25], decidi pela modalidade estudo de caso, de modo a obter uma observação, compreensão e descrição mais minuciosa e dados mais consistentes, sobre a atividade dos discentes. Neste sentido, foram escolhidos quatro alunos, que constituem o grupo, estudo de caso.

---

[23] Na literatura atual, também se podem encontrar designações como *Design-Based Research (Investigação Baseada em Design – IBD), Design Experiments, Design Studies e Development Research.*

[24] O primeiro ciclo de experimentação foi denominado por CE1 e o segundo ciclo de experimentação foi designado por CE2, nos anos letivos de 2016/2017 e 2017/2018, respetivamente.

[25] Excepto aqueles que não transitaram no 7.º ano de escolaridade, e no caso de uma aluna, que pediu transferência da escola.

Neste estudo, de acordo com o modelo de atividade segundo Engeström (2001), pretendo compreender e analisar como é que a evolução da Génese Instrumental de Rabardel (1995), promove o desenvolvimento de *Ciclos Didáticos* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2012), quando os alunos realizam tarefas com recurso à calculadora gráfica. Por outro lado, pretendo analisar o papel da professora no processo de mediação semiótica, tendo em consideração as *Ações Complementares*[26] descritas por Mariotti (2018), na construção de significados matemáticos, pelos alunos.

O principal objetivo do estudo assenta no facto de investigar como é que a integração do artefacto, calculadora gráfica, na realização de tarefas, promove a construção de significados matemáticos no desenvolvimento de algumas unidades de ensino. Elencado a este objetivo, pretendo analisar: • Como é que os alunos usam as funcionalidades específicas da calculadora gráfica quando realizam uma tarefa; • Como é que é possível relacionar o uso da calculadora gráfica com a aprendizagem matemática dos alunos; • Qual é o papel da professora na exploração das potencialidades didáticas da calculadora gráfica.

Para alcançar os objetivos, pretendo dar resposta ao seguinte problema central:

Como é que a integração do artefacto, calculadora gráfica, na resolução das tarefas e a orquestração da professora na discussão coletiva, apoiam a construção de significados matemáticos, no desenvolvimento de algumas unidades de ensino presentes no currículo?

Este problema central compreende um conjunto de outras questões de âmbito mais específico, nomeadamente:

• *Quais os esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada, desenvolvidos pelos alunos, quando usam o artefacto, calculadora gráfica?*

• *Como é que os esquemas mobilizados pelos alunos, contribuem para o desenvolvimento do potencial semiótico do artefacto, calculadora gráfica?*

• *No ambiente social, a aula, como é que a professora orienta a evolução de significados pessoais, relacionados com a tarefa e o artefacto, calculadora gráfica, para significados matemáticos?*

Dado que o *Design Research* constitui uma forma de lidar com a complexidade inerente às peculiaridades dos contextos educativos, com a realização desta experiência, além de se pretender responder às questões de investigação fundamentadas no problema central, pretendo validar a conjetura de ensino-aprendizagem. Pois, aliada à realização de uma experiência de ensino, existe sempre uma conjetura de ensino-aprendizagem (Cobb et al., 2003), Neste sentido, tendo como foco o trabalho desenvolvido pelos alunos que constituem o estudo de caso, relativamente à conjetura de ensino-aprendizagem, assumo hipoteticamente, que *quando a aprendizagem decorre*

[26] "*Ação de retorno à tarefa e ação de focalização*" e "*solicitar uma síntese e oferecer uma síntese*".

no ambiente social da aula e se promovem produções individuais ou em pequeno grupo, resultantes da realização de tarefas com recurso à calculadora gráfica e posterior discussão coletiva, orquestrada pela professora, pode gerar-se um percurso potente, na construção de significados matemáticos.

3.1.1. Investigação Qualitativa e interpretativa

A investigação qualitativa "… descreve os fenómenos por palavras em vez de números ou medidas" (Wiersma, 1995, p. 12). A investigação qualitativa está associada a pesquisas em que o investigador desconhece as variáveis e através da exploração aprende com os participantes. As questões de investigação são formuladas de uma maneira minuciosa para que o investigador fique o mais esclarecido possível. O investigador qualitativo envolvido no seu ambiente natural, deve realizar uma observação participante intensa em grandes períodos de tempo e tomar uma visão interpretativa dos resultados do estudo (Bogdan & Biklen, 1994; Denzin & Lincoln, 1994; Erickson, 1986). Deve descrever experiências pessoais e relatar como colaborou com os participantes durante as fases do projeto, fazendo uma análise dos dados de uma forma reflexiva, evidenciando que meditou sobre as suas tendências, valores e prossupostos (Creswell, 2012). No entanto, nunca deverá fazer uma generalização dos resultados do estudo, para outras situações, na medida em que noutros ambientes podem não se verificar os mesmos resultados (Savenye & Robinson, 2001).

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a investigação qualitativa apresenta cinco características:

> **1.** Na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o elemento essencial. Durante grandes períodos de tempo, os investigadores introduzem-se, nos locais do estudo, pois consideram que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre.
>
> **2.** A investigação qualitativa é descritiva. Os resultados escritos irão incluir citações em forma de palavras ou imagens. Após a descrição dos dados passa-se à análise dos mesmos, onde se respeitará o mais possível a forma como os resultados foram registados ou transcritos.
>
> **3.** Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Todo o processo de investigação é importante, compreendendo o que foi acontecendo e o resultado final. Todos os dados recolhidos e analisados serão cruciais para, posteriormente, compreender o objeto de estudo.
>
> **4.** Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. À medida que os dados são recolhidos e o investigador constrói uma relação com os sujeitos, vão sendo concebidas premissas que assentam nos princípios subjacentes a uma teoria descoberta. Uma teoria desenvolvida nestes termos processa-se de "baixo para

cima" e não de "cima para baixo", com base no inter-relacionamento dos dados recolhidos. O processo de análise dos dados vai afunilando, pois inicialmente as coisas estão mais abertas, tornando-se cada vez mais fechadas e específicas.

5. Na abordagem qualitativa o significado das coisas é de extrema importância, nomeadamente o "porquê" e "o quê". Investigar implica também interpretar. Os significados são construídos em conjunto, entre o investigador e os respetivos sujeitos, uma vez que a interpretação não se trata de uma ação autónoma. Existe uma grande preocupação no registo fidedigno e rigoroso do modo como são interpretados os significados. O investigador ao permanecer em constante procura, pode chegar a factos que não estava à espera ou até dar relevo a pormenores que lhe pareciam inicialmente, de menos importância.

Ao recorrer a uma abordagem qualitativa, um investigador deverá ser extremamente rigoroso e atento nas suas observações, no que concerne à recolha dos dados. Um investigador deve ter consciência das suas opiniões e manter-se à margem das ideias e imagens estereotipadas que pode ter em relação aos sujeitos. Essa recolha dos dados deve-se reunir em bases de dados e deve conter o máximo de informação para o relatório final da investigação. Essa informação pode ser coletada através da observação, entrevistas, gravações áudio transcritas, relatórios escritos e fotografias (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2012).

3.1.2. Design Research

Design Research é uma metodologia que tem sido utilizada na educação, cujo objetivo é desenvolver, testar, implementar e difundir práticas inovadoras de ensino e aprendizagem, em que a tecnologia poderá ser um possível recurso (Kelly, 2003). Trata-se de uma forma de investigação intervencionista que cria e avalia novas condições de aprendizagem. Os resultados desejados incluem novas possibilidades para as práticas educacionais e novos conhecimentos relativamente ao processo de aprendizagem. Não se estuda o que existe, mas sim o que pode vir a ser (Schwartz, Chang & Martin, 2008). Tem o propósito de fomentar teorias que expliquem o modo como se processa a aprendizagem à custa de um ensino empírico, sendo crucial especificar os meios utilizados que conduzem aos sucessivos raciocínios dos alunos, culminando com uma melhoria do processo educativo (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schaube, 2003; Gravemeijer & van Eerd, 2009). O resultado incide numa maior compreensão de uma ecologia de aprendizagem, que é interpretada como um sistema complexo e interativo que envolve a necessidade de criação e compreensão do funcionamento de vários elementos de diferentes tipos e níveis, que em conjunto apoiam a aprendizagem. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem normalmente incluem as tarefas ou problemas que os alunos são convidados a resolver, os tipos de discurso que são incentivados, as normas de participação que são estabelecidas, as ferramentas e materiais fornecidos, e os meios práticos de que os professores em sala de aula podem orquestrar as relações entre estes elementos (Cobb et al., 2003).

Segundo Collins, Joseph e Bielaczyc (2004) o incremento da *Design Research* deve-se à necessidade de abordar vastas questões teóricas em contextos reais, relativamente à natureza da aprendizagem e obter resultados inerentes a pesquisas no domínio da avaliação formativa.

Alguns autores apontam vários tipos de *Design Research,* nomeadamente:

- *one-to-one* realização de uma série de sessões de ensino, conduzidas por uma equipa de investigação, entre o professor/investigador e um pequeno grupo de alunos, cujo o objetivo é criar uma versão em pequena escala de uma ecologia de aprendizagem podendo esta ser posteriormente estudada em profundidade e detalhe (Cobb et al., 2003; Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000);
- experiências em sala de aula em que os investigadores colaboram com o professor, podendo este ser um membro da equipa de investigação (Cobb, 2000; Confrey, et al., 2001; Cobb at al , 2003);
- experiências de desenvolvimento profissional no âmbito da formação de professores, sob a orientação de uma equipa de investigação (Simon, 2000);
- desenvolvimento de estudos com professores em serviço, apoiados por investigadores cujo objetivo é apoiar o desenvolvimento de uma comunidade profissional (Lehrer & Schäuble, 2000);
- experiências de ensino relacionadas com escolas e agrupamento de escolas, onde uma equipa de investigação colabora com os professores, administradores escolares, e outras partes interessadas para apoiar numa possível alteração organizacional (Confrey, Bell, & Carrejo, 2001).

Para Cobb et al. (2003), existem cinco características transversais que se aplicam à metodologia *Design Research*:

1. Desenvolvimento de teorias sobre o processo de aprendizagem e os meios que são necessários para suportar essa aprendizagem, numa perspetiva individual de cada aluno, numa comunidade sala de aula, numa comunidade de ensino profissional ou numa escola ou agrupamento de escolas;

2. Natureza intervencionista, pois recorre a práticas inovadoras cujo objetivo é produzir novas formas de aprendizagem, possibilitando melhorias a nível educacional;

3. Cunho prospetivo na medida em que as investigações implementadas têm em conta um processo hipotético de aprendizagem e os meios de apoio que asseguram essas conjeturas, tendo como objetivo promover alternativas de aprendizagem e desenvolvimento; cunho reflexivo, pois o *design* inicial é uma conjetura relativamente aos meios que suportam uma forma de aprendizagem para ser testada;

4. Os aspetos prospetivos e reflexivos resultam numa característica interativa, desenvolvendo "ciclos de intervenção e revisão", na medida em que as conjeturas que inicialmente são geradas podem ser refutadas e posteriormente desenvolvidas e testadas;

5. As teorias desenvolvidas durante a investigação não estão apenas preocupadas com processos de aprendizagem envolvidos, mas também com o aspeto prospetivo da mesma, pois é fundamental saber "qual o caminho a seguir?", na medida em que as mesmas não servem apenas para um domínio específico, mas podem ser direcionadas para outros domínios.

Também Cobb, Jackson e Dunlap (2016) evidenciam cinco características transversais específicas nas investigações que adotem esta metodologia:

1. Abordagem de situações problemáticas que surgem aos professores no processo de ensino e aprendizagem;
2. Natureza intervencionista;
3. Articulação entre a teoria e a prática, existindo a necessidade de que os resultados da investigação facilitem a resolução de problemas na prática;
4. Construção de ciclos de iteração de *design* e análise, se for necessário alterar as conjeturas inicialmente formuladas sobre o processo de ensino-aprendizagem, depois de serem revistas;
5. Construção de uma teoria, de modo a englobar um conjunto mais vasto de episódios de sala de aula.

Confrontando as características elencadas pelos vários autores, concluo que *Design Research* se trata de uma metodologia, intervencionista, direcionada para articulação entre a teoria e prática, orientada para a construção de uma teoria e uma maior compreensão da ecologia de aprendizagem, com a construção de ciclos de aprendizagem, cujo objetivo é melhorar o processo ensino-aprendizagem.

3.1.3. Experiência de ensino

Uma experiência de ensino enquadra-se numa das modalidades de *Design Research* (Confrey et al., 2001).

De acordo com vários autores, a implementação de uma experiência de ensino em sala de aula, obedece a várias fases: preparação, experimentação e análise retrospetiva do estudo de investigação.

- A fase de preparação incide numa clarificação das intenções teóricas subjacente à descrição de conjeturas sobre anteriores aprendizagens, especificação dos objetivos e recursos inerentes à concretização do estudo. Nesta fase, se houver carência de investigações preliminares, pode haver a necessidade de realizar um estudo piloto, desenvolvendo-se novos métodos para avaliar o raciocínio dos alunos, tendo em conta os objetivos do mesmo. De modo a documentar adequadamente a ecologia de aprendizagem, devem ser elaboradas as respetivas planificações em que figurem várias formas de recolha de dados.

- A fase de experimentação do estudo é inerente à implementação do mesmo, na sala de aula, onde o professor/investigador analisa os raciocínios dos alunos e testa e revê as conjeturas inicialmente propostas. Com o propósito de analisar a evolução das conjeturas e realizar possíveis questões sobre as mesmas, durante o decorrer do estudo deve-se recorrer a alguns instrumentos de recolha de dados, tais como a observação participante, relatórios escritos dos alunos e registos áudio e vídeo. Múltiplas fontes de dados asseguram que a análise retrospetiva do estudo empiricamente fundamentado tenha credibilidade, na medida em que o mesmo fará parte de ciclos subsequentes de conceção.

- Na última fase será realizada uma análise retrospetiva, que poderá contrastar com as análises que foram feitas no decorrer do estudo, na medida em que estas tiveram o objetivo de apoiar a aprendizagem dos alunos. A análise retrospetiva dos resultados relata situações de aprendizagem, em que se desenvolveram conjeturas testáveis tendo em conta os meios que foram utilizados. Existe a necessidade de explicar "O que funcionou" sustentado pela preocupação de clarificar "como, quando e porque" funcionou. A intenção é construir um *design* em que figurem conjeturas relativamente às várias mudanças de raciocínio dos alunos e os meios para apoiar essas mudanças (Cobb et al., 2003; Cobb et al., 2016).

Segundo Cobb et al. (2003) a realização de uma experiência de ensino pressupõe a conceção de uma conjetura de ensino-aprendizagem. Neste sentido, a experiência de ensino apresentada foi apoiada por uma conjetura de ensino-aprendizagem, como já foi referido anteriormente. Foi uma intervenção longa, que decorreu em dois ciclos de experimentação, sendo cada ciclo formado por vários microciclos[27], onde se processou uma correspondência entre a conjetura gerada e os constituintes do ensino - currículo, métodos de ensino, a função do professor e métodos de avaliação (Confrey & Lachance, 2000).

Na fase da preparação, cada microciclo serviu de orientação para proceder à adaptação do microciclo seguinte, tendo em conta a análise retrospetiva, proveniente da observação e análise dos procedimentos dos alunos na fase da experimentação (Gravemeijer & Cobb, 2006).

Por outro lado, segundo Confrey e Lachance (2000), a conjetura de ensino-aprendizagem que conduz uma experiência de ensino, deve de conter uma dimensão de conteúdo e uma dimensão pedagógica. Ambas as dimensões se encontram articuladas. A dimensão do conteúdo, está relacionada com aquilo que se pretende ensinar em termos de conteúdos matemáticos: “o que deve de ser ensinado?” (p. 235), a dimensão pedagógica está ligada à dimensão do conteúdo, no que concerne ao modo como o mesmo deve de ser ensinado, em termos de tarefas a propor e recursos a utilizar: “como é que este conteúdo deve de ser ensinado?” (p. 235).

[27] Interpretamos microciclo, como sendo a realização de cada tarefa.

No presente estudo, a dimensão do conteúdo esteve associada ao que se pretendeu ensinar, no que concerne às diversas unidades de ensino que foram moldadas (Gimeno, 2000), depois de terem sido apresentadas no currículo prescrito (MEC, 2013).

A dimensão pedagógica, em que se perspetivou a consolidação da dimensão anterior, foi fundamentada num ensino exploratório (Canavarro, 2011; Ponte, 2005) com a integração da calculadora gráfica na realização de tarefas diversificadas, no ambiente social de aprendizagem da aula (Engeström, 2001). Neste contexto, promoveram-se produções individuais/pequeno grupo e a discussão coletiva, orquestrada pela professora (Bussi & Mariotti, 2008; Stein et al., 2008; Mariotti, 2018).

Como já foi referido anteriormente, a experiência de ensino apresentada, foi dinamizada por mim, como professora titular da turma, tendo assumido o duplo papel de professora e investigadora. Dediquei uma grande disponibilidade de tempo[28] e esforço intelectual, na medida em que permaneci sozinha com os alunos durante o decorrer da experiência de ensino. Necessitei, por vezes, de colmatar alguns problemas que surgiram, nomeadamente no início, quando os alunos demonstraram algumas dificuldades em manipular o artefacto, calculadora gráfica. Por outro lado, o processo foi facilitado na medida em que, como investigadora estava inteiramente integrada no estudo, dominava os conteúdos a serem explorados, fui ouvinte, orquestrei as discussões e fui avaliadora (Confrey & Lachance, 2000).

3.1.4. Estudo de Caso

O estudo de caso traduz-se na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico (Bogdan & Biklen, 1994). É implementado quando se pretende recolher dados em profundidade, isto é, quando existe um plano de investigação que envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida: "o caso". O caso pode ser um individuo, um personagem, um pequeno grupo, uma organização, uma decisão, uma politica, um processo, um incidente ou um acontecimento imprevisto. Num estudo de caso, de modo a estudar o caso em profundidade no seu ambiente natural, deve-se recorrer a todos os métodos que se revelem apropriados (Punch, 1998; Yin, 2004).

O estudo de caso é uma estratégia de investigação predominantemente qualitativa, que se adapta a estudos que envolvem situações de natureza descritiva, em que se pretende responder a questões "como" e o "porquê". Pode ser conduzido aos objetivos de explorar, descrever ou ainda explicar (Yin, 2004). No entanto, um investigador que realize o estudo de caso não deve ter pressa

[28] Esta situação culminou com o não cumprimento da planificação de algumas unidades de ensino, em tempo real, tendo sido lecionadas aulas extra aos horários da professora e dos alunos.

em tirar conclusões, deve ter cuidado com interpretações precipitadas. Um bom estudo de caso deve ser paciente e reflexivo (Stake, 2016).

Em síntese, existem cinco características desta abordagem metodológica:

- o estudo de caso é um sistema limitado em termos de tempo, eventos ou processos, sendo fundamental o investigador definir as fronteiras do caso de uma forma o mais clara e precisa, possível (Creswell, 2012);
- o estudo de caso foca-se sempre em "algo", sendo imprescindível identificar o mesmo, de modo a conferir foco e direção à investigação;
- o estudo de caso tem sempre uma finalidade holística (sistémica, ampla, integrada), isto é, visa compreender o caso no seu todo e na sua unicidade (Punch, 1998);
- a investigação decorre no ambiente natural;
- o investigador recorre a várias fontes de dados e utiliza métodos de recolha muito diversificados: observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, narrativas, registos áudio e vídeo, diários, cartas, documentos (Coutinho, 2015).

O investigador tem de escolher uma organização, que pode ser uma escola, como sucede neste estudo. Posteriormente, terá de observar a organização de modo a escolher o foco do seu estudo, que pode ser um local na escola, um grupo em particular ou qualquer outro aspeto. Por exemplo, a palavra grupo é utilizada numa perspetiva sociológica, na medida em que se refere a pessoas que "interagem, que se identificam umas com as outras e que partilham expectativas em relação ao comportamento umas das outras" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 91).

Dentro da escola, o foco do estudo foi o grupo, estudo de caso, onde minuciosamente foram investigadas as ações de quatro alunos, tendo sido adotados os nomes fictícios de Maria, José, Pedro e Berta. A seleção destes alunos baseou-se em certos critérios, tais como, o seu percurso académico no que concerne à disciplina de Matemática, boa capacidade oral e escrita, diversidade de género, bom comportamento, disponibilidade e motivação para colaborar no estudo.

3.2. Questões de ética

Em investigação, a ética consiste na adoção de certos procedimentos por parte do investigador que não devem negligenciados. No domínio das Ciências Sociais e Humanas existem duas diretrizes no que concerne às investigações com seres humanos: o consentimento informado e a proteção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos. Tais procedimentos tentam garantir que os sujeitos participem voluntariamente nos projetos de investigação, consciencializados da natureza do estudo, dos perigos e obrigações nele envolvidos. Por outro lado, os sujeitos não são expostos a riscos superiores aos ganhos que daí possam resultar. Estes mecanismos são dados aos sujeitos sob a forma de formulários contendo uma descrição do estudo, informando o que se pretende com os resultados e outras informações relevantes. Por sua vez, a assinatura desse documento pelo sujeito é a prova de um consentimento informado (Bogdan & Biklen, 1994).

Existem vários princípios éticos a serem adotados numa investigação qualitativa:

- As identidades dos sujeitos devem de ser protegidas, de modo que os dados recolhidos pelo investigador não possam causar qualquer tipo de transtorno ou prejuízo. O anonimato deve de ser garantido, tanto nos relatos verbais recolhidos durante a observação, assim como no material escrito. O investigador deve de ter o máximo cuidado de modo que a informação que partilha, não venha a ser utilizada de forma pessoal ou política. Por outro lado, o investigador não deve revelar a terceiros, informações sobre os sujeitos.
- Os sujeitos devem ser tratados com respeito e devem de ser informados sobre os objetivos da investigação, de modo a ser facilitada a sua cooperação e propiciar-se o seu consentimento na mesma. Os investigadores não devem mentir aos sujeitos, nem registar conversas ou imagens sem o conhecimento dos mesmos.
- Se existir algum tipo de negociação entre os sujeitos e o investigador, a mesma deve ser cumprida na integra. Um investigador deve respeitar e manter a sua palavra até ao fim do estudo, relativamente aos acordos de participação que realizou com os sujeitos.
- O investigador deve de ser autêntico na descrição dos resultados, mesmo que por razões ideológicas não sejam os que mais lhe agradam. Distorcer dados, constitui o pecado mortal de um cientista (Bogdan & Biklen, 1994).

Por outro lado, o acesso ao campo de investigação deve contemplar as devidas autorizações. Se numa primeira fase, existir uma certa complicação nesse consentimento, o investigador deve de ser persistente, flexível e até mesmo criativo.

No presente estudo, numa primeira etapa foi solicitada autorização à Direção da Escola[29], por escrito, relativamente à intenção de implementar a investigação, explicando os objetivos, métodos de recolha de informação (diário de bordo, gravações áudio de algumas aulas, relatórios escritos dos alunos e imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, no decorrer da realização das tarefas), duração da participação e potenciais benefícios. Após este consentimento, solicitou-se a autorização aos Encarregados de Educação[30], também por escrito, para os seus educandos participarem no estudo, tendo-se dado conhecimento das intenções, nos moldes descritos anteriormente. Em ambos os casos, imprescindivelmente, garantiu-se a confidencialidade, isto é, assumiu-se que os dados recolhidos e divulgados da investigação não "denunciariam" os participantes envolvidos, tendo sido escolhidos nomes fictícios para os alunos que constituíram o grupo, estudo de caso, como foi referido anteriormente.

[29] Anexo 1
[30] Anexo 2

Também, tendo em consideração as questões éticas inerentes a uma investigação, neste estudo, mantive o anonimato da escola, onde a experiência de ensino foi realizada (Bogdan & Biklen, 1994).

3.3. Contexto da investigação e participantes

Como já foi referido anteriormente, o trabalho de campo iniciou-se no terceiro período do ano letivo de 2016/2017 e foi retomado no final do primeiro período do ano letivo de 2017/2018, até meio do terceiro período, desse mesmo ano letivo. No primeiro ciclo de experimentação, o estudo incidiu numa turma do 7.º ano de escolaridade e no segundo ciclo de experimentação, na mesma turma, mas no 8.º ano de escolaridade.

Nesta investigação, a Teoria da Atividade (Engeström, 2001) foi um dos suportes teóricos que sustentou a análise dos dados. Neste sentido, a unidade de análise foi o sistema de atividade dentro da sala de aula, que envolveu mediações múltiplas, na medida em que todos os elementos se relacionaram entre si. Por exemplo, a relação entre o "sujeito"[31] e o "objeto"[32] foi mediada pelo "artefacto mediador"[33] e pela "comunidade"[34].

Encontrando-se a sala de aula onde se implementou a experiência de ensino, inserida numa escola pública e básica, 2.º e 3.º ciclos, do distrito de Setúbal, procedeu-se à sua descrição, e consequente caracterização da escola e do seu meio envolvente, recorrendo ao seu Projeto Educativo.

Dado que todos os alunos da turma foram participantes, tendo recaído uma observação mais minuciosa sobre quatro alunos que constituíram o grupo, estudo de caso, realizou-se um estudo geral da turma, tendo em consideração vários aspetos, como: composição e nível etário, percurso escolar dos alunos, enquadramento socioeconómico, expetativas, motivações e interesses dos alunos. Por outro lado, de acordo com os pontos focados anteriormente, fez-se uma descrição mais detalhada dos alunos que participaram na investigação.

[31] Alunos dos 7.º e 8.º anos de escolaridade.
[32] Objetivo didático de cada tarefa.
[33] A calculadora gráfica TI-nspire, foi o artefacto mediador na realização de tarefas.
[34] Professora e alunos da turma.

3.3.1. A escola onde se realizou a experiência

A experiência realizou-se numa escola sede de Agrupamento, sendo a mesma uma escola básica dos 2.º e 3.º ciclos. A oferta formativa do agrupamento insere-se na modalidade de ensino diurno, na educação pré-escolar, 1.º ciclo, 2.º ciclo, 3.º ciclo e Percurso Curricular Alternativo (PCA). A população discente é constituída por crianças e jovens, cujas idades oscilam entre os 3 e os 18 anos.

O concelho onde o agrupamento se situa, está localizado na região da Grande Lisboa, pertencente ao distrito de Setúbal. Os alunos são oriundos de algumas freguesias distintas, sendo as mesmas bastante diversificadas no que concerne às suas características socioeconómicas o que se reflete numa heterogeneidade nos aspetos culturais e sociais, dos mesmos. Por outro lado, a situação socioeconómica das famílias evidencia o elevado número de alunos beneficiários da Ação Social Escolar, que ao longo dos anos tem aumentado.

A missão do agrupamento reside na promoção do sucesso educativo e na valorização da formação pessoal e social dos alunos, envolvimento e participação dos Encarregados de Educação no percurso escolar dos seus educandos e parceria com diferentes entidades.

Para cumprir/responder aos objetivos da missão desenvolvem-se: Percursos Curriculares Alternativos; Projetos Pedagógicos; Plano de Promoção do Sucesso Escolar; Assessorias Pedagógicas (coadjuvação e apoios educativos); Projeto de Tutorias; Atividades de Enriquecimento Curricular. No entanto, para a concretização destes projetos, o agrupamento conta com várias parcerias, nomeadamente: Associação de Pais e Encarregados de Educação, Autarquia, Guarda Nacional Republicana (GNR) – Programa "Escola Segura", Junta de Freguesia, Centro de Saúde, Comissão de Proteção de Crianças e Jovens (CPCJ) e Bombeiros.

Para colmatar a indisciplina existe na escola sede do Agrupamento, o Gabinete de Intervenção ao Discente (GID).

No âmbito da Educação Especial, o Agrupamento tem como objetivo que todos os alunos usufruam das medidas previstas na legislação em vigor, tendo em conta os recursos materiais, físicos e humanos (três docentes do grupo 910 e uma psicóloga). Por outro lado, pretende-se o desenvolvimento de Programas Educativos Individuais (PEI) e os mesmos tenham em consideração a problemática de cada aluno de modo a proporcionar uma inclusão educativa e social, igualdade de oportunidades, promoção da sua autonomia pessoal e estabilidade emocional e a preparação da transição para o prosseguimento de estudos ou da passagem para a vida pós-escolar, de acordo com o Decreto-Lei nº 54/2018, de 6 de julho de 2018.

3.3.2. A sala onde se realizou a experiência

A experiência realizou-se numa sala de aula denominada por Laboratório de Matemática. Localiza-se no r/c, na parte lateral direita do edifício da escola. É uma sala ampla, bem iluminada, com capacidade para 30 alunos. Em frente à porta de entrada, existe um quadro verde e um quadro interativo, ligado a um projetor. A secretária da professora encontra-se ao centro do quadro interativo e tem duas cadeiras, onde uma delas era utilizada pelo aluno *Sherpa*. As secretárias dos alunos comportam dois alunos em simultâneo e encontram-se dispostas perpendicularmente às janelas e paralelamente aos quadros.

O lado esquerdo da sala é composto por quatro janelas cujo comprimento ultrapassa o meio da parede, para baixo. No lado direito da mesma, existem dois armários, onde se guardam alguns trabalhos dos alunos e Exames Nacionais de Matemática, realizados em anos anteriores. Entre esses armários existem duas arrecadações. Uma delas está vazia, tendo, em tempos, lá funcionado a câmara escura do Clube de Fotografia da escola. A outra arrecadação é direcionada para guardar material didático, inerente à disciplina de Matemática, nomeadamente calculadoras, jogos e material de desenho. Na parede contígua à porta de entrada, está exposta uma fotografia emoldurada com um dual cubo-octaedro, de ferro, que se encontra no espaço exterior da escola.

3.3.3. A turma do 7.º ano do primeiro ciclo de experimentação

A turma do 7.º ano, no ano letivo 2016/2017, era constituída por 29 alunos, 17 alunas e 12 alunos, dos quais 2 eram repetentes. As idades oscilavam entre os 11 anos e os 16 anos, encontrando-se a maioria dos alunos com 12 anos. Maioritariamente o agregado familiar era constituído pelos pais e irmãos, excetuando 5 casos em que os alunos viviam apenas com a mãe e o/os irmão/os. Em quase todos os alunos, a mãe é que era a Encarregada de Educação, encontrando-se a idade compreendida entre os 40 e 45 anos. A habilitação académica variava entre o 2.º ciclo e a licenciatura. Na sua maioria os Encarregados de Educação tinham o 3º ciclo. Apenas cinco deles, tinham licenciatura.

Existiam 10 alunos que usufruíram de Ação Social Escolar. A maioria dos alunos deslocavam-se a pé para a escola.

Quase todos os alunos frequentaram o ensino pré-escolar. Apenas 3 alunos tiveram retenções ao longo do seu percurso escolar.

Predominantemente, os alunos gostavam de ler, embora apenas 5 é que frequentavam a Biblioteca. Referiram que Inglês e Português eram as disciplinas onde sentiam menos dificuldades, contrariamente à Matemática que era a disciplina em que se passava o inverso.

Tratou-se de uma turma onde existiram alguns problemas pontuais de indisciplina, que foram facilmente colmatados.

Usualmente, na sua maioria, os pais faziam um acompanhamento da vida escolar dos filhos, dialogando com os mesmos sobre os resultados escolares no que concerne ao seu aproveitamento nas fichas de trabalho, fichas de avaliação e mensagens na caderneta. Por outro lado, também compareciam nas reuniões e/ou na hora de atendimento na escola.

Relativamente à ocupação dos tempos livres, referiram que viam televisão, navegavam na internet, ouviam música, jogavam no computador e conversavam com os amigos.

Com respeito à profissão que queriam seguir, quatro alunos, referiram que gostariam de ser pediatras, quatro alunos, futebolistas e dois alunos, polícias. Os outros, ainda não tinham opinião formada relativamente a esse assunto.

No final do ano letivo, 7 alunos não transitaram de ano e 1 aluna pediu transferência de escola. Na disciplina de Matemática registou-se 44,38 % de insucesso, o equivalente a 12 alunos terem tido nível inferior a três.

3.3.4. A turma do 8.º ano do segundo ciclo de experimentação

No ano letivo de 2017/2018, os alunos da turma do 7.º ano que transitaram, foram integrados na turma no 8.º ano. A mesma era constituída por 23 alunos, 14 alunas e 9 alunos, dos quais 2 eram repetentes. As idades oscilavam entre os 12 anos e os 15 anos, encontrando-se a maioria nos 13 anos. Predominantemente, o agregado familiar era constituído pelos pais e irmãos, excetuando 5 casos em que os alunos viviam apenas com a mãe e o/os irmão/os. Usualmente, a mãe é que era a Encarregada de Educação, encontrando-se a idade compreendida entre os 40 e 45 anos. A habilitação académica variava entre o 2.º ciclo e a licenciatura, embora a maioria tivesse o ensino secundário e somente seis deles possuíam licenciatura.

Existiam 10 alunos que usufruíam de Ação Social Escolar. Na sua maioria os alunos deslocavam-se a pé para a escola.

Quase todos os alunos frequentaram o ensino pré-escolar. Apenas 3 alunos tiveram retenções ao longo do seu percurso escolar.

Predominantemente os alunos declararam que gostavam de ler, no entanto, apenas 4 frequentavam a Biblioteca. Confidenciaram que as disciplina onde sentiam mais dificuldades eram Matemática e Ciências Naturais, por outro lado, expressaram ser essas as disciplinas onde sentem mais apetência para aprender. No caso da disciplina de Matemática, justificaram que esse entusiasmo se consolidou, quando foi adotada como uma das metodologias no processo de ensino e aprendizagem, o uso da calculadora gráfica.

Foi uma turma onde não existiu qualquer problema de indisciplina.

Normalmente, na sua maioria, os pais faziam um acompanhamento da vida escolar dos filhos. Dialogavam com os mesmos sobre os resultados escolares e no que concerne à visualização das fichas de trabalho, fichas de avaliação, mensagens na caderneta e compareciam nas reuniões e/ou na hora de atendimento na escola.

Relativamente à ocupação dos tempos livres, referiram que costumavam ver televisão, navegar na internet, ouvir música, jogar no computador e conversar com os amigos.

Com respeito à profissão que ambicionavam exercer no futuro, a maioria revelou não saber, mas seis alunos declararam ter a pretensão de ser médicos e três alunos, professores de Educação Física.

No final do ano letivo, todos os alunos transitaram de ano. Na disciplina de Matemática registou-se 43,5 % de insucesso, o equivalente a 10 alunos terem tido nível inferior a três.

3.3.5. Os alunos que fizeram parte do estudo de caso

O **José** terminou o 7.º ano de escolaridade com 12 anos e o 8.º ano de escolaridade com 13 anos. Era um aluno de olhos e cabelo escuros, estatura alta, extremamente simpático, meigo, atento, empenhado e estava sempre disponível para colaborar. Apresentava uma excelente capacidade de argumentação oral, tendo muita facilidade em exprimir o seu raciocínio, que era muito desenvolvido. Ao nível da escrita, revelava algumas falhas a português, pois registava alguns erros ortográficos e usualmente iniciava as frases com letra minúscula. Gostava de estudar sozinho e não tinha ninguém que o ajudasse nas tarefas escolares. Não gostava de ler, mas costumava frequentar a Biblioteca. Vivia com o pai e com a mãe, cujas idades variavam entre os 40 anos e 50 anos. O pai tinha o 12.º ano de escolaridade e a mãe era licenciada. Frequentou o ensino pré-escolar. Matemática e Inglês eram as disciplinas onde sentia menos dificuldades. Não beneficiava do subsídio da Ação Social Escolar.

Os pais do José costumavam fazer um acompanhamento da situação escolar do seu educando. No entanto, não conversavam muito com o José sobre os seus resultados escolares. Provavelmente por ser um excelente aluno em comportamento e aproveitamento.

O José ocupava os seus tempos livres a passear, praticar desporto, jogar no computador e a navegar na internet e gostaria de ser Engenheiro Informático.

No que concerne ao seu percurso na disciplina de Matemática no 1.º ciclo, nos 1.º, 2.º e 3.º anos de escolaridade teve a menção de Muito Bom, enquanto no 4.º ano foi-lhe atribuída a menção de Bom, possivelmente, por ter sido um ano em que os alunos foram submetidos a exame nacional. No 2.º ciclo, no 5.º ano de escolaridade obteve nível 5 e no 6.º ano de escolaridade obteve nível 4. No 3.º ciclo, no 7.º no de escolaridade foi-lhe atribuído nível 4 e no 8.º ano de escolaridade, nível 5. O aluno demonstrou um maior empenho e entusiasmo pela disciplina de

Matemática, a partir do momento em que uma das metodologias de trabalho implementadas na sala de aula foi a resolução de tarefas com a calculadora gráfica.

A **Maria** terminou o 7.º ano de escolaridade com 13 anos e o 8.º ano de escolaridade com 14 anos. Tratava-se de uma aluna de cabelo comprido e claro, olhos claros, estatura baixa, sociável, extrovertida e empenhada, que melhorou significativamente ao longo do tempo a sua postura, a nível de atitudes. O facto de ter entrado na experiência de ensino, tornou-a mais afável. Era muito perfecionista e inúmeras vezes encontrava-se de cabeça baixa, dado que se encontrava a embelezar os apontamentos da aula, com canetas de várias cores, embora tenha sido alertada várias vezes pela professora. Tinha boa capacidade de argumentação oral e escrita, mas por vezes dava respostas desajustadas, dado a sua grande necessidade de realizar com celeridade todas as tarefas. Revelou que gostava de estudar em grupo e que tinha a ajuda da mãe e da explicadora. Gostava de ler e não costumava frequentar a Biblioteca. Vivia com o pai e com a mãe, cujas idades estavam compreendidas entre os 35 anos e os 40 anos. O pai tinha o 9.º ano de escolaridade e a mãe o 12.º ano de escolaridade. Frequentou o ensino pré-escolar. Não referiu disciplinas em que sentisse dificuldades, mas mencionou a disciplina de inglês, como sendo a que sentia mais facilidade. Não beneficiava do subsídio da Ação Social Escolar.

Os pais da Maria faziam um acompanhamento integral da sua vida escolar. Habitualmente conversavam com ela sobre os seus resultados escolares, costumavam ir às reuniões da escola ou comparecer na hora de atendimento para conversar com o Diretor de Turma.

A Maria ocupava os tempos livres a passear, praticar desporto (equitação), jogar no computador e navegar na internet, no entanto, ainda não se tinha consciencializado da profissão que queria ter no futuro.

Relativamente ao seu percurso na disciplina de Matemática no 1.º ciclo, nos 1.º, 2.º e 3.º anos de escolaridade teve a menção de Muito Bom, enquanto no 4º ano foi-lhe atribuída a menção de Bom, supostamente, por ter sido um ano em que os alunos foram sujeitos a exame nacional. No 2.º ciclo, nos 5.º e 6.º anos de escolaridade, obteve nível 4 e no 3.º ciclo, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, nível 5. A aluna evidenciou um grande empenho na resolução de tarefas realizadas com a calculadora gráfica.

O **Pedro** terminou o 7.º ano de escolaridade com 12 anos e o 8.º ano de escolaridade com 13 anos. Era um aluno de cabelo e olhos escuros, estatura média, simpático, sociável, bastante participativo, persistente, demonstrava alguma ansiedade e detestava errar. Por vezes revelava alguma insegurança quando necessitava de argumentar, pois manifestava expressões interrogativas. No entanto, quando entendia o que estava a fazer, revelava boa capacidade de argumentação, oral e escrita. Gostava de estudar sozinho e contava com a ajuda dos pais nos assuntos escolares. Não gostava de ler e frequentava a Biblioteca esporadicamente. Vivia com os pais e o irmão, que frequentava o 1.º ciclo. As idades dos pais oscilavam entre os 35 anos e 45 anos. O pai tinha o 12.º ano de escolaridade e a mãe era licenciada. Frequentou o ensino pré-escolar. Referiu a disciplina de Educação Visual como sendo a que sentia mais dificuldades e a disciplina de Matemática a que tinha menos dificuldades. Não beneficiava do subsídio da Ação Social Escolar.

Os pais do Pedro faziam um acompanhamento constante da sua vida escolar, conversando com ele sobre os seus resultados escolares.

O Pedro ocupava os seus tempos livres a passear, a brincar, ouvir música, ver televisão e jogar no computador. Relativamente à profissão que pretende desempenhar no futuro, mencionou que aspirava algo que esteja relacionado com Informática.

No que respeita ao seu percurso na disciplina de Matemática no 1.º ciclo, nos 1.º, 2.º e 3.º anos de escolaridade teve a menção Excelente, enquanto no 4º ano foi-lhe atribuída a menção de Muito Bom, presumivelmente, por ter sido um ano em que os alunos foram submetidos a exame nacional. No 2.º ciclo, nos 5.º e 6.º anos de escolaridade obteve nível 4. No 3.º ciclo, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, alcançou nível 5. O aluno demonstrou um maior empenho e entusiasmo pela disciplina de Matemática quando uma das metodologias de ensino e aprendizagem implementadas na sala de aula foi a resolução de tarefas com recurso à calculadora gráfica.

A **Berta** terminou o 7.º ano de escolaridade com 13 anos e o 8º ano de escolaridade com 14 anos. Era uma aluna de cabelos compridos e escuros, olhos escuros, estatura alta, simpática, sociável, empenhada e competitiva. Tinha alguma facilidade em argumentar os seus raciocínios fazendo-o de uma forma explicita. Preferia estudar sozinha, contando por vezes com a ajuda da irmã. Gostava de ler e usualmente não frequentava a Biblioteca. Vivia com os pais e com a irmã. As idades dos pais oscilavam entre os 40 anos e 45 anos. O pai tinha o 6.º ano de escolaridade, a mãe, o 9.º ano de escolaridade e a irmã encontrava-se no 1.º ano de uma licenciatura. Não frequentou o ensino pré-escolar e não beneficiava do subsídio da Ação Social Escolar.

Os pais da Berta faziam um acompanhamento da vida escolar da filha. No entanto, possivelmente, devido à sua profissão, raramente se deslocavam à escola para conversar com o Diretor de Turma ou assistir às reuniões.

A Berta ocupava os seus tempos livres a ajudar os pais na profissão, ajudar em casa, ver televisão e navegar na internet. Ambicionava ser médica Pediatra.

No que se refere ao seu percurso na disciplina de Matemática, no 1.º ciclo, nos 1.º, 2.º e 3.º anos de escolaridade, teve a menção Excelente, enquanto no 4º ano foi-lhe atribuída a menção de Muito Bom, provavelmente, por ter sido um ano em que os alunos foram sujeitos a exame nacional. No 2.º ciclo, nos 5.º e 6.º anos de escolaridade obteve nível 4. No 3.º ciclo, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, obteve nível 5. A aluna inicialmente demonstrou algumas dificuldades no processo de instrumentação com a calculadora gráfica, no entanto, com o decorrer do tempo foram sendo ultrapassadas essas limitações, tendo em conta o seu espírito competitivo aliado a uma enorme vontade de brilhar perante o grupo turma.

3.4. Recolha de dados

Para Bogdan & Biklen (1994) "a palavra 'investigação' enfatiza a recolha e análise sistemática dos dados" (p. 283). Estando perante uma investigação qualitativa, segundo alguns autores é fundamental que a recolha dos dados seja realizada através de um vasto número de fontes de informação, de modo a realizar conclusões fidedignas (Cobb, et al., 2003; Molina, Castro & Castro, 2007).

Dado que o objetivo do estudo foi responder às questões da investigação, resultantes do problema central do estudo e validar a conjetura de ensino-aprendizagem, assim que estiveram criadas todas as condições para o desenvolvimento da experiência de ensino[35], iniciei a recolha dos dados que se prolongou por dois anos letivos consecutivos. O primeiro ciclo de experimentação (CE1) operacionalizou-se no final do terceiro período do ano letivo de 2016/2017, no 7.º ano de escolaridade. O segundo ciclo de experimentação (CE2) decorreu entre o final de primeiro período e o meio do terceiro período do ano letivo de 2017/2018, no 8.º ano de escolaridade. Os dados recolhidos foram exclusivamente refentes aos alunos que constituíram o grupo, estudo de caso.

No que concerne à recolha de dados, são várias os métodos próprios de um estudo de caso, inerentes a uma investigação qualitativa, nomeadamente, o diário de bordo, observação participante, fotografias, gravações áudio e vídeos, entrevista, etc (Creswell, 2012). Esses métodos devem de ser rigorosos e consistentes, na medida em que a viabilidade das conclusões depende do rigor e da consistência dos métodos utilizados na recolha de dados (Cobb at al., 2003).

Neste estudo, os métodos de recolha de dados, basearam-se nos relatórios escritos dos alunos, gravações áudio de algumas aulas e as imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica. Também se consolidou a observação participante de aulas, o mais rigorosa, atenta e estruturada possível, tendo recorrido ao diário de bordo, na medida em que assumi o duplo papel de professora e investigadora (Bogdan & Biklen, 1994; Cobb at al., 2003; Creswell, 2012). Enquanto investigadora, como observadora mantive-me discreta a tirei as minhas notas, tendo particular atenção à maneira como as registei, tendo criado os nomes fictícios de José,

[35] Autorização do Diretor do Agrupamento para a realização da experiência de ensino (Anexo I) e Autorização dos Encarregados de Educação para a realização da experiência de ensino (Anexo II).

Maria, Pedro e Berta, para assegurar a privacidade dos alunos. Ao mesmo tempo, sendo a professora titular da turma tinha uma boa relação com os alunos, o que possibilitou o desenvolvimento e a confiança com os mesmos, facilitando a recolha de dados, como investigadora (Bogdan & Biklen, 1994).

3.5 Análise dos dados

O estudo apoiou-se numa experiência de ensino e a análise dos dados que permitiu descrever, compreender e interpretar o percurso dos alunos no decorrer da mesma, foi sustentada pelos métodos de recolha de dados que mencionei anteriormente. Os mesmos fundamentaram-se nos relatórios escritos dos alunos, nas imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, decorrentes da realização das tarefas, nas gravações áudio de algumas aulas, no diário de bordo e na observação participante da professora e investigadora, na medida em que assumi esse duplo papel.

Tratando-se de uma investigação qualitativa, onde usualmente existe uma grande quantidade de dados, foi imprescindível organizar a informação de modo a possibilitar a sua descrição e interpretação (Bogdan & Biklen, 1994). Por conseguinte, na resolução de cada tarefa separei os dados dos grupos dos quatro alunos, que fizeram parte do estudo de caso, dos restantes alunos da turma. Em cada tarefa criei um ficheiro com as imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica e inclui numa pasta com a identificação de cada aluno. Também, procedi em cada tarefa, à gravação do ficheiro das imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, do aluno *Sherpa*[36] (Drijvers & Trouche, 2008).

Conforme se operacionalizou a recolha dos dados, procedi à sua análise (Creswell, 2012), no sentido de reformular, criar, avaliar e fomentar novas condições de aprendizagem. Tendo em consideração a metodologia adotada neste estudo, *Design Research,* pretendi de uma forma intervencionista, produzir novos conhecimentos sobre práticas educacionais que expliquem como se desenvolveu o processo de ensino e aprendizagem, com a integração da calculadora gráfica, através da orquestração da professora (Kelly, 2003; Schwartz, Chang & Martin, 2008).

Embora tivesse sido realizada uma experiência de ensino que decorreu em dois ciclos de experimentação e que se fundamentou num projeto de desenvolvimento curricular, na análise dos dados inerente aos trabalhos dos alunos, foquei-me em quatro tarefas do primeiro ciclo de

---

[36] Este aluno *Sherpa*, tratou-se de um aluno que fez parte do grupo estudos de caso, tendo tido a missão de reproduzir os *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada* que foram desenvolvidos anteriormente, aquando da realização da tarefa. O mesmo encontrava-se sentado na secretária da professora, com a calculadora gráfica conectada ao computador da mesma e projetada no quadro interativo. Esta reprodução contou com a intervenção de todos os alunos e orquestração da professora. No entanto, na análise dos dados, foquei-me apenas na interferência dos alunos que fizeram parte do estudo de caso.

experimentação (CE1). O principal objetivo foi confirmar a conjetura de ensino-aprendizagem e responder às questões de investigação. Essas questões pretenderam dar um maior enfoque às linhas teóricas que constituem os quadros teóricos da Teoria da Mediação Semiótica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), obviamente, em articulação com a Teoria da Atividade (Engeström, 2001) e Teoria da Génese Instrumental (Rabardel, 1995).

Encontrando-me numa comunidade de aprendizagem, na análise dos dados, relativamente ao trabalho de cada aluno na realização de cada tarefa procurei compreender e analisar o papel da calculadora gráfica, no sistema de atividade do aluno com o sistema de atividade da professora.

Assim, analisando as linhas teóricas que constituem o quadro teórico da Teoria da Atividade (Engeström, 2001), pretendi percecionar com que facilidade o aluno construiu o conhecimento matemático, quando envolvido na resolução de tarefas exploratórias com o apoio do artefacto mediador, calculadora gráfica, no ambiente social da aula, regido por regras e divisão do trabalho. Neste ambiente cooperativo de aprendizagem, procurei compreender e analisar, quais os *signos de artefacto* desenvolvidos pelo aluno, na sua *atividade com o artefacto*[37] e na *produção individual/pequeno grupo de signos*[38] através de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada* (Drijvers & Trouche, 2008), ao apropriar-se da calculadora gráfica (Rabardel, 1995), tendo em consideração os aspetos técnicos, inerentes à manipulação deste artefacto e os seus conhecimentos matemáticos.

Deste modo, de acordo com os esquemas desenvolvidos, o aluno, na sua *atividade com o artefacto* comunicou oralmente com os pares e com a professora. Por outro lado, na *produção individual/pequeno grupo de signos*, o aluno[39] comunicou por escrito, sob a forma de relatório, quando apresentou as suas conjeturas. Por conseguinte, na *Produção coletiva de signos - Discussão Matemática*[40], inerente à discussão coletiva, existiu a comunicação entre os alunos e a professora, onde analisei como é que a professora[41] orquestrou a discussão coletiva de acordo com as suas *Ações Complementares*[42], articulando significados pessoais com significados matemáticos, inerentes ao objetivo da tarefa. Deste modo a professora desenvolveu o *potencial semiótico do artefacto*, promovendo o processo de mediação semiótica (Mariotti, 2012a, 2012b, 2018).

Como referi anteriormente, de modo a ser promovida a compreensão e introdução de *significados matemáticos*, os alunos comunicaram oralmente entre os pares e com a professora. Por outro lado, comunicaram com a professora, através da escrita, na realização de relatórios, quando expressaram as suas conjeturas (Bishop & Goffree, 1986). Reportando-me à comunicação

[37] Atividade do *Ciclo Didático*.
[38] Atividade do *Ciclo Didático*.
[39] Ou alunos, conforme o relatório foi realizado, individualmente ou a pares.
[40] Atividade do *Ciclo Didático*.
[41] Com a ajuda do aluno *Sherpa*.
[42] *"Ação de retorno à tarefa e ação de focalização"* e *"solicitar uma síntese e oferecer uma síntese"*.

oral, escrita e visual, para o uso de várias representações que transmitam e facilitem a conceção de ideias matemáticas, neste estudo, foquei-me no uso de *representações ativas, representações icónicas* e *representações simbólicas* (Bruner, 1999).

Reportando-me à análise dos dados, em cada tarefa, numa primeira fase, a mesma foi sustentada pela análise dos registos realizados em gravações áudio, nas imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, em articulação com as notas de campo registadas no diário de bordo, através da observação participante. Nessa observação, na *atividade com o artefacto*[43], apoiei-me na comunicação desenvolvida entre os pares, entre a professora e os alunos, e por outro lado, na comunicação escrita sob a forma de relatórios, aquando a *produção individual/pequeno grupo de signos*[44]. Com esta análise preliminar, objetivei a produção *de signos de artefacto*, através do desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada*.

Numa segunda fase, na análise dos dados apoiei-me de novo, nos registos no diário de bordo, no que concerne à *produção coletiva de signos – discussão matemática*[45], na discussão coletiva. Surgiram os *signos pivot* onde a professora promoveu a passagem *signos de artefacto* para *signos matemáticos,* tendo em conta os *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso,* explanados. Esta discussão coletiva, embora tivesse sido monitorizada pela professora, contou com a presença de um aluno *Sherpa*. Então realizei uma descrição, como é que no ambiente social da aula, a professora orientou a evolução de significados pessoais, relacionados com a tarefa e o artefacto, calculadora gráfica, para significados matemáticos, de acordo com dois pares de *Ações Complementares*, *"ação de retorno à tarefa e ação de focalização"* e *"solicitar uma síntese e oferecer uma síntese"*. No final, apresentei uma síntese da análise dos resultados, onde objetivei sumariar as ações dos alunos, tendo em consideração as questões de investigação e consequentemente os objetivos da tarefa.

Portanto, na análise dos dados, tendo como foco o trabalho desenvolvido por cada aluno, tive como suporte o modelo de atividade segundo Engeström (2001), cujo objetivo foi percecionar como é que a evolução da Génese Instrumental de Rabardel (1995) promoveu o desenvolvimento do *Ciclo Didático* e por sua vez, o papel da professora no processo de mediação semiótica, de acordo com as *Ações Complementares* descritas por Mariotti (2018).

Neste sentido, de acordo com as linhas teóricas que compõem os quadros teóricos mencionados anteriormente, construi um diagrama evidenciado na figura 3.1, de modo a ilustrar como se processou essa análise dos dados. O mesmo teve em consideração o modo como a aprendizagem se desenvolveu, de acordo com as várias relações entre os componentes da atividade humana, onde todos os elementos se relacionam entre si. Neste sentido, a relação entre o sujeito e o objeto foi mediada pelo "artefacto mediador", a relação entre o "sujeito" e a

[43] Atividade do *Ciclo Didático*.
[44] Atividade do *Ciclo Didático*.
[45] Atividade do *Ciclo Didático*.

"comunidade" foi mediada por "regras" e a relação entre o "objeto" e a "comunidade" foi mediada pela "divisão do trabalho". Sendo o "objeto", o elemento que o "sujeito" tentou alcançar[46], através da utilização do "artefacto mediador", a *produção individual/pequeno grupo* de *signos de artefacto* foi evidenciada pelo desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada.*

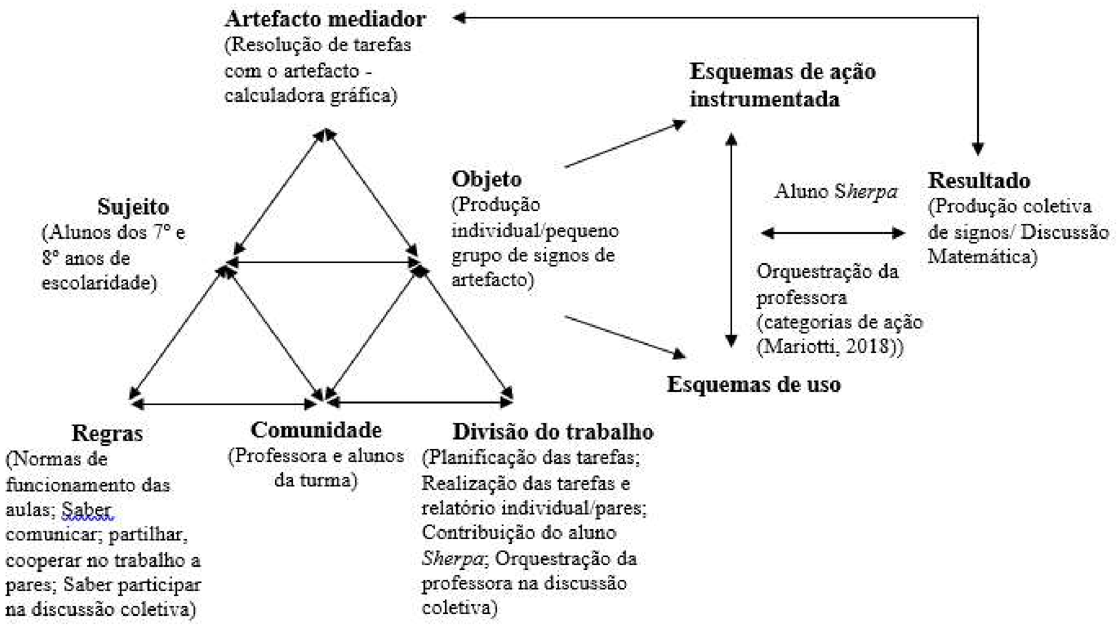


Figura 3.1- Esquema representativo de como a aprendizagem se desenvolveu na realização de cada tarefa, tendo em consideração o Modelo de Atividade segundo Engeström (2001), Génese Instrumental de Rabardel (1995) e as fases do *Ciclo Didático* de acordo com a Teoria da Mediação Semiótica de Mariotti (2012a, 2012b, 2018).

Neste estudo, tendo em consideração a revisão de literatura, adotei a diferenciação entre dois tipos de esquemas de utilização: os *esquemas de ação instrumentada* e os *esquemas de uso* (Drijvers & Trouche, 2008). Os *esquemas de ação instrumentada*, são esquemas mentais construídos pelos alunos, de acordo com os seus significados pessoais. Estes significados, podem ser espontâneos ou matemáticos e necessitam da intervenção dos *esquemas de uso*, para a resolução da tarefa, tendo em conta a sua destreza no que concerne ao manuseamento dos comandos da calculadora gráfica. Por vezes, com os constrangimentos da calculadora gráfica, a utilização de *esquemas de uso*, fazem emergir a necessidade de utilizar *esquemas de ação instrumentada*. Por exemplo, na resolução de uma tarefa, um aluno ao introduzir uma função na calculadora gráfica e o gráfico que a representa, não aparecer no ecrã, tem de ter a capacidade de raciocinar matematicamente e utilizar a ferramenta Zoom correta, que se adapte à situação. Portanto, existe uma relação de dependência entre estes esquemas, na medida em que pode existir

[46] O objetivo didático da tarefa.

a necessidade da intervenção de *esquemas de uso* para se desenvolverem os *esquemas de ação instrumentada* e vice-versa. A mobilização desses esquemas, promove o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto* mediador, calculadora gráfica (Mariotti, 2006).

Continuando a descrição de como a análise se realizou, tendo em consideração o diagrama evidenciado na figura 3.1, por sua vez, o "resultado", onde se deu a *produção coletiva de signos/discussão matemática*, na discussão coletiva e se consolidou a aprendizagem, é evidenciado através do aluno *Sherpa* e da orquestração da professora através das *Ações Complementares*, *"ação de retorno à tarefa e ação de focalização"* e *"solicitar uma síntese e oferecer uma síntese"* (Mariotti, 2018). Por outro lado, existiu uma relação de dependência entre o "resultado" e o "artefacto mediador", na medida em que a intervenção do aluno *Sherpa* conjuntamente com a orquestração da professora[47], na discussão coletiva, necessitou do artefacto mediador para mostrar como a aprendizagem se desenvolveu.

[47] Neste estudo adotei as duas interpretações de orquestração segundo Bartolini Bussi (1998) e por outro lado, de acordo com Trouche (2004b) e Drijvers e Trouche (2008).

CAPÍTULO 4 - EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Neste capítulo descrevo os princípios orientadores da implementação da experiência de ensino. Posteriormente, apresento uma descrição das aulas da primeira fase do processo de instrumentalização com a calculadora gráfica, assim como da planificação das tarefas inerentes ao primeiro e segundo ciclos de experimentação, respetivamente.

4.1. Princípios orientadores da experiência de ensino

A experiência de ensino apresentada inseriu-se no âmbito de um projeto de desenvolvimento curricular. Este projeto refere-se a um estudo de natureza longitudinal, realizado em dois ciclos de intervenção[48], nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, que foi apoiado por uma conjetura de ensino-aprendizagem (Cobb et al., 2003), tendo a mesma sido ancorada a uma dimensão de conteúdo e a uma dimensão pedagógica (Confrey e Lachance, 2000). A dimensão do conteúdo esteve associada ao que se pretendeu ensinar, no que concerne às diversas unidades de ensino que foram moldadas, de acordo com o currículo prescrito (MEC, 2013) e apresentado (Gimeno, 2000). A dimensão pedagógica perspetivou a consolidação da dimensão anterior e foi fundamentada num ensino exploratório (Canavarro, 2011; Ponte, 2005) na realização de tarefas diversificadas, com a integração da calculadora gráfica.

O enquadramento curricular da experiência de ensino, foi sustentado pelas diretrizes do Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), em Portugal. De acordo com este documento, é da responsabilidade das escolas e dos professores definirem as metodologias e os recursos mais adequados, para o cumprimento do currículo prescrito. Mas, as orientações, é que o uso da calculadora no Ensino Básico seja realizado apenas em situações pontuais, como por exemplo, na resolução de problemas que envolvam um elevado número de cálculos.

Como investigadora, assumi também o papel de professora titular da turma. Usufruindo da minha autonomia em termos curriculares, envolvi-me ativamente no desenvolvimento do currículo, em algumas unidades de ensino, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, respetivamente. Depois da planificação anual ter sido feita em grupo, projetei uma planificação individual, com o objetivo de operacionalizar mudanças que proporcionassem a transformação e melhoria dos processos e práticas de ensino e aprendizagem e consequente sucesso educativo dos alunos, culminando com uma inovação curricular (Cobb et al., 2003; Pacheco, 2001). Deste modo, o

[48] Primeiro ciclo de experimentação, denominado por CE1 e segundo ciclo de experimentação, designado por CE2.

currículo prescrito foi interpretado, adaptado, planificado e aplicado, tendo em conta as características dos alunos e as condições de trabalho (Ponte, 2005; Rebelo & Gomes, 2012), tais como, a realização de tarefas com recurso à calculadora gráfica. Por outro lado, não descartando as orientações plasmadas nos documentos inerentes ao currículo prescrito, que referem que o desenvolvimento da compreensão, resulta da mobilização de regras, procedimentos, factos, conceitos e relações (MEC, 2013), adotei essencialmente uma modalidade de ensino exploratório (Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

Em suma, de acordo com o currículo prescrito e o currículo apresentado, em algumas unidades de ensino, o currículo foi moldado, nomeadamente nos domínios de Geometria e Medida, Álgebra e Funções, Sequências e Sucessões, tendo-se procedido ao desenvolvimento do mesmo (Brown, 2009; Gimeno, 2000), através da realização de tarefas diversificadas, com recurso à calculadora gráfica, num contexto exploratório.

No 7.º ano de escolaridade o currículo foi moldado na unidade de “Funções” no domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) e no domínio de Geometria e Medida (GM7) na unidade de “Quadriláteros”. Na última tarefa, como professora e investigadora, pretendi realizar uma conexão entre o domínio da Geometria e Medida (GM9), do 9º ano de escolaridade e o domínio das Funções, Sequências e Sucessões (FSS7), do 7º ano de escolaridade.

No 8.º ano de escolaridade, o currículo foi moldado nas unidades de ensino, “Teorema de Pitágoras”, “Gráficos de Funções Afins” e “Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas”, nos domínios de Geometria e Medida (GM8), Funções, Sequências e Sucessões (FSS8) e Álgebra (ALG8), respetivamente.

As tarefas contextualizadas nos dois ciclos de experimentação seguiram as letras do abecedário e codificaram-se através da nomenclatura CE1- Primeiro ciclo de experimentação e CE2 – Segundo ciclo de experimentação 2. Por exemplo, a tarefa A-CE1, pertenceu ao primeiro ciclo de experimentação e a tarefa A-CE2, estava incluída no segundo ciclo de experimentação.

4.2. As aulas da primeira fase do processo de instrumentalização

Dado que a calculadora gráfica não é um recurso recomendado no 3.º ciclo do ensino básico, à medida que foram introduzidas as tarefas com este artefacto, decorreram aulas onde foram dadas indicações gerais sobre o seu funcionamento[49]. Neste sentido, foi realizada pelos alunos, uma descoberta e seleção de funções relevantes, relativamente à manipulação do artefacto, calculadora gráfica. Os alunos ao terem um primeiro contacto com a calculadora gráfica, além de fazerem o ajuste deste artefacto às suas mãos, deveriam de atribuir sentido a algumas teclas e

[49] A realização destas aulas não foi feita de uma forma consecutiva.

funções da máquina, promovendo-se a primeira fase do processo de instrumentalização (Trouche, 2004b). Pretendeu-se que os alunos ao se apropriarem deste artefacto, percebessem a sua utilidade no que concerne ao tipo de tarefas que pudessem fazer e à maneira como as conseguissem realizar, integrando-o na sua atividade (Rabardel, 1995). Conforme as aulas foram sendo lecionadas e os alunos realizaram as tarefas com a calculadora gráfica, objetivou-se o desenvolvimento da segunda fase do processo de instrumentalização e consequentemente o processo de instrumentação (Trouche, 2004a; Trouche 2004b), promovendo-se o processo de Génese Instrumental (Drijvers et al, 2010; Rabardel, 1995; Trouche, 2004a, 2004b). Pretendeu-se a transformação deste artefacto num instrumento (Artigue, 2002; Trouche, 2000, 2004b; Rabardel, 1995), de modo a ocasionar o surgimento de signos e, por conseguinte, de significados relacionados com os esquemas de utilização[50], promovendo o processo de mediação semiótica (Mariotti, 2012a; 2012b;2018).

Na seguinte tabela existe uma informação detalhada dos tempos letivos em que decorreram momentos inerentes à primeira fase do processo de instrumentalização com a calculadora gráfica:

Tabela 4.1 - Aulas da primeira fase do processo de instrumentalização (aprendizagem do *software* da calculadora gráfica TI-nspire no primeiro ciclo de experimentação - CE1).

Aulas	Tempo	Quando?	Objetivo
Aula n.º 1	90 minutos	Antes de lecionar a unidade de ensino de "Quadriláteros", pertencente ao domínio da Geometria e Medida (GM7).	Aprendizagem sobre o funcionamento geral da calculadora gráfica, com maior incidência na aplicação *Calculadora*.
Aula n.º 2	90 minutos	Quando se iniciou a unidade de ensino de "Quadriláteros", pertencente ao domínio da Geometria e Medida (GM7).	Aprendizagem sobre o funcionamento da aplicação *Geometria.* Resolução da tarefa A-CE1, tarefa B-CE1 e tarefa C-CE1.
Aula n.º 3	90 minutos	Quando se iniciou a unidade de ensino de "Funções", pertencente ao domínio Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) - anteriormente à realização da tarefa D-CE1.	Aprendizagem sobre o funcionamento das aplicações *Listas e Folha de Cálculo e Dados e Estatística*. Resolução da tarefa D-CE1.
Aula n.º 4	90 minutos	Na unidade de ensino de "Funções" - antes da realização da tarefa E-CE1.	Aprendizagem sobre o funcionamento da aplicação *Gráficos*. Resolução da tarefa E-CE1.
Aula n.º 5	90 minutos	Na final da unidade de ensino de "Funções" - anteriormente à realização da tarefa F-CE1.	Aprendizagem de como articular várias aplicações, tais como, *Geometria*, *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística*. Resolução da tarefa F-CE1.

[50] Neste estudo foi adotada a diferenciação entre dois tipos de esquemas de utilização: *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso*.

Aula n.º 1

Nesta aula iniciou-se a primeira fase do processo de instrumentalização, pois o objetivo da mesma fundamentou-se numa aprendizagem sobre o funcionamento geral do artefacto, calculadora gráfica, com uma maior incidência na aplicação *Calculadora.*

De modo a facilitar a compreensão dos alunos e os mesmos seguirem os "passos" da professora, foi distribuída uma máquina[51] a cada aluno e colocada uma calculadora virtual[52] no computador da secretária da docente, que foi projetada no quadro interativo.

A professora iniciou a primeira aula de 90 minutos e todos os alunos se mostraram muito entusiasmados e recetivos em aprender a manusear a calculadora gráfica, pois mantiveram-se sossegados e extremamente atentos. Um dos alunos de tão emocionado que estava, exclamou: "Finalmente vou ter uma destas! Tanto que [eu] pedi à minha irmã para me deixar mexer!".

A professora começou por referir as potencialidades da calculadora gráfica TI-nspire:

> **1. Professora:** Meninos, esta calculadora não é como aquelas que vocês estão habituados. É mais do que uma calculadora! Assemelha-se a um computador portátil. Está equipada com *software* de um computador. Vamos então à descoberta!

Entretanto, projetou a mesma (figura 4.1) no quadro interativo e solicitou que os alunos a ligassem, explicando que o fizessem na tecla 

, apontando com o cursor do computador, para a mesma.

Figura 4.1- Calculadora gráfica TI-nspire que foi utilizada na experiência de ensino.

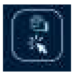
[51] A Texas Instruments concedeu 30 calculadoras gráficas, TI-nspire CX, nos anos letivos de 2016/2017 e 2017/2018, respetivamente.
[52] TI-nspire CX Teacher, foi a versão da calculadora gráfica virtual, colocada na secretária da professora.

Surgiu o ecrã inicial da calculadora gráfica (figura 4.2), onde explicou que se poderia navegar pelos diferentes ícones (aplicações) que estavam apresentados, utilizando o botão que se encontra abaixo, denominado por *touchpad* (figura 4.3).

Figura 4.2 - Ecrã inicial da calculadora gráfica TI-nspire.

Figura 4.3 - *Touchpad* da calculadora gráfica TI-nspire.

A professora explicou que o *touchpad* serve para navegar ou concluir qualquer tarefa que possa ser finalizada utilizando as teclas de setas e a tecla Enter. Neste sentido, informou que o mesmo pode ser utilizado para navegar de duas formas. Por um lado, pode ser usado como um *touchpad* de computador, deslizando o dedo sobre a área central para ativar e mover o cursor do rato. Deve se dar um clique ou toque no centro do *touchpad* para selecionar uma opção de menu ou concluir uma ação. Por outro lado, ao premir as teclas de setas no rebordo exterior do *touchpad* para empurrar o cursor do rato para cima, para baixo, para a esquerda ou para a direita deve se clicar 

 ou premir 

para concluir uma ação. Se premir sem soltar uma tecla de seta, o cursor do rato continua a mover-se nessa direção.

Informou os alunos que podiam manusear o *touchpad* para explorarem as várias aplicações ou então carregassem em 

seguida da tecla 

de modo a visualizarem um "menu" com 7 aplicações[53] (figura 4.4) escolhendo a aplicação *Calculadora*, de modo a poderem explorar a mesma:

---

[53] A calculadora gráfica virtual colocada no computador da professora e projetada no quadro interativo tinha 9 aplicações, dado que se tratava da versão TI- Nspire CX CAS, mas nas calculadoras dos alunos apenas eram visualizadas as primeiras 7 aplicações, dado que se tratava da versão TI- nspire CX.

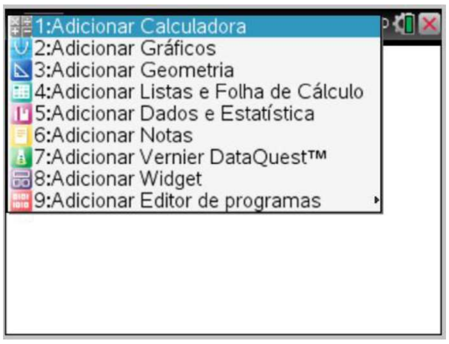


Figura 4.4 - As 9 aplicações da calculadora gráfica, versão TI-nspire CX Teacher, embora nas calculadoras gráficas dos alunos, TI-nspire CX, apenas tenham aparecido 7 aplicações.

2. Professora: Vamos lá investigar! Calculem 2 vezes 4; 12 a dividir por 3; raiz quadrada de 49; raiz cúbica de 27; 3 elevado a 2; 2 elevado a 5! Têm 5 minutos para explorarem! Fazerem os cálculos que quiserem!
3. Maria: Foi muito rápido! Pode repetir mais devagar!
4. Professora: Ok! Eu escrevo no quadro!
5. José: Não consigo fazer a raiz cúbica!
6. Pedro: Eu também não! E também não consigo fazer 2 elevado a 5!

Tendo em conta as dúvidas dos alunos, a professora referiu que quando os alunos necessitassem de fazer uma raiz cúbica ou determinar a potência de um número, poderiam premir na tecla  do lado esquerdo, para aceder aos vários modelos de expressões e selecionar o que pretendiam (figura 4.5), seguida da tecla 

.

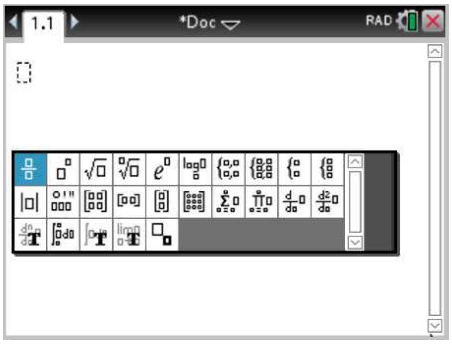


Figura 4.5 - Ícones da aplicação *Calculadora* , na calculadora gráfica TI-nspire, para determinar por exemplo, quocientes e raiz quadrada.

Posteriormente, a professora alertou os alunos que também poderiam determinar o quociente entre dois números, assim como a raiz quadrada de um número. O objetivo era que os alunos percebessem que poderiam usar expressões predefinidas para completar o que pretendessem fazer.

Alguns alunos mostraram-se curiosos com todos os outros ícones, que apareceram no ecrã da calculadora do qual a professora não tinha feito referência:

7. Maria: Para que serve aquele M[54] ao contrário?
8. Berta: E o Pi[55]?
9. Professora: Por agora, esses símbolos não vos interessam! Mais tarde, se seguirem Matemática A e forem para a faculdade, pode fazer falta.
10. Berta: Ah! Que giro! Isto deve de ser módulo! É mesmo!
11. Professora: Amostra lá Beatriz, o que estás a fazer!
12. Berta: Eu carreguei neste símbolo e fiz módulo de menos 3 e deu 3. Portanto, se eu quiser fazer um módulo de um número, eu posso fazer aqui.
13. Professora: Muito bem Berta!

Por outro lado, a professora alertou os alunos que poderiam clicar na mesma tecla, mas do lado direito, tendo à disposição uma diversidade de símbolos matemáticos:

Figura 4.6 - Ícones da aplicação *Calculadora*, na calculadora gráfica TI-nspire, para utilizar vários símbolos matemáticos.

Entretanto, solicitou que os alunos carregassem novamente nas teclas  e  respetivamente, por esta ordem, seguida da tecla  de modo a explorarem a aplicação *Geometria*. De imediato surgiu uma polifonia de vozes:

14. Berta: Stora, o que é isto? O que é que eu faço? Apareceu: "Deseja guardar 'Documento não guardado'?. Clico Sim ou Não?

[vários alunos com a mesma dúvida]

15. José: Isto deve de ser como no computador!? Podemos guardar o que fazemos.
16. Professora: Muito bem José! Peço imensas desculpas! Não vos alertei! Tal como no computador, nesta calculadora, os documentos que fazemos, também podem ser guardados. Como vocês entraram numa nova aplicação, Geometria, vão criar um novo documento. Como anteriormente, tinham estado a trabalhar na aplicação *Calculadora*, surgiu essa caixa de diálogo a perguntar se queriam guardar o documento. Neste caso, selecionam "Não". Mas quando começarmos a fazer as tarefas, têm de guardar tudo com o nome que eu disser. Mas depois eu explico melhor, quando for necessário.
17. José: Oh, stora, não pode explicar agora? Vá lá!

[54] Símbolo de Somatório.
[55] Símbolo de Produtório.

18. Professora: Para guardar um documento clica-se na tecla  e **1: Ficheiro** e depois **5: Guardar como**, como podem ver:

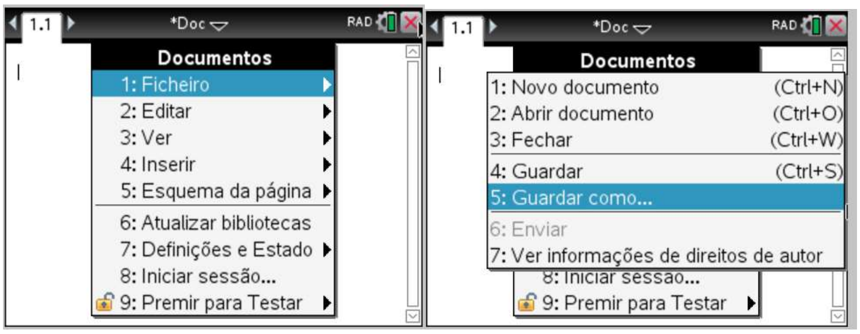
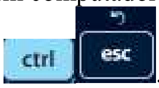


Figura 4.7 - Guardar um documento na calculadora gráfica TI-nspire.

19. Professora: Portanto, já que o José insistiu! Podem escrever nos vossos apontamentos. Uma coisa que eu também me esqueci de dizer, foi o facto de que quando vocês se enganam, tal como num computador, podem voltar atrás e anular o que tinham feito, premindo as teclas . Agora, vamos lá à aplicação *Geometria* e cliquem na tecla . Como podem verificar, encontraram várias funcionalidades para efetuar construções, trabalhar com medidas, etc. Ao colocarem o cursor numa dessas funcionalidades (primeira parte da figura 4.8), vão obter outras funções (segunda parte da figura 4.8), como podem ver:

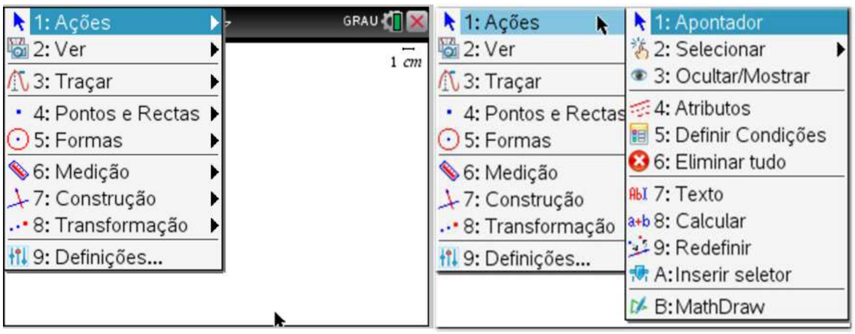


Figura 4.8 - Várias funcionalidades da aplicação *Geometria*, na calculadora gráfica TI-nspire.

Por outro lado, ao premirem sucessivamente as teclas  que funcionam como se tivessem a utilizar o "botão direito do rato", podem encontrar um conjunto de ações rápidas inerentes ao objeto onde se encontra o cursor. Agora explorem! Coloquem todas as dúvidas que tiverem!

Aula n.º 2

Na aula seguinte[56] com a duração de 90 minutos, foi seguido o mesmo modelo da aula anterior. Cada aluno foi portador de uma calculadora gráfica TI-nspire e a professora ajudou na exploração das suas potencialidades recorrendo à projeção no quadro interativo de várias funcionalidades da aplicação *Geometria*.

[56] Esta aula decorreu no dia seguinte à ***Aula n.º 1***.

Tendo em consideração o teor das tarefas que iriam ser propostas (tabela 4.1), a professora insistiu essencialmente nas opções **1: Ações**, 4: **Pontos e Retas**, **5: Formas**, **6: Medição**, **7: Construção** e **8**: **Transformação**. Dentro da opção **1**, explorou as opções **7: Texto** e **8: Calcular**; na opção **4**, explorou preferencialmente as opções: **1: Ponto**, **3: Ponto(s) de interseção**, **4**: **Reta, 5: Segmento** e **6: Semirreta**; na opção **5**, fez um maior investimento nas opções: **1**: **Circunferência**, **2: Triângulo**, **3**: **Retângulo**, **4**: **Polígono** e **5**: **Polígono regular**. Na opção **6**, persistiu nas opções **1: Comprimento**, **2: Área** e **4: Ângulo**; Na opção **7**, deu um maior destaque às opções: **1: Perpendicular** e **2. Paralela.** Por último na opção **8**, fez rapidamente uma abordagem às opções **1: Simetria**, **2**: **Reflexão**, **3: Translação** e **4: Rotação.**

No final da aula, a professora alertou que poderiam transitar para outra página, onde figuram outras aplicações, como por exemplo *Gráficos*, *Listas e Folha de Cálculo*, *Dados e Estatística*, etc, premindo as teclas 

, mas a exploração dessas aplicações seria feita quando necessitassem de resolver tarefas que obedecessem à utilização das mesmas. No entanto, exemplificou como o poderiam fazer:

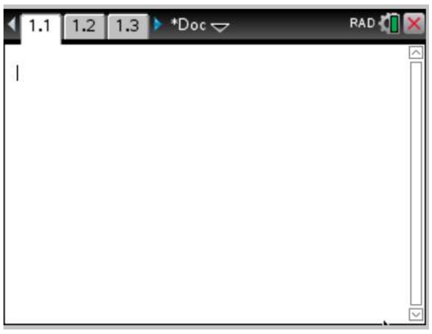


Figura 4.9 - Possibilidade de transitar para outras páginas no mesmo documento na calculadora gráfica TI-nspire.

Nas aulas seguintes procedeu-se à resolução da tarefa A-CE1 (4.3.1.1 do capítulo 4), tarefa B-CE1(4.3.1.2 do capítulo 4) e tarefa C-CE1(Anexo 3).

Aula n.º 3

Esta aula com a duração de 90 minutos foi lecionada vários dias após a realização da ***Aula n.º 2***. Nesta aula, a professora, antes de promover a aprendizagem do *software* da calculadora gráfica, explorou os conceitos de função, objeto, imagem, domínio, contradomínio, variável dependente, variável independente, conjunto de partida e conjunto de chegada, através de situações do quotidiano. Posteriormente, realizou uma abordagem sobre as aplicações *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística,* respetivamente, com o objetivo de os alunos adquirirem competências para resolver a tarefa D-CE1 (4.3.1.4 do capítulo 4).

A docente fez referência à aplicação *Listas e Folha de Cálculo*, como sendo semelhante a uma folha de cálculo, tipo Excel, com funcionalidades muito análogas. É uma aplicação onde existe a capacidade de se poder fazer uma interpretação das colunas como listas, podendo as mesmas funcionar como repositório de outras aplicações, como *Geometria*. Isto é, tem o potencial de se poder fazer uma captura de dados automática, decorrente de medições que se alteram quando se manipula um objeto geométrico.

No que concerne à aplicação *Dados e Estatística*, a professora mencionou que a mesma permite a construção de gráficos de diversos tipos através dos dados listados na aplicação *Listas e Folha de Cálculo*. O exemplo dado pela docente baseou-se na construção de um gráfico cartesiano, utilizando as aplicações *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística*. Solicitou que os alunos abrissem a aplicação *Listas e Folha de Cálculo* e colocassem os pares ordenados (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 2) e (5, 1), inserindo os valores das abcissas na 1ª coluna e os valores das ordenadas na segunda coluna. De seguida deveriam abrir uma 2ª página, *Dados e Estatística*, definir a variável *x* (eixo das abcissas) e a variável *y* (eixo das ordenadas). Posteriormente clicar em **menu- tipo de gráfico – linha poligonal XY**

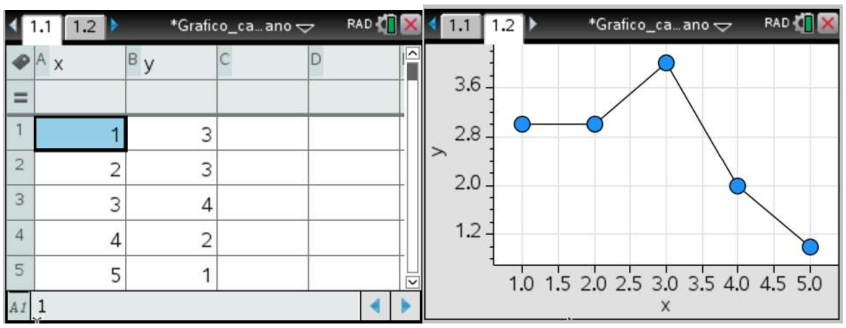


Figura 4.10 - Procedimentos para construir um gráfico cartesiano na calculadora gráfica TI-nspire.

De seguida, a professora solicitou a resolução da tarefa D-CE1 (4.3.1.3 do capítulo 4), que foi apenas finalizada na aula seguinte.

Aula n. º4

Na aula posterior à ***Aula nº3***, os alunos resolveram a tarefa D-CE1 (4.3.1.3 do capítulo 4). Na aula seguinte decorreu esta aula durante 90 minutos e teve o objetivo de os alunos fazerem uma aprendizagem sobre o *software* da calculadora gráfica, inerente à aplicação *Gráficos*, para posteriormente resolverem a tarefa E-CE1 (Anexo 4).

A calculadora gráfica foi projetada no quadro, da mesma forma como decorreram as três aulas anteriores dedicadas à descoberta das potencialidades do *software* deste artefacto. A professora abordou o conceito de expressão algébrica ou expressão analítica, como sendo uma das formas de representar uma função, tendo feito uma alusão e consolidação do conceito de variável dependente e variável independente. Os conceitos de função linear, função afim e função constante, foram tratados algebricamente.

20. Professora: Liguem as máquinas e abram uma página na aplicação *Gráficos*! Trata-se de uma aplicação que permite o trabalho com funções e os respetivos gráficos, e por outro lado, possibilita uma relação entre a Geometria e a Álgebra na medida em que uma das funcionalidades desta aplicação é ter também integrada a ferramenta de Geometria.
Para explorar esta aplicação, tal como fizeram na aplicação *Geometria*, podem aceder à tecla 

onde a maioria das funcionalidades é comum ao da aplicação *Geometria*, como podem ver (figura 4.11):

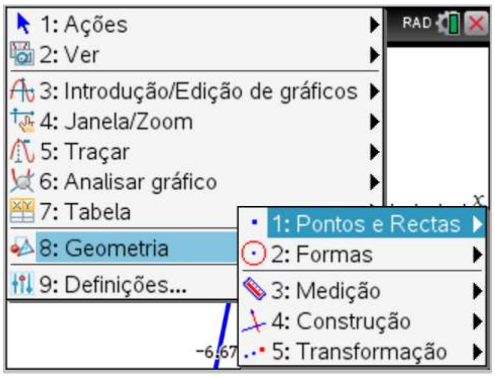
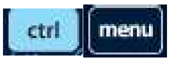


Figura 4.11 - Várias funcionalidades da aplicação *Gráficos* na calculadora gráfica TI-nspire.

Tal como na aplicação *Geometria* podem premir sucessivamente 

onde surge um novo menu, obtendo um conjunto de funções rápidas, semelhante ao que fazemos no computador, quando premimos o botão direito do rato.

Entretanto, a docente solicitou que os alunos representassem graficamente as funções afim[57], representadas pelas expressões analíticas $f_1(x) = -x + 12$ e $f_2(x) = x + 20$, onde teriam de utilizar a tecla 

para introduzir a segunda função, assim como teriam de o fazer para inserir qualquer outra função a seguir à introdução de uma outra função. Gerou-se uma polifonia de vozes, pois os alunos não conseguiram visualizar as representações gráficas das duas funções, como mostra a figura 4.12.

[57] Este tipo de funções foi abordado com mais pormenor na tarefa E-CE1: Função linear e função afim (Anexo 4).

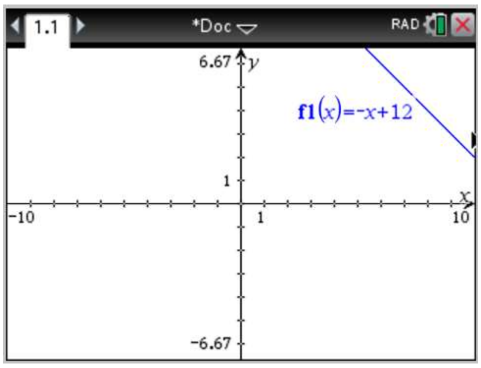


Figura 4.12- Representação gráfica das expressões analíticas de duas funções *f1* e *f2* na calculadora gráfica TI-nspire, onde apenas é visualizada a primeira função, dado que a janela de visualização (Zoom) ainda não tinha sido adaptada.

Neste contexto, a professora explicou que seria necessário proceder a ajustes para obter uma janela de visualização que se adaptasse à situação. Referiu que os alunos teriam de utilizar a funcionalidade **4: Janela/Zoom**, à realidade das suas funções, como por exemplo o **A: Zoom – Ajustar** ou então optar pela opção **1: Definições de janela**. Tendo em conta o facto de os alunos ainda não terem aprofundado a represntação gráfica de uma função, a docente optou pelo **A: Zoom – Ajustar** (figura 4.13), pois o seu principal objetivo era dar a conhecer as potencialidades da calculadora gráfica e os alunos se apropriarem deste artefacto e desenvolverem esquemas, na resolução de tarefas, construindo um instrumento (Artigue, 2002; Trouche, 2000, 2004b; Rabardel, 1995) evoluindo na sua Génese Instrumental (Drijvers et al, 2010; Rabardel, 1995; Trouche, 2004a, 2004b).

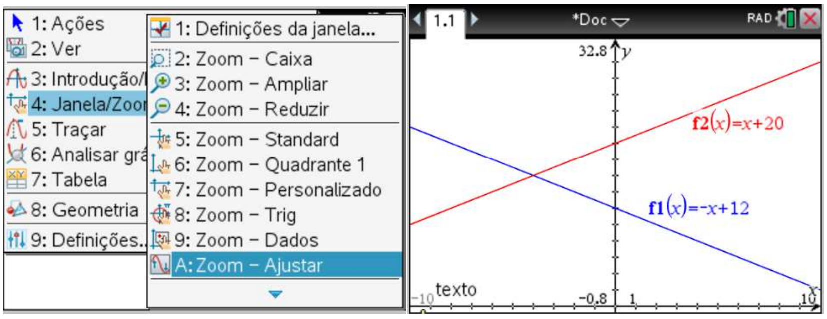


Figura 4.13 - Representação gráfica das duas funções *f1* e *f2* na calculadora gráfica TI-nspire quando se utilizou a opção 4: Zoom-Ajustar.

De seguida, a professora exemplificou como determinar o ponto de interseção dos

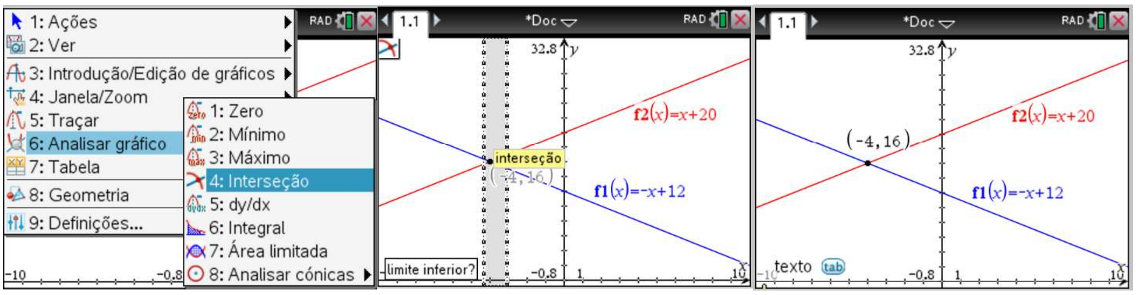


Figura 4.14 - Procedimentos para a determinação do ponto de interseção dos gráficos das duas funções *f1* e *f2* na calculadora gráfica TI-nspire.

gráficos de duas funções (figura 4.14).

Dado que a aplicação *Gráficos,* ao ser integrada a opção *Geometria*, permite o estabelecimento de uma articulação entre a Geometria e a Álgebra[58], a professora propôs um desafio[59] aos alunos, que se fundamentou na determinação da área do triângulo compreendida entre a interseção do gráfico das duas funções e o eixo das ordenadas. Alguns alunos resolveram o problema analiticamente e outros alunos optaram pela resolução gráfica. A professora informou os alunos, que o seu objetivo se fundamentava no facto dos mesmos conseguirem transitar da resolução analítica para a resolução gráfica e vice-versa (Duval, 2006). A sua intenção era que os alunos compreendessem o conceito de área compreendida entre o gráfico de duas funções e o eixo das ordenadas, através de diferentes perspetivas (Tripathi, 2008). A utilidade deste exercício, advém do facto de confirmarem que os resultados eram os mesmos, independentemente do processo utilizado. Para que tal se pudesse operacionalizar, deveriam aprender os procedimentos a ter com a calculadora gráfica.

Com o objetivo de definir o polígono (triângulo), a professora solicitou que os alunos clicassem em **menu – Geometria – Formas – Polígono** e a seguir clicassem em **menu – Geometria – Medição – Área**, de forma a calcular a área do triângulo. Neste sentido, projetou a representação gráfica (figura 4.15), tendo detetado que o valor da área encontrada, não coincidia com a de alguns alunos. Então explicou que essa situação, possivelmente, se deveu à falta de rigor na construção do triângulo, nomeadamente nos vértices, no que concerne à interseção do gráfico das duas funções, com o eixo das ordenadas.

[58] A relação entre a Geometria e a Álgebra é evidenciada através da representação gráfica e a representação algébrica da função.
[59] Embora, a nível curricular, no 7º ano de escolaridade (currículo prescrito) não fosse exigido este tipo de problema.

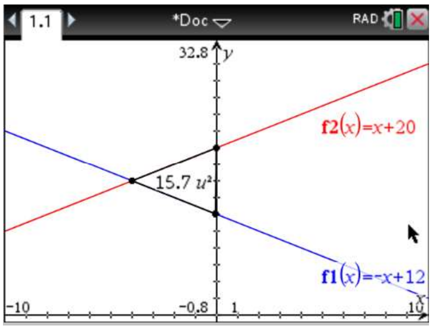


Figura 4.15 - Área do triângulo utilizando a opção *Geometria* na aplicação *Gráficos* na calculadora gráfica TI-nspire.

Alternativamente, a professora explicou que também poderiam determinar a área do triângulo utilizando apenas as ferramentas da aplicação *Gráficos* (figura 4.16) com maior precisão, seguindo os seguintes procedimentos: **menu – Analisar gráfico – Área limitada**.

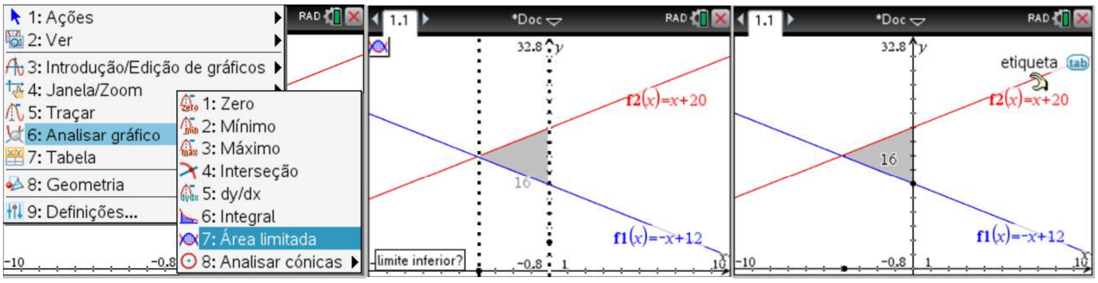


Figura 4.16 - Área do triângulo utilizando apenas as opções da aplicação *Gráficos* na calculadora gráfica TI-nspire.

Posteriormente, a professora sugeriu aos alunos que explorassem as ferramentas da calculadora gráfica, inerentes à aplicação *Gráficos*, no restante tempo que faltava para a aula terminar. Na aula seguinte, os alunos resolveram a tarefa E-CE1 (Anexo 4).

Aula n.º 5

Esta aula foi lecionada durante 90 minutos, vários dias após ter ocorrido a ***Aula n.º 4***. No final do primeiro ciclo de experimentação, surgiu a necessidade de construir uma tarefa (tarefa F-CE1 – 4.3.1.4 do capítulo 4) em que estivessem envolvidas várias aplicações da calculadora gráfica, tais como, *Geometria*, *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística*. Por outro lado, realizar uma conexão entre o domínio da Geometria e Medida e o domínio das Funções, Sequências e Sucessões, onde se deveriam utilizar vários conceitos, tais como, triângulo equilátero, perímetro de um triângulo e gráficos de funções.

Neste sentido, a professora apresentou aos alunos uma tarefa muito semelhante à tarefa F-CE1. Na calculadora gráfica, construiu um triângulo regular, fazendo uma captação de dados automática e posteriormente desenvolveu um modelo matemático que se adaptou ao perímetro do triângulo. Tendo em conta que os alunos seguiram as suas instruções, as imagens captadas das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica (figura 4.17) e os diálogos realizados, foram os seguintes:

21. Professora: Meninos, abram uma página na aplicação *Geometria*! Construam um triângulo regular qualquer! A propósito, qual é a ferramenta que vão utilizar, para fazer essa construção?
22. José: Faço **menu,** depois **formas** e **polígono regular**.
23. Professora: Boa! Muito bem José! Depois de construírem o triângulo, determinem o comprimento de cada lado! A seguir definam a variável **l** para o comprimento do lado desse triângulo. Devem de apontar o *touchpad* (cursor) para o valor da medida do comprimento do triângulo e clicar em **var – guardar var** e escrever **l**. De seguida calculem o valor do perímetro do triângulo, mas agora definam a variável da mesma forma, embora atribuindo o valor **p**, como é obvio!

Alguns alunos revelaram ainda dificuldades na manipulação do artefacto, calculadora gráfica e a professora percorreu a sala de aula ajudando os alunos, antes de abrir a página, *Listas e Folha de Cálculo*.

24. Professora: Agora vamos inserir outra página *Listas e Folha de Cálculo*, neste caso a segunda página (**Página 2**). Na 2ª linha da primeira coluna cliquem em **menu – dados – captura de dados – automático,** para a variável **l** e depois façam o mesmo para a variável **p**, mas agora na 2ª linha da 2ª coluna. Na 1ª linha, das 1ª e 2ª colunas, respetivamente, escrevam **lado** e **perímetro**.
Agora com o *touchpad* voltem à 1ª página e movimentem os vértices do triângulo, de modo a aumentar ou diminuir as dimensões dos comprimentos dos seus lados e preencher as colunas da 2ª página.
Finalmente, insiram a 3ª página, *Dados e Estatística.* Aí vão encontrar uma grande confusão de pontos. Têm de colocar a variável **lado**, e a variável **perímetro.** Em que eixos se devem colocar?

Os alunos facilmente percecionaram que a variável **lado** era uma variável independente, logo seria colocada no eixo das abcissas. A variável **perímetro**, referia-se a uma variável dependente, sendo colocada no eixo das ordenadas. E então a professora concluiu:

25. Professora: Ok, então depois da colocação das variáveis, devem de clicar em **menu – analisar - traçar função**, para obterem o modelo matemático que se adapta à situação. Qual será?
26. Berta: Deve de ser uma função linear! Os pontos estão todos alinhados, a sair da origem!
27. Professora: E qual será a função?
28. José: Deve de ser $f(x) = 3x$, porque o perímetro também é 3 vezes o lado.

29. Professora: Muito bem, é isso mesmo!

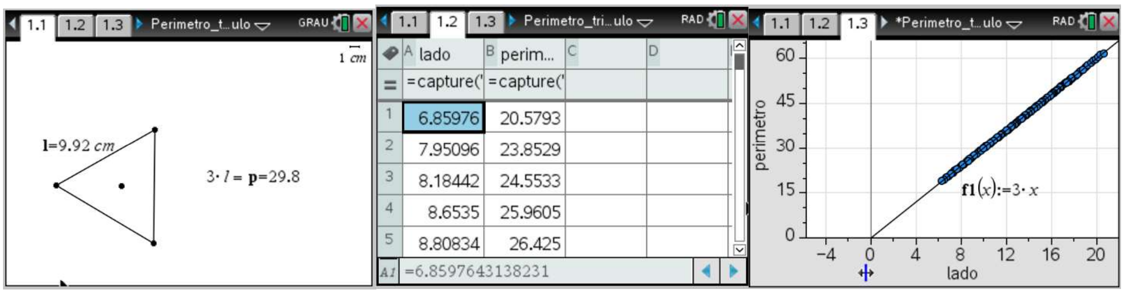


Figura 4.17 - Procedimentos para modelar matematicamente o perímetro do triângulo, utilizando várias aplicações da calculadora gráfica TI-nspire.

De seguida foi distribuída a tarefa F-CE1 (4.3.1.4 do capítulo 4), mas os alunos não a conseguiram terminar e a resolução da mesma transitou para a aula seguinte.

4.3. Sequência de Tarefas

As tarefas propostas aos alunos nos dois ciclos de experimentação, foram adaptadas do manual escolar ou de outra fonte bibliográfica ou concebidas por mim. Como investigadora, na planificação das mesmas, tive em consideração o currículo prescrito e apresentado (Brown, 2009) de acordo com as orientações plasmadas no Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013). Por outro lado, na planificação de todas as tarefas realizei uma antecipação (Stein et al., 2008), através da experimentação que teve como objetivo prever o modo como os alunos as iriam interpretar e envolver-se na produção de estratégias aquando da sua resolução. No entanto, em algumas tarefas do primeiro ciclo de experimentação, os conceitos explorados pertenciam a anos de escolaridade anteriores ou subsequentes, àqueles em que os alunos se encontravam.

Sendo a implementação de tarefas uma excelente metodologia para estimular a atividade dos alunos, influenciando o modo como os mesmos aprendem a pensar matematicamente, quando da planificação das mesmas, procedi à sua diversificação, quanto à natureza, contexto, grau de desafio e estrutura, na medida em cada uma apresenta um potencial diferente relativamente à aprendizagem (Stein et al., 2007). Senti uma grande preocupação na criação de tarefas com a calculadora gráfica, pois por um lado, o meu objetivo baseou-se no facto dos alunos tirarem o maior proveito das potencialidades deste artefacto, nomeadamente no que respeita à construção de gráficos, visualização e cálculo (NCTM, 2007). Por outro lado, de promover o raciocínio e uma participação ativa dos discentes na aula (Amado, 2011).

No entanto, foi fundamental conhecer os alunos, isto é, perceber em que situação os mesmos se encontravam relativamente aos seus conhecimentos na disciplina de Matemática, pois caso contrário, tornava-se difícil a construção das tarefas, tendo em consideração, por exemplo, o seu grau de desafio (Ponte, 2005). Daí que as primeiras tarefas com a calculadora gráfica, respeitantes ao primeiro ciclo de experimentação, só foram realizadas no final do terceiro período do ano letivo de 2016/2017, numa turma do 7.º ano de escolaridade[60]. Posteriormente, realizou-se o segundo ciclo de experimentação, que decorreu entre o final do primeiro período e metade do terceiro período do ano letivo de 2017/2018, na turma do 8.º ano de escolaridade e que teve continuidade da turma anterior. Por sua vez, cada ciclo foi composto por vários microciclos, onde em cada um deles, como investigadora, realizei uma análise retrospetiva, resultante da observação e análise das ações dos alunos na fase da experimentação, que serviu de base à preparação do microciclo seguinte. Neste sentido, a primeira e a segunda sequência de *Ciclos Didáticos* (Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2012a, 2012b, 2018) correspondem ao primeiro ciclo de experimentação (CE1) e ao segundo ciclo de experimentação (CE2), respetivamente.

4.3.1. Tarefas do primeiro ciclo de experimentação

Como foi referido anteriormente, o primeiro ciclo de experimentação (CE1) correspondeu à primeira sequência de *Ciclos Didáticos* (Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2012a, 2012b, 2018) e decorreu no final do terceiro período do ano letivo de 2016/2017, numa turma do 7.º ano de escolaridade. As tarefas que fizeram parte da experiência de ensino, neste ciclo, pertencem aos domínios da Geometria e Medida (GM7[61] e GM9) e Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) e visaram dar resposta aos objetivos do estudo, assim como responder às questões de investigação articuladas com a conjetura de ensino-aprendizagem.

Como investigadora procedi à planificação de todas as tarefas. Neste sentido, as três primeiras tarefas, denominadas por tarefa A- CE1, tarefa B-CE1 e tarefa C-CE1 da primeira sequência de *Ciclos Didáticos*, foram realizadas no âmbito da unidade de "Quadriláteros" do domínio de Geometria e Medida (GM7). As mesmas estavam integradas na unidade de ensino, "Propriedades Geométricas - Amplitudes de ângulos" no âmbito do domínio da Geometria e Medida (GM5) do 5.º ano de escolaridade. Com a resolução das mesmas, pretendi que os alunos, de uma forma empírica e utilizando a calculadora gráfica, verificassem, revessem e evidenciassem a compreensão de alguns conceitos e propriedades lecionadas no 5.º ano de escolaridade[62] para que pudessem ser utilizados futuramente. Pois é "muito importante proceder-se a revisões frequentes de passos anteriores com vista à sua consolidação" (MEC, 2013, p. 28).

[60] A professora titular da turma teve o primeiro contacto com estes alunos no início do ano letivo de 2016/2017.
[61] Como já foi feita referência, na unidade de "Quadriláteros", do domínio de Geometria e Medida (GM7), foram integradas tarefas pertencentes ao domínio de Geometria e Medida (GM5).
[62] Foram conceitos lecionados no 5.º ano de escolaridade, sem qualquer verificação.

A quarta tarefa e a quinta tarefa, designadas por tarefa D-CE1 e tarefa E-CE1, respetivamente, pertenceram à unidade de "Funções", no âmbito do domínio das Funções, Sequências e Sucessões (FSS7).

No que concerne à última tarefa, intitulada por tarefa-F-CE1, foi proposta aos alunos no final da unidade de Funções, no 7.º ano de escolaridade. Anteriormente os mesmos realizaram tarefas nos dois domínios distintos de Geometria e Medida e Funções, Sequências e Sucessões, mas nunca em simultâneo. Tendo em consideração, o envolvimento dos alunos com o artefacto, calculadora gráfica, relativamente ao processo de instrumentalização e instrumentação, de modo a utilizarem várias aplicações da calculadora gráfica, tais como, *Geometria*, *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística* e numa atitude ambiciosa[63], pretendi fazer uma conexão entre o domínio de Geometria e Medida (GM9) do 9.º ano de escolaridade, na unidade de "Circunferência" com o domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) do 7.º ano de escolaridade, na unidade de "Funções".

Como é percetível, a realização das tarefas não foi feita em sequência (ver tabela 4.1), no entanto, as mesmas foram realizadas tendo em consideração o currículo prescrito (MEC, 2013), no que concerne aos conteúdos inerentes às unidades curriculares lecionadas no terceiro período do ano letivo de 2016/2017. Por conseguinte, as aulas onde se realizou a investigação não foram seguidas, à exceção daquelas em que a realização das tarefas exigiu que existisse continuidade de mais do que uma aula.

No que concerne à metodologia *Design Research,* de uma forma intervencionista, com a utilização da calculadora gráfica, tive o objetivo de desenvolver novas formas de aprendizagem que culminassem com uma maior compreensão dos conceitos matemáticos. Ao longo do ciclo de experimentação, tendo em consideração uma análise prospetiva e reflexiva, houve a preocupação de testar a conjetura de ensino-aprendizagem, formulada inicialmente (Cobb et al, 2003), em vista à sua aceitação ou reformulação.

Em cada tarefa planificada, criei uma "ficha técnica" de modo a enquadrar o leitor, relativamente a vários aspetos, tais como: domínio em que a mesma se insere, objetivo didático, natureza, contexto, grau de desafio, grau de estrutura, metodologia de trabalho, tempo de duração e recursos a utilizar[64]. Posteriormente, foi realizada uma descrição hipotética relativamente aos conhecimentos matemáticos dos alunos, em termos de significados pessoais e quais as estratégias de resolução esperadas (Stein et al., 2008). Nas tarefas em que foi realizada a análise dos dados do trabalho dos alunos, tendo em consideração os *esquemas de uso* e *esquemas de ação*

[63] Os alunos encontravam-se no 7.º ano de escolaridade e a tarefa englobava conceitos do 9.º ano de escolaridade.

[64] Relativamente à natureza da tarefa, grau de desafio e grau de estrutura, foi adotada a abordagem realizada por Ponte (2005). No entanto, o próprio autor considera que é difícil fazer esta classificação, pois existem vários fatores que influenciam a mesma, nomeadamente os conhecimentos prévios dos alunos.

instrumentada mobilizados, também foi feita uma descrição[65] de como é que esses esquemas podiam contribuir para o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, calculadora gráfica, de acordo com as linhas teóricas que constituem o quadro teórico da Teoria da Mediação Semiótica (Mariotti, 2012a, 2012b, 2018).

Neste ciclo, os alunos tiveram um primeiro contacto com a calculadora gráfica, com o objetivo de atribuir sentido a algumas teclas e funções da máquina. Deveria ser iniciado o desenvolvimento de esquemas de utilização[66] (Rabardel, 1995), promovendo-se o processo de instrumentação e instrumentalização (Trouche, 2004a; Trouche, 2004b), inerente à Génese Instrumental. Por outro lado, o desenvolvimento desses esquemas, deveria desencadear a evolução do *potencial semiótico do artefacto* mediador, calculadora gráfica, através da função de visualização e ainda da função de arrastamento (Mariotti, 2012b) inerente às *representações ativas* (Bruner, 1999), potencializado por um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD). Neste sentido, deveria de se iniciar o processo de mediação semiótica, verificando-se a evolução de significados pessoais para significados matemáticos, através da comunicação entre os alunos/pares, comunicação entre os alunos e a professora, realização de relatórios escritos e a discussão coletiva, orquestradas pela professora (Mariotti, 2012a, 2012b; 2018) com a ajuda do aluno *Sherpa* (Drijvers & Trouche, 2008).

Apresento quatro tarefas, nomeadamente: tarefa A-CE1, tarefa B-CE1, tarefa D-CE1 e tarefa F-CE1, cujos dados dos alunos provenientes da realização das mesmas, foram analisados neste estudo. A tarefa C-CE1 (Anexo 3) e a tarefa E-CE1 (Anexo 4) foram realizadas neste ciclo de experimentação, mas não foram analisadas, tendo sido remetidas para anexo.

[65] O que se designa por **antecipar**, quando o professor na planificação tenta prever através da experimentação, o modo como os alunos vão interpretar e se envolver na resolução da tarefa. Os docentes produzem estratégias de resolução da tarefa, relacionando-as com os conceitos, representações, práticas ou competências que os alunos podem aprender ou desenvolver (Stein et al., 2008), tendo em consideração os seus significados pessoais (Mariotti, 2012a, 2012b, 2018).

[66] Os esquemas de utilização diferenciaram-se entre *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada,* como já foi referido anteriormente.

4.3.1.1. Tarefa A-CE1: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Domínio: Geometria e Medida (GM5 e GM7);

Objetivo: Reconhecer que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso;

Natureza da tarefa: Investigação;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Elevado;

Grau de estrutura: Aberta;

Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;

Tempo: 45 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Com recurso à calculadora gráfica, segue as instruções:

a) Constrói um triângulo *[ABC]* à tua escolha. (Para uma maior facilidade de visualização, representa um dos lados do triângulo na posição horizontal).

Pelo vértice *B*, traça uma reta paralela ao lado *[AC]* e marca os pontos *D* e *E*.

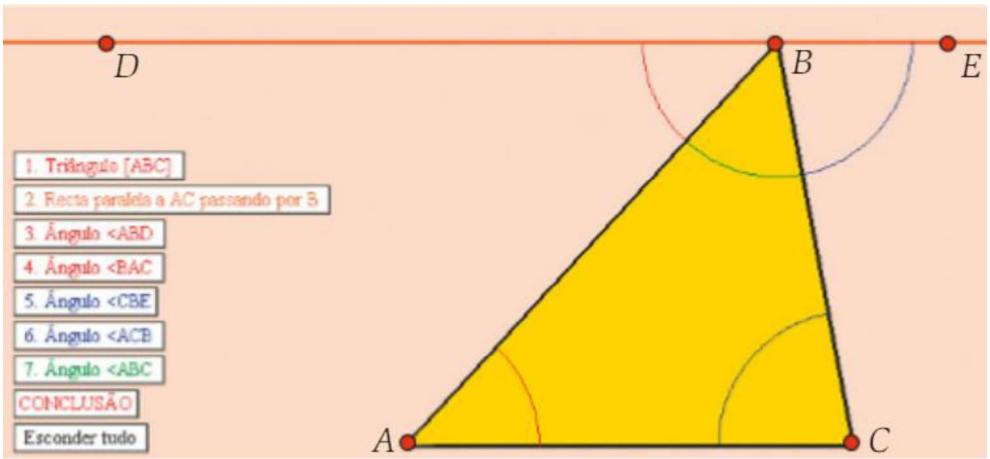


Figura 4.18 - Imagem da tarefa A-CE1.

b) Assinala com a mesma cor os ângulos *A* do triângulo *[ABC]* e *DBA*. Justifica que $\hat{A} = D\hat{B}A$.

c) Assinala com outra cor os ângulos *C* do triângulo *[ABC]* e *CBE*. Justifica que $\hat{C} = C\hat{B}E$.

d) O que concluis relativamente aos ângulos *DBA, ABC* e *CBE*? Tendo em conta as alíneas anteriores, o que podes concluir relativamente à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos do triângulo *[ABC]*? Justifica a tua resposta.

A tarefa A-CE1, corresponde à tarefa inicial integrada na primeira sequência de Ciclos Didáticos inseridos no primeiro ciclo de experimentação (CE1). A mesma foi proposta depois do término das aulas em que os alunos tiveram o primeiro contacto com a calculadora gráfica e onde foram dadas informações gerais sobre o funcionamento deste artefacto. Por outro lado, esta tarefa foi dada aos alunos, no início da lecionação da unidade dos Quadriláteros, integrada no domínio da Geometria e Medida do 7.º ano de escolaridade (GM7). A tarefa tinha o objetivo de os alunos reconhecerem que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, no âmbito do domínio da Geometria e Medida do 5.º ano de escolaridade (GM5).

No 5.º ano de escolaridade, os alunos tinham tido informação desta propriedade, sem que lhes tenha sido exigido qualquer dedução, pois de acordo com os objetivos do Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico - 2.º ciclo[67], do qual consta a seguinte afirmação: "…O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta" (MEC, 2013, p. 3). Os alunos assumiram esta propriedade como verdadeira, sem a terem demonstrado, sem ter sido dada nenhuma justificação ou explicação.

Neste ciclo de experimentação (CE1), quando a tarefa foi apresentada aos alunos, no que concerne ao domínio da Geometria e Medida, os mesmos tinham conhecimento sobre os conceitos de triângulo, retas paralelas, retas obliquas, ângulo, medida da amplitude de um ângulo, congruência de ângulos, soma de ângulos, classificação de ângulos, ângulos adjacentes e ângulos suplementares, ângulos alternos internos (quando duas retas paralelas são intersetadas por uma reta obliqua) e da propriedade, que refere que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso[68]. Todos estes conceitos e propriedade, foram dados aos alunos de uma forma "abrupta", sem os mesmos terem tido oportunidade de os verificar.

No que concerne à alínea a), para a construção da figura, pretendi que os alunos colocassem em prática os conhecimentos que tinham sobre o conceito de triângulo e retas paralelas.

No que respeita às alíneas b) e c) procurei que os alunos provassem a congruência entre o ângulo DBA e o ângulo A do triângulo *[ABC]*, assim como a do ângulo CBE e o ângulo C do triângulo *[ABC]*. Deveriam usar o conhecimento que tinham sobre ângulos alternos internos, isto é, dado que a reta AB era obliqua às retas paralelas DB e AC, tinha-se $\hat{A} = D\hat{B}A$ e $\hat{C} = C\hat{B}E$. A calculadora gráfica seria utilizada para proceder à medição da amplitude dos ângulos e comprovar a congruência dos mesmos. Posteriormente, os alunos deveriam de recorrer à função de arrastamento, movendo os vértices A ou B ou C do triângulo *[ABC],* de modo a confirmar que a igualdade se verificava para todos os triângulos representados.

[67] 5º e 6º anos de escolaridade.
[68] Objetivo da Tarefa A - CE1.

Relativamente à alínea d) tive por objetivo que os alunos fizessem emergir os significados pessoais sobre ângulos suplementares e ângulos rasos e procedessem através da utilização da calculadora gráfica, ao cálculo da soma das medidas dos ângulos *DBA, ABC e CBE.* Deveriam de confirmar que o resultado era sempre 180º, mesmo quando era utilizada a função de arrastamento, movendo os vértices *A* ou *B* ou *C* do triângulo *[ABC].* Por outro lado, tendo em conta a congruência dos ângulos que foi provada nas alíneas b) e c), partindo das relações: $\hat{A} = D\hat{B}A$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = C\hat{B}E$, deveriam de concluir através de linguagem simbólica, que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, reconhecendo que a soma da medida das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. Para confirmar esse procedimento analítico, deveriam de recorrer à calculadora gráfica e proceder à soma dos ângulos A, B e C, utilizando a função de arrastamento, movimentando os vértices *A* ou *B* ou *C* do triângulo *[ABC],* de modo a confirmar que a igualdade se verificava para outros triângulos, com diferentes dimensões.

Para resolver as alíneas a), b) e c), no que respeita aos *esquemas de uso*, os alunos deveriam recorrer à aplicação *Geometria,* clicar em **menu – formas – triângulo** e construir um triângulo *[ABC]* qualquer. Posteriormente clicar em **menu – construção – paralela**, de modo a construir uma reta paralela ao lado *[AC]* que passasse pelo ponto B. Depois clicar em **menu – pontos e retas – ponto sobre um objeto** e construir os pontos *D* e *E*. Para determinar a medida dos ângulos *DBA*, *CBE* e ângulos *A* e *C* do triângulo *[ABC]*, os alunos deveriam desenvolver *esquemas de uso* clicando em **menu - medição – ângulo** e confirmar que $\hat{A} = D\hat{B}A$ e $\hat{C} = C\hat{B}E$.

Em termos de *esquemas de ação instrumentada*, os alunos deveriam percecionar a congruência entre o ângulo *DBA* e ângulo *A* (do triângulo *[ABC]*), assim como a congruência do ângulo *CBE* e do ângulo C (do triângulo *[ABC]*), dado que tratam de ângulos alternos internos. Por outro lado, deveriam ter em consideração o facto de estarem a trabalhar num Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) e utilizarem o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento, movendo os vértices *A* ou *B* ou *C* do triângulo *[ABC],* certificando-se que se verificavam sempre as igualdades $\hat{A} = D\hat{B}A$ (na alínea a)) e $\hat{C} = C\hat{B}E$ (na alínea b), noutros triângulos com diferentes dimensões.

Ao resolver a alínea d), tendo em consideração o conceito de ângulos suplementares e ângulos rasos, esperava-se que os alunos determinassem a soma das medidas dos ângulos *DBA, ABC e CBE.* Para operacionalizarem esse *esquema de ação instrumentada*, teriam de utilizar vários *esquemas de uso:* clicar em **menu – ações – texto** e escrever *DBA*, *ABC*, *CBE* e *DBA + ABC + CBE* e posteriormente clicar em **menu – ações – calcular**. De seguida, deveriam usar o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento, movendo os vértices *A* ou *B* ou *C* do triângulo *[ABC],* de modo a provarem que a igualdade $D\hat{B}A + A\hat{B}C + C\hat{B}E = 180º$ se amplia a outros triângulos com diferentes dimensões.

A abordagem semiótica deveria ser usada para descrever os significados pessoais relacionados com os esquemas mobilizados, fomentando o emergir dos significados matemáticos, inerentes ao objetivo da tarefa. Isto é, em termos de mediação semiótica, o artefacto calculadora gráfica, deveria ser encarado como um instrumento de mediação semiótica. Os alunos ao utilizarem o artefacto para realizar a tarefa, deveriam de construir ao mesmo tempo, *esquemas de uso*[69] e *esquemas de ação instrumentada*[70], mobilizando significados pessoais, tais como, os conceitos de triângulo, retas paralelas, ângulos alternos internos, ângulos suplementares e ângulo raso, fazendo emergir os significados matemáticos, inerentes ao objetivo da tarefa, que se centra no reconhecimento de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

O potencial semiótico inerente à função de arrastamento, potenciado por um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) da calculadora gráfica, deveria facilitar a construção do conhecimento, isto é, permitiria verificar o objetivo da tarefa noutros triângulos, ao contrário do que aconteceria com os artefactos papel e lápis. Ao arrastar um ponto básico, toda a figura é transformada, no entanto, todas as propriedades definidas pelo procedimento de construção são mantidas, ou seja, invariantes. A função de arrastamento deve de proporcionar a verificação desta propriedade em todos os triângulos, podendo a mesma ser relacionada com o significado teórico da sua construção geométrica dentro da Geometria Euclidiana (Mariotti, 2012b). Neste sentido, ao observar-se que soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, em qualquer triângulo, tem uma contrapartida na validade de generalização da afirmação: “Em qualquer triângulo, a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso”, na teoria da Geometria Euclidiana.

[69] Descritos anteriormente.
[70] Descritos anteriormente.

4.3.1.2. Tarefa B-CE1: Relação entre um ângulo externo e os ângulos internos não adjacentes de um triângulo

Domínio: Geometria e Medida (GM5 e GM7);

Objetivo: Reconhecer que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes;

Natureza da tarefa: Investigação;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Elevado;

Grau de estrutura: Aberta;

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório a pares;

Tempo: 45 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Com recurso à calculadora gráfica, segue as instruções:

Constrói um triângulo *[ABC]* qualquer, com o lado *[AC]* horizontal para facilitar a visualização.

● Traça a semirreta *CD*. Marca um ponto *D*, de modo que o ponto *C* fique situado entre os pontos *A* e *D*.

● Traça uma reta *CE* tal que $CE // AB$.

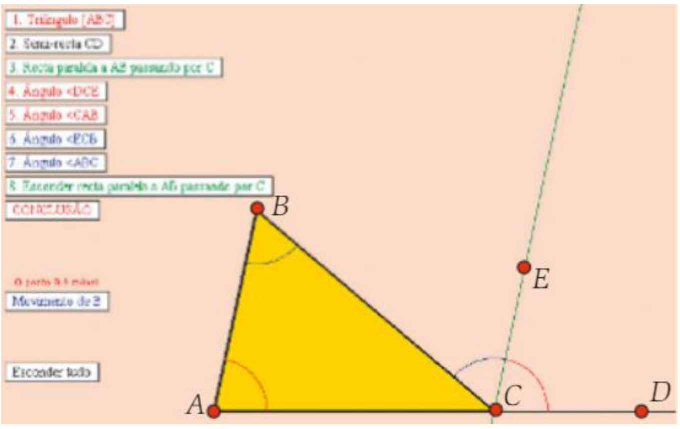


Figura 4.19 - Imagem da tarefa B-CE1.

a) Justifica que $D\hat{C}E = B\hat{A}C$ e que $B\hat{C}E = A\hat{B}C$. Justifica a tua resposta.

b) O que concluis relativamente ao ângulo externo em C e os ângulos internos A e B do triângulo *[ABC]*? Justifica a tua resposta.

A tarefa B-CE1, foi proposta a seguir à tarefa A-CE1, depois de se ter realizado a discussão coletiva e os alunos verificarem que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. Esta tarefa tinha como objetivo os alunos reconhecerem que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes. Tal como na tarefa A-CE1, no 5.º ano de escolaridade, os alunos tiveram informação desta propriedade, sem que lhes tenha sido dada nenhuma justificação ou explicação.

Quando foi proposta esta tarefa aos alunos, no que respeita ao domínio da Geometria e Medida, os mesmos já tinham conhecimento sobre os conceitos de triângulo, retas paralelas, semirretas, ângulo, ângulo interno, ângulo externo, ângulos adjacentes, ângulos suplementares, medida da amplitude de um ângulo, congruência de ângulos, classificação de ângulos, soma de ângulos, ângulos alternos internos, ângulos correspondestes entre retas paralelas e da propriedade que menciona que soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso[71]. Nesta tarefa (B-CE1) pretendeu-se provar a propriedade que refere que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes.

No que concerne à construção da figura, pretendi que os alunos fizessem emergir o conhecimento que tinham sobre triângulos, retas paralelas e semirretas. Posteriormente, relativamente à alínea a) deveriam provar a congruência entre o ângulo DCE e o ângulo BAC do triângulo *[ABC],* tendo em conta de que se tratavam de ângulos correspondentes e seriam congruentes pelo facto de $CE//AB$. Por outro lado, deveriam provar a congruência entre o ângulo BCE e o ângulo ABC do triângulo *[ABC],* tomando como referência o facto de serem ângulos alternos internos. De seguida, os alunos deveriam de recorrer à função de arrastamento, movendo os vértices A ou B ou C do triângulo *[ABC],* de modo a verificar que as igualdades $D\hat{C}E = B\hat{A}C$ e $B\hat{C}E = A\hat{B}C$, se verificavam para todos os triângulos.

Relativamente à alínea b) os alunos deveriam de ter em consideração o facto de a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser igual a um ângulo raso ($A\hat{C}B + B\hat{A}C + A\hat{B}C = 180º$) e o conceito de ângulos adjacentes e ângulos suplementares ($A\hat{C}B + B\hat{C}E + D\hat{C}E = 180º$) e provar que $B\hat{A}C + A\hat{B}C = B\hat{C}E + D\hat{C}E$. Neste sentido, confirmavam que a medida da amplitude do ângulo externo C ($B\hat{C}E + D\hat{C}E$) é sempre igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos A ($B\hat{A}C$) e B ($A\hat{B}C$), não adjacentes, do triângulo *[ABC]*. Deveriam comprovar que essa descoberta se verificava em todos os triângulos, ao mover os vértices A ou B ou C do triângulo *[ABC],* através da função de arrastamento.

Para construir a figura, no que respeita a *esquemas de uso*, os alunos deveriam recorrer à aplicação *Geometria,* clicar em **menu - formas - triângulo** e construir um triângulo *[ABC]* qualquer. Posteriormente, para construir a semirreta *CD*, clicar em **menu - pontos e retas -**

[71] Tarefa A-CE1.

semirreta. Para construir o ponto *D* sobre a semirreta *CD*, os alunos, deveriam de clicar em **menu - pontos e retas - ponto sobre um objeto**. De seguida **menu - construção - paralela,** de modo a construir reta *CE* paralela à reta *AB.* Para marcar os pontos *A, B, C* e *E*, deveriam de clicar em **menu - ações - texto**.

No que respeita à alínea a), deveriam de desenvolver *esquemas de uso*, fundamentados na medição dos ângulos, isto é, para determinar a medida dos ângulos DCE e BAC e dos ângulos BCE e ABC, do triângulo *[ABC]*, os alunos deveriam de clicar em **menu - medição – ângulo**. Relativamente a *esquemas de ação instrumentada*, os alunos deveriam fazer emergir o conhecimento de que os ângulos DCE e BAC são ângulos congruentes por serem ângulos correspondentes compreendidos entre retas paralelas. Por outro lado, os ângulos BCE e ABC são congruentes, na medida em que se referem a ângulos alternos internos. Posteriormente, deveriam de utilizar o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento da calculadora gráfica, movendo os vértices *A* ou *B* ou *C* do triângulo *[ABC],* certificando-se que se verificavam sempre as igualdades $D\hat{C}E = B\hat{A}C$ e que $B\hat{C}E = A\hat{B}C$, em qualquer triângulo.

Para resolver a alínea b), os alunos deveriam fazer emergir o conhecimento do conceito de ângulos suplementares e ângulos adjacentes ($A\hat{C}B + B\hat{C}E + D\hat{C}E = 180º$) e a propriedade de que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso ($A\hat{C}B + B\hat{A}C + A\hat{B}C = 180º$) e proceder ao cálculo da soma das medidas dos ângulos BAC e ABC e dos ângulos BCE *e* DCE e confirmar a igualdade $B\hat{A}C + A\hat{B}C = B\hat{C}E + D\hat{C}E$. Para operacionalizarem esse *esquema de ação instrumentada*, teriam de utilizar vários *esquemas de uso*: clicar em **menu – ações – texto** e escrever BAC, ABC, BCE, DCE e a seguir, $BAC + ABC$ *e* $BCE + DCE$. Posteriormente clicar em **menu – ações – calcular**. De seguida, deveriam usar o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento, movendo os vértices A ou B ou C do triângulo *[ABC],* de modo a provarem que a igualdade $B\hat{A}C + A\hat{B}C = B\hat{C}E + D\hat{C}E$ se amplia a outros triângulos com diferentes dimensões.

Em termos de mediação semiótica, o artefacto, calculadora gráfica deveria ser encarada como um instrumento de mediação semiótica. Os alunos ao utilizarem o artefacto para realizar a tarefa, deveriam desenvolver *esquemas de uso*[72] e *esquemas de ação instrumentada*[73], mobilizando significados pessoais, tais como, os conceitos de triângulo, retas paralelas, semirretas, ângulo, ângulo interno, ângulo externo, ângulo adjacente, medida da amplitude de um ângulo, congruência de ângulos, classificação de ângulos, soma de ângulos, ângulos alternos internos, ângulos correspondentes compreendidos entre retas paralelas, ângulo suplementar, ângulos adjacente e a propriedade de que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso. Através da mobilização desses significados pessoais deveriam

[72] Mencionados anteriormente.
[73] Mencionados anteriormente.

de fazer emergir os significados matemáticos inerentes ao objetivo da tarefa, que se centra no reconhecimento de que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes.

O potencial semiótico inerente à função de arrastamento, potencializado pelo AGD da calculadora gráfica, deveria facilitar a construção do conhecimento, isto é, verificar o objetivo da tarefa, noutros triângulos, ao contrário do que aconteceria com os artefactos, papel e lápis. Esse potencial semiótico deveria estar relacionado com o significado matemático da validade de uma generalização da propriedade geométrica a ser provada. Ao arrastar um ponto básico, toda a figura é transformada, no entanto, todas as propriedades definidas pelo procedimento de construção são mantidas, ou seja, invariantes, existindo uma consistência com a Geometria Euclidiana (Mariotti, 2012b). O facto da função de arrastamento proporcionar a constância de uma propriedade em todos os triângulos, todas as consequências lógicas dessa propriedade, devem de ser mantidas dentro da Geometria Euclidiana. Neste sentido, através da função de arrastamento, ao observar-se que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes, para qualquer triângulo, valida a generalização da afirmação: “Em qualquer triângulo, a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes”, na teoria da Geometria Euclidiana.

4.3.1.3. Tarefa D-CE1: Referencial cartesiano e a construção do conceito de função

Domínio: Funções, Sequências e Sucessões (FSS7);

Objetivo: Compreender o conceito gráfico de uma função como relação entre variáveis numéricas e como correspondência entre dois conjuntos numéricos; interpretar em que condições é que um gráfico cartesiano de funções numéricas de variável numérica corresponde à representação de uma função;

Natureza da tarefa: Investigação;

Contexto da tarefa: Semi-realidade;

Grau de desafio: Elevado;

Grau de estrutura: Aberta;

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório individual;

Tempo: 90 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Numa folha quadriculada, desenha um referencial cartesiano e traça sobre o mesmo, o contorno da palma da tua mão. Com lápis ou caneta, marca 24 pontos. Depois dos pontos marcados, indica as coordenadas na seguinte tabela:

Tabela 4.2- Tabela da tarefa D-CE1.

	abcissa	ordenada	coordenadas
1º ponto			(,)
2º ponto			(,)
3º ponto			(,)
…			(,)
23º ponto			(,)
24º = 1º ponto			(,)

Nota: Os pontos da tabela devem estar numerados de acordo com a sequência de construção da mão. O último ponto tem de ser igual ao primeiro para a linha ficar fechada.

a) Utilizando a calculadora gráfica, traça o gráfico poligonal correspondente aos pontos representados na tabela anterior. Desenhaste a palma da tua mão sobre um referencial cartesiano. Será que esta representação corresponde a uma função? Justifica a tua resposta.

b) Em que condições é que um gráfico cartesiano representa uma função?

Esta tarefa foi proposta aos alunos, quando se iniciou a unidade de Funções, integrada no domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7). Na aula anterior à realização desta tarefa, a professora abordou os conceitos de função numérica de variável numérica, objeto, imagem, domínio, contradomínio, variável dependente, variável independente, conjunto de partida e conjunto de chegada, recorrendo a exemplos do dia a dia. Também foi feita alusão a várias formas de representar uma função, tais como diagrama de setas e tabelas.

No início da tarefa, pretendi que os alunos mobilizassem os conceitos de referencial cartesiano, abcissa, ordenada, coordenadas e gráfico cartesiano, aprendidos no 5.º ano de escolaridade, no domínio de Organização e Tratamento de Dados (OTD5).

Posteriormente, na alínea a), procurei que os alunos compreendessem o conceito de gráfico de uma função como relação entre variáveis numéricas e como correspondência entre dois conjuntos numéricos. Os alunos deveriam de fazer emergir os conceitos aprendidos na aula anterior, que assentavam na definição de função e o conceito de tabela, como sendo uma das formas de representar uma função. Então, poderiam ocorrer duas situações:

Por um lado, nas coordenadas dos pontos escolhidos, representados inicialmente na tabela, poderia não existir nenhuma situação em que à mesma abcissa correspondesse mais do que uma ordenada. Tendo em conta a definição de função dada na aula anterior, os alunos poderiam ser induzidos em erro e afirmar que a representação da sua mão, desenhada no referencial cartesiano, se tratava de uma função. Então, ao visualizarem o gráfico poligonal[74] na calculadora gráfica, tendo em conta que obtinham uma linha fechada, mesmo quando utilizassem a função de arrastamento, movimentando os vértices das coordenadas dos pontos escolhidos, deveriam observar que existem abcissas em que está associada mais do que uma ordenada. Nesse sentido, deveriam de concluir que a representação da palma sua mão não representa uma função.

Por outro lado, nas coordenadas dos pontos escolhidos, representados na tabela, poderiam existir pontos em que à mesma abcissa correspondesse mais do que uma ordenada. Então, tendo em consideração a definição de função, os alunos facilmente concluiriam que representação da sua mão, desenhada no referencial cartesiano, não se trata de uma função. Essa conclusão poderia ser confirmada com a visualização do gráfico poligonal e posterior arrastamento dos vértices das coordenadas escolhidas, obtendo sempre uma linha fechada, onde existiriam objetos que tinham no mínimo duas imagens.

Na alínea b) pretendi que os alunos compreendessem em que condições é que um gráfico cartesiano corresponde à representação de uma função. Os alunos deveriam utilizar a função de arrastamento e observar que quando movem os pontos na vertical, o valor da abcissa mantem-se constante, sendo variável o valor da ordenada. Por outro lado, ao moverem os pontos na horizontal, o valor da abcissa é variável e o valor da ordenada permanece constante. Neste sentido,

[74] Linha poligonal que teria como vértices as coordenadas dos pontos escolhidos pelos alunos.

os alunos deveriam de conjeturar a seguinte propriedade: “Um gráfico cartesiano refere-se à representação de uma função, sempre que qualquer reta paralela ao eixo Oy, intersecta o gráfico num único ponto”.

Na alínea a) no que concerne aos *esquemas de uso*, os alunos deveriam abrir uma *Página*, recorrendo à aplicação, *Listas e Folha de Cálculo* e introduzir as coordenadas *x* e *y* dos pontos escolhidos. Posteriormente, deveriam adicionar uma nova *Página* na aplicação *Dados e Estatística* e definir as variáveis, *x* e *y*. Para traçar o gráfico poligonal correspondente aos pontos representados na tabela, deveriam clicar **menu – tipo de gráfico – linha poligonal XY**. Relativamente aos *esquemas de ação instrumentada*, os alunos deveriam fazer emergir o significado pessoal inerente ao conceito de função e usar a função de arrastamento, movendo os pontos, para verificar que se tratava sempre de uma linha fechada. Deste modo deveriam de compreender que o gráfico cartesiano com a representação da sua mão, nunca é uma função, pois existem objetos que têm no mínimo duas imagens.

Na alínea b) os alunos deveriam desenvolver *esquemas de ação instrumentada*, utilizando a função de arrastamento inerente ao movimento vertical e horizontal das coordenadas dos pontos escolhidos, de modo a aferir em que condições é que um gráfico cartesiano representa uma função.

Ao nível da mediação semiótica, tendo em conta o potencial semiótico da calculadora gráfica, função de arrastamento, os alunos deveriam desenvolver *esquemas de uso*[75], no que concerne à gestão do artefacto e esquemas de *ação instrumentada*[76], mobilizando significados pessoais, aprendidos anteriormente, emergindo significados matemáticos, como o conceito de uma representação que não corresponde a uma função e a propriedade que plasma em que condições é que um gráfico cartesiano representa uma função.

[75] Descrito anteriormente.
[76] Descrito anteriormente.

4.3.1.4. Tarefa F-CE1: Modelando a relação entre a amplitude de um ângulo inscrito e o ângulo ao centro, correspondente, numa circunferência

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) / Geometria e Medida (GM9);
Objetivo: Distinguir a diferença entre ângulo inscrito e ângulo ao centro, numa circunferência; Reconhecer que numa circunferência, a medida da amplitude de um ângulo inscrito é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde, apresentando um modelo matemático que se adequa à situação;
Natureza da tarefa: Investigação / Modelação;
Contexto da tarefa: Matemática Pura;
Grau de desafio: Elevado;
Grau de estrutura: Aberta;
Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;
Tempo: 60 min;
Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Utilizando a calculadora gráfica, constrói a seguinte figura:

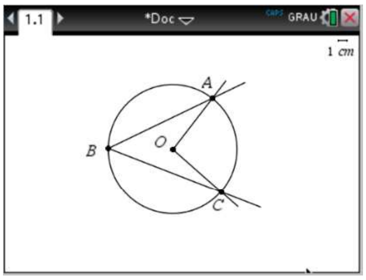


Figura 4.20 - Imagem da tarefa F-CE1.

a) Qual é a diferença entre um ângulo inscrito *ABC* e um ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência?
b) Qual é a relação que existe entre a medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde?
c) Qual é o modelo matemático que se adequa a esta situação?
Sugestão:
● Na **Página 1**, da aplicação **Geometria** define a variável **b** para o ângulo *ABC* e a variável **o** para o ângulo *AOC.*
● Na **Página 2**, insere a aplicação **Listas e Folha de Cálculo** e faz uma **captura de dados** relativamente aos valores das variáveis **b** e **o**.
● Na **Página 3**, insere a aplicação **Dados e Estatística** e traça uma função tendo em conta as variáveis **b** e **o**.

A tarefa F-CE1, foi a última que se realizou na primeira sequência de Ciclos Didáticos, no primeiro ciclo de experimentação (CE1). Os conteúdos explorados na mesma, inerentes às alíneas a) e b) eram específicos do 9.º ano de escolaridade e somente a alínea c) estava enquadrada no 7.º ano de escolaridade (MEC, 2013). Mas, como investigadora fui mais ambiciosa e tive como objetivo, aproveitar o empenho e predisposição dos alunos relativamente ao artefacto mediador, calculadora gráfica no seu processo de instrumentalização, de modo a utilizarem várias aplicações da calculadora gráfica, tais como, *Geometria*, *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística*. Por outro lado, dado que os alunos tinham realizado tarefas no domínio da Geometria e Medida e tarefas no domínio das Funções, Sequências e Sucessões, mas nunca em conjunto, numa atitude ambiciosa[77], decidi fazer uma conexão entre o domínio da Geometria e Medida (GM9) do 9º ano de escolaridade, na unidade de "Circunferência" com o domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) do 7º ano de escolaridade, na unidade de "Funções".

Esta tarefa foi introduzida depois da tarefa E - CE1 (Anexo 4), onde através da discussão coletiva gerida pela professora, os alunos analisaram a influência da variação dos parâmetros a e b, na função linear, $f(x) = a\,x\ (a \neq 0)$ e *função* afim, $f(x) = a\,x + b\ (a \neq 0, b \neq 0)$, representadas graficamente por retas, cujas expressões analíticas são dadas por $y = a\,x$ e $y = a\,x + b$, respetivamente.

Quando foi apresentada a tarefa F-CE1, no âmbito do domínio das Funções, Sequências e Sucessões (FSS7), os alunos tinham adquirido os conhecimentos inerentes à tarefa D – CE1 e tarefa E – CE1 (Anexo 4). Por outro lado, no domínio da Geometria tinham conhecimento sobre os conceitos de circunferência e ângulos.

Na alínea a) da tarefa, procurei que os alunos ao fazerem emergir o conceito de ângulo, compreendessem a distinção entre ângulo inscrito e ângulo ao centro numa circunferência, construindo uma definição sobre estes conceitos, que estivesse em conexão com a Geometria Euclidiana.

Na alínea b), os alunos deveriam proceder à medição da amplitude dos ângulos *ABC* e *AOC*. Para relacionar o ângulo inscrito *ABC* com o ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde, os alunos deveriam de proceder à divisão da variável **b** (ângulo *ABC*) pela variável **o** (ângulo *AOC*) ou à divisão da variável **o** pela variável **b** e aferir que a medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC* é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde ou que a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC* é o dobro da medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC*, que lhe corresponde. Ao utilizarem a função de arrastamento, movendo os pontos pertencentes aos lados dos ângulos ou alterando as dimensões da circunferência, verificariam que a relação se confirma sempre, em qualquer circunferência.

[77] A tarefa englobava conceitos do 9º ano de escolaridade, mas os alunos encontravam-se a frequentar o 7º ano de escolaridade.

Na alínea c), os alunos deveriam de utilizar o conhecimento sobre o conceito de funções lineares. Neste sentido, tendo em consideração a alínea b) e a relação de dependência existente entre as variáveis, isto é, o valor da abcissa (variável independente) e da ordenada (variável dependente) em cada coordenada dos pontos representados sobre o gráfico cartesiano, deveriam de concluir que o modelo matemático que se ajusta a esta situação é $f(x) = \frac{1}{2}x$ ou $f(x) = 2x$, de acordo com a escolha da variável independente. Perante o modelo encontrado, deveriam de analisá-lo e compreender se o mesmo se encontra de acordo com a relação encontrada na alínea b).

No que concerne aos *esquemas de uso* a serem desenvolvidos na tarefa, o próprio enunciado tinha algumas orientações, no entanto, a complexidade da tarefa a nível instrumental, exigia que os alunos tivessem o processo de génese instrumental (Rabardel, 1995) suficientemente bem desenvolvido. Assim, para construir a circunferência, deveriam recorrer à aplicação *Geometria*, clicar **menu - formas – circunferência**. Para colocar os pontos *A*, *B* e *C*, clicar **menu - pontos e retas - ponto sobre um objeto** e posteriormente, clicar **menu - ações – texto**. Para construir os ângulos *ABC* e *AOC,* clicar **menu - pontos e retas – semirreta.**

Relativamente aos *esquemas de uso* da alínea b)**,** para proceder à medição dos ângulos, deveriam clicar **menu - medição - ângulo**. Para definir a variável **b** para o ângulo *ABC* e a variável **o** para o ângulo *AOC,* deveriam apontar o cursor para o valor da medida da amplitude do ângulo e clicar em **var – guardar var** e escrever **b** e **o,** respetivamente, e clicar **enter**. Para relacionar as variáveis **b** e **o,** que dizem respeito aos valores das medidas das amplitudes dos ângulos *ABC* e *AOC,* respetivamente, os alunos deveriam desenvolver *esquemas de ação instrumentada* que assentam na divisão entre as variáveis **b** e **o** ou **o** e **b**, utilizando os seguintes *esquemas de uso*: clicar em **menu - ações – texto** e escrever $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{o}}$ ou $\frac{\boldsymbol{o}}{\boldsymbol{b}}$ e clicar **menu - ações – calcular**. Posteriormente, para verificar se as relações anteriores se mantêm invariáveis, deveriam desenvolver *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento, nos pontos pertencentes aos lados dos ângulos ou alterando as dimensões da circunferência.

No que respeita aos *esquemas de uso* da alínea c), para construir a **Página 2**, os alunos deveriam clicar **ctrl - +page - Listas e Folha de Cálculo**. Para fazer uma captura de dados relativamente aos valores das variáveis **b** e **o**, clicar **menu – dados – captura de dados - automático**. Esta operação também poderia ter sido realizada na alínea b) para concluir que o valor da variável **b** é metade do valor da variável **o** ou que o valor da variável **o** é o dobro do valor variável **o**, aferindo o que era pretendido.

Para construir a **Página 3,** os alunos deveriam inserir a aplicação **Dados e Estatística** e definir as variáveis **b** e **o** como variável independente ou variável dependente. Deveriam de fazer emergir *esquemas de ação instrumentada* fundamentados na escolha da relação de dependência existente entre as variáveis, tendo em consideração o conhecimento que tinham sobre funções lineares, assim como o que tinham concluído na alínea b) e utilizar os seguintes *esquemas de uso*: **menu - analisar - traçar função** de modo a fazer surgir os modelos matemáticos, $f(x) = \frac{1}{2}x$ ou $f(x) = 2x$, conforme as opções definidas anteriormente.

Em termos de mediação semiótica, no final da realização da tarefa, de modo a promover a transição de significados pessoais para significados matemáticos, deveria se desenvolver a discussão coletiva orientada pela professora.

Na alínea a) tendo em conta o potencial semiótico da calculadora gráfica, no que diz respeito à função de manuseamento, otimizado por *representações ativas* e função de visualização, os alunos deveriam mobilizar o significado pessoal do significado matemático inerente ao conceito de ângulo e construir o significado matemático respeitante ao conceito matemático de ângulo inscrito e ângulo ao centro.

Na alínea b) os alunos deveriam de fazer emergir o significado pessoal do conceito de medida da amplitude de um ângulo, cujo objetivo era fomentar a transição do significado geométrico de ângulo para o significado de medida da amplitude de um ângulo. Então, ao confrontarem-se com um sistema numérico, deveriam procurar estabelecer uma possível relação entre os números que aparecem como resultado do processo de medição, que foi automaticamente realizado pela calculadora gráfica. Deveria então surgir o significado pessoal de divisão e operacionalizar essa operação para relacionar a medida da amplitude entre o ângulo inscrito e a medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde.

Através do potencial semiótico da calculadora gráfica, função de arrastamento, otimizado por um AGD, ao arrastar a figura na tela, os alunos deveriam percecionar que todas as propriedades intrínsecas aos procedimentos de construção, se mantêm invariantes, noutras circunferências. Neste sentido, deveriam conjeturar que existe uma relação que se aplica a qualquer circunferência, conferindo uma dependência lógica com a propriedade enunciada, no âmbito da Geometria Euclidiana (Mariotti, 2012b): "Em qualquer circunferência, a medida da amplitude de um ângulo inscrito é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde".

Na alínea c), os alunos deveriam de ter em conta, a função de visualização da calculadora gráfica, o significado pessoal de representação gráfica e representação simbólica, de uma função linear. Neste sentido, deveriam de fazer emergir o significado pessoal de função linear, a propriedade conjeturada na alínea b) e terem em consideração a relação de dependência entre as variáveis, isto é, o valor da abcissa (variável independente) e da ordenada (variável dependente) em cada coordenada dos pontos representados sobre o gráfico cartesiano, concluindo que o modelo matemático que se ajusta a esta situação é $f(x) = \frac{1}{2}x$ ou $f(x) = 2x$.

4.3.2. Tarefas do segundo ciclo de experimentação

Como foi referenciado anteriormente, o segundo ciclo de experimentação, respeitante à segunda sequência de *Ciclos Didáticos* (Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2012a, 2012b, 2018), decorreu entre o final do primeiro período e metade do terceiro período, do ano letivo de 2017/2018, na turma de 8.º ano de escolaridade que teve continuidade da turma do 7.º ano de escolaridade, onde se iniciou a experiência de ensino.

As tarefas que fizeram parte deste ciclo, pertenceram aos domínios de Funções, Sequências e Sucessões (FSS8), Geometria e Medida (GM8) e Álgebra (ALG8). A sua planificação teve como objetivo moldar o currículo, tendo por referência o currículo prescrito e o currículo apresentado (Gimeno, 2000).

Tendo em consideração as peculiaridades da metodologia *Design Research*, foi crucial fazer uma análise retrospetiva e reflexiva da aprendizagem construída durante o decorrer do primeiro ciclo de experimentação, de modo a percecionar se existia a necessidade de reformular a conjetura de ensino-aprendizagem concebida inicialmente, o que não aconteceu (Cobb et al., 2003). Por outro lado, sendo uma metodologia onde se pretende que exista uma articulação entre a teoria e a prática, de modo que os resultados da investigação culminem com uma melhoria no processo educativo e consequente facilidade na resolução de problemas práticos, foram planificadas algumas tarefas com esse objetivo (Cobb, Jackson & Dunlap, 2016). Isto é, pretendeu-se avaliar se as estratégias de ensino exploratório, em tarefas realizadas anteriormente[78], facilitaram a resolução de tarefas posteriores[79], onde os alunos foram os principais intervenientes na construção do conhecimento matemático (Canavarro, 2011; Mariotti, 2012a, 2012b, 2018; Ponte, 2005; Stein et al., 2008).

Tal como no primeiro ciclo de experimentação, em cada tarefa, foi elaborada uma "ficha técnica" onde são dadas várias informações inerentes à sua caracterização, como, o domínio em que a mesma se insere, objetivo didático, natureza, contexto, grau de desafio, grau de estrutura, metodologia de trabalho, tempo de duração e recursos a utilizar. Como neste ciclo de experimentação não foi realizada a análise dos dados do trabalho dos alunos, em algumas tarefas, apenas foi feita uma descrição dos conhecimentos matemáticos que os alunos possuíam, em termos de significados pessoais e quais as estratégias de resolução esperadas (Stein et al., 2008).

No entanto, neste ciclo, os alunos já dominavam bem as técnicas básicas de manipulação do artefacto, calculadora gráfica, tendo os mesmos continuado a desenvolver o processo de Génese Instrumental na realização das tarefas. Por outro lado, através da minha intervenção como professora, pretendi do ponto de vista de investigadora, que refinassem o processo de mediação

[78] Ver por exemplo, a tarefa A-CE2, tarefa B-CE2 e tarefa C-CE2, dos Anexos 5, 6 e 7, respetivamente.
[79] Ver por exemplo, a tarefa D-CE2, do Anexo 8.

semiótica iniciado no primeiro ciclo de experimentação. Pois, percecionei que ao longo do tempo em que decorreu o primeiro ciclo de experimentação existiu uma maior capacidade de articular significados pessoais com significados matemáticos, de acordo com o *potencial semiótico do artefacto* mediador, calculadora gráfica.

Como foi referido anteriormente, dado que neste ciclo de experimentação não se realizou a análise dos dados, todas as tarefas encontram-se em anexo (Anexos 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, respetivamente).

4.3.3 Relação entre o design das tarefas do primeiro ciclo de experimentação e o segundo ciclo de experimentação

Neste estudo, tendo-se adotado uma metodologia *Design Research*, em algumas tarefas, realizei uma articulação entre as tarefas do primeiro ciclo de experimentação e as tarefas do segundo ciclo de experimentação, fundamentada numa análise retrospetiva (Cobb et al, 2003). Segundo Steffe e Thompson (2000), uma experiência de ensino é uma das especificidades desta metodologia, onde se perceciona a evolução dos alunos, em termos de aprendizagem, quando apoiados por práticas inovadoras, durante um determinado ciclo de tempo. De uma forma intervencionista, procurei criar e avaliar novas condições de aprendizagem, onde os resultados deveriam incluir novas possibilidades para as práticas de ensino. Nomeadamente, a inclusão da calculadora gráfica que não era recomendada neste nível de ensino, no Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013).

Por conseguinte, de modo a percecionar e consequentemente avaliar os progressos dos alunos, por exemplo, a tarefa A - CE2 (Anexo 5) do segundo ciclo de experimentação pretendeu fazer uma articulação em termos de conteúdos, com a tarefa A-CE1, do primeiro ciclo de experimentação. Por outro lado, por exemplo, a tarefa E-CE2 (Anexo 9) do segundo ciclo de experimentação, relacionou-se com a tarefa D-CE1 e a tarefa F-CE1, do primeiro ciclo de experimentação.

Na tarefa A-CE1, no primeiro ciclo de experimentação, os alunos deveriam verificar que em qualquer triângulo, a soma da medida das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. Neste sentido, na articulação da tarefa A-CE1, por exemplo, com a alínea a) da tarefa A-CE2, pretendi verificar, se os alunos conseguiam percecionar que se medissem a amplitude apenas de dois ângulos, correspondentes, dos triângulos *[ACB]* e *[ACD]*, era suficiente para verificarem que os triângulos são semelhantes, pelo critério AA (Ângulo, Ângulo).

Com a tarefa D-CE1, os alunos deveriam compreender o conceito gráfico de uma função como relação entre variáveis numéricas e como correspondência entre dois conjuntos numéricos. Neste sentido, deveriam de aferir que um gráfico cartesiano representado por uma curva fechada, nunca se trata de uma função, pois qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas, interseta o gráfico em mais que um ponto. Com a tarefa F-CE1[80], os alunos deveriam percecionar que o modelo matemático solicitado, correspondia a uma função linear. Neste sentido, na articulação da tarefa E-CE2 (Anexo 9), com a tarefa D-CE1 e tarefa F-CE1, objetivei verificar a existência de uma conexão entre a teoria e a prática, e validar se a investigação anterior, facilitou (Cobb et al., 2016) a modelação e interpretação de situações que envolviam funções afim, linear e constante

[80] Tendo em consideração a resolução da tarefa E-CE1 (Anexo 4), onde os alunos deveriam interpretar graficamente e compreender a influência da variação dos parâmetros a e b, na função linear, $f(x)=a\,x$ e função afim, $f(x)=ax+b$, representadas pelas retas de expressões analíticas, $y=ax$ e $y=ax+b$, respetivamente.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresento a análise dos dados, em quatro tarefas, realizadas no primeiro ciclo de experimentação (CE1) da experiência de ensino. Esta análise tem como foco o trabalho desenvolvido pelos alunos que constituem o estudo de caso, de acordo com as linhas teóricas que suportaram o estudo, cujo objetivo foi responder às questões de investigação e validar a conjetura de ensino-aprendizagem.

5.1 Análise do trabalho dos alunos no primeiro ciclo de experimentação

Este estudo refere-se a uma experiência de ensino que se realizou no âmbito de um projeto de desenvolvimento curricular, onde o currículo prescrito foi moldado em algumas unidades de ensino. Como investigadora, recorri a tarefas diversificadas de índole exploratória com recurso ao uso da calculadora gráfica. A experiência de ensino decorreu em dois ciclos de experimentação consecutivos. No entanto, neste capítulo apresento a análise dos dados empíricos dos quatro alunos que constituíram o grupo, estudo de caso, em quatro tarefas do primeiro ciclo de experimentação (CE1): tarefa A-CE1, tarefa B-CE1, tarefa D-CE1 e tarefa F-CE1.

As aulas onde foi feita a investigação, não foram consecutivas, apenas se deu uma continuidade, quando a realização das tarefas assim o exigiu. Os alunos trabalharam, quase sempre, a pares, tendo usualmente, realizado individualmente, os relatórios das tarefas.

As primeiras duas tarefas analisadas, pertencem à unidade de ensino, "Quadriláteros", no âmbito do domínio da Geometria e Medida (GM7) do 7.º ano de escolaridade. As mesmas foram integradas nesta unidade, mas referem-se à unidade de ensino, "Propriedades Geométricas - Amplitudes de ângulos" no âmbito do domínio da Geometria e Medida (GM5) do 5.º ano de escolaridade. Tive como objetivo que os alunos fizessem uma revisão, verificação e compreendessem alguns conceitos lecionados no 2.º ciclo do ensino básico e que posteriormente pudesse existir a necessidade de serem usados. A terceira tarefa está enquadrada na unidade de "Funções", no domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) do 7.º ano de escolaridade. Por último, na quarta tarefa, aproveitando a motivação dos alunos no que concerne ao processo de instrumentalização e instrumentação, de forma a utilizarem várias aplicações da calculadora gráfica, tais como, *Geometria*, *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística* e numa perspetiva ambiciosa[81], pretendi fazer uma conexão entre o domínio da Geometria e Medida (GM9) do 9.º ano de escolaridade, na unidade de "Circunferência" com o domínio de Funções, Sequências e

[81] Os alunos encontravam-se no 7º ano de escolaridade e a tarefa englobava conceitos do 9º ano de escolaridade.

Sucessões (FSS7) do 7º ano de escolaridade, na unidade de "Funções". Esta tarefa foi proposta aos alunos, no final da unidade de Funções, no 7º ano de escolaridade. Anteriormente, os mesmos tiveram oportunidade de realizar tarefas nos dois domínios distintos (Geometria e Medida e Funções, Sequências e Sucessões), mas nunca em simultâneo.

Tendo em consideração o Capítulo 2, da Revisão de Literatura e o Capítulo 3, da Metodologia, o principal objetivo foi confirmar a conjetura de ensino-aprendizagem e responder às questões de investigação, apresentadas no Capítulo 1. Essas questões tiveram como objetivo dar um maior enfoque às linhas teóricas que compõem os quadros teóricos da Teoria da Mediação Semiótica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), obviamente, em articulação com a Teoria da Atividade (Engeström, 2001) e Teoria da Génese Instrumental (Rabardel, 1995).

No que concerne à revisão de literatura, dentro das linhas teóricas que constituem o quadro teórico da Teoria da Atividade (Engeström, 2001), pretendi analisar e compreender com que facilidade o aluno construiu o conhecimento matemático, na resolução de tarefas exploratórias com o apoio do artefacto mediador, calculadora gráfica, no ambiente social da aula, regido por regras e divisão do trabalho. Neste ambiente cooperativo de aprendizagem, procurei percecionar, quais os *signos de artefacto* desenvolvidos pelo aluno, na sua *atividade com o artefacto*[82] e na *produção individual/pequeno grupo de signos*[83], através do desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada* (Drijvers & Trouche, 2008), ao apropriar-se da calculadora gráfica (Rabardel, 1995), de acordo com os aspetos técnicos relacionados com a manipulação deste artefacto e os seus conhecimentos matemáticos. Neste sentido, de acordo com os esquemas desenvolvidos, o aluno na sua *atividade com o artefacto* comunicou oralmente entre os pares e com a professora. Por outro lado, na *produção individual/pequeno grupo de signos*, os alunos comunicaram por escrito, sob a forma de relatórios. Por conseguinte, na *Produção coletiva de signos - Discussão Matemática*[84], inerente à discussão coletiva, existiu a comunicação entre os alunos e a professora. Aí, analisei como é que a professora[85] orquestrou a discussão coletiva tendo em consideração os dois pares de *Ações Complementares*[86], articulando significados pessoais com significados matemáticos, inerentes ao objetivo da tarefa. Isto é, tendo em consideração os esquemas desenvolvidos pelos alunos, como é que a professora desenvolveu o potencial semiótico da calculadora gráfica, promovendo o processo de mediação semiótica (Mariotti, 2012a, 2012b, 2018).

[82] Atividade do *Ciclo Didático*.
[83] Atividade do *Ciclo Didático*.
[84] Atividade do *Ciclo Didático*.
[85] Com a ajuda do aluno *Sherpa*.
[86] *"Ação de retorno à tarefa e ação de focalização"* e *"solicitar uma síntese e oferecer uma síntese"*.

Encontrando-me numa comunidade de aprendizagem, na análise dos dados do trabalho de cada aluno, procurei compreender e analisar o papel da calculadora gráfica, no sistema de atividade dos alunos com o sistema de atividade da professora (Engeström, 2001),

Neste sentido, inicialmente, a análise dos dados assentou na análise dos registos realizados em gravações áudio, nas imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, em articulação com as notas de campo registadas no diário de bordo, através da observação participante. Nessa observação, na *atividade com o artefacto* apoiei-me na comunicação desenvolvida entre os pares, entre a professora e os alunos, e por outro lado, na comunicação escrita sob a forma de relatórios, aquando da produção individual/pequeno grupo de signos[87]. Com esta análise preliminar, pretendi que se operacionalizasse a produção *de signos de artefacto*, através do desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada*.

Numa segunda fase, baseei-me de novo, nos registos no diário de bordo, no que concerne à *Produção coletiva de signos - Discussão Matemática*[88], na discussão coletiva. Surgiram os *signos pivot* onde a professora promoveu a passagem de *signos de artefacto* para *signos matemáticos,* tendo em conta os *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso,* apresentados. Esta discussão coletiva, embora tivesse sido orquestrada pela professora, contou com a presença de um aluno *Sherpa*. Então realizei uma descrição, como é que no ambiente social da aula, a professora orientou a evolução de significados pessoais, relacionados com a tarefa e o artefacto, calculadora gráfica, para significados matemáticos, de acordo com dois pares de *Ações Complementares*, *"ação de retorno à tarefa e ação de focalização"* e *"solicitar uma síntese e oferecer uma síntese"*. No final, apresentei uma síntese da análise dos resultados, onde objetivei sumariar as ações dos alunos, tendo em consideração as questões de investigação e consequentemente os objetivos da tarefa.

De acordo com as linhas teóricas que constituem os quadros teóricos deste estudo e suportam a análise dos dados, construí o esquema da figura 5.1. A análise dos dados teve em consideração o modo como a aprendizagem se desenvolveu, de acordo com as várias relações entre os componentes da atividade humana, onde todos os elementos se relacionam entre si. Neste sentido, a relação entre o sujeito e o objeto foi mediada pelo "artefacto mediador", a relação entre o "sujeito" e a "comunidade" foi mediada por "regras" e a relação entre o "objeto" e a "comunidade" foi mediada pela "divisão do trabalho". Sendo o "objeto", o elemento que o "sujeito" tentou alcançar[89], através da utilização do "artefacto mediador", *a produção individual/pequeno grupo* de *signos de artefacto* foi evidenciada pelo desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada.* Esses esquemas encontram-se numa relação de dependência, uma vez que, o desenvolvimento dos *esquemas de ação instrumentada* pode

[87] Atividade do *Ciclo Didático*.
[88] Atividade do *Ciclo Didático*.
[89] O objetivo didático da tarefa.

implicar o emergir dos *esquemas de uso* e vice-versa. O “resultado”, onde se deu a *Produção coletiva de signos/Discussão Matemática* e se consolidou a aprendizagem, foi evidenciado através da orquestração da professora através das *Ações Complementares*, *“ação de retorno à tarefa e ação de focalização”* e *“solicitar uma síntese e oferecer uma síntese”* (Mariotti, 2018), com a ajuda do aluno *Sherpa*. Por outro lado, existiu uma relação de dependência entre o “resultado” e o “artefacto mediador”, na medida em que a intervenção do aluno *Sherpa* conjuntamente com a orquestração da professora[90], na discussão coletiva, necessitou do artefacto mediador para mostrar como a aprendizagem se desenvolveu.

Portanto, no esquema da figura 5.1 estão representadas as várias relações entre os componentes da atividade humana, de modo a percecionar como a aprendizagem se efetivou, de acordo com o modelo da segunda geração da Teoria da Atividade, as linhas teóricas que constituem a Génese Instrumental e com o desenvolvimento das várias fases do *Ciclo Didático* em articulação com as *Ações Complementares* inerentes à Teoria da Mediação Semiótica (Mariotti, 2012a, 2012b, 2018).

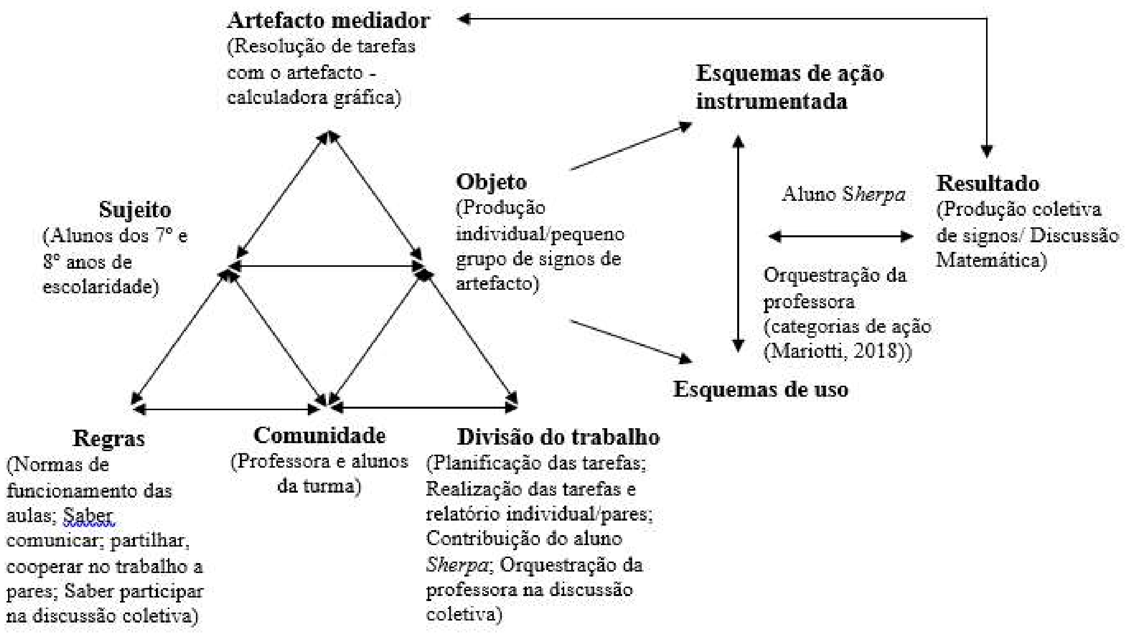


Figura 5.1- Esquema representativo de como a aprendizagem se desenvolveu na realização de cada tarefa, tendo em consideração o modelo de Atividade segundo Engeström (2001), Génese Instrumental de Rabardel (1995) e as fases do *Ciclo Didático* de acordo com a Teoria da Mediação Semiótica de Mariotti (2012a, 2012b, 2018).

[90] Neste estudo adotámos as duas interpretações de orquestração segundo Bartolini Bussi (1998) e por outro lado, de acordo com Trouche (2004b) e Drijvers e Trouche (2008).

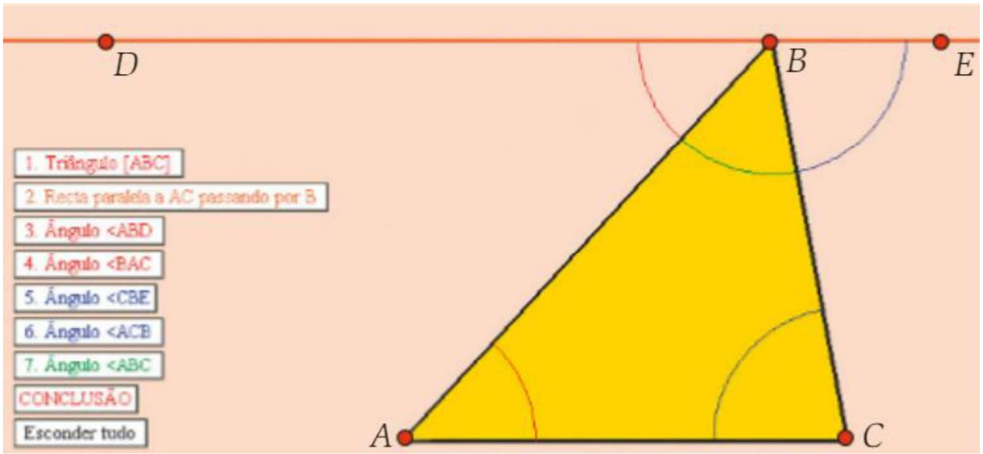
5.1.1. Tarefa A-CE1: Soma dos ângulos internos de um triângulo

A tarefa apresentada aos alunos

1. Com recurso à calculadora gráfica, segue as instruções:

a) Constrói um triângulo *[ABC]* à tua escolha. (Para uma maior facilidade de visualização, representa um dos lados do triângulo na posição horizontal).

Pelo vértice *B*, traça uma reta paralela ao lado *[AC]* e marca os pontos *D* e *E*.



b) Assinala com a mesma cor os ângulos *A* do triângulo *[ABC]* e *DBA.* Justifica que $\hat{A} = D\hat{B}A$.

c) Assinala com outra cor os ângulos *C* do triângulo *[ABC]* e *CBE*. Justifica que $\hat{C} = C\hat{B}E$.

d) O que concluis relativamente aos ângulos *DBA, ABC* e *CBE*? Tendo em conta as alíneas anteriores, o que podes concluir relativamente à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos do triângulo *[ABC]*? Justifica a tua resposta.

Figura 5.2- Enunciado da tarefa A-CE1.

Esta tarefa foi realizada após duas aulas consecutivas[91] da primeira fase do processo de instrumentalização, isto é, da aprendizagem do *software* da calculadora gráfica. O objetivo desta tarefa era levar os alunos a recordar que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

A tarefa foi resolvida a pares[92] e foi solicitado um relatório individual. De seguida desenvolveu-se a discussão coletiva, orquestrada pela professora.

[91] ***Aula n.º 1*** e ***Aula n.º 2***.
[92] A Maria e a Berta formaram um par e o José e o Pedro formaram outro par.

Atividades com o artefacto e produção individual/pequeno grupo de signos [93]

Relativamente à resolução da alínea a), surgiram os primeiros *signos de artefacto*, traduzidos no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada,* quando emergiram significados pessoais que assentaram nos signos matemáticos inerentes ao conceito de triângulo e retas paralelas, aprendidos em anos letivos transatos. Por outro lado, utilizaram *esquemas de uso* no que concerne à gestão que fizeram do artefacto, calculadora gráfica:

> **1. Maria:** E agora, como é que eu faço o triângulo? Vou a *Geometria*, *menu*, *pontos e retas…*
> **2. Berta:** Não é nada *pontos e retas*, tens de ir a *formas* e depois *triângulo*, para desenhares o triângulo.
> **3. Maria:** Já fiz o triângulo. E agora como fazemos a reta paralela? Já não me lembro de nada!
> **4. Berta:** Pois eu também não! [Voltando-se para traz, a Berta questiona o colega]. José como é que vocês fazem a reta paralela?
> **5. José:** Eu não acredito. A stora explicou! Porque é que não apontaram no caderno. Vão outra vez a *menu*, *construção* e *paralela*.
> **6. Pedro:** Não se esqueçam de marcar os pontos *D* e *E*. Têm de ir a *menu*, *pontos e retas* e *pontos sobre um objeto*.
> **7. Maria:** Stora, como faço para marcar os pontos *A, B*, *C, D* e *E*?
> **8. Professora:** Vão a *menu*, *ações* e *texto*.
> **9. Maria:** Já fiz! Que giro! Gosto disto!

A Maria revelou uma certa dificuldade na manipulação e atribuição de sentido de algumas funções da calculadora gráfica. A primeira fase do processo de instrumentalização ainda se estava a iniciar. No entanto, a aluna mostrou-se empenhada e conseguiu ser a primeira a construir o triângulo respeitante à alínea a).

Relativamente às alíneas b) e c), todos os alunos utilizaram *esquemas de uso* para proceder à medição da amplitude dos ângulos, clicando em *menu*, *medição* e *ângulo,* na aplicação *Geometria*. No entanto, mais uma vez, o grupo das alunas, Maria e Berta, necessitou de ajuda, quer dos colegas Pedro e José, quer da professora, para operacionalizar esses procedimentos. Por outro lado, foi o único grupo que desenvolveu *signos de artefacto* baseados em *esquemas de ação instrumentada*, quando usaram os *esquemas de uso* (medição dos ângulos), pois utilizaram significados pessoais fundamentados no facto dos ângulos *A* (do triângulo *[ABC]*) e *DBA* e os ângulos *C* (do triângulo *[ABC]*) e *CBE* serem congruentes ($\hat{A} = D\hat{B}A$ e $\hat{C} = C\hat{B}E$), por se tratarem de ângulos alternos internos (ver figura 5.3, figura 5.4 e figura 5.5).

[93] Existia uma certa ansiedade por parte dos estudantes, pois tinham conhecimento que se tratava da primeira tarefa integrada numa experiência de ensino, onde estavam a ser observados pormenorizadamente. Foi visível uma grande concentração na leitura do enunciado e uma enorme vontade de responder com sucesso ao solicitado, cumprindo o objetivo da tarefa. Este sentimento foi percetível, por exemplo, quando a aluna Maria transmitiu à colega, em voz baixa, que tinham de ter uma boa prestação na resolução da tarefa, porque a professora necessitava muito das suas contribuições para o trabalho que andava a fazer na universidade.

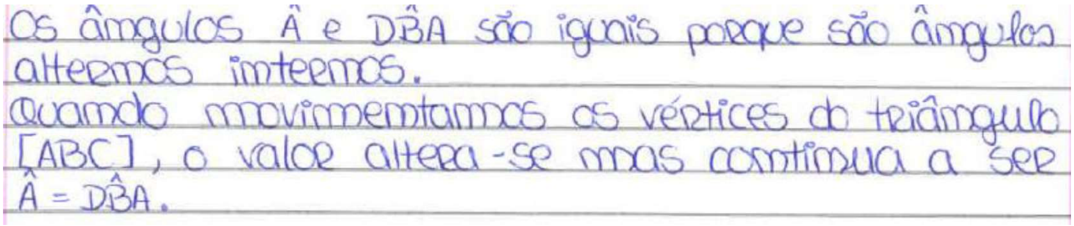

Os ângulos $\hat{A}$ e $D\hat{B}A$ são iguais porque são ângulos alternos internos.
Quando movimentamos os vértices do triângulo [ABC], o valor altera-se mas continua a ser $\hat{A} = D\hat{B}A$.

Figura 5.3 - Resolução da Maria da alínea b), da tarefa A-CE1.

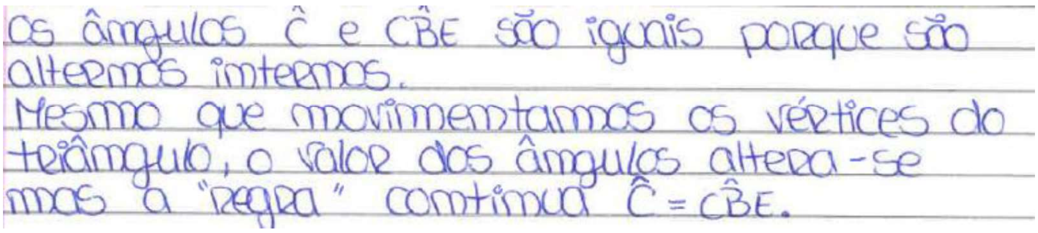

Os ângulos $\hat{C}$ e $C\hat{B}E$ são iguais porque são alternos internos.
Mesmo que movimentamos os vértices do triângulo, o valor dos ângulos altera-se mas a "regra" continua $\hat{C} = C\hat{B}E$.

Figura 5.4 - Resolução da Maria da alínea c), da tarefa A-CE1.

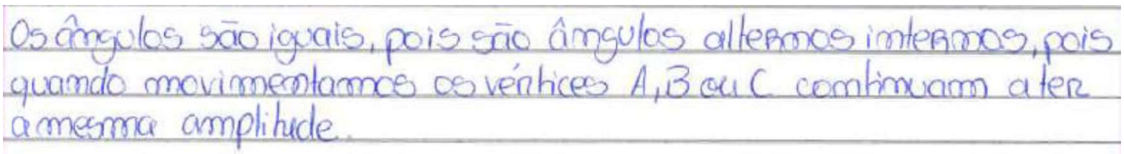
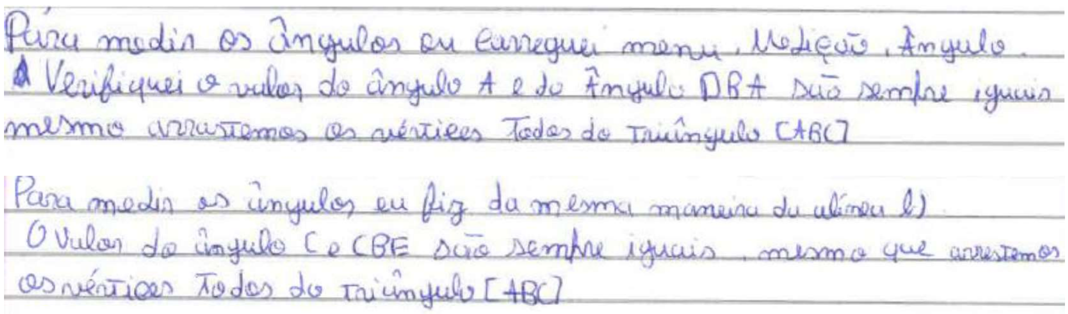

Os ângulos são iguais, pois são ângulos alternos internos, pois quando movimentamos os vértices A, B ou C continuam a ter a mesma amplitude.

Figura 5.5 - Resolução da Berta das alíneas b) e c), da tarefa A-CE1.

A Maria revelou dificuldades e fez confusão no que concerne à escrita de simbologia matemática, inerente às *representações simbólicas* de ângulo e medida da amplitude de um ângulo (ver figuras 5.3 e 5.4). Enquanto que a Berta (ver figura 5.5) e o Pedro (ver figura 5.6), omitiram a utilização de linguagem simbólica na descrição das suas conjeturas. O José (ver figuras 5.7 e 5.8) usou a simbologia matemática corretamente e recorreu a *representações icónicas* (ver figura 5.8) para mostrar a sua resolução, na alínea c). Somente na discussão coletiva (ver figura 5.13) é que se tornou percetível se esses significados estavam ou não clarificados, para estes alunos[94].


Para medir os ângulos eu carreguei menu, Medição, Ângulo.
Verifiquei o valor do ângulo A e do ângulo DBA são sempre iguais mesmo arrastemos os vértices todos do triângulo [ABC]

Para medir os ângulos eu fiz da mesma maneira da alínea b)
O valor do ângulo C e CBE são sempre iguais, mesmo que arrastemos os vértices todos do triângulo [ABC]

Figura 5.6 - Resolução do Pedro, das alíneas b) e c), respetivamente, da tarefa A-CE1.

[94] Alunos Maria, Berta e Pedro.

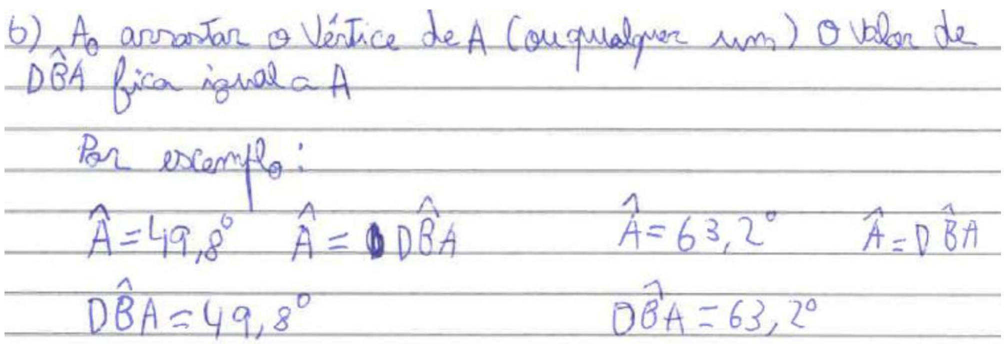


Figura 5.7-Resolução do José da alínea b), da tarefa A-CE1.

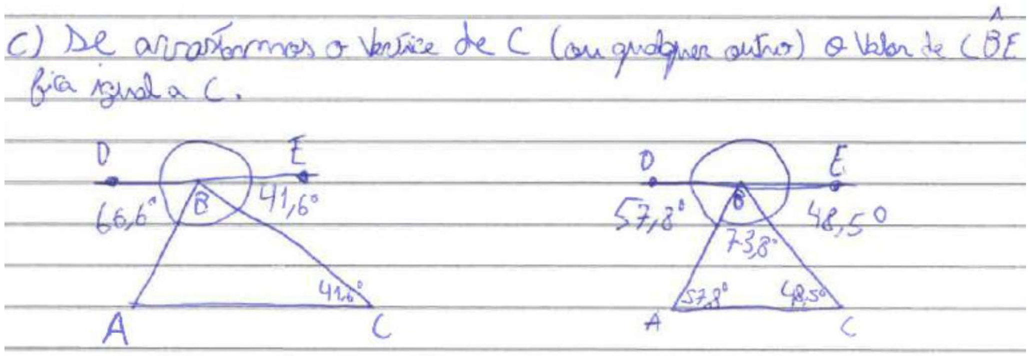


Figura 5.8 - Resolução do José da alínea c), da tarefa A-CE1.

Tendo em conta, o facto de estarem a trabalhar num Ambiente de Geometria Dinâmica, todos os alunos usaram o *esquema de ação instrumentada* inerente à função de arrastamento[95], movendo os vértices do triângulo *[ABC]* para concluir a generalização da congruência dos ângulos, em qualquer outro triângulo. No entanto, apenas no par, Maria e Berta, é que o *esquema de ação instrumentada*, inerente à função de arrastamento permitiu a movimentação de *significados pessoais* para *significados matemáticos*. Estas alunas num primeiro contacto com a tarefa, possivelmente, através da função de visualização, desenvolveram significados pessoais ao percecionarem imediatamente que os ângulos eram alternos internos e portanto, sempre congruentes. Esses significados pessoais transitaram para significados matemáticos, ao generalizarem a propriedade: “Em qualquer triângulo, ângulos alternos internos são sempre congruentes”, como se pode comprovar aquando da discussão coletiva (ver diálogos 21-25 e 32-33). O par José e Pedro, chegam a essa conclusão, porque inicialmente foram medir todos os ângulos, pois não se lembraram do conceito de ângulos alternos internos, que foi abordado no 5.º ano de escolaridade.

[95] Esta função da calculadora gráfica, foi “descoberta” pelo José, tendo posteriormente todos os alunos evidenciado este *esquema de ação instrumentada*. Por conseguinte, este esquema necessitou da intervenção de *esquemas de uso* para ser operacionalizado.

No que concerne à alínea d), todos os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, ao fazerem emergir os significados pessoais fundamentados no facto dos ângulos *DBA, ABC e CBE* serem suplementares e a soma das suas amplitudes ser um ângulo raso. Para operacionalizarem esses *esquemas de ação instrumentada*, desenvolveram *esquemas de uso*, como se pode constar no diálogo entre as duas alunas:

> **10.Maria:** Somei os ângulos na minha calculadora [científica] e deu 180º.
> **11.Berta:** Calma! Podes fazer tudo nesta [calculadora gráfica]! Para escreveres os ângulos *DBA +ABC+CBE*, podes fazer *menu, ações* e *texto*. Depois para calculares a soma total, podes fazer *menu, ações* e *calcular*!
> **12.Maria:** Estás a ver, dá sempre 180º, mesmo quando movimentamos os vértices do triângulo e apanhamos outro triângulo.

Ambos os grupos, recorrendo ao uso de papel e lápis, conseguiram mobilizar os significados matemáticos confirmados nas alíneas b) e c). Partindo das relações: $\hat{A} = D\hat{B}A$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = C\hat{B}E$, concluíram que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$º, através de escrita simbólica, evidenciada por *representações simbólicas* (ver figura 5.9 e figura 5.10). No entanto, não utilizaram a calculadora gráfica para confirmar, a igualdade anterior, isto é, que em qualquer triângulo, a soma da medida das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

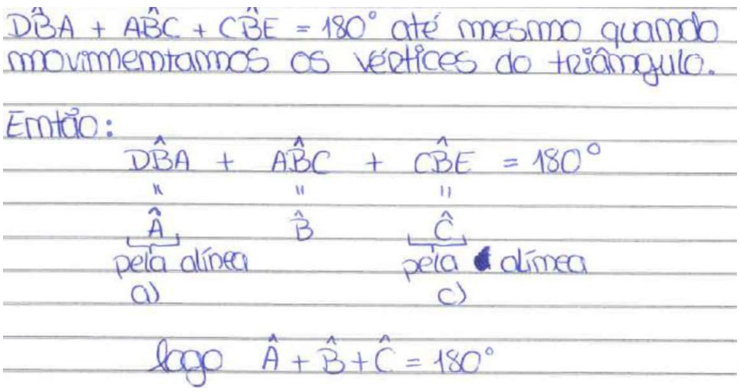


Figura 5.9 - Resolução da Maria da alínea d), da tarefa A-CE1.

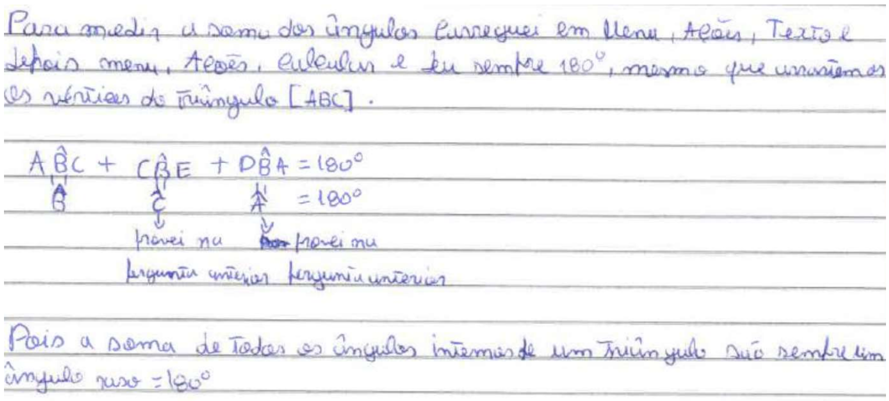


Figura 5.10 - Resolução do Pedro da alínea d), da tarefa A-CE1.

Produção coletiva de signos – Discussão Matemática

Na discussão coletiva, operacionalizou-se um processo de mediação semiótica que consistiu em promover a emergência de signos pessoais relacionados com o uso do artefacto, evoluindo para signos matemáticos, num ambiente social de aprendizagem, a aula. Gerou-se uma polifonia de vozes.

Na *ação de retorno à tarefa,* a professora solicitou a intervenção dos alunos para fazerem os seus relatos, relativamente à tarefa realizada, embora tivesse lido anteriormente, as produções escritas de cada um. A Maria ofereceu-se para assumir a função de aluna *Sherpa* e resolver a tarefa no computador da professora, com a calculadora gráfica projetada no quadro interativo. A professora não mostrou nenhuma objeção em aceitar o pedido da Maria, na medida em que a aluna tinha mostrado algumas dificuldades na apropriação do artefacto, calculadora gráfica (ver diálogo 1 - 8) (Drijvers & Trouche, 2008), no que concerne à primeira fase do processo de instrumentalização (Trouche, 2004b). Deste modo:

13.Professora: Então, quem quer explicar o que se pretendeu com esta tarefa?
14.Pedro: Mostrar, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º.
15.Professora: E para isso, tiveram que fazer um conjunto de procedimentos na calculadora gráfica e não só, também com o papel e lápis. Maria, explique então aos seus colegas como resolveu a tarefa!
16.Maria: Para construir o triângulo, eu fui a *menu, formas* e *triângulo*. Para traçar a reta paralela, fiz *menu*, *construção* e *paralela*. Depois para marcar os pontos A, B, C, D, E, fiz *menu*, *ações* e *texto*.

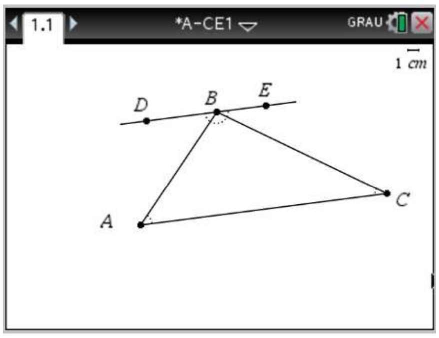


Figura 5.11 - Resolução da Maria (aluna *Sherpa*), na calculadora gráfica, da alínea a) da tarefa A-CE1.

A Maria mostrou uma evolução significativa no que concerne ao processo de instrumentalização. As dificuldades inicialmente sentidas, no que concerne ao reconhecimento de certas funções e potencialidades da calculadora gráfica, parece que foram ultrapassadas quando assumiu a função de aluno *Sherpa.* A aluna desenvolveu *esquemas de uso* na construção do triângulo *[ABC]*, na resolução da alínea a) da tarefa, tendo sido influenciada pelas potencialidades do artefacto, calculadora gráfica e reconheceu-as para resolver a tarefa, no que respeita à parte instrumental da mesma.

Mais uma vez deu-se a *ação de retorno* à tarefa:

17.Professora: Muito bem Maria! Acabaste de resolver a alínea a). Quem me consegue dizer o que foi pedido nas alíneas b) e c)?
18.José: Foi mostrar que o ângulo *A* é igual ao ângulo *DBA* e o ângulo *C* é igual ao ângulo *CBE*.
19.Professora: E porque é que têm a mesma amplitude?
20.José: Porque fomos à máquina e fizemos *menu*, *medição*, *ângulo* e medimos e verificamos a igualdade. Depois arrastarmos os vértices do triângulo e deu sempre igual. Eu até fiz no relatório dois exemplos diferentes (ver figuras 5.7 e 5.8).
21.Berta: Stora, os ângulos são sempre iguais porque são alternos internos.

Nesta etapa operacionalizou-se a *ação de focalização*:

22.Professora: Berta, explica melhor! Porque é que os ângulos são alternos internos? Quais os ângulos que são alternos internos?
23.Berta: Aí stora, não sei explicar. É … por causa da posição deles.
24.Maria: Stora, a reta *DE* é paralela à reta *AC* e essas retas são intersetadas por uma reta obliqua *AB*. Portanto, o ângulo *A* do triângulo *[ABC]* tem a mesma medida que o ângulo *DBA* e o ângulo C do triângulo *[ABC]* tem a mesma medida que o ângulo *CBE*.
25.Professora: Maria, mostra aos teus colegas na calculadora gráfica, a veracidade dessa tua conjetura!

A Maria utilizou a função de arrastamento, movimentando os vértices *A*, *B* e *C*, obtendo triângulos com diferentes dimensões. Neste sentido, mostrou que a medida da amplitude do ângulo *A* do triângulo *[ABC]* é a mesma que a medida da amplitude do ângulo *DBA*, assim como a medida da amplitude do ângulo C do triângulo *[ABC]* é a mesma que a medida da amplitude do ângulo *CBE* (ver figura 5.12).

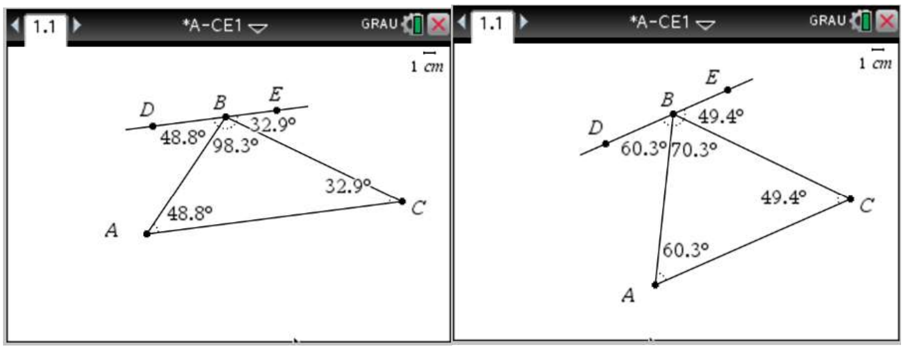


Figura 5.12 - Resolução da Maria (aluna *Sherpa*), utilizando a função de arrastamento da calculadora gráfica, nas alíneas b) e c) da tarefa A-CE1.

Por outro lado, de modo a clarificar pormenores inerentes à linguagem simbólica relativamente aos *signos matemáticos*, ângulo e medida da amplitude de um ângulo, que foram usados pela Maria (ver figura 5.3 e 5.4), a professora colocou a seguinte questão:

26.Professora: Olhem, uma curiosidade, podem-me dizer como escrevem simbolicamente, isto é, em linguagem simbólica matemática, ângulos *A, DBA*, *C* e *CBE* e medida da amplitude desses ângulos!
27.Maria: A medida é com o "*chapeuzinho*" no vértice do ângulo e ângulo sozinho escreve-se "*atrás das letras* só *um sinal de menor ou um sinal de menor com um parêntesis lá dentro"* ou também podemos escrever "*ângulo A, ou ângulo DBA*", por exemplo.
28.Professora: Podes escrever no quadro negro, o que acabaste de dizer!
29.Maria: Agora estou aqui no computador! A Berta pode ir?
30.Professora: Sim claro! Vai lá Berta!

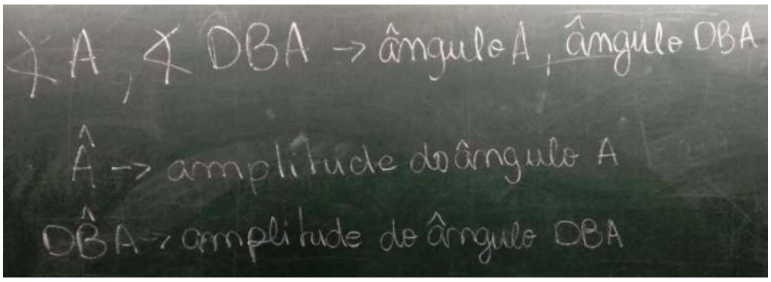


Figura 5.13 - Representação simbólica de um ângulo e amplitude da medida de um ângulo, realizada pela Berta.

Depois de esclarecida a escrita simbólica de ângulo e medida da amplitude de ângulo, a professora *solicitou uma síntese* e ao mesmo tempo *ofereceu uma síntese*:

31.Professora: Bom então, voltando à nossa tarefa, podemos dizer que se verifica sempre a congruência desses ângulos?
32.Maria: Quando movimentamos[96] os vértices do triângulo *[ABC]* os valores alteram-se, mas continua a ser sempre o ângulo A congruente com o ângulo *DBA* e o ângulo C congruente com o ângulo *CBE*.

[96] A Maria exemplificou a veracidade da sua afirmação (figura 5.12).

33.Professora: Queres dizer que utilizaste a função de arrastamento da calculadora gráfica e essa propriedade verifica-se para qualquer triângulo, certo?
34.Maria: Certo!

De novo a professora solicitou a *ação de retorno à tarefa*:

35.Professora: Então como concluíram a tarefa, com a resolução da alínea d)?
36.Pedro: Os ângulos *DBA, ABC e CBE* são suplementares e a soma deles é um ângulo raso! É um ângulo de 180º.

A professora *solicitou uma síntese*:

37.Professora: Essa propriedade acontece sempre em qualquer triângulo?
38.Pedro: Sim, dá sempre 180º, mesmo quando movimentamos os vértices do triângulo *[ABC]*, quer dizer, quando usamos a função de arrastamento.
39.Professora: Mas como é que essa propriedade vai interferir relativamente à soma das medidas dos ângulos internos do triângulo *[ABC]* que é o objetivo da alínea d)?
40.Pedro: Stora veja lá como eu justifiquei no meu relatório (figura 5.10)!
41.Professora: Certo! Mas fizeste uma prova com papel e lápis! E confirmaste a tua conjetura na calculadora gráfica?
42.Pedro: Não! Isso não fiz!

A professora *ofereceu uma síntese* e a seguir evidenciou uma *ação de retorno à tarefa*:

43.Professora: Muito bem Pedro! Verificaste que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos *DBA, ABC e CBE* é sempre 180º, em qualquer triângulo, ao usares a função de arrastamento nos vértices A ou B ou C do triângulo*[ABC]*. Por outro lado, tendo em conta que provaste na alínea b) que $\hat{A} = D\hat{B}A$ e na alínea c) que $\hat{C} = C\hat{B}E$ e sabendo que $\hat{B} = A\hat{B}C$, concluíste que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$. Mas, seria interessante utilizarem a calculadora gráfica para confirmar se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, em qualquer triângulo.
44.Professora: Alguém fez?

De acordo com *a oferta de uma síntese* da professora, a Maria continuou a resolver a tarefa, evidenciando a autenticidade da afirmação da professora. A aluna desenvolveu *esquemas de uso*, ao determinar o valor da soma $D\hat{B}A + A\hat{B}C + C\hat{B}E$ e o valor da soma de $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$, dando ambos 180º. Posteriormente, desenvolveu *esquemas de ação instrumentada* ao utilizar a função de arrastamento, para confirmar que que essas somas se verificam em qualquer triângulo (ver figura 5.14).

Enquanto a Maria resolveu a tarefa no computador, projetando a mesma no quadro interativo, os outros alunos da turma também confirmaram na calculadora gráfica a veracidade da prova, que tinham evidenciado com papel e lápis.

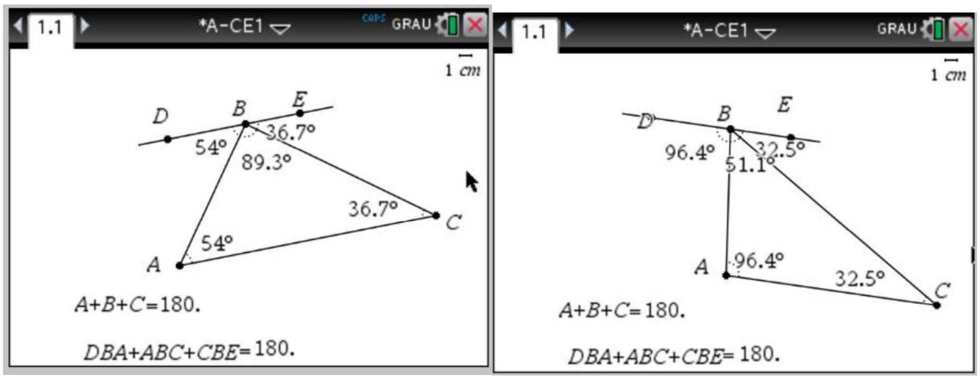


Figura 5.14 - Resolução da Maria (aluna *Sherpa*), utilizando a função de arrastamento da calculadora gráfica, na alínea d) da tarefa A-CE1.

Para finalizar, a professora *ofereceu uma síntese*, que resultou das diversas soluções dos alunos, discutidas coletivamente, no ambiente social, a aula.

> **45.Professora:** Portanto, a soma das medidas das amplitudes dos ângulos *DBA, ABC e CBE* é sempre 180º, em qualquer triângulo, ao ser usada a função de arrastamento nos vértices A ou B ou C do triângulo*[ABC]*. Por outro lado, $\hat{A} = D\hat{B}A$ na alínea b) e $\hat{C} = C\hat{B}E$ na alínea c) e tendo-se $\hat{B} = A\hat{B}C$, conclui-se que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, com papel e lápis e na calculadora gráfica (como a Maria fez e muito bem). Deste modo, é reconhecida a validade da generalização: "Em qualquer triângulo, a soma da medida das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso".

Síntese da análise dos resultados

Neste estudo foi minha intenção percecionar como é que o uso da calculadora gráfica torna possível atingir objetivos educativos compatíveis com o currículo, assumindo o papel de artefacto mediador.

Na alínea a), os alunos utilizaram o artefacto, calculadora gráfica, para cumprir o objetivo didático da tarefa, tendo surgido *signos de artefacto* fundamentados no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso.* Os primeiros *esquemas de ação instrumentada* surgiram, quando os alunos tiveram necessidade de fazer emergir significados pessoais, fundamentados no conhecimento dos *signos matemáticos*, inerentes aos conceitos de triângulo e retas paralelas. Os segundos esquemas, denominados por *esquemas de uso*, estiveram direcionados para a maneira como os alunos orientaram os comandos da calculadora gráfica para realizar a tarefa. Por outro lado, o desenvolvimento de *esquemas de uso*, foi apoiado num ambiente social, em que os alunos trabalharam em pares[97]. Existiram evidências que as dificuldades iniciais, sentidas pela Maria (ver diálogo 1- 8) no que concerne à utilização de certos *esquemas de uso,* foram colmatadas, quando assumiu a função de aluna *Sherpa* e exibiu a resolução da tarefa para toda a turma. Verificou-se que o início dos processos de instrumentalização e instrumentação começaram a funcionar em díade.

No que concerne às alíneas b) e c) posso conjeturar que as imagens das representações gráficas visualizadas no ecrã da calculadora gráfica e as *representações ativas*, através da manipulação deste artefacto, aquando da resolução da questão a), poderá ter ocasionado o aparecimento de *signos do artefacto*. Os mesmos referem-se ao emergir de significados pessoais, fundamentados em *esquemas de ação instrumentada*, por parte das alunas Maria e Berta, que se fundamentaram no facto de terem conseguido percecionar que os ângulos A do triângulo *[ABC]* e DBA e os ângulos C do triângulo *[ABC]* e CBE eram congruentes ($\hat{A} = D\hat{B}A$ e $\hat{C} = C\hat{B}E$), dado que se tratavam de ângulos alternos internos. Daí terem recorrido a *esquemas de uso*, para a medição da amplitude dos ângulos e posteriormente a *esquemas de ação instrumentada*, sustentados pela função de arrastamento, para observar a invariância das medidas das amplitudes dos ângulos e a congruência dos ângulos.

Por outro lado, o par José e Pedro, embora não se tenham recordado do conceito de ângulos alternos internos, procederam ao desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* que se converteram em *esquemas de uso,* fundamentados na medição da amplitude dos ângulos. Posso conjeturar que o procedimento dos alunos tenha sido consequência da visualização da figura que constava no enunciado, com os ângulos alternos internos, desenhados com a mesma cor – a "visualização favorece a compreensão". Posteriormente deu-se o desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada*, apoiados pela função de arrastamento[98], tendo concluído que os ângulos tinham sempre a mesma amplitude, em triângulos com diferentes dimensões. O José evidenciou as suas descobertas através de *representações pictóricas* (ver figura 5.8). No entanto, somente na discussão coletiva é que os alunos percecionaram que os ângulos tinham a particularidade de ser ângulos alternos internos. Então nesse ambiente social, promoveu-se a transição de *signos do artefacto* para *signos matemáticos*, quando procederam à generalização da propriedade: "Em qualquer triângulo, ângulos alternos internos são sempre congruentes", que foi confirmada na *discussão coletiva,* sob a orientação da professora.

Relativamente à questão d), ambos os grupos resolveram a questão recorrendo ao uso do papel e lápis, através de *representações simbólicas*, mobilizando os *signos matemáticos* confirmados nas alíneas b) e c). Somente na *discussão coletiva* é que os alunos perceberam que

[97] Os pares inerentes à nossa observação foram o par, Maria e Berta e o par José e Pedro, respetivamente. O par dos rapazes auxiliou o par das raparigas, no desenvolvimento de certos *esquemas de uso*, na realização da questão a) da tarefa A-CE1.
[98] Que se traduziu no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

poderiam ter explorado a calculadora gráfica, utilizando *esquemas de uso*, inerentes à medição da soma das amplitudes dos ângulos, A, B e C e posteriormente desenvolver *esquemas de ação instrumentada*, inerentes à função de arrastamento, para confirmarem que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180$º em qualquer triângulo.

Concluo que no desenvolvimento do processo de mediação semiótica, na resolução da tarefa A-CE1, foi imprescindível a exploração do potencial semiótico da calculadora gráfica, inerente à função de arrastamento, potenciado pelas *representações ativas*, otimizadas num Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), através do desenvolvimento de todas as atividades inerentes ao *Ciclo Didático*.

5.1.2. Tarefa B-CE1: Relação entre um ângulo externo e os ângulos internos não adjacentes de um triângulo

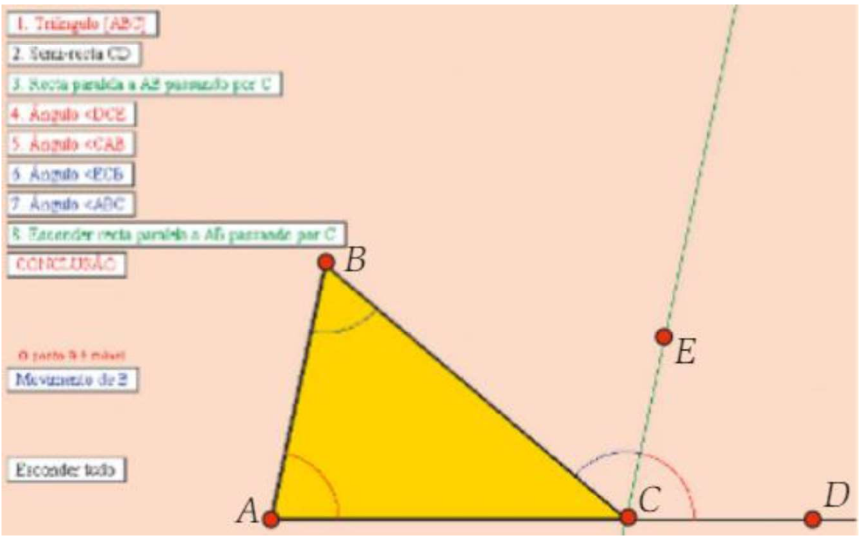
A tarefa apresentada aos alunos

1. Com recurso à calculadora gráfica, segue as instruções:

Constrói um triângulo *[ABC]* qualquer, com o lado *[AC]* horizontal para facilitar a visualização.

● Traça a semirreta *CD*. Marca um ponto *D*, de modo que o ponto *C* fique situado entre os pontos *A* e *D*.

● Traça uma reta *CE* tal que *CE//AB*.



a) Justifica que $D\hat{C}E = B\hat{A}C$ e que $B\hat{C}E = A\hat{B}C$. Justifica a tua resposta.

b) O que concluis relativamente ao ângulo externo em C e os ângulos internos A e B do triângulo *[ABC]*? Justifica a tua resposta.

Figura 5.15 - Enunciado da tarefa B-CE1.

Esta tarefa teve o objetivo de os alunos verificarem que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes. A mesma foi realizada a seguir à tarefa A-CE1, onde os alunos confirmaram que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

Quando a tarefa foi apresentada aos alunos, foram dadas indicações como a mesma se iria desenvolver. Deveria de ser resolvida a pares e posteriormente realizarem um relatório em conjunto para ser analisado pela professora. Seguidamente, fomentar-se-ia a discussão coletiva, nos mesmos moldes da tarefa anterior.

Atividades com o artefacto e produção individual/pequeno grupo de signos [99]

No que concerne à construção da figura, surgiram os primeiros *signos de artefacto*, quando os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao fazerem emergir significados pessoais, que se traduziram nos signos matemáticos, baseados no conhecimento que tinham sobre triângulos, retas paralelas e semirretas. Relativamente aos *esquemas de uso*, utilizados para a construção da figura, os dois pares de alunos observados, não sentiram qualquer dificuldade. Pode-se conjeturar que essa facilidade de manipulação da calculadora gráfica se deveu à utilização de certos procedimentos semelhantes na realização da tarefa anterior (tarefa A-CE1), essencialmente quando se deu a discussão coletiva e a Maria fez de aluna *Sherpa*.

Na alínea a) foram evidenciados *signos de artefacto*, quando foram desenvolvidos *esquemas de ação instrumentada,* por ambos os pares, ao fazerem emergir significados pessoais, relacionados com os significados matemáticos aprendidos na tarefa anterior. Isto é, os alunos identificaram que os ângulos *BCE* e *ABC* são alternos internos, portanto têm sempre a mesma amplitude, em qualquer triângulo.

O par do José e Pedro, também percecionaram que os ângulos *DCE* e *BAC*, são congruentes, pois são ângulos correspondentes entre retas paralelas (CE*// AB*). O par Maria e Berta, apenas referiram que os ângulos têm a mesma amplitude dado que as retas são paralelas. Somente na discussão coletiva é que se conseguiu perceber se os alunos tinham presente os significados pessoais que relacionam ângulos correspondentes, retas paralelas e congruência de ângulos. No entanto, ambos os pares tiveram necessidade de confirmar a sua conjetura, ao desenvolverem *esquemas de ação instrumentada* que se transformaram em *esquemas de uso,* fundamentados na medição da amplitude dos ângulos.

Por outro lado, também evidenciaram o desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada,* baseados na função de arrastamento, tendo necessitado de desenvolver *esquemas de uso* quando movimentaram os vértices do triângulo *[ABC]* e confirmaram a congruência dos ângulos, em qualquer outro triângulo (ver figuras 5.16, 5.17 e 5.18).

---

[99] Ao contrário do que aconteceu na realização da tarefa anterior (A - CE1), era evidente uma maior descontração por parte dos alunos, mantendo-se um grande sentido de responsabilidade e empenho para resolver a mesma.

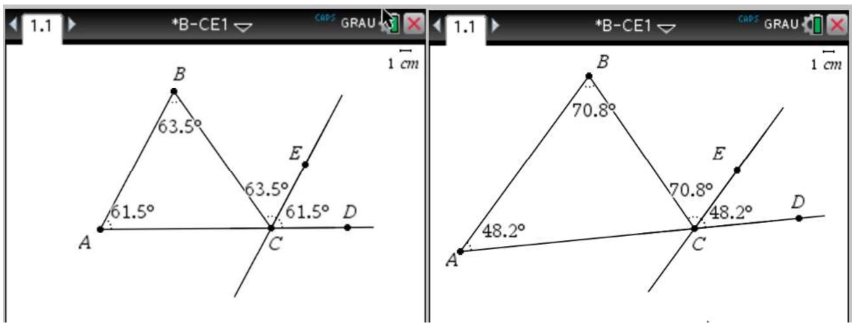


Figura 5.16 - Resolução da alínea a) da tarefa B-CE1 realizada pelo par, Maria e Berta, utilizando a função de arrastamento da calculadora gráfica.

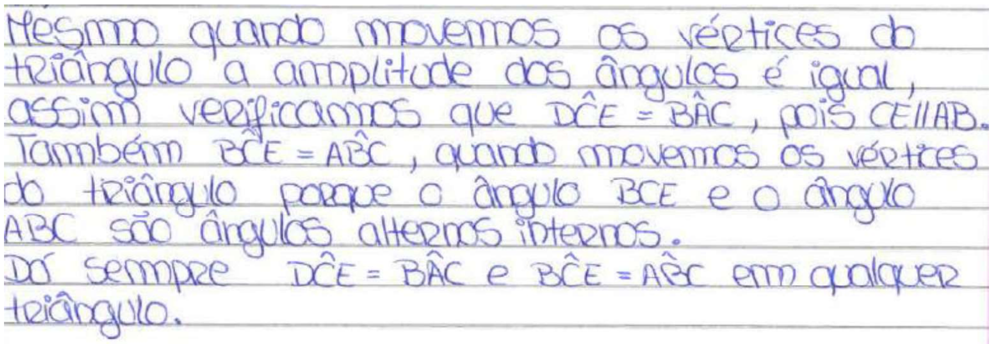

Mesmo quando movemos os vértices do triângulo a amplitude dos ângulos é igual, assim verificamos que $D\hat{C}E = B\hat{A}C$, pois $CE // AB$.
Também $B\hat{C}E = A\hat{B}C$, quando movemos os vértices do triângulo porque o ângulo BCE e o ângulo ABC são ângulos alternos internos.
Daí sempre $D\hat{C}E = B\hat{A}C$ e $B\hat{C}E = A\hat{B}C$ em qualquer triângulo.

Figura 5.17 - Resolução escrita da alínea a) da tarefa B-CE1 realizada pelo par, Maria e Berta.

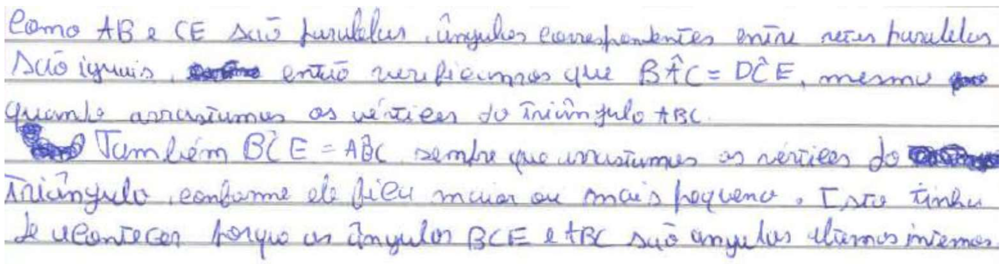
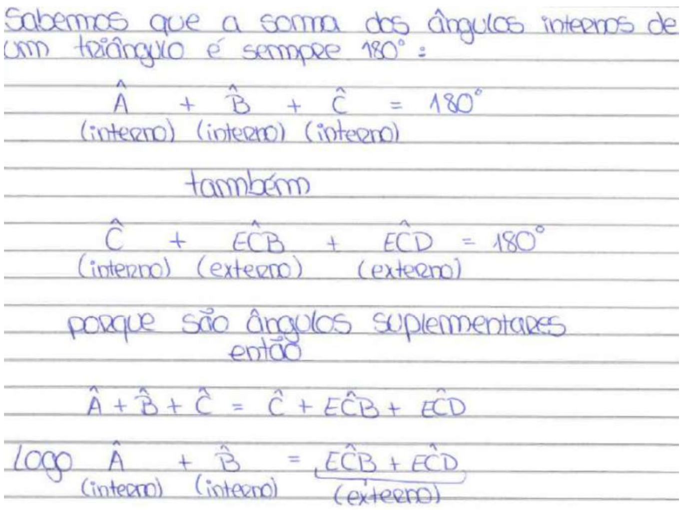

Como AB e CE são paralelas, ângulos correspondentes entre retas paralelas são iguais, então verificamos que $B\hat{A}C = D\hat{C}E$, mesmo quando arrastamos os vértices do triângulo ABC.
Também $B\hat{C}E = A\hat{B}C$ sempre que arrastamos os vértices do triângulo, conforme ele fica maior ou mais pequeno. Isto tinha de acontecer porque os ângulos BCE e ABC são ângulos alternos internos.

Figura 5.18 - Resolução escrita da alínea a) da tarefa B-CE1, realizada pelo par, José e Pedro.

Na alínea b), inicialmente, o par Maria e Berta, resolveram a questão recorrendo ao uso de papel e lápis. Recorreram a *representações simbólicas*, tendo em conta os significados pessoais que se traduziram nos significados matemáticos resultantes da aprendizagem realizada na tarefa anterior (A - CE1), no que concerne ao facto de que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser 180º. Por outro lado, também evidenciaram significados matemáticos relativamente ao facto de terem presente a noção de ângulos suplementares (ver figura 5.19).



Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
(interno) (interno) (interno)

também

$\hat{C} + E\hat{C}B + E\hat{C}D = 180°$
(interno) (externo) (externo)

porque são ângulos suplementares
então

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + E\hat{C}B + E\hat{C}D$

Logo $\hat{A} + \hat{B} = \underbrace{E\hat{C}B + E\hat{C}D}_{\text{(externo)}}$
(interno) (interno)

Figura 5.19 - Resolução escrita da primeira parte da alínea b) da tarefa B-CE1 realizada pelo par, Maria e Berta.

Posteriormente, as alunas foram confirmar a sua prova, quando desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, através da função de arrastamento[100] da calculadora gráfica. No relatório, recorreram a *representações icónicas* e mais uma vez a *representações simbólicas*, para concluir o objetivo da tarefa (ver figura 5.20).

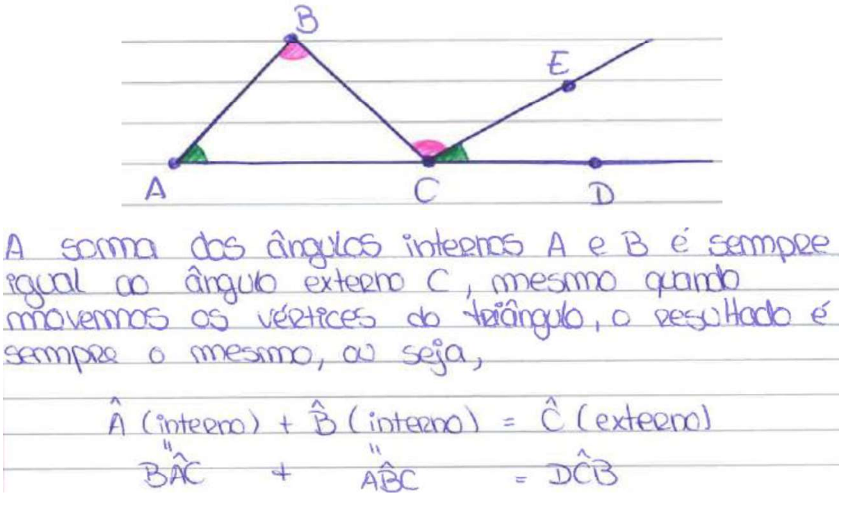


Figura 5.20 - Resolução escrita da segunda parte da alínea b) da tarefa B-CE1 realizada pelo par, Maria e Berta.

O par José e Pedro, fundamentaram as suas conclusões através da calculadora gráfica. Os alunos utilizaram *esquemas de ação instrumentada* que se basearam em *esquemas de uso*, quando procederam à medição da soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes ($\angle BAC$ e

[100] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

$\angle CBA$)[101] e dos ângulos externos adjacentes ($\angle BCE$ e $\angle ECD$)[102]. Posteriormente, recorreram a *esquemas de ação instrumentada,* ao utilizar a função de arrastamento[103] focada na movimentação dos vértices do triângulo [*ABC*], onde verificaram o objetivo da tarefa, noutros triângulos[104] (ver figura 5.21 e 5.22). Na figura 5.22, inerente ao ecrã da calculadora gráfica, a representação da soma das medidas das amplitudes dos ângulos a e b e c e d, respetivamente ($a+b$ e $c+d$), não ficou muito percetível, mas, os alunos fizeram um esclarecimento mais elucidativo na discussão coletiva.

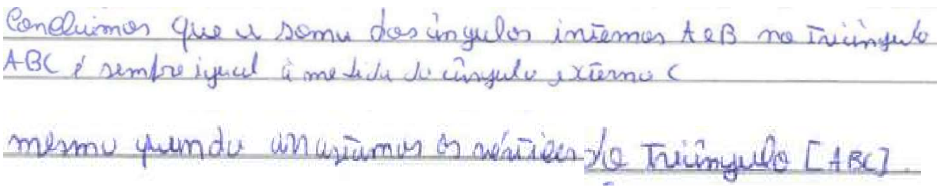


Figura 5.21 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa B-CE1, pelo par, José e Pedro.

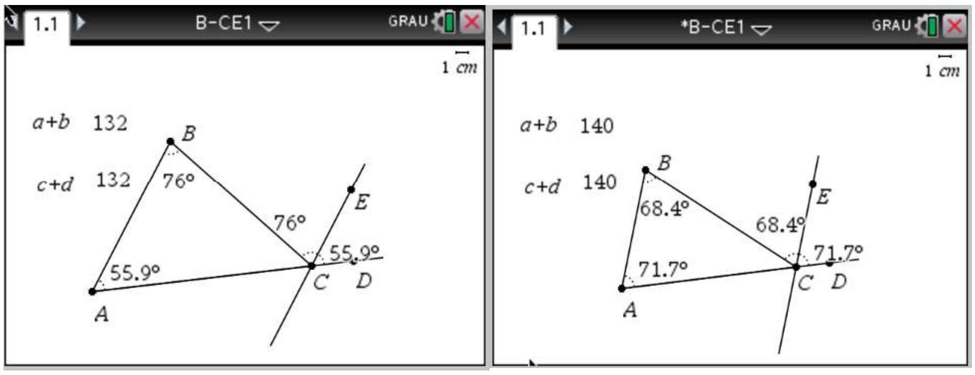


Figura 5.22 - Resolução da alínea b) da tarefa B-CE1, pelo par, José e Pedro, utilizando a função de arrastamento da calculadora gráfica.

Produção coletiva de signos – Discussão Matemática

A discussão coletiva fundamentou-se no desenvolvimento do processo de mediação semiótica, cujo principal objetivo assentou na transição de significados pessoais para significados matemáticos, num ambiente cooperativo de aprendizagem, onde os alunos resolveram a tarefa com a calculadora gráfica, em pares e posteriormente realizaram um relatório também, em pares.

Na *ação de retorno à tarefa* a professora pediu que os alunos se manifestassem relativamente ao objetivo da tarefa, de modo a promover a produção de *signos do artefacto*

101 $a+b$
102 $c+d$
103 Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.
104 Esta conclusão é evidenciada pelos alunos, quando os mesmos escrevem: " Concluímos que a soma dos ângulos internos A e B **é sempre igual** à medida do ângulo externo C…" (figura 5.21).

fundamentados em significados pessoais, relacionados com o uso do artefacto, operacionalizando-se a transição para signos matemáticos.

46.Professora: Quem quer relatar a tarefa que foi proposta?
47.Maria: Tivemos de concluir que a soma dos ângulos internos *A* e *B* é sempre igual ao ângulo externo *C*.
48.Professora: Ok! Essa linguagem matemática tem de ser melhorada, mas já vamos falar sobre isso… Na tarefa anterior foi a Maria que veio para o meu computador. Quem é que quer vir agora? Sem ser a Maria, obviamente! Temos de dar oportunidade a todos.
49.José: Posso ir eu, stora?

Neste sentido, a professora deu autorização ao José e o mesmo encaminhou-se para a sua secretária, assumindo a função de aluno *Sherpa*, tendo começado a mostrar como resolveu a tarefa, conjuntamente com o Pedro.

50.José: É pá, vocês tiveram algum problema em construir a figura? Não vão querer que eu explique isto tudo, pois não?
51.Professora: José, eles até podem não querer, mas eu quero. Vá lá, sem preguiça, explique se faz favor, todos os procedimentos que realizou, para construir a figura!
52.José: Eu não acredito. Bom, vamos lá! Eu, em primeiro lugar, cliquei em *Geometria*, porque eu queria fazer um triângulo, retas paralelas, etc. Depois eu cliquei em *menu*, *formas* e *triângulo* e construi o triângulo *[ABC]*. Depois coloquei os pontos *A*, *B* e *C*, clicando em *menu, ações, texto*. A seguir construi uma reta paralela à reta *AB* e cliquei *menu, construção, paralela.* Depois para a semirreta *CD*, cliquei em *menu, pontos e retas, semirreta.* Para marcar o ponto *D* sobre a semirreta *CD*, cliquei em *menu*, *pontos e retas*, *ponto sobre um objeto*. Depois para o ponto *E*, fiz como o ponto D e depois como nos pontos *A*, *B* e *C,* já sabem como é, cliquei em *menu, ações* e *texto*. E aqui está ela! Gostam?

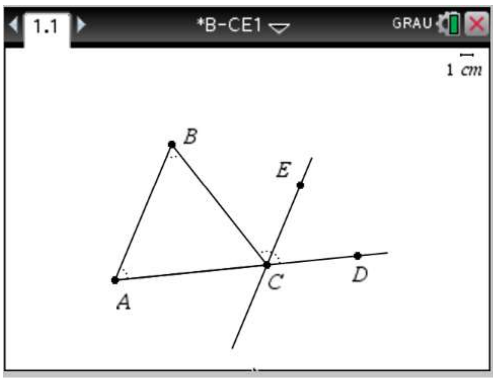


Figura 5.23 - Construção do triângulo *[ABC],* semirreta *CD*, reta *CE//AB* e colocação dos pontos *A, B, C* e *E*, realizada pelo José (aluno *Sherpa*), na tarefa B-CE1, de acordo com as orientações do enunciado.

O José não demonstrou qualquer problema na manipulação do artefacto calculadora gráfica, como foi descrito anteriormente.

Mais uma vez é evidenciada a *ação de retorno* à tarefa:

53.Professora: Muito bem! Retomando o enunciado do exercício, quem me consegue descrever o que era pedido na alínea a)?
54.Pedro: Que os ângulos vermelhos eram iguais e os verdes também.
55.Professora: Ângulos vermelhos? Verdes? Do que estás a falar?
56.José: Stora, na figura os ângulos BAC e DCE são vermelhos e os ângulos ABC e BCE, são verdes e temos de mostrar que esses pares de ângulos são iguais. Têm a mesma amplitude.
57.Professora: Ah! Assim já entendo melhor! E então, o que concluíram?
58.Berta: Os ângulos ABC e BCE, são alternos internos, portanto, têm sempre a mesma amplitude.

Na leitura que a professora realizou dos relatórios dos alunos, percecionou que os mesmos, na tarefa anterior (Tarefa A- CE1) tinham consolidado o significado matemático de ângulos alternos internos e a propriedade subjacente a esse tipo de ângulos, que evidencia que são ângulos que têm sempre a mesma amplitude. Então, a professora promoveu a *ação de focalização*:

59. Professora: Estão todos de acordo com a afirmação da Berta? Que os ângulos ABC e BCE, são alternos internos, portanto, têm sempre a mesma amplitude?

Tendo em conta, o facto de todos os alunos terem concordado com a resposta da Berta, a professora solicitou que procedessem à justificação da mesma. A aluna interveio de novo e justificou a veracidade da sua afirmação, baseada na verificação que tinham realizado nas alíneas b) e c) da tarefa anterior[105]. No entanto, o José fez questão de mostrar as imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, que comprovou que, $B\hat{C}E = A\hat{B}C$, tendo utilizado o *esquema de ação instrumentada* fundamentado na função de arrastamento.

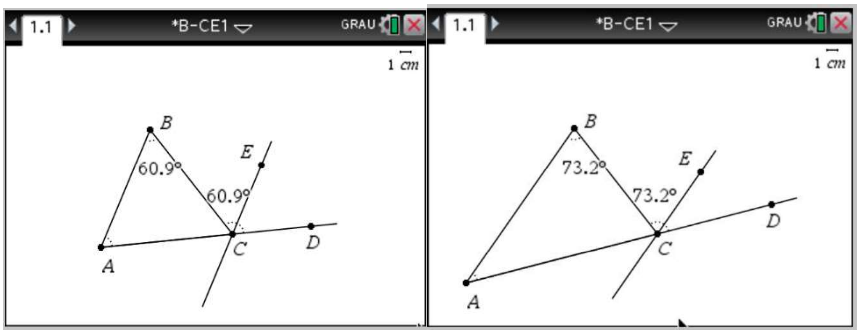


Figura 5.24 - Imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento), onde se verificou que $B\hat{C}E = A\hat{B}C$, na alínea a) da tarefa B-CE1, realizada pelo José (aluno *Sherpa*).

Mais uma vez, de acordo com os relatórios dos alunos, a professora promoveu outra *ação de focalização*, de modo que os alunos justificassem a congruência dos ângulos BAC e DCE.

[105] Tarefa A – CE1.

60. Professora: Vamos lá analisar agora a congruência dos ângulos *BAC* e *DCE*. No relatório da Maria e da Berta, vocês escreveram que estes ângulos são iguais, porque as retas *CE* e *AB* são paralelas. Podem justificar-me esta afirmação!
61. Maria: As retas *CE* e *AB* são paralelas e acho que foi no 5.º [ano], ou 6.º [ano], já não me lembro muito bem, que se a reta *AD* interseta as retas paralelas *CE* e *AB* podemos concluir que os ângulos *BAC* e *DCE* são iguais. Eu medi esses ângulos com a calculadora, e a Berta também, e deram sempre iguais. Depois movemos os vértices do triângulo para termos ângulos diferentes, com triângulos diferentes, e aconteceu sempre o mesmo.

Os significados pessoais de Maria estavam corretos, mas a professora sentiu necessidade de *solicitar uma síntese*, de modo a clarificar a linguagem matemática utilizada pela aluna.

62. Professora: Ok! Quem consegue sintetizar o que a Maria disse?
63. Pedro: No nosso relatório, nós escrevemos assim:" *Como AB e CE são paralelas, ângulos correspondentes entre retas paralelas são iguais, então verificamos que a amplitude dos ângulos BAC e DCE é igual, mesmo quando arrastamos os vértices do triângulo [ABC]*".

Entretanto, a professora *ofereceu uma síntese* de modo a descodificar o que foi referido pelos alunos:

64. Professora: Muito bem! Portanto, no 5.º ano de escolaridade, sem qualquer tipo de verificação, foi-lhes lecionada a seguinte propriedade: "Ângulos correspondentes determinados por uma reta secante em duas retas, são iguais se e só se as retas forem paralelas". Hoje, com a calculadora gráfica, através da função de arrastamento, verificaram que esta propriedade é sempre verdadeira, em qualquer triângulo, tendo a mesma lhes permitido verificar que os ângulos *DCE* e *BAC* têm a mesma amplitude.

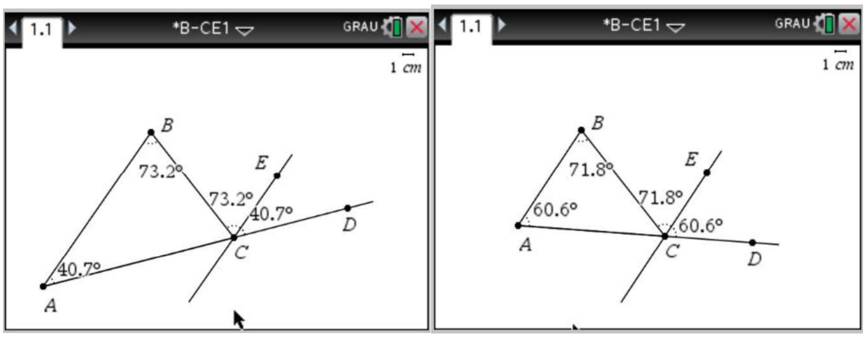


Figura 5.25- Imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento), onde se verificou que $D\hat{C}E = B\hat{A}C$ na alínea a) da tarefa B-CE1, realizada pelo José (aluno *Sherpa*).

Continuando a promover a discussão coletiva, inerente à questão b), a professora *solicitou uma síntese*:

65.Professora: Então como concluíram a questão b)?
66.Maria: Concluímos que a soma das amplitudes dos ângulos internos *A* e *B* é igual à amplitude do ângulo externo *C* (ver figuras 5.19 e 5.20), em qualquer triângulo, porque movemos os vértices do triângulo e obtemos sempre a mesma situação.

67.José: Nós também chegámos a essa conclusão! (ver figuras 5.21 e 5.22).

Perante a resposta dos alunos, dá-se uma *ação de focalização*:

> **68. Professora:** Ah! Agora sim! Essa linguagem já me é familiar! Muito bem Maria! Mas esses ângulos internos *A* e *B,* têm algum lado em comum ou pontos em comum, com o ângulo externo *C*?
> E vocês, José e Pedro, no vosso relatório, colocaram a+b e c+d (ver figura 5.22), podem-me explicar o significado dessas somas!

O José (aluno *Sherpa*), evidenciou para toda a turma, uma representação na calculadora gráfica semelhante à da figura 5.22.

> **69. José:** Oh stora, está a ver! a+b é os ângulos internos *A* e *B*. E c+d é o ângulo externo, do ângulo interno C.
> **70. Professora:** Muito bem, José! Maria, como é? Ainda não respondeste!
> **71. Maria:** Não entendo porque está a perguntar isso! Eu não estou a ver que os ângulos internos *A* e *B* tenham algum lado ou pontos em comum, sei lá, com o ângulo externo *C*! Porquê?

De acordo com a resposta da Maria a professora *solicitou uma síntese*:

> **72.Professora:** Então digam lá, com palavras vossas o que é que concluíram?
> **73. Maria:** Eu já disse! Concluímos que a soma das amplitudes dos ângulos internos *A* e *B* é igual à amplitude do ângulo externo *C*.
> **74. José:** Já percebi o que a professora quer! É que temos [de] dizer que os ângulos internos A e B não têm nada em comum com o ângulo externo C.

Mais uma vez uma *ação de focalização*:

> **75. Professora:** E que nome damos a esses ângulos?
> **76. José:** Ângulos não adjacentes? Será?

A professora tirou partido da resposta do aluno e reiterou o seu pedido no que concerne ao *solicitar uma síntese*[106]. No entanto, os alunos não conseguiram responder à solicitação e a professora acabou por *oferecer uma síntese*:

> **77. Professora:** Meninos, vocês acabaram de verificar uma propriedade que é válida em qualquer triângulo, quando usaram a função de arrastamento. E então o que é acabaram de verificar? "*Em qualquer triângulo, a medida da amplitude de um ângulo externo é sempre igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes*".

Síntese da análise dos resultados

Relativamente à construção da figura, surgiram os primeiros *signos de artefacto*. Os alunos evidenciaram *esquemas de ação instrumentada*, quando fizeram emergir significados pessoais, que se traduziram nos signos matemáticos, baseados no conhecimento que tinham sobre triângulos, retas paralelas e semirretas. Para desenvolver esses esquemas, necessitaram de utilizar

[106] A professora tinha o objetivo que os alunos percecionassem que os ângulos internos tinham de ser não adjacentes ao ângulo externo C.

esquemas de uso, possivelmente, apoiados pelo conhecimento que adquiriram na manipulação da calculadora gráfica na tarefa anterior (tarefa A - CE1), nomeadamente quando se deu a discussão coletiva e a Maria fez de aluna *Sherpa*.

Na resolução da alínea a), ambos os pares de alunos utilizaram *esquemas de ação instrumentada*, sustentados pelos significados pessoais adquiridos na tarefa anterior (tarefa A-CE1), que lhes proporcionou a resolução da mesma. Isto é, para provar que os ângulos *BCE* e *ABC* são congruentes, por serem ângulos alternos internos, os alunos fundamentaram-se na verificação que tinham realizado na tarefa anterior (tarefa A - CE1), recorrendo a *esquemas de uso*, assentes na medição da amplitude dos ângulos. Para provar que os ângulos *DCE* e *BAC* são congruentes, aplicaram uma propriedade que tinham aprendido no 5.º ano de escolaridade (ver diálogo 61 - 64), tendo também aplicado *esquemas de uso*, para medir a amplitude dos ângulos. No entanto, o desenvolvimento do *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento[107], permitiu a generalização de que o par de ângulos *DCE* e *BAC* e o par de ângulos *BCE* e *ABC*, são congruentes dentro da Geometria Euclidiana (ver figuras 5.16, 5.17 e 5.18). No entanto, enquanto o Pedro argumentou a igualdade dos ângulos, utilizando o termo específico: "ângulos correspondentes", a Maria referiu que eram ângulos iguais. Em termos de mediação semiótica, o Pedro desenvolveu o significado matemático de "ângulos correspondentes".

No que concerne à resolução da alínea b), para cumprir o objetivo da tarefa, um dos pares, constituído pelas alunas, Maria e Berta, inicialmente recorreu a *representações simbólicas*, por meio do uso de papel e lápis. Essas representações, por um lado, foram sustentadas nos significados pessoais traduzidos em significados matemáticos, aprendidos, na tarefa A - CE1, no que respeita ao facto de que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser 180º. Por outro lado, deu-se o emergir do significado pessoal descrito através do significado matemático, de ângulos suplementares (ver figura 5.19). Na parte final da resolução da tarefa, as alunas sentiram necessidade de recorrer à calculadora gráfica, operacionalizando o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento[108], de modo a comprovarem a generalização da sua conjetura. Para reproduzir a sua prova, recorreram a *representações icónicas*, baseadas numa réplica das imagens visualizadas no ecrã da calculadora gráfica e *representações simbólicas*, ambas através do uso de papel e lápis (ver figura 5.20).

O par José e Pedro, dedicou-se apenas à exploração da calculadora gráfica. Desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao percecionarem que a medida das amplitudes dos ângulos internos A e B era a mesma que a medida da amplitude do ângulo externo C. Para comprovar a sua conjetura, utilizaram *esquemas de uso*, fundamentados na representação simbólica de a+b, para a soma da medida da amplitude dos ângulos internos A e B e na

[107] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.
[108] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

representação simbólica de c+d, para a soma da medida da amplitude do ângulo *BCE* com o ângulo *ECD*[109]. Isto é, denominaram por *a*, a amplitude do ângulo interno A, denominaram por *b* a amplitude do ângulo interno *B*, denominaram por *c*, a amplitude do ângulo externo *ECD* e denominaram por *d*, a amplitude do ângulo externo *BCE*. Neste sentido, a soma a+b correspondeu à soma da medida da amplitude dos ângulos internos *A (∠BAC)* e *B* (*∠CBA)* e a soma c+d correspondeu à soma da medida da amplitude do ângulo externo, do ângulo interno C (*BCA*).

Tendo em conta a celeridade com que necessitavam de resolver a tarefa, o símbolo de igualdade "=" , foi ignorado, dado que teria de ser colocado posteriormente, por se tratar de uma das características da calculadora gráfica, TI-nspire, De modo a verificarem a sua conjetura, noutros triângulos (ver figura 5.22), recorreram à calculadora gráfica, desenvolvendo o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento[110].

Na discussão coletiva, com a insistente orquestração da professora, os alunos compreenderam que os ângulos internos tinham que ser não adjacentes. De acordo com uma perspetiva semiótica, os alunos desenvolveram os significados matemáticos inerentes aos conceitos de "ângulos internos" e "ângulos adjacentes". No entanto, quando lhes foi solicitado para fazerem uma síntese da propriedade, não conseguiram, tendo sido a professora a fazê-lo (ver diálogo 75-77).

[109] Esta nomenclatura utilizada pelos alunos José e Pedro, na calculadora gráfica, foi esclarecida na discussão coletiva, pelos mesmos.
[110] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

5.1.3. Tarefa D – CE1: Referencial Cartesiano e a construção do conceito de função

A tarefa apresentada aos alunos

1. Numa folha quadriculada, desenha um referencial cartesiano e traça sobre o mesmo, o contorno da palma da tua mão. Com lápis ou caneta, marca 24 pontos. Depois dos pontos marcados, indica as coordenadas na seguinte tabela:

Nota: Os pontos da tabela devem estar numerados de acordo com a sequência de construção da mão. O último ponto tem de ser igual ao primeiro para a linha ficar fechada.

	abcissa	ordenada	coordenadas
1º ponto			(,)
2º ponto			(,)
3º ponto			(,)
...			(,)
23º ponto			(,)
24º = 1º ponto			(,)

a) Utilizando a calculadora gráfica, traça o gráfico poligonal correspondente aos pontos representados na tabela anterior. Desenhaste a palma da tua mão sobre um referencial cartesiano. Será que esta representação corresponde a uma função? Justifica a tua resposta.

b) Em que condições é que um gráfico cartesiano representa uma função?

Figura 5.26 - Enunciado da tarefa D-CE1.

Esta tarefa teve como objetivo, os alunos compreenderem o conceito de função como relação entre variáveis numéricas e como correspondência entre dois conjuntos numéricos e interpretarem em que condições é que um gráfico cartesiano de uma função numérica de variável numérica corresponde à representação de uma função. A mesma foi realizada na aula seguinte à iniciação da unidade de Funções, no âmbito do domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7).

Antes da realização da tarefa, foi feita uma abordagem com a calculadora gráfica[111] onde a professora apresentou aos alunos um exemplo em que os procedimentos eram muito semelhantes aos que deveriam de ser realizados na tarefa. A seguir, a tarefa foi apresentada aos alunos e os mesmos foram informados que a sua realização e o respetivo relatório, deveriam ser feitos individualmente.

[111] ***Aula n.º 3*** da primeira fase do processo de instrumentalização (aprendizagem do *software* da calculadora gráfica).

Atividades com o artefacto e produção individual/pequeno grupo de signos

Todos os alunos demonstraram ter consolidado o conceito de referencial cartesiano. Traçaram a palma da sua mão sobre o mesmo, marcaram os 24 pontos solicitados no enunciado da tarefa e posteriormente indicaram as coordenadas desses pontos, na tabela. Um aspeto interessante, foi o facto de todos os alunos terem desenhado a sua mão, no 1º quadrante do referencial cartesiano.

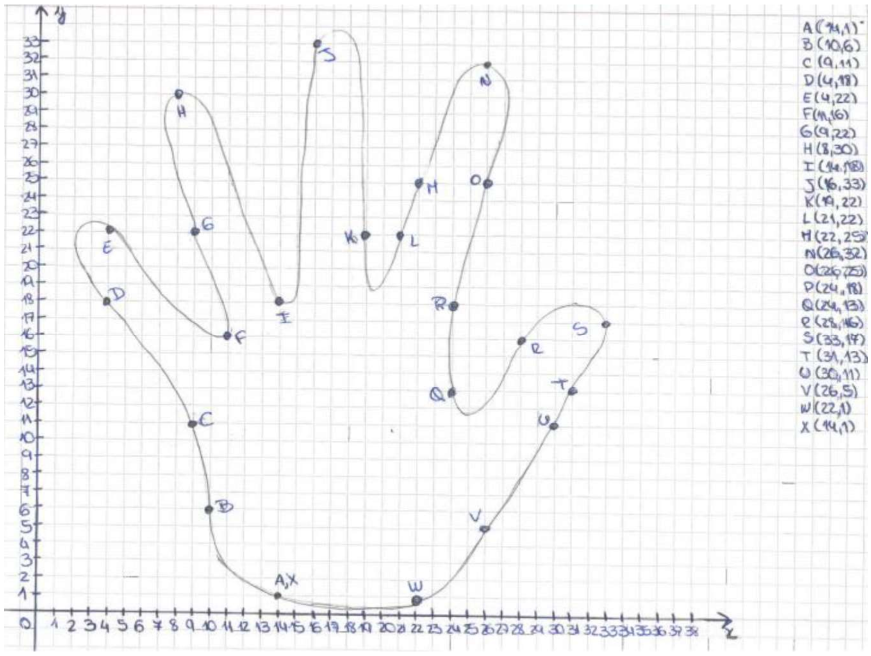


Figura 5.27 - Palma da mão da Maria no referencial cartesiano inerente à tarefa D-CE1.

No que concerne à alínea a), para traçar o gráfico poligonal, correspondente aos pontos representados na tabela, os alunos recorreram aos apontamentos que tinham acabado de fazer. Como os procedimentos dados no exemplo, foram muito semelhantes aos da tarefa, os alunos não mostraram qualquer constrangimento relativamente aos *esquemas de uso* que tiveram que desenvolver, no que concerne à manipulação do artefacto, calculadora gráfica.

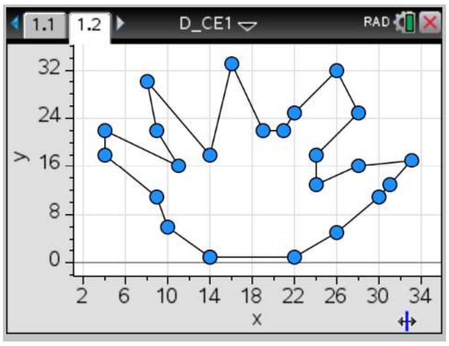


Figura 5.28 - Gráfico poligonal que representa a palma da mão da Maria na tarefa D-CE1.

Os alunos Berta e José, que faziam parte de grupos diferentes, quando tiveram que justificar se a representação da palma da sua mão corresponde a uma função, emergiram *signos de artefacto,* fundamentados em *esquemas de ação instrumentada* não consistentes com o conceito de função. Verificou-se alguma confusão nos signos evocados pelos alunos, Berta e José. Os mesmos aproximaram-se do conceito de função, tiveram a noção que existia uma correspondência unívoca, no entanto, fizeram confusão entre os conceitos, objeto e imagem. Como já foi referido anteriormente, estes conceitos foram lecionados na aula anterior à realização desta tarefa. Posso conjeturar que ainda não estavam muito bem consolidados. A afirmação que justifica a ambiguidade evidenciada por estes alunos, consta nas figuras 5.29 e 5.30, respetivamente, quando por exemplo, o José declarou que “há objetos com mais de uma imagem, explanando os pontos (5, 34) e (8, 34)”. Percecionei que o aluno trocou o conceito de objeto com o conceito de imagem. No entanto, “parece-me” que na discussão coletiva foram esclarecidas estas dubiedades, com a insistente orquestração da professora, tendo alguns significados pessoais que os alunos evidenciaram, transitado para os significados matemáticos que faziam parte do objetivo didático da tarefa.

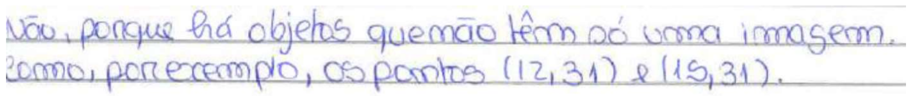

Não, porque há objetos que não têm só uma imagem.
como, por exemplo, os pontos (12,31) e (15,31).

Figura 5.29- Resolução escrita da alínea a) da tarefa D-CE1, pela Berta.

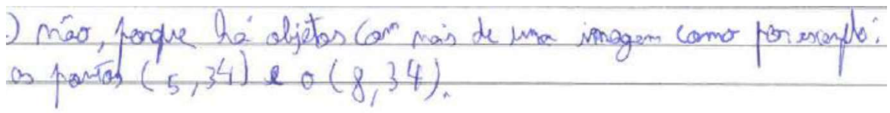

) não, porque há objetos com mais de uma imagem como por exemplo:
os pontos (5,34) e o (8,34).

Figura 5.30 - Resolução escrita da alínea a) da tarefa D-CE1, pelo José.

Por outro lado, os alunos, Maria e Pedro (ver figuras 5.31 e 5.32), apresentaram significados pessoais consistentes com a definição de função:

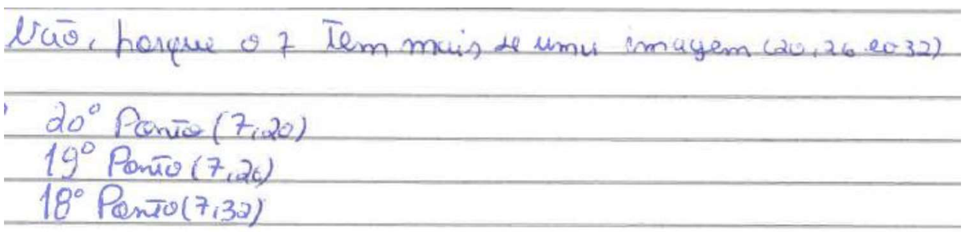

Não, porque o 7 tem mais de uma imagem (20, 26 e 32)
20° Ponto (7,20)
19° Ponto (7,26)
18° Ponto (7,32)

Figura 5.31- Resolução escrita da alínea a) da tarefa D-CE1, pelo Pedro.

A Maria foi mais minuciosa e desenvolveu *signos de artefacto*, de uma forma espontânea, fundamentados em *esquemas de ação instrumentada*, quando afirmou: "*Se eu fizer um **corte** na mão, estes pontos estão na mesma **linha***" (ver último parágrafo da figura 5.32). Esta afirmação foi posteriormente explorada na discussão coletiva, cujo objetivo da professora foi promover a transição para *signos matemáticos*. Isto é, incrementar a articulação dos significados pessoais "corte" e "linha", para os significados matemáticos, "interseção" e "reta".

Não, pois a cada abcissa corresponde
mais de uma ordenada.
Como por exemplo, nos pontos 16° e 17°, a
mesma abcissa corresponde a duas ordenadas
diferentes → P (24 ; 18) ; Q (24 ; 13).
Se eu fizer um corte na mão, estes
pontos estão na mesma linha.

Figura 5.32- Resolução escrita da alínea a) da tarefa D-CE1, pela Maria.

No que concerne à alínea b), perante a observação da professora, a mesma percecionou que o Pedro utilizou *esquemas de ação instrumentada* inerentes à utilização da função de arrastamento. Movimentou os vértices do gráfico poligonal e transformou-o num polígono convexo, concluindo que um gráfico cartesiano representa uma função, sempre que o mesmo não seja uma linha fechada, pois nesta situação um mesmo objeto tem mais do que uma imagem (ver figura 5.33).

Quando um objeto tem uma única imagem se nunca tivermos uma
linha fechada.

Figura 5.33 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa D-CE1, pelo Pedro.

Os alunos, Berta e José, responderam à questão b) limitando-se a escrever a definição de função, que tinha sido aprendida na aula anterior à realização da tarefa (ver figura 5.34).

Um gráfico cartesiano representa uma função sempre que a
um objeto corresponda uma e uma só imagem.

sempre que o objeto tenha apenas uma e só uma imagem.

Figura 5.34 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa D-CE1, pela Berta e pelo José, respetivamente.

A Maria desenvolveu *signos de artefacto* compatíveis com *signos matemáticos*, inerentes à matemática definida por um especialista. Perante a resposta da aluna (ver figura 5.35), como já foi referido anteriormente, na discussão coletiva a professora promoveu a articulação dos significados pessoais "corte" e "linha" (ver figura 5.32), para os significados matemáticos, "interseção" e "reta".

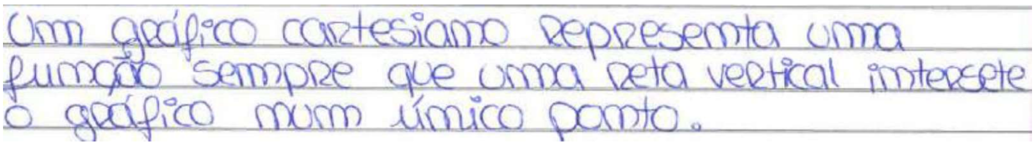

Um gráfico cartesiano representa uma função sempre que uma reta vertical intersete o gráfico num único ponto.

Figura 5.35 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa D-CE1, pela Maria.

Produção de signos – Discussão Matemática

Como foi descrito anteriormente, esta tarefa foi realizada individualmente e posteriormente, o relatório também foi feito da mesma forma. Desta vez, a Berta é que assumiu a função de *aluna Sherpa*.

A professora iniciou a discussão coletiva, operacionalizando a *ação de retorno à tarefa*, questionando os alunos sobre o que se pretendeu com a questão a). A Berta explicou que se objetivou verificar se a palma da sua mão desenhada sobre o referencial cartesiano, corresponde à representação de uma função. Tendo em conta a leitura que a professora tinha feito do seu relatório (ver figura 5.29), solicitou que a aluna respondesse à questão:

> **78. Berta:** Eu acho que não é função, porque há objetos com mais do que uma imagem. Por exemplo, o par (12,31) e o par (15,31).
> **79. Maria:** Desculpa! Isso está errado! O "12" e o "15" são objetos diferentes e têm a mesma imagem. Professora, eu escrevi que não é função porque a cada abcissa corresponde mais de uma ordenada e dei o exemplo dos pontos (24,18) e (24,13). Está certo, não está? Se eu fizer um **corte** na mão, estes pontos estão na mesma **linha**.

Tendo em consideração a intervenção da Maria, no mesmo instante, o José assumiu que tinha feito confusão entre os conceitos de objeto e imagem e o exemplo que tinha referido no relatório (ver figura 5.30) estava incorreto. De imediato, concluiu que não se tratava de uma função, pois, por exemplo, no seu caso, o objeto "13" tem duas imagens, o "22" e o "37" (ver figura 5.36) e segundo a definição de função, cada objeto só pode ter uma e uma só imagem.

	abcissa	ordenada	coordenadas
1º ponto	6	7	(6,7)
2º ponto	4	11	(4,11)
3º ponto	1	15	(1,15)
4º ponto	2	17	(2,17)
5º ponto	9	16	(9,16)
6º ponto	10	15	(10,15)
7º ponto	7	15	(7,15)
8º ponto	5	34	(5,34)
9º ponto	8	34	(8,34)
10º ponto	13	22	(13,22)
11º ponto	13	37	(13,37)
12º ponto	16	35	(16,35)
13º ponto	19	22	(19,22)
14º ponto	25	36	(25,36)
15º ponto	26	32	(26,32)
16º ponto	24	20	(24,20)
17º ponto	33	29	(33,29)
18º ponto	28	17	(28,17)
19º ponto	26	11	(26,11)
20º ponto	25	6	(25,6)
21º ponto	21	3	(21,3)
22º ponto	14	1	(14,1)
23º ponto	9	3	(9,3)
24º = 1º ponto	6	7	(6,7)

Figura 5.36 - Preenchimento da tabela com as coordenadas dos pontos escolhidos pelo José, inerentes à palma da sua mão, na tarefa D-CE1.

Dado que a Maria utilizou *esquemas de ação instrumentada*, baseados nos significados pessoais "linha" e "corte" (*signos de artefacto*), a professora interveio intencionalmente, pois pretendeu que os mesmos se movimentassem para significados matemáticos, "reta" e "interseção". Operacionalizou-se então a *ação de focalização*:

80. Professora: Certo Maria! Mas, linha, corte! Que linha? Qual corte? Não estou a entender!
81. Maria: Stora, se eu fizer uma linha na mão, a linha corta a mão, nesses dois pontos e isso não pode acontecer! Ah! Que giro! Às vezes corta em três pontos e noutros em quatro pontos!
82. Professora: Uma linha curva?
83. Maria: Como eu tenho dois pontos, (24,18) e (24,13), por exemplo, tenho uma reta! E essa reta corta o gráfico em dois pontos!
84. Professora: Mas os pontos que a Berta referiu (12, 31) e (15, 31), também estão sobre a mesma reta e essa reta interseta o gráfico, em pelo menos dois pontos.
85. Maria: Stora, mas a reta tem de estar na vertical e com os pontos da Berta, [a reta] está na horizontal. Porque uma abcissa só pode ter uma e uma só ordenada, mas a mesma ordenada pode ter muitas abcissas.

De acordo com as afirmações da Maria, a Berta assumindo a postura de aluna *Sherpa*, e tendo em conta os pontos que tinha colocado na sua tabela (ver figura 5.37), confirmou que, por exemplo, a abcissa "9", tem três ordenadas diferentes, (9, 4), (9, 27) e (9, 32) (figura 5.37) e pronunciou a seguinte afirmação:

86. Berta: Pois é! Devia de ter dito um objeto que tivesse mais que uma imagem. Os pontos que eu disse, pode ser função. Ontem, a professora deu o caso dos gémeos, que são pessoas diferentes e que a fotografia é igual e pode ser função.

	abcissa	ordenada	coordenadas
1º ponto	9	4	(9,4)
2º ponto	8	11	(8,11)
3º ponto	6	14	(6,14)
4º ponto	1	23	(1,23)
5º ponto	3	23	(3,23)
6º ponto	7	20	(7,20)
7º ponto	11	18	(11,18)
8º ponto	10	22	(10,22)
9º ponto	9	27	(9,27)
10º ponto	9	32	(9,32)
11º ponto	12	31	(12,31)
12º ponto	15	21	(15,21)
13º ponto	15	31	(15,31)
14º ponto	18	35	(18,35)
15º ponto	19	31	(19,31)
16º ponto	21	22	(21,22)
17º ponto	22	27	(22,27)
18º ponto	23	30	(23,30)
19º ponto	26	25	(26,25)
20º ponto	29	15	(29,15)
21º ponto	24	13	(24,13)
22º ponto	27	5	(25,5)
23º ponto	21	0	(21,0)
24º = 1º ponto	9	4	(9,4)

Figura 5.37 - Preenchimento da tabela, com as coordenadas dos pontos escolhidos pela Berta, inerentes à sua mão, na tarefa D-CE1.

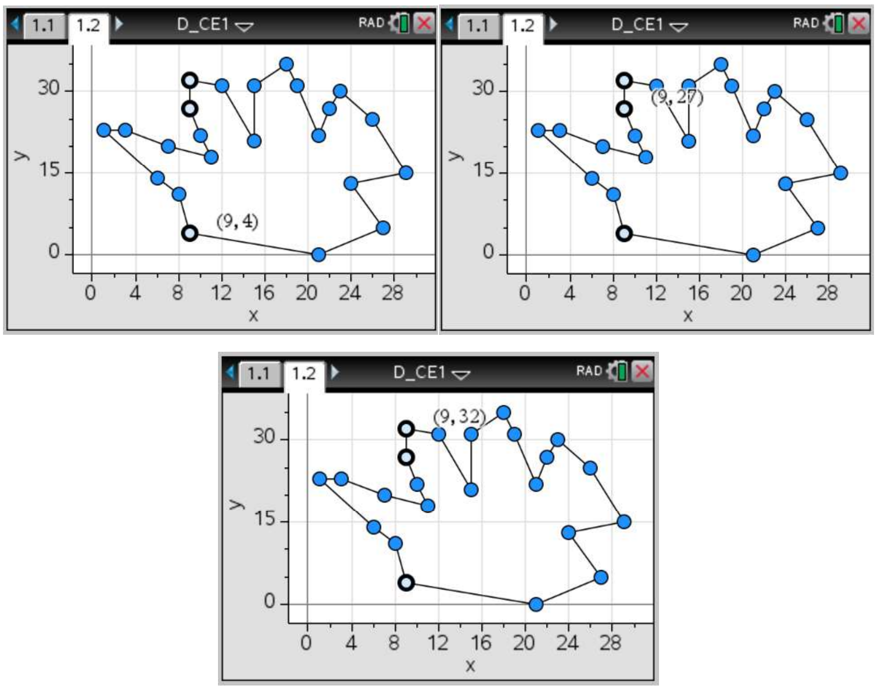


Figura 5.38 - Confirmação realizada pela Berta, enquanto aluna *Sherpa*, de que os pontos (9,4), (9,27) e (9,32) se situam sobre uma reta vertical, na tarefa D-CE1.

No sentido de se dar uma descontextualização dos significados pessoais, procedendo-se à sua movimentação para significados matemáticos, a professora *solicitou uma síntese*:

87. Professora: Então, quem é que consegue sintetizar a resposta à alínea a) da tarefa?
88. Berta: A representação da minha mão não é uma função porque existem objetos que têm diferentes imagens. Se eu fizer passar uma reta vertical, ela corta o gráfico em mais que um ponto. Eu fiz confusão com a tabela (ver figura 5.37). No gráfico é que se vê bem (ver figura 5.38).

Perante a primeira parte da afirmação da Berta, a professora constatou que a aluna usou uma linguagem formal inadequada. O modo como a aluna construiu o conceito de função, não estava compatível com a matemática reconhecida por um especialista (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). A professora colocou uma questão à aluna de modo a perceber se se tratou apenas de um problema de comunicação:

89. Professora: Então Berta, relativamente aos pontos que representaste na tabela (ver figura 5.37), será que essa correspondência representa uma função?
90. Berta: Sim, porque cada objeto tem uma e uma só imagem.
91. Professora: Tens a certeza? Olha bem para a tabela!
92. Berta: Que confusão! O "15" tem dois resultados! Duas imagens! Pois o [objeto] "15" tem duas imagens! Então não é!
93. Professora: Não é o quê?
94. Berta: Não é função!
95. Professora: Porquê? Podes explicar?
96. Berta: Então stora, o objeto "9" tem três imagens diferentes, o "27", "32" e "4". O objeto "15" tem duas imagens diferentes o "21" e o "31". O objeto "21" também tem duas imagens diferentes, o "22" e o "0". Portanto, "*não pode ser função, porque cada objeto só pode ter uma e uma só imagem*"[112].
97. Professora: Muito bem! Penso que agora está percebido!

Entretanto, a Maria solicitou a presença da professora para lhe mostrar o que estava a fazer com a sua calculadora gráfica. Começou a movimentar os vértices[113] do gráfico poligonal, utilizando o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento[114] e transformou-o num polígono convexo. Este procedimento também tinha sido feito pelo Pedro, aquando da realização da tarefa.

98. Maria: Stora, neste caso, a reta [vertical] continua a cortar o gráfico em dois pontos, com a mesma abcissa e ordenada diferente.

[112] Quando a Berta enunciou esta conclusão, recorreu aos apontamentos que tinha realizado na aula anterior, onde constava a definição de função.
[113] Os vértices eram constituídos pelas coordenadas dos pontos escolhidos pelos alunos.
[114] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

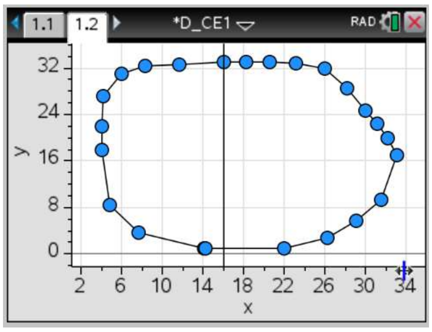


Figura 5.39 - Transformação do gráfico poligonal representativo da palma da mão da Maria, num polígono convexo na tarefa D-CE1, mostrando uma reta vertical a intersetar o gráfico em dois pontos.

Aproveitando o raciocínio destes dois alunos, a professora solicitou que a Berta (aluna *Sherpa*) transformasse o gráfico poligonal, num polígono convexo[115] (ver figura 5.40) e pediu ao Pedro para comentar se a figura resultante se tratava de uma função. Tal como no relatório, o aluno afirmou que nesta situação um mesmo objeto tem mais do que uma imagem, dado que a linha se encontra fechada, e então concluiu que este gráfico cartesiano, não representa uma função.

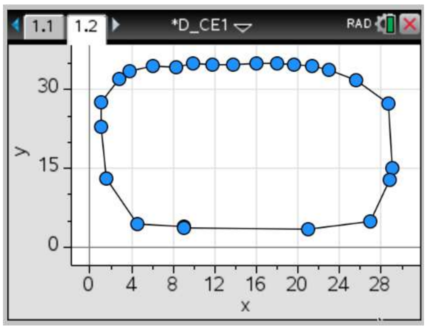


Figura 5.40 - Transformação do gráfico poligonal, representativo da palma da mão da Berta, enquanto aluna *Sherpa*, num polígono convexo, na tarefa D-CE1.

Neste sentido, a professora *solicitou uma síntese* relativamente à alínea b) da tarefa.

> **99. Professora:** Então, em que condições é que um gráfico cartesiano representa uma função?
> **100. Maria:** Sempre que uma reta vertical intersete o gráfico num único ponto[116],
> **101. Pedro:** Sempre que o gráfico não seja uma linha fechada.
> **102. José:** Então stora, quando a linha não é fechada, uma reta vertical interseta o gráfico num só ponto.

Os alunos mostraram dificuldade em sintetizar, em que condições é que um gráfico cartesiano representa uma função. Então, de modo a tornar explícitos os significados pessoais

[115] A aluna Berta, tal como os seus colegas, Pedro e Maria, recorreu ao *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento.
[116] A Maria mostrou aos colegas a imagem da representação gráfica do ecrã da sua calculadora.

construídos na realização da tarefa e desenvolvidos na discussão coletiva, procedeu-se à sua transição para significados matemáticos, com a intervenção da professora, com a *oferta de uma síntese*. A mesma evidenciou a propriedade de um gráfico cartesiano que representa uma função: "sempre que qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas, interseta o gráfico num único ponto".

Síntese da análise dos resultados

Todos os alunos apresentaram uma grande facilidade em construir o referencial cartesiano inerente aos pontos que marcaram, associados à palma da sua mão. Um aspeto curioso, foi o facto de todos eles, terem desenhado a mesma, no 1º quadrante do referencial cartesiano[117].

Relativamente à primeira parte da alínea a), nenhum dos alunos mostrou dificuldades em desenvolver *esquemas de uso*, na calculadora gráfica, no que respeita à construção do gráfico poligonal, respeitante à palma da sua mão.

No que concerne à segunda parte da alínea a), todos os alunos afirmaram que a representação em causa, não correspondia a uma função. No entanto, para os alunos, Berta e José, de grupos distintos, emergiram *signos de artefacto* baseados no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* não consistentes com o conceito de função. Estes alunos evidenciaram uma certa dificuldade em distinguir a diferença entre objeto e imagem. No entanto, os *esquemas de ação instrumentada* desenvolvidos pela Maria na discussão coletiva (ver diálogo 79), permitiu ao José desfazer a confusão e concluir através da tabela (ver figura 5.36) que a representação da sua mão não correspondia a uma função, pelo facto de existirem objetos que tinham mais do que uma imagem. A Berta também foi influenciada pelos *esquemas de ação instrumentada* desenvolvidos pela Maria. A aluna desenvolveu *esquemas de ação instrumentada* assentes no desenvolvimento de *esquemas de uso*. Mostrou, enquanto aluna *Sherpa*, que os pontos[118] (9,4), (9,27) e (9,32) se situam sobre uma mesma reta vertical (ver figura 5.38), concluindo que a representação da sua mão não é uma função.

Os alunos Maria e Pedro, apresentaram significados pessoais que se traduziram nos signos matemáticos, baseados no conhecimento que tinham sobre os conceitos de abcissa, ordenada, objeto, imagem e função (ver figuras 5.31 e 5.32). No entanto, a perceção que temos, é que a Maria fundamentou a sua resposta, através da análise que fez na tabela e realizou uma leitura do gráfico poligonal construído na calculadora gráfica (ver última frase da figura 5.32). A aluna também desenvolveu *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados em *signos de artefacto,* ao fazer emergir os significados pessoais espontâneos de "corte" e "linha" (ver segunda parte da figura 5.32), onde a professora, na discussão coletiva, procedeu à sua articulação para os significados matemáticos, "interseção" e "reta", respetivamente. Posso conjeturar que a

[117] Esta coincidência, não foi explorada na discussão coletiva, pois não se tratava do objetivo da tarefa.
[118] Pontos que marcou na tabela (ver figura 5.37), referentes à palma da sua mão.

visualização favorece a compreensão, isto é, o desenvolvimento destes *signos de artefacto,* se deveram à função de visualização proporcionada pelas imagens reproduzidas no ecrã da calculadora gráfica.

No que respeita à alínea b), os alunos tiveram de enunciar em que condições é que um gráfico cartesiano representa uma função. Numa primeira fase, no relatório escrito, a Maria desenvolveu *signos de artefacto* compatíveis com *signos matemáticos* (ver figura 5.35), que estavam em sintonia com os primeiros *signos de artefacto* desenvolvidos pela aluna, na alínea a) (ver a segunda parte da figura 5.32), como se verificou posteriormente na discussão coletiva. Numa segunda fase, no decorrer da discussão coletiva, a aluna utilizou *esquemas de ação instrumentada* inerentes à utilização da função de arrastamento[119], transformando a figura inicial que representava a palma da sua mão, num polígono convexo, enquanto o Pedro concretizou este procedimento, no decorrer da realização individual da tarefa. Posso conjeturar que o ambiente social da aula, decorrente de uma discussão coletiva, proporcionou/facilitou à Maria, a realização deste esquema. Neste sentido, o Pedro conjeturou que um gráfico cartesiano corresponde a uma função, se o mesmo não for representado por uma linha fechada (ver diálogo 101), pois nesta situação um mesmo objeto tem mais do que uma imagem (ver figura 5.33). Em contrapartida, a Maria reiterou a sua "conjetura inicial"[120](ver figuras 5.32 e 5.35): "Sempre que uma reta vertical intersecte o gráfico num único ponto" (ver diálogo 100). Estas contribuições do Pedro e da Maria, impulsionaram que o José[121] as articulasse e procedesse a uma conclusão (ver diálogo 102), seguindo-se uma *oferta de síntese,* por parte da professora.

Quando foi feita a planificação desta tarefa, antecipei (Stein et al, 2008) como os alunos a poderiam interpretar, produzindo possíveis estratégias de resolução. Uma das situações que foi esperada, traduziu-se na possibilidade de os alunos construírem uma tabela onde não existisse uma abcissa em que correspondesse mais do que uma ordenada e serem induzidos a afirmar que a representação da sua mão, desenhada no referencial cartesiano, representava uma função. No entanto, ao utilizarem a função de arrastamento, movimentando os vértices das coordenadas dos pontos escolhidos, deveriam de obter uma linha fechada e conjeturar que a representação da palma da sua mão não representa uma função. No entanto, este cenário não se consolidou.

Também era espectável que os alunos usassem os *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento, para observar que quando movem os pontos na vertical, o valor da abcissa mantem-se constante, sendo variável o valor da ordenada. Por outro lado, ao moverem os pontos na horizontal, o valor da abcissa é variável e o valor da ordenada

---

[119] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

[120] Depois de na discussão coletiva, com a mediação da professora, se ter dado a movimentação dos significados pessoais, "corte" e "linha" para os significados matemáticos "interseção" e "reta".

[121] Como já foi referido anteriormente, antes da discussão coletiva, aquando a realização do relatório, os alunos José e Berta, limitaram-se a escrever a definição de função, para concluir em que condições um gráfico cartesiano representa uma função.

permanece constante. No entanto, os alunos adotaram outras estratégias de resolução, como as que foram mencionadas anteriormente.

Contudo, posso conjeturar que, para os alunos Maria e Pedro, o potencial semiótico da calculadora gráfica, inerente à função de arrastamento e a função de visualização, num AGD foi determinante para a resolução desta alínea (ver figuras 5.33 e 5.39).

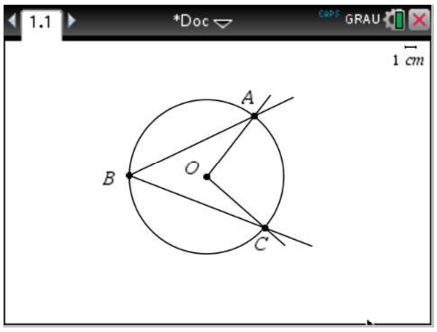
A discussão coletiva, pertencente a uma das fases do *Ciclo Didático*, "parece-me" ter sido fundamental para o colmatar de algumas dúvidas expostas pelos alunos José e Berta, assim como a realização da síntese final. Para estes dois alunos, a utilização da calculadora gráfica na resolução da tarefa, não demonstrou ter sido uma mais-valia na construção do conceito de função. Os mesmos, evidenciaram uma certa dificuldade em distinguir a diferença entre objeto e imagem, assim como descrever em que condições um gráfico cartesiano representa uma função.

No entanto, para a Maria e o Pedro, a calculadora gráfica, permitiu a realização da tarefa, com sucesso, tendo os *esquemas de ação instrumentada*, inerentes à função de arrastamento, contribuído para o desenvolvimento do potencial semiótico da calculadora gráfica, como foi descrito anteriormente. A Maria foi mais "longe", ao desenvolver *signos de artefacto* nas questões a) e b) (ver figuras 5.32 e 5.35). A aluna, ao ter uma ideia correta da definição de função, desenvolveu significados pessoais e espontâneos "corte" e "linha", que se articularam com os significados matemáticos "interseção" e "reta", fomentando a propriedade de que: "um gráfico cartesiano representa uma função, quando uma qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas, o interseta num único ponto". Deste modo, posso conjeturar, que para estes alunos, a calculadora gráfica funcionou como um instrumento de mediação semiótica, facilitador da construção de conceitos matemáticos.

5.1.4. Tarefa F – CE1: Modelando a relação entre a amplitude de um ângulo inscrito e o ângulo ao centro, correspondente, numa circunferência

A tarefa apresentada aos alunos

1. Utilizando a calculadora gráfica, constrói a seguinte figura:



a) Qual é a diferença entre um ângulo inscrito *ABC* e um ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência?

b) Qual é a relação que existe entre a medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde?

c) Qual é o modelo matemático que se adequa a esta situação?

Sugestão:

● Na **Página 1**, da aplicação **Geometria** define a variável **b** para o ângulo *ABC* e a variável **o** para o ângulo *AOC.*

● Na **Página 2**, insere a aplicação **Listas e Folha de Cálculo** e faz uma **captura de dados** relativamente aos valores das variáveis **b** e **o**.

● Na **Página 3**, insere a aplicação **Dados e Estatística** e traça uma função tendo em conta as variáveis **b** e **o**.

Figura 5.41 - Enunciado da tarefa F-CE1.

Esta tarefa teve o objetivo de distinguir a diferença entre ângulo inscrito e ângulo ao centro. Por outro lado, reconhecer que numa circunferência, a medida da amplitude de um ângulo inscrito é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde, apresentando um modelo matemático que se adequasse à situação. A mesma foi proposta aos alunos, no final da unidade de ensino de Funções, no domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7), tendo também englobado conteúdos inerentes ao domínio da Geometria e Medida (GM9) do 9.º ano de escolaridade. Dado que se tratou de uma tarefa que envolveu várias aplicações, da calculadora gráfica, tais como, *Geometria*, *Listas e Folhas de Cálculo* e *Dados e Estatística*, anteriormente foi realizada uma aula, que incluiu sucessivamente a aprendizagem das mesmas[122].

Quando a tarefa foi apresentada aos alunos, os mesmos foram informados que tinham de a resolver a pares e posteriormente realizar um relatório individual.

Atividades com o artefacto e produção individual/pequeno grupo de signos

No que concerne à primeira parte da tarefa, que dizia respeito à construção da figura, posso conjeturar que surgiram os primeiros *signos de artefacto*. Os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados nos significados pessoais respeitantes ao conhecimento dos signos matemáticos, inerentes aos conceitos de circunferência e ângulo. Para colocarem em prática esses esquemas, desenvolveram também *esquemas de uso,* quando abriram a **Página 1** recorrendo à aplicação **Geometria** e construíram a figura solicitada, sem apresentarem qualquer dificuldade.

No que respeita à alínea a), tendo em conta o potencial semiótico da calculadora gráfica inerente à função e arrastamento e função de visualização, os alunos conseguiram mobilizar o significado pessoal do conceito de ângulo e construíram uma "definição" de ângulo inscrito *ABC* e ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência. No entanto, ao contrário da Berta (ver figura 5.43), o José, no seu relatório escrito, não indicou qual é o vértice de cada um dos ângulos (ver figura 5.42), havendo necessidade da professora fazer esse esclarecimento na discussão coletiva.

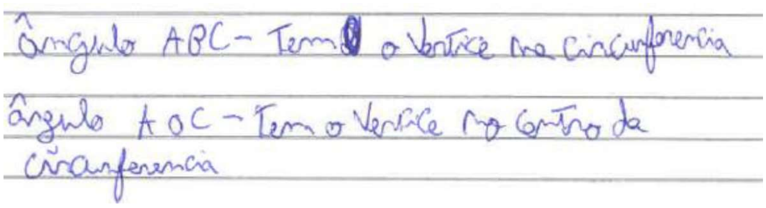

ângulo ABC – Tem o vertice na circunferencia
ângulo AOC – Tem o Vertice no Centro da circunferencia

Figura 5.42 - Resolução escrita da alínea a) da tarefa F-CE1, pelo José.

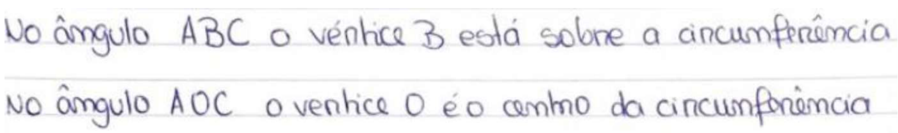

No ângulo ABC o vértice B está sobre a circunferência
No ângulo AOC o vertice O é o centro da circunferência

Figura 5.43 - Resolução escrita da alínea a) da tarefa F-CE1, pela Berta.

Relativamente à alínea b), ainda na **Página 1** de **Geometria**, os alunos desenvolveram *signos de artefacto* quando desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, ao fazer emergir o

[122] ***Aula n.º 5***, da primeira fase do processo de instrumentalização (aprendizagem do *software* da calculadora gráfica).

significado pessoal do conceito de medida de amplitude de um ângulo, cujo propósito seria dar-se a transição do significado geométrico de ângulo para o significado de medida da amplitude de um ângulo. Neste sentido, recorreram a *esquemas de uso* para proceder à medição da amplitude do ângulo inscrito *ABC* e do ângulo ao centro *AOC*[123]. No entanto, por de trás desse procedimento existe um *esquema de ação instrumentada*, cujo objetivo se fundamentou em explorar a relação existente entre a medida da amplitude do ângulo ao centro e a medida da amplitude do ângulo inscrito.

De seguida, o grupo dos alunos, Pedro e José, sentiram dificuldades em desenvolver os *esquemas de uso*, inerentes à definição das variáveis **b** para o ângulo inscrito *ABC* e a variável **o**, para o ângulo ao centro *AOC*, tendo sido ajudados pelo grupo das alunas, Berta e Maria. Posteriormente, o Pedro foi observado pela professora a utilizar o *esquema de ação instrumentada,* inerente à função de arrastamento, movendo os pontos *A*, *B*, *C* e *O* (ver figura 5.44). No entanto, tal como é evidenciado na discussão coletiva (ver diálogo 125-126), o aluno apenas conseguiu movimentar os pontos *A* e *C*.

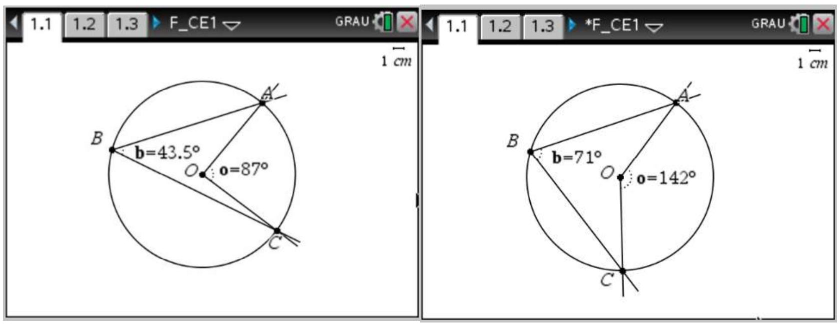


Figura 5.44 - Resolução na calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento) da alínea b) da tarefa F-CE1, pelo Pedro.

Posteriormente, os alunos defrontaram-se com um sistema numérico, resultante da medição da amplitude dos ângulos, que foi realizado automaticamente pela calculadora gráfica. Desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, baseados no significado pessoal do conceito da operação de divisão entre 2 variáveis, **o** por **b** e/ou **b** por **o**, com o objetivo de relacionar a medida da amplitude entre o ângulo inscrito e a medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde. Para operacionalizar esses esquemas, recorreram a *esquemas de uso* para calcular $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{o}}$ e/ou $\frac{\boldsymbol{o}}{\boldsymbol{b}}$[124]. Por fim, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, baseados na função de arrastamento, ao proceder à alteração do raio da circunferência ou à movimentação dos

[123] Tendo em conta a primeira sugestão do enunciado, os alunos para definirem as variáveis ***o*** e ***b***, deveriam numa primeira fase, proceder à medição da amplitude dos ângulos.

[124] O Pedro foi o único aluno que procedeu ao cálculo das duas razões, $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{o}}$ e $\frac{\boldsymbol{o}}{\boldsymbol{b}}$ pois os outros alunos, apenas operacionalizaram uma delas.

pontos *A* e *C*, pertencentes aos lados dos ângulos, verificando que as relações $\frac{b}{o}$ e $\frac{o}{b}$ se aplicam a qualquer circunferência e se mantêm constantes (ver figura 5.45).

Então, surgiram *signos matemáticos*, quando os alunos constataram que a medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC* é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde ou que a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC* é o dobro da medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC*, que lhe corresponde (ver figuras 5.45, 5.46 e 5.47).

Embora a professora, através da observação direta tivesse visionado o Pedro a alterar as dimensões da circunferência e a movimentar os pontos *A* e *C*, pertencentes aos lados dos ângulos, no relatório, o aluno apenas referiu que "moveu" a figura (ver figura 5.46).

A Maria e a Berta, mais uma vez, fizeram confusão com a escrita simbólica inerente aos signos matemáticos de ângulo, medida da amplitude de ângulo[125] (ver figuras 5.47 e 5.51) e pontos pertencentes aos lados dos ângulos[126] (ver figura 5.47). Por outro lado, quando a Maria escreveu: "O ângulo *ABC* depende do ângulo *AOC*" (ver figura 5.47), evidenciou a perceção de uma relação de dependência entre os ângulos, funcionando os mesmos como, variável dependente e variável independente, facilitando a construção do modelo matemático solicitado na alínea c). Estes pormenores foram posteriormente esclarecidos na discussão coletiva.

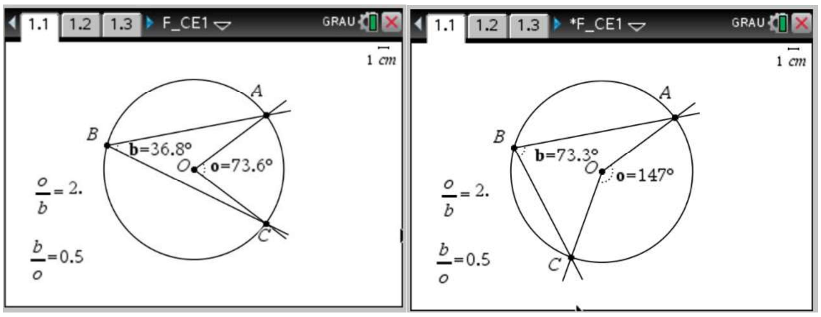
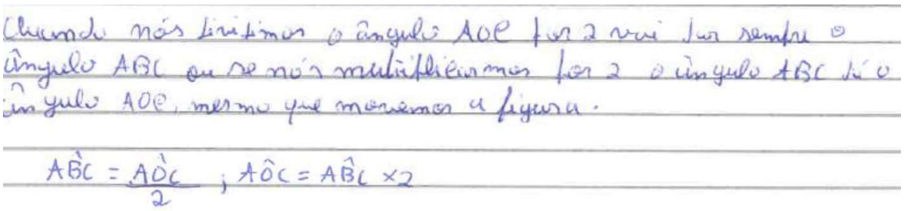


Figura 5.45 -Resolução na calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento) da alínea b) da tarefa F-CE1, pelo Pedro.

125 Na realização da tarefa A-CE1, também se verificou que a aluna Maria fez confusão na escrita simbólica dos signos matemáticos, ângulo e medida da amplitude de ângulo. No entanto, esta situação foi clarificada na discussão coletiva. Por outro lado, nessa mesma tarefa, tendo em conta que a Maria tinha assumido a função de aluna *Sherpa*, foi a Berta que esclareceu essa dúvida no quadro negro (ver figura 5.13). Hipoteticamente, podemos considerar que o facto de a Maria ter uma enorme necessidade de realizar as tarefas com muita celeridade, impulsionou por vezes respostas desajustadas ao que era solicitado. No caso da Berta, podemos conjeturar que se tratou de uma distração, como se pode comprovar na discussão coletiva.

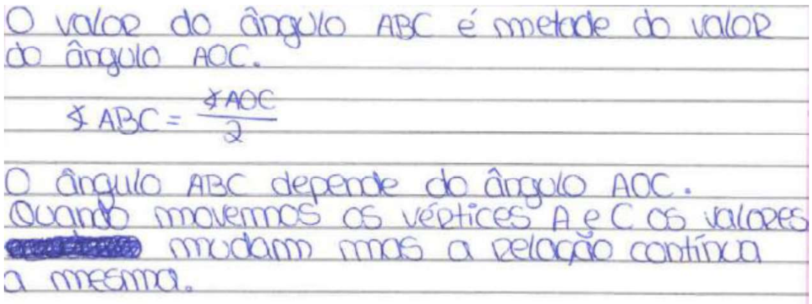
126 A aluna Maria denominou por vértices, os pontos A e C, pertencentes aos lados dos ângulos.



Quando nós dividimos o ângulo AOC por 2 vai dar sempre o ângulo ABC ou se nós multiplicarmos por 2 o ângulo ABC dá o ângulo AOC, mesmo que movemos a figura.

$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}$; $A\hat{O}C = A\hat{B}C \times 2$

Figura 5.46 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa F-CE1, pelo Pedro.



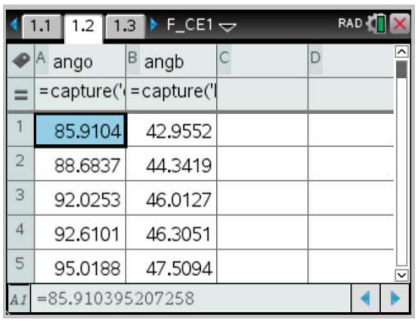
O valor do ângulo ABC é metade do valor do ângulo AOC.

$\measuredangle ABC = \frac{\measuredangle AOC}{2}$

O ângulo ABC depende do ângulo AOC. Quando movemos os vértices A e C os valores mudam mas a relação continua a mesma.

Figura 5.47 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa F-CE1, pela Maria.

No que concerne à alínea c), os alunos seguiram as sugestões do enunciado e desenvolveram *esquemas de uso*, inerentes à manipulação da calculadora gráfica, construindo a **Página 2 – Listas e Folha de Cálculo**[127] (ver figura 5.48) e a **Página 3 – Dados e Estatística** (ver por exemplo, figura 5.49).



1.1 1.2 1.3 F_CE1 RAD

	A ango	B angb	C	D
=	=capture('	=capture('l		
1	85.9104	42.9552		
2	88.6837	44.3419		
3	92.0253	46.0127		
4	92.6101	46.3051		
5	95.0188	47.5094		

A1 =85.910395207258

Figura 5.48 - Resolução na calculadora gráfica (captação dos dados na aplicação *Listas e Folha de Cálculo*) da alínea b) da tarefa F-CE1, pelo Pedro.

Os alunos Maria, José e Pedro, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, quando mobilizaram o significado pessoal da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear e por conseguinte relacionaram a alínea b) com a alínea c) tendo definido um modelo linear que se ajustou à situação. Os alunos delinearam o seguinte modelo: $y = 0{,}5\,x$ ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0{,}5\,o}$), colocando cuidadosamente a variável dependente e variável independente (ver figuras

[127] Quando os alunos capturaram os valores das variáveis **o** e **b** para a folha de cálculo, denominaram essas variáveis por **ango** e **angb**, respetivamente.

5.49 e 5.50). Desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* que transitaram para o desenvolvimento de *esquemas de uso*, quando colocaram o cursor nos vários pontos do gráfico da função e verificaram que o valor da variável dependente (ordenada) era sempre metade do valor da variável independente.

O aluno Pedro, foi mais ambicioso quando alterou a posição das variáveis (ver a segunda parte da figura 5.49) de modo a verificar qual a relação existente entre as variáveis nesta situação. Desenvolveu *esquemas de ação instrumentada* que necessitaram do desenvolvimento de *esquemas de uso*, quando colocou o cursor nos vários pontos do gráfico da função e verificou que o valor da variável dependente (ordenada) era sempre o dobro do valor da variável independente (abcissa). O mesmo estabeleceu o modelo $y = 2x$ ($\boldsymbol{o} = \mathbf{2}\boldsymbol{b}$), pois na alínea b) também tinha chegado a duas relações (ver figura 5.46).

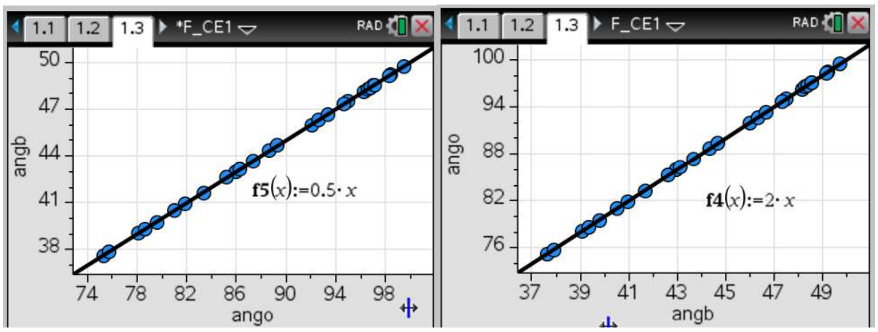


Figura 5.49 - Resolução na calculadora gráfica da alínea c) da tarefa F-CE1, na aplicação *Dados e Estatística*, pelo Pedro.

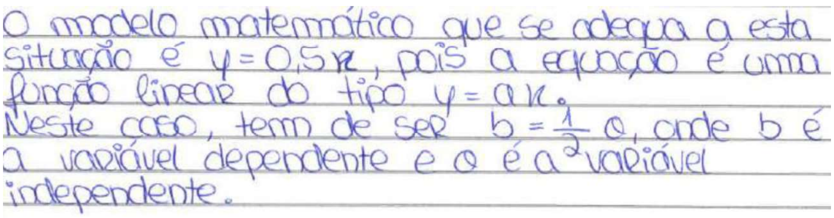
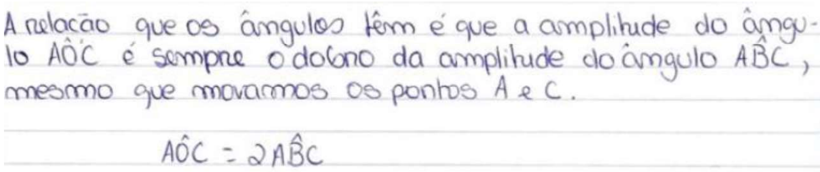

O modelo matemático que se adequa a esta situação é y = 0,5x, pois a equação é uma função linear do tipo y = ax.
Neste caso, tem de ser b = 1/2 o, onde b é a variável dependente e o é a variável independente.

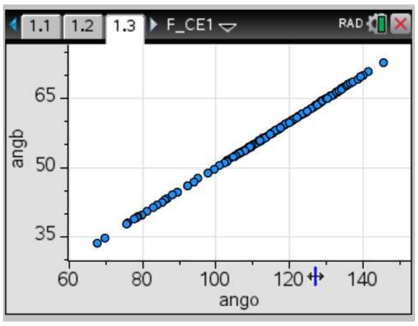
Figura 5.50 - Resolução escrita da alínea c) da tarefa F-CE1, pela Maria.

Para a Berta, na última página **(Página 3**) surgiram algumas imprecisões, relativamente à colocação das variáveis **b** (**angb**) e **o** (**ango**), como variável dependente ou variável independente (ver a segunda parte da figura 5.53). A aluna colocou aleatoriamente as variáveis e quando surgiu uma representação no ecrã da calculadora gráfica, caracterizada por pontos alinhados, semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear (ver figura 5.52), desenvolveu o significado pessoal de função linear. A aluna definiu o modelo linear $y = 2x$ ($\mathbf{ango} = \mathbf{2angb}$) (ver a primeira parte da figura 5.53), porque hipoteticamente fez uma relação com a resposta que tinha apresentado na alínea b) (ver figura 5. 51). No entanto, pode-se conjeturar, que segundo a colocação que fez das variáveis (ver figura 5.52), evidenciou um raciocínio indutivo, pois não realizou uma verificação que o modelo que se adaptava à situação seria $y = 0{,}5\ x$ ($\mathbf{angb} = \mathbf{0{,}5\ ango}$). A aluna não verificou a relação que existia entre a abcissa e a ordenada nos respetivos pontos do gráfico, pois apenas interpretou a imagem que surgiu no ecrã da calculadora gráfica. A aluna não tomou em consideração a relação entre as variáveis, que tinha evidenciado na alínea b), contudo esta ambiguidade, foi esclarecida na discussão coletiva.


A relação que os ângulos têm é que a amplitude do ângulo AÔC é sempre o dobro da amplitude do ângulo AB̂C, mesmo que movamos os pontos A e C.

AÔC = 2AB̂C

Figura 5.51 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa F-CE1, pela Berta.



. **Figura 5.52** - Resolução na calculadora gráfica da alínea c) da tarefa F-CE1, pela Berta.

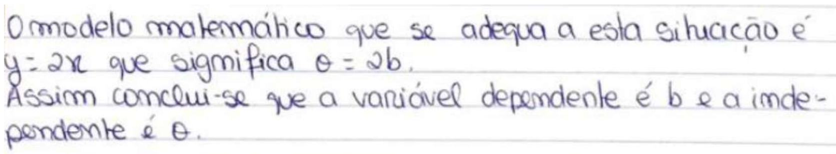

O modelo matemático que se adequa a esta situação é y = 2x que significa θ = 2b.
Assim conclui-se que a variável dependente é b e a independente é θ.

Figura 5.53 - Resolução escrita da alínea c) da tarefa F-CE1, pela Berta.

Produção de signos – Discussão Matemática

Como foi descrito, esta tarefa foi realizada a pares e o relatório foi operacionalizado individualmente. Foi sugerido pela professora, que o Pedro fizesse de aluno *Sherpa*, tendo sido uma proposta muito bem aceite, na medida que este aluno se mostrou mais motivado pela disciplina de Matemática, a partir do momento em que foi introduzida a calculadora gráfica na aula como uma das metodologias de ensino e aprendizagem. O aluno procedeu à construção da figura na calculadora gráfica[128] inserida no computador da secretária da professora.

[128] O Pedro utilizou os mesmos *esquemas de uso*, que foram antecipados pela professora, na planificação da tarefa, no capítulo 4.

Posteriormente, a professora procedeu à *ação de retorno à tarefa*, onde solicitou quem queria descrever o que foi pedido na alínea a) da tarefa.

103. Professora: Quem é que consegue dizer o que foi pedido na alínea a)?
104. Maria: Tinha que se dizer a diferença entre o ângulo *ABC* e o ângulo *AOC*.
105. Professora: Mas esses ângulos têm um nome específico! Certo?
106. Maria: Sim, o [ângulo] *ABC* é inscrito e o outro [ângulo] *AOC* é [ângulo] ao centro.

Tendo em conta que José e Pedro não tinham identificado no relatório, o vértice dos ângulos, a professora operacionalizou uma *ação de focalização*:

107. Professora: José ou Pedro, podem-nos dizer o que concluíram?
108. Pedro: Então, no ângulo *ABC*, o vértice pertence à circunferência e no ângulo *AOC*, o vértice é o centro da circunferência.
109. Professora: Mas podes identificar qual é o vértice que corresponde a cada um dos ângulos?
110. José: O "*B*", é o vértice do ângulo *ABC* e o "*O*" é o vértice do ângulo *AOC*.
111. Professora: Maria! Ouviste o que disse o José? Os vértices dos ângulos, são apenas os pontos, *B* e *O*. No teu relatório, respeitante à resolução da alínea b), consideraste que todos os pontos são vértices (ver figura 5.47). Não pode ser! Vê lá bem!
112. Maria: Oh stora, desculpe! Foi com a pressa. Já vim o erro. Escrevi que *A* e *C* eram vértices. *A* e *C*, pertencem à circunferência e também aos lados dos ângulos.
113. Professora: Muito bem! E relativamente aos lados desses ângulos? O que é que vocês podem concluir?
114. José: "Cortam" sempre a circunferência em dois pontos. Um deles é o vértice e o outro ponto também pertence à circunferência.
115. Professora: Meninos! O que significa cortar? Não sei o que é isso?
116. José: Oh Stora! "Intersetam" a circunferência em dois pontos.
117. Professora: Ah! Ok! Assim já entendo! E o que significa intersetar a circunferência em dois pontos?
118. José: É secante à circunferência!?

Perante as afirmações dos alunos, a professora *solicitou uma síntese*:

119.Professora: Ok! Então, quem é que consegue sintetizar, a diferença entre o ângulo inscrito *ABC* e o ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência? Berta, estás tão caladinha!
120. Berta: Oh stora! Eu já respondi! "*O ângulo inscrito ABC, o vértice B está sobre a circunferência. O ângulo ao centro AOC, o vértice O é o centro da circunferência*". Mas, deveria ter dito, que os lados dos ângulos são secantes à circunferência, não é stora?
121. Professora: Muito bem! Então como é que podes resumir o que acabaste de dizer?
122. Berta: Então stora: "*No ângulo inscrito ABC, o vértice B está sobre a circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência. No ângulo*

ao centro AOC, o vértice O é o centro da circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência".

Quando a Berta foi questionada sobre a última parte da sua afirmação, relativamente ao facto de referir que os lados de um ângulo ao centro são secantes à circunferência, a mesma referiu que deveria ter mencionado que cada lado contém o raio da circunferência. A aluna argumentou que utilizou a palavra "secante" por ser sinónimo de "concorrente"[129]. Entretanto, com a insistente orquestração da professora conseguiu compreender que cada lado do ângulo ao centro é constituído por uma semirreta com origem no centro da circunferência, cujo prolongamento interseta a mesma num único ponto.

Dado que a Berta conseguiu sintetizar a diferença entre o ângulo inscrito *ABC* e o ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência, a professora pediu-lhe para ir ao quadro escrever a conclusão.

A aula prosseguiu, com a discussão da alínea b). O Pedro, como aluno *Sherpa*, não demonstrou qualquer dificuldade na utilização de *esquemas de uso*, relativamente à definição das variáveis **b** e **o**, para o ângulo inscrito *ABC* e o ângulo ao centro *AOC*, respetivamente, ao contrário do que aconteceu aquando da resolução da tarefa. Dado que esta dúvida também tinha sido manifestada pelo José, a professora questionou este aluno sobre os procedimentos que o seu colega tinha realizado[130], ao que o aluno respondeu assertivamente. Neste contexto, a professora operacionalizou uma *ação de retorno à tarefa.*

> **123. Professora:** Então quem me quer relatar a questão que foi colocada na alínea b)?
> **124. Berta:** Stora, era pedido para dizer a relação que existe entre a amplitude do ângulo inscrito *ABC* e a amplitude do ângulo *AOC*. Eu concluí, que a amplitude do ângulo *AOC* é o dobro da amplitude do ângulo *ABC*.

Entretanto, o Pedro, começou a movimentar apenas os pontos *A* e *C*, ao invés do que tinha feito anteriormente, quando resolveu a tarefa (ver figura 5.44), onde foi observado a tentar movimentar os pontos *A*, *B*, *C* e *O*. A professora questionou o aluno, relativamente ao procedimento realizado, dando-se uma *ação de focalização*.

> **125. Professora:** Pedro, porque estás a movimentar apenas os pontos *A* e *C*? Porque não movimentas os pontos *O* e *B*?
> **126. Pedro:** Porque o [ponto] B e o [ponto] O são os vértices dos ângulos e quando eu os arrasto, o valor não muda, porque são pontos fixos. Mas quando eu arrasto os pontos *A* e *C*, a amplitude de um ângulo é sempre o dobro da amplitude do outro.

---

[129] A aluna fez confusão com a posição relativa entre retas e planos.
[130] Numa primeira fase, o Pedro como aluno *Sherpa*, desenvolveu *esquemas de uso* inerentes à medição da amplitude dos ângulos e posteriormente procedeu à definição das variáveis **o** e **b**, para os ângulos *AOC* e *ABC,* respetivamente.

A professora solicitou ao Pedro para clarificar as suas afirmações em relação aos pontos pontos *O* e *B* serem fixos. O aluno argumentou que o ponto *O* é um ponto fixo, por ser o centro da circunferência e quando arrastava o ponto *B*, o mesmo movimentava-se, mantendo-se inalterável as amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro. Somente com o arrastamento dos pontos *A* e *C* é que se fomentava a alteração da amplitude do ângulo inscrito e ângulo ao centro, isto é, variava o valor da amplitude do ângulo nos vértices *B* e *O*.

Por outro lado, a professora também pediu ao Pedro que clarificasse aos seus colegas qual a relação que existia entre a medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde. O Pedro procedeu à divisão das variáveis **o** e **b** e **b** e **o**, utilizou a função de arrastamento[131], tal como tinha feito aquando da resolução da tarefa (ver figura 5.45). O aluno verificou que a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC* é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* ou a medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* é metade da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, em qualquer circunferência.

Tendo em conta, a imprecisão da Maria e da Berta, na escrita simbólica, no que respeita aos signos matemáticos de ângulo, medida da amplitude de ângulo e pontos pertencentes aos lados dos ângulos (ver figuras 5.47 e 5.51), a professora solicitou que a aluna Maria, escrevesse a conclusão do Pedro, no quadro (ver figura 5.54), ocorrendo a *ação de solicitar uma síntese*.

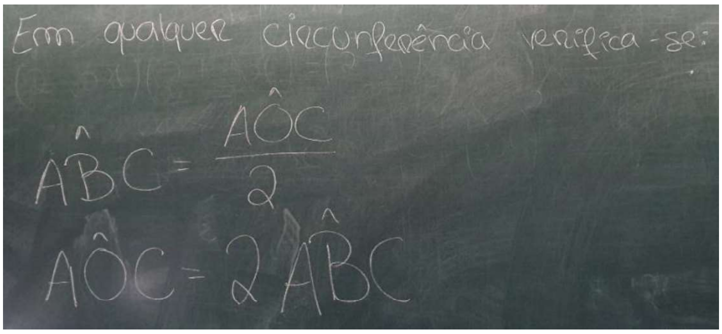


Figura 5.54 - Conclusão da alínea b) da tarefa F-CE1, evidenciada pelo Pedro e sintetizada posteriormente pela Maria, no quadro.

Relativamente à alínea c), deu-se uma *ação de retorno à tarefa*, quando a professora questionou os alunos, relativamente ao que era solicitado na mesma. O Pedro respondeu que se pretendeu construir um modelo matemático que se adequasse à situação. Como aluno *Sherpa*, desenvolveu todos os *esquemas de uso*, respeitantes à construção da **Página 2**, referente à aplicação **Listas e Folha de Cálculo**, onde fez uma captação de dados relativamente aos valores das variáveis **b** e **o,** denominando-as por **angb** e **ango**, respetivamente (tal como na figura 5.48).

[131] Alterou as dimensões da circunferência e movimentou os pontos *A* e *C*, pertencentes aos lados dos ângulos *ABC* e *AOC*.

Posteriormente, construiu a **Página 3**, relativa à aplicação **Dados e Estatística** (ver figura 5.55) e apareceu uma nuvem de pontos. Tendo em consideração o modelo matemático definido anteriormente pelos alunos, os mesmos deveriam de ter a perceção, de onde deveriam localizar a variável dependente e a variável independente.

Figura 5.55 - Imagem da representação gráfica do ecrã da calculadora gráfica, na aplicação *Dados e Estatística*, antes do Pedro (aluno *Sherpa*) definir as variáveis dependente e independente, na tarefa F-CE1.

Quando o aluno se preparava para definir as variáveis **b (angb)** e **o (ango)**, no gráfico, a professora procedeu a uma *ação de focalização,* perante as afirmações da Berta, no relatório escrito, no que concerne à relação de dependência entre a variável dependente e a variável independente (ver figura 5.53).

> **127. Professora:** Berta**,** perante a nuvem de pontos, que estás a ver no ecrã da calculadora gráfica e tendo em conta o modelo matemático que definiste, onde fica localizada a variável independente e a variável dependente? Quer dizer, as variáveis **b** e **o**, que o Pedro definiu na aplicação *Listas e Folha de Cálculo*, como, **ango** e **angb**, respetivamente!
> **128. Berta:** Oh, stora, o modelo que eu fiz, foi $y = 2x$, porque eu vim que a reta passava pela origem do referencial, logo só podia ser uma função linear. Então, eu pensei que era $\mathbf{ango = 2angb}$, porque na alínea b) eu conclui que a medida da amplitude do ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito. Devia ter dito que **ango** é a variável dependente e **angb** é a variável independente.
> Mas, eu sei que me enganei! Na aplicação *Dados e Estatística*, o meu erro, foi ter colocado as variáveis ao contrário e não reparei que o valor da abcissa é sempre metade do valor da ordenada, nesta situação claro! E então eu deveria ter percebido que o modelo era $y = 0{,}5\,x$ ($\mathbf{angb = 0{,}5\ ango}$)**.** Portanto, neste caso, o **angb** é a variável dependente e fica no eixo das ordenadas e **ango** é a variável independente e fica no eixo das abcissas.

A Berta sugeriu ao Pedro que construísse o modelo que ela tinha evidenciado no seu relatório (ver figura 5.53), e para tal deveria de colocar **ango** (variável dependente) no eixo das ordenadas e **angb** no eixo das abcissas (variável independente). De modo a confirmar que o modelo estava correto, a Berta pediu ao Pedro que colocasse o cursor nos vários pontos da função, de modo a comprovar que neste caso, o valor da variável dependente (ordenada) é sempre o dobro do valor da variável independente (abcissa) (ver figura 5.56).

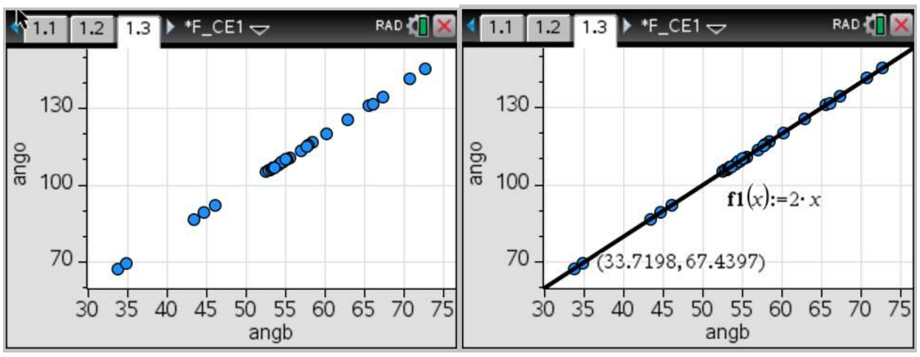


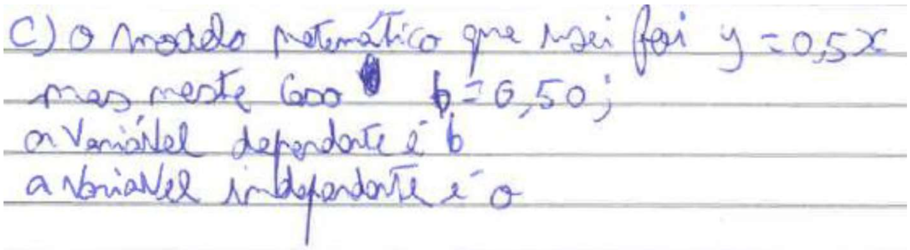
Figura 5.56 - Resolução da alínea c) da tarefa F-CE1, pelo Pedro (aluno *Sherpa*) tendo em consideração as orientações da Berta.

Por outro lado, tendo em conta a afirmação da Maria, "O ângulo *ABC* depende do ângulo *AOC*" (ver figura 5.47), que evidenciou a existência de uma relação de dependência entre os ângulos, a professora operacionalizou mais uma *ação de focalização*:

> **129. Professora:** Maria, no teu relatório, respeitante à alínea b), escreveste que o ângulo *ABC* depende do ângulo *AOC*. Como interpretas essa afirmação para a construção de um modelo matemático que se adapte a esta situação? Podes manter o modelo linear, $y = 2x$ ou no presente caso $\mathbf{ango} = \mathbf{2angb}$?
> **130. Maria:** Não, nesta situação a variável **b** que representa o ângulo *ABC* é que depende da variável **o** que representa o ângulo *AOC*. Portanto, eu concluí que o modelo matemático é na mesma uma função linear, mas fica $y = 0{,}5\ x$ ou neste caso é $\mathbf{angb} = \mathbf{0,5\ ango}$.

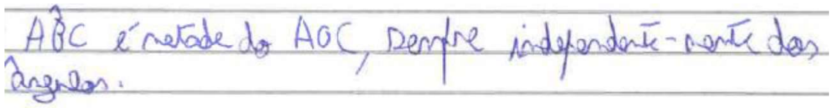
Entretanto o Pedro (aluno *Sherpa*) procedeu à mudança das variáveis (**ango** e **angb**) e traçou a função linear $y = 0{,}5\ x$, de acordo com a descrição da Maria e que ele próprio já tinha esboçado anteriormente, quando realizou a tarefa (ver figura 5.49).

Por fim, a professora *solicitou uma síntese* ao José, pois foi o único aluno que não se tinha manifestado durante a discussão coletiva e no seu relatório (ver figura 5.57), a sua resposta foi semelhante à da Maria (ver figura 5.50). O aluno evidenciou que o modelo matemático que se ajustava à situação, tratava-se da função linear, $y = 0{,}5\ x$, tendo em conta a relação encontrada na alínea b) (ver figura 5.58). No entanto, referiu que na discussão coletiva, percebeu que $y = 2x$, era outra forma de representar a função. Portanto, de acordo com as variáveis escolhidas, para variável dependente e variável independente, existem duas funções lineares que se adequam à situação ($y = 2x$ ou $y = 0{,}5\ x$).



c) o modelo matemático que me sai foi y = 0,5x
mas neste caso b = 0,50;
a variável dependente é b
a variável independente é o

Figura 5.57 - Modelo matemático encontrado pelo José, na alínea c) da tarefa F-CE1.



ABC é metade do AOC, sempre independente-mente dos ângulos.

Figura 5.58 - Resolução escrita da alínea b) da tarefa F-CE1, pelo José.

Síntese e análise dos resultados

Na construção da figura surgiram *signos de artefacto,* fundamentados no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* que assentaram no emergir de significados pessoais, sustentados pelo conhecimento dos *signos matemáticos* relativos aos conceitos de circunferência e ângulo. Também desenvolveram *esquemas de uso*, direcionados para a necessidade de utilização desses conceitos, no manuseamento dos comandos da calculadora gráfica, no que concerne à aplicação **Geometria**.

Relativamente à alínea a), posso conjeturar, que o desenvolvimento do *esquema de ação instrumentada*, inerente à função de arrastamento[132], promovido pelas *representações ativas* e a função de visualização, proporcionaram o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*. Esta situação é visível na mobilização do significado pessoal do conceito de ângulo para o significado matemático, inerente à construção da definição de ângulo inscrito *ABC* e ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência. No entanto, somente na discussão coletiva é que os alunos construíram corretamente a definição, cuja orquestração da professora promoveu o entendimento, de que os lados dos ângulos inscrito teriam de ser secantes à circunferência. No que concerne ao ângulo ao centro, tendo em consideração a orquestração da professora, a Berta reconheceu que deveria ter referido que cada lado do ângulo contêm o raio da circunferência e conseguiu compreender que cada lado do ângulo ao centro é constituído por uma semirreta com origem no centro da circunferência, cujo prolongamento interseta a mesma num único ponto.

No que concerne à alínea b), quando os alunos seguiram a sugestão do enunciado, para, ainda na **Página 1 - Geometria**, desenvolverem *esquemas de uso*, inerentes à definição da

[132] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

variável **b** para o ângulo *ABC* e da variável **o** para o ângulo *AOC*, verificou-se que todos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao percecionaram que antes de definir as variáveis tinham também que desenvolver *esquemas de uso*, fundamentados na medição da amplitude dos ângulos mencionados. Por sua vez, o desenvolvimento de *esquemas de uso,* para a definição das variáveis, foi assegurado pela interação social existente na aula, que fomentou que o grupo das alunas, Berta e Maria, ajudasse o grupo dos rapazes, Pedro e José, na definição dessas variáveis. Os *esquemas de uso* inerentes à medição da amplitude dos ângulos, não desencadeou nenhum constrangimento para ambos os pares, por ser um procedimento usual para os alunos.

Seguidamente, os alunos foram confrontados com um sistema numérico, resultante da medição da amplitude dos ângulos, que foi efetuado automaticamente pela calculadora. Deu-se o desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada*, através do emergir do significado pessoal relativo ao conceito da operação de divisão, de modo a verificarem a relação existente entre a medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*. Então, procederam à divisão das variáveis **o** e **b** e/ou **b** e **o**[133], utilizando *esquemas de uso*, e conjeturaram a relação entre a medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*. Posteriormente alteraram o raio da circunferência e movimentaram somente os pontos *A* e *C*, dado que os pontos *O* e *B*, correspondiam aos vértices dos ângulos[134]. Então, ao utilizarem o *esquema de ação instrumentada*, inerente à função de arrastamento, verificaram que a construção inicial foi transformada, porém a relação existente entre os ângulos, permaneceu invariante. Isto é, o potencial semiótico da calculadora gráfica, inerente à função de arrastamento, promoveu que os alunos reconhecessem que em qualquer circunferência, a medida da amplitude de um ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito, que lhe corresponde. Estes procedimentos evidenciaram um progresso significativo no processo de instrumentação e instrumentalização, inerente à Génese Instrumental.

Na resolução da alínea c) para os alunos Pedro, Maria e José, o potencial semiótico da calculadora gráfica inerente à função de visualização, desencadeou o desenvolvimento de *signos de artefacto* evidenciados por esquemas *de ação instrumentada*, Isto é, a imagem do ecrã da calculadora gráfica, caracterizada por pontos alinhados, semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear (ver a figura 5.49), desencadeou a mobilização dos significados pessoais da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear. E

[133] Para operacionalizarem essas divisões, os alunos recorreram aos *esquemas de uso*, antecipados na planificação da tarefa.

[134] O Pedro referiu que o ponto *O* é um ponto fixo. dado que se tratava do centro da circunferência. Ao proceder ao arrastamento do vértice B, o mesmo movimentava-se, não se verificando qualquer alteração nas amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro. Somente com o arrastamento dos pontos *A* e *C*, é que se registou a variação da amplitude do ângulo inscrito e ângulo ao centro, isto é, variou o valor da amplitude do ângulo nos vértices *B* e *O*.

por consequência, relacionaram a alínea b) (ver figuras 5.46, 5.47 e 5.58) com a alínea c), tendo definido um modelo linear que se ajustou à situação, de acordo com a posição da variável dependente e variável independente (ver figuras 5.49, 5.50 e 5.57).

Tendo em conta o modelo que delinearam, sentiram a necessidade de confirmar a sua conjetura, procedendo ao desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* que se movimentaram para *esquemas de uso*, quando colocaram o cursor nos vários pontos do gráfico da função e verificaram a relação existente entre o valor da variável dependente (ordenada) e o valor da variável independente (abcissa).

Também a Berta, tendo em consideração a função de visualização da calculadora gráfica, desenvolveu *signos de artefacto*, suportados por esquemas *de ação instrumentada*. A aluna ao visualizar uma representação no ecrã da calculadora gráfica, caracterizada por pontos alinhados, semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear (ver figura 5.52), desenvolveu o significado pessoal de função linear. Neste sentido, a aluna desenvolveu *esquemas de ação instrumentada,* ao associar esta imagem com a relação encontrada na alínea b) (ver figura 5.51) e construiu o modelo matemático de uma função linear, $y = 2x$ (ver primeira parte da figura 5.53), sem ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis (ver figuras 5.52). Isto é, dado que a aluna colocou aleatoriamente as variáveis na aplicação *Dados e Estatística*, pode-se conjeturar que a aluna evidenciou um raciocínio indutivo, pois não realizou uma verificação que o modelo que se ajustava à situação, seria a função linear $y= 0,5\ x$ e não $y = 2x$. A aluna, no seu relatório escrito já tinha evidenciado dificuldades de compreensão, no que concerne à diferença entre a variável dependente e a variável independente (ver a segunda parte da figura 5.53). Esta situação foi colmatada quando a aluna na discussão coletiva, se apercebeu do erro e ajudou o Pedro (aluno *Sherpa*) a construir corretamente o modelo que ela tinha desenvolvido (ver figura 5.56).

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES

Neste capítulo apresento os principais resultados deste estudo. Inicia-se com uma síntese, onde evidencio as questões de investigação fundamentadas nos objetivos e problema central e por último a conjetura de ensino-aprendizagem associada à experiência de ensino. De seguida dou resposta às questões de investigação e valido a conjetura de ensino-aprendizagem, tendo em consideração o referencial teórico descrito no capítulo dois. Por fim, apresento uma reflexão pessoal relativamente à investigação realizada.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo tem como principal objetivo, investigar como é que a integração do artefacto, calculadora gráfica, na resolução de tarefas, promove a construção de significados matemáticos no desenvolvimento de algumas unidades de ensino. Elencado a este objetivo, pretendo analisar: • Como é que os alunos usam as funcionalidades específicas da calculadora gráfica quando realizam uma tarefa; • Como é que é possível relacionar o uso da calculadora gráfica com a aprendizagem matemática dos alunos; • Qual é o papel da professora na exploração das potencialidades didáticas da calculadora gráfica.

Tendo em consideração as linhas teóricas que sustentaram o estudo, com o Modelo de Atividade de Engeström (2001), tenho como objetivo compreender como é que na resolução de uma tarefa com a calculadora gráfica, no ambiente social da aula, a Génese instrumental (Rabardel 1995) promove o desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada* (Drijvers & Trouche, 2008), através *atividade com o artefacto*[135] e na *produção individual/pequeno grupo de signos*[136]. Por sua vez, como é que estes esquemas contribuem para o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto* e consequentemente, como é que a professora orienta a evolução de significados pessoais para significados matemáticos, na *Produção coletiva de signos Discussão Matemática*[137], através das *Ações Complementares* descritas por Mariotti (2018).

De acordo com os objetivos delineados anteriormente, pretendo dar resposta ao seguinte problema central:

Como é que a integração do artefacto, calculadora gráfica, na resolução das tarefas e a orquestração da professora na discussão coletiva, apoiam a construção de significados matemáticos, no desenvolvimento de algumas unidades de ensino presentes no currículo?

---

[135] Atividade do *Ciclo Didático*.
[136] Atividade do *Ciclo Didático*.
[137] Atividade do *Ciclo Didático*.

Este problema central compreende um conjunto de outras questões de âmbito mais específico, nomeadamente:

• *Quais os esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada, desenvolvidos pelos alunos, quando usam o artefacto, calculadora gráfica?*

• *Como é que os esquemas mobilizados pelos alunos, contribuem para o desenvolvimento do potencial semiótico do artefacto, calculadora gráfica?*

• *No ambiente social, a aula, como é que a professora orienta a evolução de significados pessoais, relacionados com a tarefa e o artefacto, calculadora gráfica, para significados matemáticos?*

Dado que *Design Research* foi a metodologia associada a esta investigação, na modalidade experiência de ensino, além de pretender responder às questões de investigação fundamentadas no problema central, pretendo validar a conjetura de ensino-aprendizagem. Neste sentido, tendo como foco o trabalho desenvolvido pelos alunos que constituem o estudo de caso, a conjetura de ensino-aprendizagem assenta na hipótese de que, q*uando a aprendizagem decorre no ambiente social da aula, e se promovem produções individuais ou em pequeno grupo, resultantes da realização de tarefas com recurso à calculadora gráfica e posterior discussão coletiva, orquestrada pela professora, pode gerar-se um percurso potente na construção de significados matemáticos.*

6.2. Resposta às Questões de Investigação

As conclusões têm por objetivo dar resposta às questões de investigação, ancoradas ao problema central do estudo e validar a formulação da conjetura de ensino-aprendizagem, no que respeita à dimensão do conteúdo e dimensão pedagógica. Pretendo relacionar a análise dos dados com as linhas teóricas que suportaram o estudo. A análise dos dados baseou-se em quatro tarefas do primeiro ciclo de experimentação (CE1), referente aos trabalhos de quatro alunos, que fizeram parte dos estudos de caso, o par, a Maria e a Berta, e o par, o José e o Pedro.

Deste modo, as conclusões foram norteadas de acordo com as seguintes questões de investigação:

Quais os esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada, desenvolvidos pelos alunos, quando usam o artefacto, calculadora gráfica?

Ao longo deste estudo, percecionei que à medida que as tarefas foram sendo realizadas, os alunos apropriaram-se do artefacto mediador, calculadora gráfica. Criaram o seu próprio instrumento (Rabardel, 1995), dado que cada um, produziu os seus próprios esquemas (Trouche, 2000) - *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso*. Deste modo, operacionalizou-se os processos de instrumentação e instrumentalização, evidenciando-se uma evolução da Génese Instrumental (Drijvers et al, 2010; Rabardel, 1995; Trouche, 2004a, 2004b).

Por exemplo, na **tarefa A-CE1**, nas **alíneas b)** e **c)**, cada grupo que constituiu o estudo de caso, concebeu os seus próprios esquemas. O par Maria e Berta desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, ao percecionarem que os pares de ângulos *A* e *DBA*, e *C* e *CBE*, respetivamente, eram alternos internos (ver figuras 5.3, 5.4 e 5.5). Posteriormente para confirmarem a sua conjetura, tiveram a necessidade de desenvolver *esquemas de uso,* sustentados na medição da amplitude dos ângulos (ver a primeira parte da figura 5.12), onde os alunos tiveram focados na manipulação do artefacto. Esta situação está de acordo com estudos realizados pelos autores Drijvers e Trouche (2008), na medida em que consideram que para se dar o desenvolvimento dos *esquemas de ação instrumentada*, usualmente é necessária a intervenção de *esquemas de uso*, direcionados para a gestão do artefacto. Os mesmos autores afirmam que pode existir uma relação de dependência entre os *esquemas de ação instrumentada* e os *esquemas de uso*, isto é, pode dar-se a necessidade da interferência de *esquemas de uso* para o desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* e vice-versa. Neste sentido, posteriormente, as alunas Berta e Maria, de modo a verificar a invariância da amplitude dos ângulos, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, baseados na função de arrastamento, fomentando o desenvolvimento de *esquemas de uso*, ao movimentar os pontos *A*, *B* e *C*, do triângulo *ABC* (ver figuras 5.12 e 5.14).

Ainda, realçando o mesmo exemplo, o par Pedro e José, não perceberam que estavam perante ângulos alternos internos, então apenas apresentaram *esquemas de uso*, direcionados unicamente para o conceito de medição da amplitude dos ângulos. Podemos conjeturar, que esta metodologia criada por estes alunos, se deve à visualização da figura do enunciado (ver figura 5.2), tendo-lhes favorecido a compreensão. Provavelmente, os alunos não relembraram o conceito de ângulos alternos internos. Para completar a resolução da tarefa, os alunos evidenciaram os mesmos procedimentos, que a Maria e a Berta, no que concerne ao desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso*.

A construção de *esquemas de ação instrumentada* (Drijvers & Trouche, 2008) focaram-se no emergir de esquemas mentais, sustentados por *signos de artefacto*, cujo objetivo, foi refletir, para encontrar estratégias, baseadas em significados pessoais ou espontâneos que facilitasse a resolução das tarefas. Isto é, o objetivo firmou-se na articulação desses significados pessoais com significados matemáticos, inerentes ao objetivo didático de cada tarefa (Mariotti, 2018). Muitos desses *esquemas de ação instrumentada,* fundamentaram-se no emergir de significados pessoais, relacionados com os significados matemáticos aprendidos em tarefas anteriores ou consolidados em anos transatos.

Por exemplo, na **tarefa A-CE1**, nas **alíneas b)** e **c)**, como foi referido anteriormente, a Berta e a Maria desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados no emergir de significados pessoais ao percecionarem que os ângulos eram alternos internos. Por outro lado, na alínea **a)** da mesma tarefa, para a construção da figura (ver figura 5.2 e posteriormente a figura

5.11) emergiram *signos de artefacto* em todos os alunos, traduzidos no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada*, ao surgirem significados pessoais, fundamentados nos signos matemáticos, inerentes aos conceitos de triângulos e retas paralelas. Obviamente, que os alunos para realizarem a construção solicitada no enunciado da tarefa, desenvolveram *esquemas de uso*, sustentados na gestão do artefacto, calculadora gráfica.

No que concerne à **alínea d)** da **tarefa A-CE1**, todos os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, ao fazerem emergir os significados pessoais baseados no facto dos ângulos *DBA*, *ABC* e *CBE* serem suplementares, sendo a soma das suas amplitudes, um ângulo raso (ver figuras 5.9 e 5.10). Para desenvolverem esses *esquemas de ação instrumentada*, tiveram de desenvolver *esquemas de uso,* como se pode constatar no diálogo entre o par Berta e Maria (ver diálogo 10 - 11). Por outro lado, para garantir a invariância da amplitude da soma desses ângulos, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada,* sustentados pela função de arrastamento, que por sua vez obedeceram ao desenvolvimento de *esquemas de uso*, fundamentados na gestão do artefacto (ver diálogo 43 – 44, trabalho dos alunos incentivado pela professora, na discussão coletiva). Mais uma vez, foi comprovada a relação de dependência entre os *esquemas de ação instrumentada* e os *esquemas de uso*, como foi referido anteriormente. Tendo em consideração a orquestração da professora (ver a parte final do diálogo 43), os alunos desenvolveram *esquemas de uso* para determinar o valor da amplitude da soma dos ângulos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ e posteriormente *esquemas de ação instrumentada*, inerente à função de arrastamento, de modo a verificarem que a igualdade se verificava noutros triângulos, que por sua vez, exigiu o desenvolvimento de *esquemas de uso*, quando movimentaram os vértices do triângulo *[ABC].*

Na construção da figura, inerente à **tarefa B-CE1** (ver figura 5.15 e posteriormente ver figura 5.23, construída pelo aluno *Sherpa*), surgiram *signos de artefacto*. Os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada,* quando emergiram signos pessoais, apoiados em signos matemáticos, assentes no conhecimento dos conceitos de triângulos, retas paralelas e semirretas. Para desenvolver esses esquemas, foi imprescindível o desenvolvimento de *esquemas de uso*, baseados na manipulação do artefacto, calculadora gráfica.

Na resolução da **alínea a)** da **tarefa B-CE1**, os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada,* apoiados pelos significados pessoais adquiridos na **tarefa A-CE1**, ao percecionarem que os ângulos *BCE* e *ABC*, representavam ângulos alternos internos. No entanto, recorreram a *esquemas de uso,* assentes na medição da amplitude dos ângulos (ver, por exemplo, a primeira parte da figura 5.16). Para verificar que os ângulos *DCE* e *BAC* são congruentes, também recorreram a *esquemas de uso*, apoiados na medição da amplitude dos ângulos, aplicando a propriedade que aprenderam no 5.º ano de escolaridade (ver diálogo 61- 64). Por fim, de modo a concluir a congruência desses pares de ângulos, os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento. Por conseguinte, desenvolveram *esquemas de uso*, focados na movimentação dos vértices do triângulo *[ABC]* (ver figuras 5.16, 5.17 e 5.18).

Na resolução da **alínea b)** da **tarefa B-CE1**, o par Berta e Maria, no início da tarefa, recorreu ao uso do papel e lápis (ver figura 5.19). No final da tarefa, tiveram necessidade de desenvolver *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento[138] (ver figura 5.20), tendo realizado uma reprodução das suas descobertas, com papel e lápis, através de *representações icónicas* e *representações simbólicas*. O par José e Pedro recorreu à calculadora gráfica para realizar a tarefa, na totalidade. Desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao percecionarem que a medida das amplitudes dos ângulos internos A e B era a mesma que a medida da amplitude do ângulo externo C. Para verificar a sua conjetura, utilizaram *esquemas de uso*, fundamentados na *representação simbólica* de a+b, para a soma da medida da amplitude dos ângulos internos A e B e na *representação simbólica* de c+d, para a soma da medida da amplitude do ângulo *BCE* com o ângulo *ECD*. Isto é, designaram por *a* e *b*, a amplitude dos ângulos internos A e B, respetivamente, e denominaram por *c* e *d*, a amplitude dos ângulos externos *ECD* e *BCE*. Neste sentido, a soma *a+b* correspondeu à soma da medida da amplitude dos ângulos internos *A (∠BAC)* e *B* (*∠CBA)* e a soma *c+d* correspondeu à soma da medida da amplitude dos ângulos externos, *BEC* e *ECD*, do ângulo interno C (*∠BCA*). De modo a verificarem a sua conjetura, noutros triângulos (ver figura 5.22), recorreram à calculadora gráfica, desenvolvendo o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento, promovendo o desenvolvimento de *esquemas de uso*, baseados na movimentação dos vértices do triângulo *[ABC].* O par Berta e Maria, resolveram a primeira parte da alínea **b)** com papel e lápis, tendo usado *representações simbólicas* (ver figura 5.19). Na fase final da resolução da alínea **b)**, as alunas sentiram necessidade de verificar as suas descobertas, com o desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada*, inerentes à função de arrastamento, tendo recorrido no relatório escrito, onde recriaram as imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, através de *representações icónicas* e *representações simbólicas* (ver figura 5.20).

Na segunda parte da **alínea a)** da tarefa **D-CE1**, os alunos Berta e José**,** pertencentes a grupos distintos, quando tiveram que justificar se a representação da palma da sua mão corresponde a uma função, emergiram *signos de artefacto*, baseados no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada,* não consistentes com o conceito de função (ver figuras 5.29 e 5.30). No entanto, na discussão coletiva, a Maria desenvolveu *signos de artefacto*, firmados no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada*, para colmatar esta situação (ver diálogo 79), embora já o tivesse feito aquando da realização da tarefa (ver figura 5.32). Neste sentido, a Berta foi influenciada pelos *esquemas de ação instrumentada* desenvolvidos pela Maria. A aluna

---

[138] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

desenvolveu *esquemas de ação instrumentada*, focados no desenvolvimento de *esquemas de uso*. Mostrou, enquanto aluna *Sherpa*, que os pontos (9,4), (9,27) e (9,32)[139] se encontram sobre uma mesma reta vertical (ver figura 5.38), concluindo que a representação da sua mão não é uma função.

A Maria, no seu relatório escrito, desenvolveu esquemas de *ação instrumentada*, sustentados por *signos de artefacto,* através do emergir os significados pessoais espontâneos de "corte" e "linha" (ver segunda parte da figura 5.32), No decorrer da discussão coletiva, a aluna desenvolveu *esquemas de ação instrumentada* inerentes à utilização da função de arrastamento[140], transformando a figura inicial que representava a palma da sua mão, num polígono convexo e desenvolveu *esquemas de ação instrumentada* quando percecionou que poderia desenvolver *esquemas de uso* para mostrar que uma reta vertical intersetava o gráfico em dois pontos (ver figura 5.39). No entanto, o Pedro apenas desenvolveu *esquemas de ação instrumentada*, inerente à função de arrastamento[141], para verificar que o gráfico poligonal se tratava de uma linha fechada, e obviamente, nunca se poderia representar uma função, embora tivesse concretizado este procedimento, no decorrer da realização individual da tarefa. A Berta apenas operacionalizou o mesmo procedimento do Pedro, quando se encontrava a resolver a tarefa, enquanto aluna *Sherpa*. A Maria tendo em consideração os *signos de artefacto*, viabilizados através de *esquemas de ação instrumentada* (ver diálogo 79), confirmou a sua conjetura (figura 5.39).

Na **tarefa F-CE1**, na construção da figura surgiram *signos de artefacto.* Os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* proporcionados pelo emergir de significados pessoais assentes no conhecimento dos *signos matemáticos* inerentes aos conceitos de circunferência e ângulo. Posteriormente desenvolveram *esquemas de uso*, focados na aplicação desses conceitos.

No que concerne à **alínea a)** desta tarefa, os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento[142], promovidos pelas *representações ativas* e a função de visualização, através das representações das imagens no ecrã da calculadora gráfica (ver figura 5.42 e figura 5.43).

Relativamente à **alínea b)** verificou-se que todos os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao fazer emergir o significado pessoal do conceito de medida da amplitude de um ângulo, cujo objetivo consistiu em realizar a transição do significado geométrico de ângulo para o significado de medida de amplitude de um ângulo. Por outro lado, também percecionaram que antes de definir as variáveis (variável **b** para o ângulo *ABC* e da variável **o** para o ângulo

[139] Estes três pontos faziam parte dos pontos escolhidos pela Berta, inerentes à palma da sua mão (ver figura 5.37).
[140] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.
[141] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.
[142] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

AOC), tinham também que desenvolver *esquemas de uso*, fundamentados na medição da amplitude dos ângulos mencionados (ver figura 5.44).

Seguidamente, os alunos deparam-se com um sistema numérico inerente à medição da amplitude dos ângulos, que foi efetuada automaticamente pela calculadora. Desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, baseados no significado pessoal inerente ao conceito da operação de divisão. Então, procederam à divisão das variáveis **o** e **b** e/ou **b** e **o**[143], utilizando *esquemas de uso*, de modo a conjeturar a relação entre a medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*. Posteriormente, desenvolveram o *esquema de ação instrumentada* apoiado na função de arrastamento[144], nos pontos A e C, para concluir o objetivo didático da alínea b) da tarefa (ver figura 5.45).

Na **alínea c)** os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, focados em *signos de artefacto*, tendo em consideração a função de visualização das representações das imagens no ecrã da calculadora gráfica. A imagem transmitida por pontos alinhados, semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear, desencadeou a mobilização dos significados pessoais da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear. Relacionaram a alínea b) (ver figuras 5.46, 5.47 e 5.58) com a alínea c) e definiram um modelo linear que se ajustou à situação, de acordo com a posição da variável dependente e variável independente (ver figuras 5.49, 5.50 e 5.57). No entanto, a aluna Berta colocou aleatoriamente as variáveis, tendo construído o modelo matemático, sem ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis (ver figuras 5.51, 5.52 e 5.53). Somente na discussão coletiva, é que a aluna, tal como os seus colegas, sentiu necessidade de confirmar o modelo que desenvolveu (ver figura 5.56). Procedeu ao desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* que se movimentaram para *esquemas de uso*[145], quando solicitou ao aluno *Sherpa* para colocar o cursor nos vários pontos do gráfico da função e verificar a relação existente entre o valor da variável dependente (ordenada) e o valor da variável independente (abcissa).

Mais uma vez, o desenvolvimento de esquemas de *ação instrumentada* requereu o desenvolvimento de *esquemas de uso*, de acordo com a gestão do artefacto, calculadora gráfica. O desenvolvimento dos *esquemas de uso* foi facilitado, devido à possibilidade que os alunos tiveram em lhes ter sido facultadas aulas de aprendizagem do *software* da calculadora gráfica (ver subcapítulo **4.2. As aulas da primeira fase do processo de instrumentalização**), antes da realização das tarefas. Também, no decorrer das mesmas, alguns alunos, foram apoiados por outros alunos, no que concerne à manipulação dos comandos da calculadora gráfica, no ambiente social da aula (por exemplo, ver diálogo 1-8). Para se operacionalizar a evolução dos *esquemas*

[143] Para operacionalizarem essas divisões, os alunos recorreram aos *esquemas de uso*, antecipados na planificação da tarefa.
[144] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.
[145] Procedimento realizado anteriormente pela Maria, Pedro e José.

de uso, foi fundamental a experiência que os alunos adquiriram em tarefas anteriores ou no ambiente social da aula ou essencialmente com a colaboração do aluno *Sherpa*.

Por exemplo, a Maria mostrou uma evolução relevante, ao fazer de aluna *Sherpa*, na *produção coletiva de signos – Discussão Matemática*, na **tarefa A-CE1** (ver figuras 5.11, 5.12 e 5.14), tendo mostrado que existiu uma evolução no processo de instrumentalização, propiciada pela ajuda dos colegas, aquando da resolução da tarefa. Na **tarefa B-CE1**, os alunos não manifestaram dificuldades em desenvolver *esquemas de uso*, possivelmente apoiados no conhecimento que adquiriram na manipulação da calculadora gráfica, na **tarefa A-CE1**, particularmente quando se deu a discussão coletiva e a Maria, fez de aluna *Sherpa.* Também na primeira parte da alínea **a)** da **tarefa D-CE1**, os alunos não evidenciaram qualquer obstáculo em desenvolver *esquemas de uso*, no que concerne à construção do gráfico poligonal, relativamente à palma da sua mão. Na **tarefa F-CE1**, ao contrário do que aconteceu na primeira tarefa, o Pedro e o José foram apoiados pelas alunas Berta e Maria, no que concerne ao desenvolvimento dos *esquemas de uso*, inerentes à definição das variáveis **b** para o ângulo inscrito *ABC* e a variável **o**, para o ângulo ao centro *AOC*.

Os resultados mostram que, com o decorrer do tempo, os alunos na sua atividade de resolução das tarefas, foram explorando o artefacto, calculadora gráfica, consciencializando-se e adaptando-se das suas potencialidades e restrições, tendo-se promovido uma evolução no processo de instrumentalização. Por outro lado, o pensamento dos alunos foi afetado pelo artefacto, calculadora gráfica, tendo em conta os aspetos técnicos inerentes à sua manipulação e os conhecimentos matemáticos, desenvolvendo *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada*. Fomentou-se o processo de instrumentação. Neste sentido, os alunos conseguiram moldar o artefacto (ver, por exemplo, as figuras 5.39, 5.40 e a figura 5.45) (Lerman, 2014), mas o artefacto também moldou o pensamento dos alunos. Portanto, a apropriação da calculadora gráfica pelos alunos e a consequente construção do instrumento só foi possível com a atividade conjunta dos dois processos de instrumentação e instrumentalização (Trouche, 2004b).

No entanto, existem exceções, por exemplo, na realização da **alínea c)** da **tarefa F-CE1**, a Berta fez transparecer uma dificuldade aparentemente técnica, que, no entanto, podemos conjeturar que se tratou de um problema a nível conceptual (Drijvers & Trouche, 2008). A aluna desenvolveu *esquemas de ação instrumentada*, quando relacionou a resposta que apresentou na alínea b) (ver figura 5.51) com a imagem que obteve no ecrã da calculadora gráfica, na alínea c) (ver figura 5.52) e definiu o modelo linear $y = 2x$ (ver a primeira parte da figura 5.53). Construiu o modelo matemático sem ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis (ver figuras 5.52 e 5.53). Isto é, dado que colocou aleatoriamente as variáveis na aplicação *Dados e Estatística*, não percecionou que o modelo que se ajustava à situação, seria a função linear $y=0{,}5\,x$ e não $y = 2x$. A aluna no relatório escrito já tinha evidenciado dificuldades de compreensão na distinção entre os conceitos de variável dependente e variável independente (ver a segunda parte da figura 5.53).

Os esquemas, além de terem sido individuais, desenvolveram-se em interação social (Engeström, 2001; Trouche, 2000), com a comunicação entre os pares (Ponte & Serrazina, 2000). Neste sentido, o facto da maioria das tarefas terem sido resolvidas em conjunto, num ambiente cooperativo de aprendizagem (Engeström, 2001; Kuzulin, 2003), proporcionou que ocorresse um processo coletivo de génese instrumental, em paralelo com um processo de génese individual, na comunidade de sala de aula, atribuindo uma dimensão social à primeira (Engeström, 2001; Drijvers et. al, 2010).

Por exemplo, na **tarefa A-CE1**, na **alínea a)**, na construção da figura evidenciada no enunciado (ver figura 5.2), dado que o grupo da Maria e da Berta apresentaram algumas dificuldades na manipulação e atribuição de sentido de algumas funções da calculadora gráfica, o grupo do Pedro e do José, ajudaram as colegas, tendo-se dado o desenvolvimento de *esquemas de uso* em conjunto (ver diálogos 1-8). Nas **alíneas b)** e **c)** da mesma tarefa, as alunas Maria e Berta, apresentaram obstáculos no processo de instrumentalização e solicitaram o apoio dos colegas, para proceder à medição da amplitude dos ângulos. Mais uma vez, emergiu o desenvolvimento de *esquemas de uso* em conjunto.

Como já foi referenciado anteriormente, na **tarefa F-CE1**, o grupo dos alunos José e Pedro, foram auxiliados pelo grupo da Berta e da Maria, no que concerne ao desenvolvimento dos *esquemas de uso,* intrínsecos à definição das variáveis **b** para o ângulo inscrito *ABC* e a variável **o**, para o ângulo ao centro *AOC*.

Como é que os esquemas mobilizados pelos alunos, contribuem para o desenvolvimento do potencial semiótico do artefacto, calculadora gráfica?

Em todas as tarefas analisadas, os *esquemas de ação instrumentada,* inerentes à função de arrastamento[146], otimizados por um Ambiente de Geometria Dinâmica, contribuíram para o desenvolvimento do potencial semiótico da calculadora gráfica. Todas as propriedades estabelecidas pelo processo de construção, se mantiveram inalteráveis, ao arrastar um ponto básico da figura, proporcionando a verificação do objetivo da intervenção didática. Como exemplo, evidenciamos a **tarefa A-CE1** (ver figuras 5.12 e 5.14), a **tarefa B-CE1** (ver figuras 5.16, 5.22, 5.24 e 5.25) e a **tarefa F-CE1** (ver figura 5.44 e 5.45).

Por outro lado, na **tarefa D-CE1**, a Maria, desenvolveu *esquemas de ação instrumentada*, com o emergir dos significados espontâneos/pessoais: "linha" e "corte" (*signos de artefacto*). Possivelmente, estes significados pessoais foram promovidos pela função de visualização, através das imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica. Este contexto

[146] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

desencadeou o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, dado que, na discussão coletiva, orquestrada pela professora, estes signos se movimentaram para os significados matemáticos, "reta" e "interseção" (ver diálogos 79 - 102). A aluna também desenvolveu o *potencial semiótico do artefacto*, calculadora gráfica, ao fazer emergir os *esquemas de ação instrumentada* baseados na função de arrastamento[147]. Transformou a figura inicial que representava a palma da sua mão, num polígono convexo, para mostrar que o mesmo era intersetado em dois pontos por uma reta vertical (ver figura 5.39) o que inviabilizava o conceito de função. O Pedro, desenvolveu *esquemas de ação instrumentada*, inerente à função de arrastamento[148], no decorrer da realização da tarefa, verificando que uma linha fechada nunca pode representar uma função. A Berta, apenas consolidou essa estratégia, quando resolveu a tarefa, enquanto aluna *Sherpa*, na discussão coletiva, com a insistente orquestração da professora.

Da mesma forma, também na **tarefa F-CE1**, na discussão coletiva, monitorizada pela professora, o José desenvolveu o *esquema de ação instrumentada*, ao fazer emergir o significado espontâneo/pessoal "cortam" (*signo de artefacto*) (ver diálogos 113-121), que se movimentou para o signo matemático, "intersetam" e posteriormente para o signo matemático "secante", procedendo-se assim ao desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, calculadora gráfica.

Também na **alínea c)** da **tarefa F-CE1**, deu-se o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, fundamentado na função de visualização, quando os alunos Pedro, Maria e José, visualizaram no ecrã da calculadora gráfica, pontos alinhados sobre uma reta, semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear. Desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao fazer emergir *signos de artefacto*, fundamentados nos significados pessoais da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear. Relacionarem a alínea b) (ver figuras 5.46, 5.47 e 5.58) com a alínea c) e definiram um modelo linear que se ajustou à situação, de acordo com a posição da variável dependente e variável independente (ver figuras 5.49, 5.50 e 5.57).

Na minha perceção, os *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento e função de visualização das imagens nos écrans da máquina de calcular gráfica, apoiaram o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, calculadora gráfica. Como já foi referenciado anteriormente, estes esquemas, para se operacionalizarem, necessitaram da intervenção de *esquemas de uso* e vice-versa.

---

[147] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.
[148] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

No ambiente social, a aula, como é que a professora orienta a evolução de significados pessoais, relacionados com a tarefa e o artefacto, calculadora gráfica, para significados matemáticos?

A análise do trabalho dos quatro alunos, que constituíram o estudo de caso, na realização de cada tarefa exploratória, com recurso à calculadora gráfica, consistiu em percecionar como é que o desenvolvimento dos *esquemas de uso* e os *esquemas de ação instrumentada* mobilizados, apoiaram o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto* calculadora gráfica, alcançando o objetivo da intervenção didática, através da orquestração da professora, auxiliada pelo aluno/a *Sherpa*.

Tendo em consideração o modelo de atividade segundo Engeström (2001), que se trata de uma teoria sociocultural (Kozulin, 2003), a aprendizagem processou-se num contexto em que se impuseram várias relações entre os componentes da atividade humana, realçando o facto de que a ligação entre o sujeito e o objeto (objetivo da intervenção didática) ter sido mediada pelo artefacto mediador, calculadora gráfica (ver figura 5.1). Neste sentido, a professora pretendeu favorecer a comunicação entre os alunos, de modo que fosse promovida uma análise e comparação dos seus argumentos de uma forma partilhada (NCTM, 2017), promovendo a produção, evolução e transformação de significados pessoais que expressassem a relação entre o artefacto e a tarefa, para os significados que traduzissem a relação entre o artefacto e o conhecimento matemático, desenvolvendo o *potencial semiótico do artefacto* (Mariotti, 2018).

Relativamente ao facto de se ter assumido uma estratégia de ensino exploratório, na resolução de cada tarefa, com o artefacto mediador, calculadora gráfica, foi desenvolvido o *Ciclo Didático* (Mariotti, 2018) - (ver figura 2.12). Numa primeira fase (*atividades com o artefacto*), sem grandes interferências da professora, a mesma incentivou os alunos a explorar a tarefa (Stein et al, 2008) e consequentemente, descobrirem e construírem o conhecimento (Canavarro, 2011; Mariotti, 2018; Ponte, 2005), cujo objetivo foi desenvolver *signos de artefacto,* que se articulassem com *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso*. Por exemplo nessa primeira fase, foi evidenciada uma relação de dependência entre os *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso* (Drijvers & Trouche, 2008; Rabardel, 2001). Como já foi referido anteriormente, por exemplo, pode-se constatar esta relação de dependência, na **tarefa A-CE1**, nas alíneas **b)** e **c)**, onde Maria e Berta desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, quando perceberam que os ângulos eram alternos internos (ver figuras 5.3, 5.4 e 5.5). Posteriormente, para confirmarem a sua conjetura, desenvolveram *esquemas de uso,* apoiados na medição da amplitude dos ângulos (ver a primeira parte da figura 5.12), direcionados para a gestão do artefacto, calculadora gráfica. De seguida, para verificarem a invariância da amplitude dos ângulos, em triângulos de diferentes dimensões, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento. Então, necessitaram de desenvolver *esquemas de uso*, focados na movimentação dos pontos *A*, *B* e *C*, do triângulo *ABC* (ver figuras 5.12 e 5.14).

Numa segunda fase do *Ciclo Didático* (*produção individual/pequeno grupo de signos)*, os alunos foram estimulados a escrever relatórios, onde deviam de relatar todas as descobertas que fizeram, na realização da tarefa, com o artefacto mediador, calculadora gráfica, fazendo uma reflexão e análise sobre a parte empírica. Domingos (1994) considera que a realização de relatórios das tarefas constitui uma mais-valia para os alunos, na medida em que os ajuda a estruturar o pensamento e a criar hábitos de escrita.

Depois das produções escritas terem sido analisadas, promoveram-se momentos de discussão, processou-se a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas (Canavarro, 2011; Mariotti, 2018; Ponte, 2005), através da orquestração da professora, que contou com a ajuda do aluno *Sherpa*. Neste sentido, essas atividades foram consolidadas na terceira etapa do *Ciclo Didático* (*Produção coletiva de signos - Discussão Matemática*), onde foram fomentadas as *Ações Complementares* de Mariotti (2018) - *"ação de retorno à tarefa e ação de focalização"* e *"solicitar uma síntese e oferecer uma síntese"*. Nesta fase, a orquestração da professora com a colaboração do aluno *Sherpa*, funcionaram como catalisador, na movimentação de significados pessoais para significados matemáticos, isto é, deu-se o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, calculadora gráfica, alcançando-se o objetivo didático da tarefa. Ao orquestrar a discussão com os alunos, inerente às suas conclusões expressas nos relatórios, a professora fomentou a construção e elaboração de conceitos, cujo resultado vai ao encontro de estudos realizados por outros autores (Domingos, 1994; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2012).

Na **tarefa A-CE1**, a professora aceitou que a aluna Maria assumisse a função de aluna *Sherpa*, dado que a mesma tinha evidenciado dificuldades nas técnicas de manipulação do artefacto, calculadora gráfica, aquando a resolução inicial da tarefa (ver 1-8). Relativamente à **alínea a)**, da tarefa, através de uma *ação de retorno à tarefa*, a professora pretendeu verificar se os alunos tinham compreendido o objetivo didático da mesma e também validar o processo de instrumentalização. Como investigadora, constatei que existiu uma evolução significativa por parte aluna Maria, no que concerne à apropriação do artefacto, calculadora gráfica e por conseguinte, um progresso no processo de instrumentalização (ver diálogo 16-17 e figura 5.11).

No que respeita às **alíneas b) e c)**, da mesma tarefa, tendo em consideração que numa *ação de retorno à tarefa*, a Berta desenvolveu *esquemas de ação instrumentada*, focados nos significados pessoais, de que os ângulos *A* e *DBA* e os ângulos *C* e *CBE* (ver diálogo 17-21) tinham a mesma amplitude, por se tratarem de ângulos alternos internos, a professora operacionalizou uma *ação de focalização* (ver diálogo 22-25). Com esse procedimento a professora procurou que a aluna Maria (aluna *Sherpa*) verificasse a conjetura da Berta que foi a mesma da sua, aquando a resolução da tarefa (ver figura 5.3 e 5.4), noutros triângulos, recorrendo à função de arrastamento (ver figura 5.12). A aluna ao arrastar um dos pontos A ou B ou C, do triângulo [ABC], toda a figura foi transformada e todas as propriedades próprias do procedimento de construção, foram mantidas, isto é, invariantes (ver diálogos 31-33). Neste sentido, através de uma interpretação semiótica, as alunas Berta e Maria, desenvolveram os significados matemáticos inerente ao conceito de "ângulos alternos internos".

Ainda nesta *ação de focalização*, a professora esclareceu a Maria (ver diálogo 26-27) sobre certas ambiguidades escritas pela aluna, em linguagem simbólica. Relativamente aos signos matemáticos de ângulo e medida da amplitude de um ângulo (ver figuras 5.3 e 5.4). Estas imprecisões foram registadas no quadro negro (ver figura 5.13) pela Berta, dado que a Maria se encontrava com a função de aluna *Sherpa* (ver diálogo 28-30).

Na **alínea d),** todos os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, focados nos significados pessoais inerentes ao facto dos ângulos DBA, ABC e CBE serem suplementares. Essa verificação foi feita através do desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada,* fundamentados na função de arrastamento para verificarem que a soma dos ângulos internos era 180º, em qualquer triângulo (ver diálogos 35-38). No entanto, para verificarem que a soma dos ângulos internos A, B e C, do triângulo [ABC], é sempre 180º, recorreram ao uso de papel e lápis (ver 5.9 e 5.10). Neste sentido, a professora depois de ter *oferecido uma síntese*, de seguida, evidenciou uma *ação de retorno à tarefa*, tendo incentivado os alunos a usarem a calculadora gráfica, para validarem a descoberta realizada com papel e lápis (ver diálogo 41-44).

Deste modo, todos os alunos seguiram os procedimentos da Maria, aluna *Sherpa*. A aluna desenvolveu *esquemas de uso*, quando mostrou que as somas $D\hat{B}A+A\hat{B}C+C\hat{B}E$ e $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$ tinham sempre como resultado 180º. De seguida, desenvolveu *esquemas de ação instrumentada,* ao utilizar a função de arrastamento, para confirmar que essas somas se verificam noutros triângulos (ver figura 5.14). Em termos de mediação semiótica, os alunos validaram a generalização, que em qualquer triângulo, a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a um ângulo raso (ver diálogo 45).

Na **tarefa B-CE1**, com uma *ação de retorno à tarefa*, a professora pretendeu percecionar se os alunos compreenderam o objetivo didático da tarefa e como é que os mesmos se encontravam relativamente ao processo de instrumentalização. Posso conjeturar que as evidências mostradas na facilidade de apropriação do artefacto, calculadora gráfica se deveu à experiência que tiveram na resolução da **tarefa A-CE1**, nomeadamente na discussão coletiva com a interferência da aluna Maria, quando assumiu a função de aluna *Sherpa*.

Na **alínea a)**, da **tarefa B-CE1**, os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, baseados nos significados pessoais adquiridos na tarefa A-CE1, que se traduziram nos significados matemáticos inerentes ao facto dos ângulos BCE e ABC, serem congruentes, dado que se tratam de ângulos alternos internos. Então, através de uma *ação de focalização* (ver diálogo 59), a professora pretendeu que os alunos justificassem essa conjetura. Os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* fundamentados na função de arrastamento (ver figura 5.24). Em termos de mediação semiótica, os alunos confirmaram mais uma vez[149], o significado matemático de "ângulos alternos internos". Também, nesta mesma alínea, para verificar a congruência dos ângulos *DCE* e *BAC,* numa *ação de focalização,* a professora teve a intenção de esclarecer com as alunas Berta e Maria o facto de afirmarem que esses ângulos são iguais porque as retas *CE* e *AB*, são paralelas (ver figura 5.17). A justificação que a Maria deu (ver diálogo 60-61) foi clarificada pelo aluno Pedro, através da ação *solicitar uma síntese* (ver diálogo 62-63). De modo a traduzir o que foi proferido pelos dois alunos, a professora *ofereceu uma síntese* (ver diálogo 64), com a exemplificação do aluno *Sherpa* (ver figura 5.25). Ao nível da mediação semiótica, os alunos também desenvolveram os significados matemáticos, inerentes aos conceitos de "retas secantes" e "ângulos correspondentes".

Na **alínea b)**, da **tarefa B-CE1**, através de uma *ação de solicitar uma síntese* (ver diálogo 65-67) a professora percecionou que os alunos compreenderam, em parte, o objetivo didático da tarefa. No entanto, numa *ação de focalização* teve o objetivo que os alunos compreendessem que os ângulos internos *A* e *B*, tinham obrigatoriamente de ser ângulos não adjacentes ao ângulo externo *C* (ver a primeira parte do diálogo 68). Por outro lado, tentou obter uma explicação da parte dos alunos José e Pedro, relativamente à nomenclatura que usaram, baseada nos significados pessoais de $a+b$ e $c+d$ (ver a segunda parte do diálogo 68). Esse esclarecimento foi realizado no diálogo 69-71 e através da figura 5.22, que foi refeita pelo aluno *Sherpa* (José). Posteriormente, a professora *solicitou uma síntese* com a intenção dos alunos concluírem que os ângulos internos *A* e *B*, eram ângulos não adjacentes ao ângulo externo C (ver diálogo 72-74). Tendo em consideração, o significado pessoal do José: "*os ângulos internos A e B não têm nada em comum com o ângulo externo C"* (ver diálogo 74), a professora operacionalizou uma *ação de focalização* e conseguiu que emergisse da parte do aluno, os significados matemáticos, de que os ângulos teriam de ser não adjacentes (ver diálogo 75-76). Aproveitando, a resposta do aluno, a professora reiterou o pedido de *solicitar uma síntese*, mas os alunos não conseguiram responder à sua solicitação e "foi obrigada" a *oferecer uma síntese* (ver diálogo 77).

No ponto de vista da mediação semiótica, os alunos desenvolveram os significados matemáticos intrínsecos aos conceitos de "ângulos internos" e "ângulos adjacentes".

Na segunda parte da **alínea a)** da **tarefa D-CE1**, numa *ação de retorno à tarefa*, a Maria justificou que a representação da palma da sua mão, inscrita num gráfico poligonal, não representa uma função, ao argumentar a veracidade da sua afirmação com os significados espontâneos/pessoais de "corte" e "linha" (ver diálogo 79).

[149] A primeira vez, tinha sido na tarefa A-CE1.

A Berta[150] desenvolveu significados pessoais não consistentes com o conceito de função, pois a aluna mostrou que tinha noção que existia uma correspondência unívoca, no entanto, fez confusão entre os conceitos de objeto e de imagem (ver figura 5.29 e diálogo 78). Dado que a Maria utilizou os significados pessoais, "linha" e "corte"[151], a professora interveio intencionalmente, com uma *ação de focalização* de modo a descodificar esses signos e articulá-los com significados matemáticos (ver diálogo 80-85) de "reta" e "interseção". Ao mesmo tempo, Berta (ver diálogo 86) que assumiu a função de aluna *Sherpa*, tentou descontextualizar as suas afirmações (ver figura 5.38), através da tabela que tinha construído, inerente aos pontos que escolheu relativos à sua mão (ver figura 5.37). A aluna mostrou que os pontos (9,4), (9,27) e (9,32) se encontram sobre uma mesma reta vertical (ver figura 5.38), concluindo que a representação da sua mão não é uma função.

Numa tentativa de descontextualização dos significados pessoais da Berta, a professora operacionalizou uma ação de *solicitar uma síntese,* de modo a promover-se uma transferência desses significados para signos matemáticos (ver diálogo 87-88). Na primeira parte da afirmação da Berta (ver diálogo 88), a professora verificou que a aluna não usou uma linguagem formal adequada. O conceito de função construído pela aluna não estava compatível com a matemática reconhecida por um especialista (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Então, com o objetivo de entender se se tratou apenas de uma dificuldade de comunicação, a professora colocou uma questão à aluna e no final, é percetível que teve a noção que o conceito de função ficou reificado (ver diálogo 89-97).

Por outro lado, Maria, através do desenvolvimento do *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento (ver diálogo 98 e figura 5.39), transformou a palma da sua mão, num polígono convexo e confirmou a sua conjetura inicial (figura 5.32 e diálogo 79), ao traçar uma reta vertical. Este procedimento já tinha sido feito pelo Pedro, aquando a realização da tarefa e posteriormente pela aluna Berta, enquanto aluna *Sherpa* (ver figura 5.40). No entanto, os mesmos apenas verificaram que o gráfico poligonal se transformou numa linha fechada, tratando-se de uma condição suficiente para não ser "função numérica de variável numérica".

No contexto da mediação semiótica, pode-se conjeturar que os alunos confirmaram[152] o significado matemático, respeitante ao conceito de "função numérica de variável numérica".

---

[150] A professora já se tinha apercebido destas ambiguidades, através da observação direta e leitura do seu relatório escrito. O mesmo tinha acontecido como o aluno José. No entanto, as imprecisões deste aluno, foram colmatadas com a intervenção da aluna Maria (ver diálogo 79).

[151] Como já o tinha feito anteriormente no relatório escrito (ver última parte da figura 5.32).

[152] Confirmaram, dado que, na aula anterior à realização desta tarefa, a professora introduziu os conceitos de função numérica de variável numérica, objeto, imagem, domínio, contradomínio, variável dependente, variável independente, conjunto de partida e conjunto de chegada, recorrendo a exemplos do dia a dia. Também foi feita referência a várias formas de representar uma função, tais como diagrama de setas e tabelas.

No que respeita à **alínea b)** da **tarefa D-CE1**, a intervenção empenhada da Maria (ver figura 5.39) e posteriormente, a insistente orquestração da professora com a ajuda da aluna *Sherpa* (ver figura 5.40), proporcionou que a docente tivesse *solicitado uma síntese.* Os alunos, tiveram de mostrar em que condições é que é que um gráfico cartesiano representa uma função. No entanto, além de terem realizado várias conjeturas (ver diálogo 99-102), não realizaram uma síntese. Então, de modo a tornar explícitos os significados pessoais de "linha" e "corte", construídos na realização da tarefa, pela Maria, e desenvolvidos na discussão coletiva, procedeu-se à sua transição para os significados matemáticos de "reta" e "interseção", com a intervenção da professora, através da *oferta de uma síntese*. A mesma evidenciou a propriedade que um gráfico cartesiano representa uma função: "sempre que qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas, interseta o gráfico num único ponto".

Na **alínea a)** da **tarefa F-CE1**, a professora operacionalizou uma *ação de focalização*, dado que no relatório escrito, José e Pedro, não identificaram o vértice do ângulo inscrito *ABC* e do ângulo ao centro *AOC* (ver figura 5.42) e não referiram que os lados do ângulo inscrito são secantes à circunferência (ver diálogo 107-118). Neste contexto, o José desenvolveu o significado pessoal de "cortam" cuja orquestração da professora proporcionou a sua transição para o significado matemático de "intersetar" /" secante". Neste sentido, a professora aproveitou para *solicitar uma síntese* (ver diálogo 113-121). Perante a conclusão da Berta, relativamente ao facto de ter afirmado que os lados do ângulo ao centro *AOC* são secantes à circunferência, com a orquestração da professora, a aluna reconheceu que teria de ter referido que cada lado contém o raio da circunferência. No entanto, argumentou que utilizou a palavra "secante" dado que se trata de um sinónimo da palavra "concorrente"[153]. Mas, com a insistente orquestração da docente, conseguiu percecionar que, cada lado do ângulo ao centro, é constituído por uma semirreta com origem no centro da circunferência e que o prolongamento da mesma, interseta a circunferência num único ponto.

No que concerne à mediação semiótica, os alunos conseguiram construir o significado matemático de "ângulo ao centro" e "ângulo inscrito", tendo em consideração o significado pessoal do conceito de "ângulo" e "retas secantes".

Na **alínea b)** da **tarefa F-CE1**, numa *ação de focalização*, a professora solicitou que o Pedro, aluno *Sherpa*, mostrasse a toda a turma, os procedimentos inerentes à génese instrumental. O aluno mostrou evidências de ter usado o processo de *instrumentação*, quando desenvolveu os *esquemas de ação instrumentada*, baseados na divisão das variáveis **o** por **b** e/ou **b** por **o** e quando desenvolveu os *esquemas de ação instrumentada*, incrementando a função de arrastamento (ver figura 5.45). No entanto, ao usar a função de arrastamento também desenvolveu o processo de

[153] A aluna fez confusão com a posição relativa entre retas e planos.

instrumentalização, quando percebeu que só fazia sentido movimentar os pontos *A* e *C,* para obter uma alteração na medida da amplitude dos ângulos de vértices *B* e *O,* inerentes ao valor da amplitude do ângulo inscrito e do ângulo ao centro, respetivamente (ver diálogo 125-126).

No que respeita à mediação semiótica, os alunos compreenderam que quando utilizaram a função de arrastamento, todas as propriedades próprias dos procedimentos de construção, se mantiveram invariantes, noutras circunferências. Então, conjeturaram que existe uma relação que se aplica a qualquer circunferência. Isto é, verificaram que a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC* é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* ou a medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* é metade da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, noutras circunferência, com diferentes raios.

Na **alínea c)** da **tarefa F-CE1**, tendo em consideração a relação de dependência entre as variáveis **b** (**angb**) e **o** (**ango**), a colocação aleatória das mesmas por parte da Berta (ver figura 5.51, 5.52 e 5.53) e a relação de dependência que a aluna percecionou entre o ângulo *ABC* e o ângulo *AOC,* a professora operacionalizou *ações de focalização* (ver diálogos 127-128 e 129-130, respetivamente) de modo a clarificar o modelo matemático que a aluna deveria ter colocado na aplicação *Dados e Estatística*. O aluno *Sherpa*, o Pedro, resolveu a **alínea c)**, com as orientações da Berta (ver figura 5.56). Com um *pedido de síntese* ao José, a professora percebeu que os alunos percecionaram que os modelos matemáticos que se ajustavam à situação, eram $y = 0{,}5x$ ou $y = 2x$, tendo em consideração a colocação das variáveis dependente e independente.

Em termos de mediação semiótica, os alunos validaram os significados matemáticos de "representação gráfica de uma função linear", "variável dependente" e "variável independente".

Verifiquei que na resolução de algumas alíneas das tarefas, o incremento da discussão coletiva, com a orquestração da professora, ajudada pelo aluno *Sherpa*, foi decisiva para o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*, calculadora gráfica, e consequentemente para a construção do conhecimento matemático.

6.3. Conclusões do estudo

Neste estudo, a análise dos dados empíricos recolhidos para a investigação, baseou-se em quatro tarefas realizadas pelos alunos, nos domínios da Geometria e Medida (GM7)[154] e Funções, Sequências e Sucessões (FSS7). No entanto, a resolução da última tarefa, a **tarefa F-CE1**, além

[154] As tarefas estão integradas no domínio da Geometria e Medida (GM7), no entanto referem-se ao domínio da Geometria e Medida (GM5). O objetivo baseou-se no facto dos alunos reverem, verificar e compreender alguns conceitos lecionados no 2.º ciclo do ensino básico e que posteriormente tivessem a necessidade de os usar.

de permitir que os alunos utilizassem várias aplicações da calculadora gráfica, tais como, *Geometria*, *Listas e Folha de Cálculo* e *Dados e Estatística* e desenvolvessem os processos de instrumentalização e instrumentação, teve o objetivo de realizar uma conexão entre o domínio das Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) e o domínio da Geometria e Medida (GM9), onde foi construído um modelo matemático que se adequou ao objetivo didático da tarefa. Esta possibilidade de os alunos usarem a calculadora gráfica para articular qualquer área da Matemática, é suportada pelo NCTM (2007), com o argumento que os alunos podem colmatar algumas lacunas em certas áreas, para melhor compreenderem outras áreas. Por exemplo, na referida tarefa, além das ambiguidades relatadas anteriormente inerentes à aluna Berta, que foram colmatadas na discussão coletiva com a insistente orquestração da professora, os alunos evidenciaram facilidade em transitar entre as várias representações: geométrica, tabular, algébrica e gráfica, tendo-se promovido a conexão entre os domínios de Geometria e Medida (GM9) e Funções, Sequências e Sucessões (FSS7). Através da análise que realizei, o *design* das tarefas, fez com que os alunos explorassem as potencialidades do artefacto, calculadora gráfica e as *conversões,* segundo Duval (2006). Na **alínea a)**, a partir da construção geométrica realizada na aplicação *Geometria*, os alunos recorreram à aplicação *Listas e Folhas de Cálculo* na **alínea b)** e construíram uma tabela. Posteriormente, na **alínea c)** através da aplicação *Dados e Estatística*, conseguiram obter um modelo matemático, que se adequou à situação. As várias aplicações da calculadora gráfica, que os alunos utilizaram, estavam relacionadas dinamicamente e esta capacidade de alternar entre as várias representações semióticas, fomentou, na maioria dos alunos, uma grande facilidade em desenvolver uma compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na tarefa, que vai ao encontro dos documentos, NCTM (2007) e NCTM (2017). De acordo com Duval (2006), por meio de *conversões,* os alunos tiveram a capacidade de reconhecer o mesmo objeto matemático entre as várias representações, que num primeiro impacto, os conteúdos davam a sensação que não tinham nada em comum, nomeadamente entre a **alínea b)** e a **alínea c)**. Pois, numa primeira impressão, tratavam-se unicamente, de conteúdos de Geometria e Funções, respetivamente.

Foi visível que, para os alunos que fizeram parte do grupo, estudo de caso, o ambiente tecnológico AGD que lhes foi proporcionado na resolução destas tarefas diversificadas, com o artefacto mediador, calculadora gráfica, foi extremamente importante. Permitiu raciocinar, refletir, aprender, compreender ideias matemáticas e consequentemente, melhorar a aprendizagem, através da evolução que foi constatada ao longo da resolução das diferentes tarefas. Tal como conferem os estudos realizados por Jones (2005), num AGD, em todas as tarefas analisadas, além de se ter incentivado a exploração, a conjetura e a construção, os alunos ainda tiveram a capacidade de explicar relações geométricas, como é o caso da **alínea b)** da **tarefa F-**

CE1 (ver figuras 5.46 e 5.47), onde relacionaram a medida da amplitude de um ângulo inscrito e a medida de um ângulo ao centro, correspondente, numa circunferência.

Tendo em consideração a metodologia de aprendizagem criada através da iteração de *Ciclos Didáticos*, os alunos ao depararem-se com o objetivo didático da tarefa, criaram *signos de artefacto,* desenvolvendo *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso*, numa comunidade de aprendizagem, regida por regras e divisão do trabalho. Verifiquei que para o cumprimento do objetivo didático, esses *esquemas de ação instrumentada* entraram numa relação de dependência com *os esquemas de uso*, e vice-versa.

Por outro lado, através da orquestração da professora, na discussão coletiva, por exemplo, na **alínea d)** da **tarefa A - CE1** (ver figuras 5.9; 5.10 e 5.14), os alunos transitaram entre o uso da calculadora gráfica e as técnicas de papel e lápis, tendo comparado a igualdade dos resultados, nos diferentes registos (Guin & Trouche, 1999; Lopes & Domingos, 2015).

Em algumas resoluções, de tarefas distintas, os alunos utilizaram *representações simbólicas* (ver por exemplo, as figuras 5.7; 5.9; 5.10; 5.19) para evidenciarem as suas conjeturas. Por outro lado, alguns alunos recorrem a *representações icónicas (*ver por exemplo a figura 5.20). Mas, as *representações ativas*, nomeadamente a função de arrastamento, foram determinantes para a construção do conhecimento matemático (ver por exemplo, as figuras 5.8 e 5.22).

No meu entendimento, houve uma evolução dos alunos que entraram no estudo de caso, relativamente a outros estudos realizados por Jones (2005), na medida em que este autor afirma que inicialmente a função de arrastamento funciona como uma distração para os alunos, dado que não estão habituados a ver objetos geométricos a moverem-se no papel. A análise dos dados, inerente ao trabalho dos alunos, mostrou que os mesmos, desde o início da experiência de ensino, ao se apropriarem da calculadora gráfica, mobilizaram *esquemas de ação instrumentada,* fundamentados na função de arrastamento, promovendo o potencial semiótico deste artefacto e desenvolvendo o processo de mediação semiótica. Como já foi referido anteriormente, o aluno José, foi o primeiro a usar *o esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento. Posteriormente todos os outros alunos evidenciaram a sua utilização, ao percecionarem que ao arrastarem um ponto básico, a partir do qual a construção foi iniciada, todo o desenho se transformava e todas as propriedades definidas pelo procedimento de construção eram mantidas.

Por exemplo, nas **tarefas A-CE1**, **B-CE1** e **F-CE1**, o *esquema de ação instrumentada,* focado na função de arrastamento, potenciado pelo AGD da calculadora gráfica, facilitou a mobilização de significados pessoais para significados matemáticos (Mariotti, 2012a; Mariotti 2012b; 2018). No caso da **tarefa A-CE1**, ao arrastar um ponto básico, toda a figura (triângulo) foi transformada, no entanto, todas as propriedades definidas pelo procedimento de construção foram mantidas, ou seja, invariantes. A função de arrastamento proporcionou a verificação desta propriedade em todos os triângulos, podendo a mesma ser relacionada com o significado teórico da sua construção geométrica, dentro da Geometria Euclidiana (Mariotti, 2012b). Neste sentido, ao observar-se que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, em qualquer triângulo, tem uma contrapartida na validade de generalização da afirmação: “Em qualquer triângulo, a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso”, na teoria da Geometria Euclidiana.

Na **tarefa D-CE1**, na discussão coletiva, o *esquema de ação instrumentada*, função de arrastamento, proporcionou que a Maria e o Pedro, tivessem confirmado a sua conjetura inicial, de que o gráfico poligonal que representava a sua mão, não representa uma “função numérica de variável numérica” (ver figura 5.39). Por outro lado, a Berta, enquanto aluna *Sherpa*, com a orquestração da professora, esclareceu as suas dúvidas, tendo percebido o conceito de “função numérica de variável numérica” (ver figura 5.40).

Posso conjeturar que o *esquema de ação instrumentada*, inerente à função de visualização, específico das imagens no ecrã da calculadora gráfica, contribuiu para o desenvolvimento do potencial semiótico, na **alínea a)** da **tarefa B-CE1**, tarefa **D-CE1**, **tarefa F-CE1** e na **alínea c)** da **tarefa F-CE1**. Na **tarefa D-CE1**, os significados pessoais de “linha” e “corte” movimentaram-se para os significados matemáticos de “reta” e “interseção”. Na **tarefa F-CE1**, o significado pessoal de “cortam”, movimentou-se para o significado matemático de “intersetam” e posteriormente para o significado matemático de “secante”. E ainda na **tarefa F-CE1**, a visualização no ecrã da calculadora gráfica de pontos alinhados, semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear, proporcionou o desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada*, sustentados nos significados pessoais de representação simbólica e representação gráfica de uma função linear. No entanto, como foi referido anteriormente, a aluna Berta colocou aleatoriamente as variáveis na aplicação *Dados e Estatística*, sem ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis. A aluna evidenciou um raciocínio indutivo, pois não confirmou a sua conjetura. Tal como os seus colegas, a aluna deveria ter procedido ao desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* que se movimentaram para *esquemas de uso*, quando colocaram o cursor nos vários pontos do gráfico da função e verificaram a relação existente entre o valor da variável dependente (ordenada) e o valor da variável independente (abcissa). No entanto, na discussão coletiva, com persistente orquestração da professora, esta situação foi colmatada.

Tendo em consideração que, das quatro tarefas, apenas uma foi resolvida individualmente, os alunos interagiram, comunicaram, as ideias matemáticas foram partilhadas entre os pares e por vezes, modificadas, consolidadas e aprofundadas por cada aluno. Posteriormente, a utilização da comunicação escrita, através da realização de relatórios para exporem as suas descobertas, foi uma forma de usar a linguagem da matemática para expressar ideias matemáticas, de organizar e consolidar o pensamento matemático, evitando a utilização de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas. Contrariando o NCTM (2007), tratando-se de alunos do 3º ciclo, nunca percecionei que os mesmos mostrassem alguma resistência em participar na discussão coletiva, com receio de errar. Ao longo de todo o processo da realização das tarefas, com uma maior incidência na discussão coletiva, deu-se uma interação entre os alunos e entre estes e a professora, cujo objetivo foi promover a transição de significados pessoais para significados matemáticos. Os significados pessoais dos alunos, nem sempre estiveram limitados ao domínio da Matemática, tendo sido a professora a responsável por proporcionar a compreensão e negociação de significados matemáticos (Mariotti, 2012, 2018), como já foi referido anteriormente, no que respeita à **tarefa D-CE1** e **tarefa F-CE1**, com a transição dos significados pessoais "linha" e "corte" para "reta" e "interseção", respetivamente.

O *design* das tarefas exigiu que os alunos conseguissem desenvolver a Génese Instrumental (Rabardel, 1995). Antes da resolução de cada tarefa, de modo a facilitar a resolução da mesma, decorreram aulas onde foram dadas indicações gerais sobre o funcionamento da calculadora gráfica. Nestas aulas pretendeu-se promover a primeira fase do processo de instrumentalização (Trouche, 2004b) (ver tabela 4.1).

Na generalidade, o pensamento dos alunos foi moldado pelo artefacto, evidenciando-se uma evolução no processo de instrumentação, com o desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada* (Lerman, 2014). Posso conjeturar que este progresso teve em consideração os conhecimentos que os alunos adquiriram nas aulas da primeira fase do processo de instrumentalização, nas tarefas que resolveram, nos conhecimentos que assimilaram no ambiente social da aula, inerentes à manipulação da máquina, aquando da realização de cada tarefa ou posteriormente, na discussão coletiva com o aluno *Sherpa*.

Com o decorrer do tempo, deu-se também uma evolução no processo de instrumentalização, na medida em que se verificou situações em que os alunos conseguiram moldar o artefacto. Por exemplo, na realização da **alínea b) da tarefa D-CE1**, os alunos transformaram o polígono representativo da palma da sua mão, num polígono convexo para mostrar que uma reta vertical interseta o gráfico em dois pontos, inviabilizando que o mesmo represente uma função (ver as figuras 5.39 e 5.40).

Como já foi referido anteriormente, cada aluno foi construindo os seus próprios esquemas, e, por conseguinte, o seu próprio instrumento, à medida que as tarefas foram sendo realizadas (ver, por exemplo, a descrição realizada relativamente à **tarefa A-CE1**, aquando a resposta à primeira questão de investigação). Estes resultados vão encontro dos estudos realizados por Trouche (2004b), quando afirmam que a construção de um instrumento resulta da atividade conjunta dos dois processos: a instrumentação e a instrumentalização.

Também se confirmam os estudos realizados por Drijvers & Trouche (2008), na medida em que as dificuldades técnicas evidenciadas na **alínea c)** da **tarefa F-CE1**, pela Berta, eram provenientes de dúvidas a nível conceptual. A aluna colocou aleatoriamente as variáveis na aplicação *Dados e Estatística,* da calculadora gráfica, sem ter colocado o cursor nos vários pontos do gráfico da função e verificado a relação existente entre a variável dependente (ordenada) e a variável independente (abcissa). No entanto, no seu relatório escrito já tinha evidenciado dificuldades de compreensão, relativamente à diferença entre os conceitos de variável dependente e variável independente (ver segunda parte da figura 5.53).

O artefacto, calculadora gráfica, no ambiente social da aula, transformou-se num instrumento personalizado, pois os alunos com essa ferramenta, desenvolveram processos diferentes para resolver as tarefas, construindo os seus próprios esquemas, como foi descrito na **tarefa A-CE1**.

Por conseguinte, a calculadora gráfica, funcionou como um instrumento de mediação semiótica. No decorrer da realização das tarefas, os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, promovidos pela função de arrastamento[155] e função de visualização, inerente às imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, tendo fomentado o desenvolvimento do potencial semiótico da calculadora gráfica. Na discussão coletiva, o insistente questionamento da professora, relativamente às várias incompreensões que surgiram na sala de aula, face à aluna Berta, foram cruciais para esta aluna conseguir colmatar as dúvidas e construir conhecimento matemático.

Em síntese, o uso da calculadora gráfica, na resolução de tarefas, funcionou como um instrumento de mediação semiótica, onde o incremento da discussão coletiva, com a orquestração da professora, ajudada pelo aluno *Sherpa*, foi determinante para a construção do conhecimento matemático.

Da análise do trabalho dos quatro alunos, nas quatro tarefas, pertencentes ao primeiro ciclo de experimentação (CE1), integradas na experiência de ensino, concluo que desenvolvi, testei e implementei uma prática inovadora de ensino e aprendizagem com a calculadora gráfica (Kelly, 2003). Tratou-se de uma forma de investigação intervencionista onde se implementou uma nova metodologia de aprendizagem (Cobb et al., 2003; Schwartz, Chang & Martin, 2008; Mariotti, 2012a; Mariotti; 2012b). Através de um ensino empírico, especifiquei como surgiram os diversos raciocínios dos alunos, os meios que utilizaram (calculadora gráfica) e posteriormente como é que se promoveu uma melhoria e consequente entendimento do processo educativo, com a orquestração da professora (Mariotti, 2018).

Neste sentido, concluo que a validade da conjetura de ensino-aprendizagem, ancorada a esta experiência de ensino, só faz sentido, porque existiu na discussão coletiva, uma persistente

[155] Traduzida no desenvolvimento de *esquemas de uso*.

orquestração da professora, para corrigir as dificuldades, dúvidas, ambiguidades ou problemas que surgiram, que condicionavam a construção do conhecimento matemático.

6.4. Reflexão final

Ao fazer uma reflexão final, relativamente à realização deste estudo, considero que uma investigação deste tipo, enriquece a experiência profissional de qualquer professor de Matemática. Senti que foi realizada uma experiência de ensino inovadora, com recurso à calculadora gráfica, na resolução de tarefas específicas, num nível de ensino onde o uso desta ferramenta é limitado, segundo o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC,2013). Nesse documento pode ler-se:

> O uso da calculadora no Ensino Básico apenas é expressamente recomendado em anos escolares mais avançados e sobretudo em situações pontuais de resolução de problemas que envolvam, por exemplo, um elevado número de cálculos, a utilização de valores aproximados, operações de radiciação ou a determinação de razões trigonométricas ou de amplitudes de ângulos dada uma razão trigonométrica, quando não haja intenção manifesta de, por alguma razão justificada, dispensar esse uso. (MEC, 2013, p.29)

O meu objetivo foi implementar uma prática inovadora de ensino e aprendizagem, com recurso à tecnologia, que contribuísse para a melhoria do processo educativo na disciplina de Matemática.

Tendo em consideração, que o problema central deste estudo, considero que foi extremamente motivante conseguir responder a esta questão e a todas as outras questões de investigação, que se articularam com ela, assim como validar a conjetura de ensino-aprendizagem que sustentou a experiência de ensino.

Na minha opinião, seria vantajoso dar continuidade à análise dos dados do trabalho dos quatro alunos, de modo a perceber se os mesmos mantêm o nível de desempenho verificado neste estudo.

Comungo da perspetiva de Laborde (2001), ao afirmar que o trabalho em Ambientes de Geometria Dinâmica leva mais tempo a concretização do objetivo didático da tarefa. Neste estudo, percecionei que demorei mais tempo do que o normal, no cumprimento da planificação anual. Esta situação deveu-se ao facto de ter pretendido que fossem os alunos no seu sistema de atividade, através de um ensino exploratório, a construir o conhecimento matemático, aquando envolvidos numa comunidade de aprendizagem, tendo em consideração o *Ciclo Didático* e posteriormente na discussão coletiva com a orquestração da professora de acordo com as *Ações*

Complementares. Na realidade, foram necessárias algumas aulas extra, para conseguir cumprir o currículo prescrito do 7.º ano de escolaridade, de acordo com o Programa e Metas Curriculares da Matemática, para o Ensino Básico, em Portugal (MEC, 2013).

Segundo a professora, ao contrário das afirmações de Mishra e Kohler (2006), a mesma não sentiu qualquer obstáculo, em incorporar a tecnologia nas aulas, que foi a calculadora gráfica. Na planificação das tarefas, teve como objetivo usar a calculadora gráfica como ferramenta de apoio à realização das mesmas, mas também como recurso de exploração, de modo que fossem sempre os alunos, conjuntamente com a sua orquestração, na discussão coletiva, a evocar os significados matemáticos pretendidos. Indo ao encontro das ideias de Voogt, et al. (2011), de modo a existir um envolvimento eficiente e competente no processo de ensino e aprendizagem com esta ferramenta, durante o decorrer da experiência de ensino, a professora participou num curso de formação, intitulado, "Aplicações da TI-nspire", com a duração de vinte e cinco horas, também realizou pesquisas na internet, consultou bibliografia e contou com o apoio de alguns colegas para colmatar algumas dúvidas que surgiram.

Esta experiência de ensino foi realizada nos anos letivos 2016/2017 e 2017/2018, quando ainda estava implementado o Decreto-Lei nº 3/2008 de 7 de janeiro de 2008. Este decreto veio dar resposta à diversidade de características e necessidades de cada aluno, de modo a fomentar a inclusão das crianças e jovens com necessidades educativas especiais, promovendo o sucesso educativo de todos os alunos. No entanto, nenhum dos quatro alunos que fizeram parte do grupo, estudo de caso tinham características que evidenciassem ser incluídos neste decreto-lei, tendo demonstrado os mesmos, um percurso académico muito semelhante e muito bom, no que concerne à disciplina de Matemática.

Posteriormente, no final do ano letivo de 2017/2018, foi publicado o Decreto-Lei n.º 54/2018 de 6 de julho de 2018 que se veio sobrepor ao anterior Decreto-Lei n.º 3/2008 e 7 de janeiro de 2008. Numa parte do preâmbulo do Decreto-Lei n.º 54/2018, pode ler-se:

> No centro da atividade da escola estão o currículo e as aprendizagens dos alunos. Neste pressuposto, o presente decreto-lei tem como eixo central de orientação a necessidade de cada escola reconhecer a mais-valia da diversidade dos seus alunos, encontrando formas de lidar com essa diferença, adequando os processos de ensino às características e condições individuais de cada aluno, mobilizando os meios de que dispõe para que todos aprendam e participem na vida da comunidade educativa (p. 2918).

Neste sentido, seria desafiante, fazer a mesma experiência com alunos que se encontram ao abrigo do artigo 9.º ou artigo 10.º, do Decreto-Lei n.º 54/2018, abrangidos pelas Medidas Seletivas ou Medidas Adicionais, respetivamente. Pois, seria interessante confirmar os estudos de Tan (2012) e Tan & Tan (2015), que afirmam que a inclusão da calculadora gráfica é benéfica em alunos de diferentes níveis de rendimento escolar. E, ainda, os estudos de, Li (2010) que referem que essa aprendizagem é mais significativa em alunos com necessidades educativas especiais.

BIBLIOGRAFIA

Almeida, M. M. R. (2011). *INSUCESSO NA MATEMÁTICA: As Percepções dos Alunos e As Percepções dos Professores.* Tese de Mestrado. Porto: Universidade Portucalense.

Amado, N. (2011). Mathematics student teachers' pedagogical use of technologies – differences in classroom practices. *In Atas do CERME7*. Poland: University of Rzeszów.

Artigue, M. (1997). Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques, *Actes de l'université d'été* (pp.19-40). Rennes: IREM, Université de Rennes.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectic between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274.

Artigue, M., Haspékian, M., Cazes, C., Bottino, R. M., Cerulli, M., Kynigos, C., ... & Mariotti, M. A. (2006). *Methodological tools for comparison of learning theories in technology enhanced learning in mathematics*. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00190114/document

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.*Lisboa: Edições 70.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in mathematics classroom* (pp. 65–84). Reston, VA: NCTM.

Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. Recuperado de http://www.cfem.asso.fr/actualites/bartolini-mariotti_handbook

Biembengut, M. S. & Hein, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto

Bittar, M. (2011). A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. *Educar em Revista, (1),* 157-171.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics. In *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Springer Netherlands.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência matemática no ensino básico.* Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situationsin mathematics: didactique des mathématiques, 1970–1990* (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Brown, M. W. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Edits.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17-36). New York, NY: Routledge.

Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Revista Educação & Matemática, 115,* 11-17.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática (pp. 15 – 28). Porto Alegre: Artmed.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Clements, D. H. (2008). Design Experiments and curriculum research. In Kelly, A. E., Lesh, R.A., & Baek, J. Y. (Eds), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 410-422). Routledge: New York and London. Recuperado de http://samples.sainsburysebooks.co.uk/9781317639640_sample_645428.pdf

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–333). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: an analysis and critique. In L. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 481-503). New York, NY, USA: Routledge.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 83-94.

Coll, C. (1987). *Psycologia y curriculum*. Barcelona: Laia.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Confrey, J., Bell, K., & Carrejo, D. (2001). *Systemic crossfire: What implementation research reveals about urban reform in mathematics.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Seattle, WA.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Consciência, M. M. (2003). Calculadoras gráficas: Algumas limitações. *Gazeta da Matemática, 145*, 34-42.

Costley, K. C. (2014). *The positive effects of technology on teaching and student learning*. Reports-Evaluative. (Documento ERIC nº ED554557). Recuperado de http://www.eric.ed.gov/contentdelivery/ servelet/ERICServelet?accno=ED554557

Coulombe, W. N., & Berenson, S. B. (2001). Representations of patterns and functions: Tools for learning. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166-172). Reston, VA: NCTM.

Coutinho, C. P. (2005). *Percursos da investigação em tecnologia educativa em Portugal: uma abordagem temática e metodológica a publicações científicas (1985-2000)*. Braga: CIED, Universidade do Minho.

Coutinho, C. P. (2015). *Metodolgias de Investigação em Ciências Sociais e Humanas*. Coimbra: Almedina.

Creswell, J. W. (2012). *Educacional Research, Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. (4 th ed.). Boston: Pearson.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky e a pedagogia*. Edições Loyola.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (Eds.) (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Thousand Oaks, CA: Sage.

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. (Tese de mestrado, não publicada, Universidade Nova de Lisboa, Monte da Caparica). Recuperado de https://run.unl.pt/handle/10362/74

Domingos, A. (2014). O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática. Um exemplo com recurso ao Geogebra. *Educação e Matemática*, *126,* 14-16.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: *Vol. 2. Cases and perspective*s (pp. 363–448). Charlotte, NC: Information Age.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In: C. Hoyles, & J-B. Lagrange, (Eds.), *Mathematics education and technology rethinking the terrain* (pp. 88-132). New York: Springer.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Engeström, Y. (1991). Non scolae sed vitae discimus: Toward overcoming the encapsulation of school learning. *Learning and instruction*, *1*(3), 243-259.

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamäki, R. L. (Eds.). *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). New York: Cambridge University Press.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14*(1), 133-156.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). London: MacMillan Publishing Company.

Fonseca, L. (2009). Comunicação matemática na sala de aula. *Educação e Matemática, 103*, 4.

Freire, P. (2000). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.* (15.ª ed.) São Paulo: Paz e Terra.

Gaspar, M., I., & Roldão, M., C. (2007). *Elementos do Desenvolvimento Curricular.* Lisboa: Universidade Aberta.

Gimeno, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática* (3.ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original publicada em 1988).

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics — 2001 Yearbook* (pp. 1–23). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Gomes, A. S. (2001). *Développement conceptuel consécutif a l'activité instrumentée: l'utilisation d'un système informatique de géométrie dynamique au collège*. Presses universitaires du Septentrion.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal, 109(5)*, 510-524.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195–227. Recuperado de https://keats.kcl.ac.uk/pluginfile.php/1486530/mod_resource/content/1/Guin%20and%20Trouche%201999.pdf

Hoyles, C., Sutherland, R. e Healy, L. (1991). Children talking in computer environments: New insights into the role of discussion in mathematics learning. In K. Durkin e B. Shire. *Language in mathematics education – research and practice*, (p. 162-175). Milton Keynes: Open University Press.

Janvier, C. (1983). Representation and understanding: The notion of function as an example. *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 266-270). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

Jones, K. (2005), Research on the Use of Dynamic Geometry Software: implications for the classroom. In J. Edwards & D. Wright (Ed), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom. Derby: Association of Teachers of Mathematics* (pp 27-29). ISBN:1898611408

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In Douglas Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kelly, A. E. (2003). Research as design: The role of design in educational research. *Educational Researcher,* 32(1), 3-4.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge?. *Contemporany Issues in Technology Education (CITE Journal), 9*(1), 60-70. Recuperado de http://www.citejournal.org/articles/v9i1general1.pdf

Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge (TPAK)? *Journal of Education, 193*(3), 13-19. Recuperado de http://www.bu.edu/journalofeducation/files/2014/02/BUJoE.193.3.Koehleretal.pdf

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Ginds, V. S. Ageyev, & S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky's educacional theory in cultural context* (pp. 15-38). Cambridge: Cambridge University Press.

Laborde, C. (2001), Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6* (3), 283-317.

Latorre, A. (2003). *La Investigación-Acción*. Barcelo: Graó.

Lee, J. A., & McDougall, D. E. (2010). Secondary school teachers' conceptions and their teaching practices using graphing calculators. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*, 857-872. doi:10.1080/00207391003777889

Lehrer, R., & Schauble, L. (2000). Modeling in mathematics and science. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology: Educational design and cognitive science* (pp. 101–159). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Leontiev, A. N. (1978). Activity, consciousness, and personality. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall. (Obra original publicada em 1975).

Lerman, S. (Ed.). (2014). *Encyclopedia of Mathematics Educatio* (pp. 307-313). London, UK: Springer. doi: 10.1007/ 978-94-007-4978-8

Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review, 22*, 215-243. doi:10.1007/s10648-010-9125-8

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions & proportional reasoning, Grades 6-8.*Reston, VA: NCTM.

Lopes, L., & Domingos, A. (2015). A utilização da calculadora gráfica no currículo do ensino básico: uma experiência no 8º ano. *Educação e Matemática*, *131,* 45-48.

Leung, A. (2008). Dragging in dynamic geometry environment through the lens of variation, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, 135–157.

Mariotti, M. A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning. In L. English, (Ed). *Handbook of international research in mathematics education*, (pp. 695-723). London: Lawrence Erlbaum.

Mariotti, M. A. (2005). New artefacts and mathematical meanings in the classroom. In F. Sutherland, (Ed). *Visions of mathematics education: embedding technology in learning. Proceedings of ICTMT7*, (pp. 2-11). Bristol: University of Bristol.

Mariotti, M. A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. In C. Hoyles, J. B. Lagrange, L. H. Son & N. Sinclair (Ed.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 378-385). Hanoi-Vietnam: Hanoi Institute of Techonology.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

Mariotti, M. A. (2012a, July). ICT as opportunities software for teaching-learning in mathematics classroom: the semiotic potential of artefacts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 25-40). Taipei, Taiwan: PME.

Mariotti, M. A. (2012b). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education, 14*, (2), July 2012, 163-185.

Mariotti, M. A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process. In Atas XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Martinho, M. H. (2007). *A Comunicação na sala de aula de Matemática: um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. (Tese de Doutoramento, FCUL – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa).

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*, 1017-1054. doi:10.1111/j.1467 9620.2006.00684.x

Myers, M. D. (1997). Qualitative research in information systems. *MIS Quarterly*, *21*(2), 241-241.

Molina, M. G., Castro, E. & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, *2*(4), 435-440.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2000).

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a Ação - Assegurar a Todos o Sucesso em Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2014).

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer.

Nunes, T. (1995). Sistema de signos e aprendizagem conceptual. *Quadrante*, *4*, (1), 7-24.

Organisation for Economic Co-opration and Development (2015). *Universal Basic Skills: What Countries Stand to Gain*. OECD Publishing. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1787/9789264234833-en

Oliveira, M. (1993). *Vygotsky. Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico.* São Paulo: Scipione.

Ornstein, A.,C., & e Hunkins, F., P. (2004). *Curriculum-foundations, principles and issues.* Boston: Pearson Education, Inc.

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: Teoria e Práxis*. Porto: Porto Editora.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas.* London: Harvester.

Pedro, M. M. S. B. (2013). *A experiência Veiga Simão na matemática nos terceiro e quarto anos (1972-1975).* Tese de Mestrado. Monte da Caparica: Universidade Nova de Lisboa.

Ponte, J. P. (1992a). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3–8.

Ponte, J. P. (1992b). Problemas de matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, *2*(2), 95-108. Recuperado de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4224

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (Org.). (2014). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Recuperado de http://www.ie.ulisboa.pt/portal/page?_pageid=406,1852906&_dad=portal&_schema=PORTAL

Ponte, J. P. D., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, *20*(1), 55-81.

Ponte, J. & Serrazina, M. (2000). *Didática da Matemática do 1º ciclo.* Lisboa: Universidade aberta.

Punch, K. (1998). *Introduction to Social Research: quantitative & qualtative approaches* London: SAGE Publications.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students'types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Rebelo, P. C., & Gomes, A. (2012). Reorganização Curricular da Geometria: uma experiência no 6. º ano de escolaridade. *Quadrante*, *21*(1), 3-27.

Ribeiro, A. C. (1990). *Desenvolvimento Curricular.* Lisboa: Texto Editora.

Ribeiro, A. C. (1991). *Objetivos educacionais no horizonte do ano 2000: princípios orientadores de planos e programas de ensino*. Lisboa: Texto Editora.

Ribeiro, M. J. B., & Ponte, J. P. D. (2000). A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de Matemática. *Quadrante*, *9*(2), 3-26.

Romano, E. & Ponte, J. P. (2008). *A Calculadora Gráfica e o Ensino da Matemática in Tecnologias e Educação Matemática*. SPCM-SEM.

Rosa, V., & Domingos, A. (2013). O Navigator e a forma como os alunos de 10.º ano utilizam a calculadora gráfica. *Educação e Matemática*, *123*, 37-39.

SÁEnz–Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Guest editorial semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 1-10. Recuperado de http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/2semiotic.pdf

Sandoval, W. A. (2004). Developing learning theory by refining conjectures embodied in educational designs. *Educational Psychologist*, *39*(4). 213-223.

Savenye, W., & Robinson, R. (2001). Qualitative research issues and methods: an introduction for educational technologists. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 1171-1195). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Serrão, A. (2014). PISA: A avaliação e a definição de políticas educativas. In M. L. Rodrigues (Org.), *40 anos de políticas de educação em portugal* (pp. 269-291). Coimbra: Edições Almedina, S.A.

Silva, J. C. (2003). A Matemática, a Tecnologia e a Escola. *Educação e Matemática*, *71*, p.1.

Silva, J. C. (2005). Maldita Matemática! *A página da educação, 143,* p.43. Recuperado de http://www.apagina.pt/?aba=7&cat=143&doc=10717&mid=2

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335–359). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Schwartz, D. L., Chang, J., & Martin, L. (2008). Instrumentation and innovation in design experiments: Taking the turn towards efficiency. *Handbook of design research methods in education*, *650*, 47-67.

Schwartz, J. L. (1999). Can technology help us make the mathematics curriculum intellectually stimulating and socially responsible? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *4*(2-3), 99-119.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.

Slavin, R. E., & Lake, C. (2008). Effective programs in elementary mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research, 78*, 427-515. doi:10.3102/0034654308317473

Smith, D. (2002, july). How People Learn…Mathematics. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate level).* University of Crete, Greece.

Smole, K. & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed

Stake, R. (2016). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Obra original publicada em 2014).

Steff, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experimente methodology: Underlying principles And essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematcs and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340. Recuperado de http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/L930MA/H13/Mathematical%20Thinking%20and%20Learning.pdf

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas Matemáticas como quadro para a reflexão – Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, *105*, 22-28. (Reimpressão do original inglês, Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275).

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Tan, C. K. (2012). Effects of the application of graphing calculator on students' probability achievement. *Computers & Education, 58*, 1117-1126. doi:10.1016/j.compedu.2011.11.023

Tan, C. K., & Tan, C. P. (2015). Effects of the handheld technology instructional approach on performances of students of different achievement levels. *Computers & Education, 82*, 306-314. doi:10.1016/j.compedu.2014.11.011

Trindade, R. (2014). Metas Curriculares da Matemática: contributo para um debate. *Educação e Matemática*, (*127)*, 3-7.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438–445.

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processos d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 239–264.

Trouche, L. (2004a). Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1), 181-197.

Trouche, L. (2004b). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students´command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

Trouche, L., e Drijvers, P. (2010). Handheld technology: Flashback into the future. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 42*(7), 667–681.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, In R. Noirfalise, & M.J. Perrin (Eds.), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 174–185). Clermont-Ferrand: IREM, Université de Clermont-Ferrand II.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*, 167–181.

Verillon P, Rabardel P (1995) Cognition and artifact: a contribution to the study of thought in relation to instrument activity. Eur J Psychol Educ *9*(3): 77–101.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society, the Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1991). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes. Recuperado de http://www.egov.ufsc.br/portal/sites/default/files/vygotsky-a-formac3a7c3a3o-social-da-mente.pdf

Voogt J., Westbroek H., Handelzalts A., Walraven A., Pieters J. & De Vries B. (2011). Teacher learning in collaborative curriculum design. *Teaching and Teacher Education*, 27, 1235–1244.

Voogt, J., Fisser, P., Roblin, N. P., Tondeur, J., & Van Braak, J. (2013). Technological pedagogical content knowledge - a review of the literature. *Journal of Computer Assisted Learning, 29*, 109-121. doi:10.1111/j.1365-2729.2012.00487.x

Wells, G. (2000). Dialogic inquiry in education: Building on the legacy of Vygotsky. In C.D. Lee, & P. Smagorinsky (Eds.), *Vygotskian perspectives on literacy research* (pp. 51-85). New

York: Cambridge University Press. Recuperado de https://www.csun.edu/~SB4310/601%20files/dialogicinquiry.pdf

Wiersma, W. (1995). *Research methods in Education: An introduction* (6ª ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Wittmann, E. C. (1998) Mathematics Education as a 'Design Science'. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87-103). Dordrecht: Kluwer.

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures: An Investigation of Children's Mathematical Drawings. In *Roles of Representation in School Mathematics.* (pp. 215-227). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Yin, R. (2004). Case study methods, revised draft. *3th Complementary Methods for Research in Education*. Washington, DC: American Educational Research Association.

Legislação

Despacho nº 812/2005 de 24 de outubro de 2005

Decreto-Lei nº 3/2008 de 7 de janeiro de 2008.

Despacho n.º 6754/2008 de 7 de março de 2008

Despacho nº 8783/2010 de 24 de maio de 2010

Decreto-Lei nº 54/2018 de 6 de julho de 2018.

ANEXOS

Anexo 1 - Pedido de Autorização ao Diretor do Agrupamento para realização da experiência de ensino

Ex.mo. Sr. Diretor do Agrupamento…

Eu, Maria Manuela Subtil Brito Pedro, PQND do grupo de recrutamento 500, venho por este meio solicitar a sua autorização para realizar uma recolha de dados na Escola Básica…, para uma investigação.

Encontro-me neste momento a frequentar o curso de Doutoramento em Ciências da Educação na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade da Universidade Nova de Lisboa. Neste âmbito, estou a realizar uma dissertação intitulada: "**A Tecnologia no desenvolvimento do currículo de Matemática no ensino básico - o contributo da Teoria da Mediação Semiótica"**.

Este estudo refere-se a uma experiência de ensino que incide no desenvolvimento do currículo de Matemática do 7.º ano e 8.º ano, do ensino básico, integrando tecnologia gráfica. Recorrendo a um ambiente de aprendizagem de índole exploratória, baseado em tarefas diversificadas que envolvem o uso da calculadora gráfica, pretende-se criar uma dinâmica curricular inovadora neste nível de ensino.

A intervenção pedagógica decorrerá ao longo dos anos letivos de 2016/17 e 2017/18, em algumas aulas da disciplina de Matemática, nos 7.º e 8.º anos, respetivamente. Todos os participantes e respetivos Encarregados de Educação serão informados, sobre a recolha de dados que se fundamentam na realização de um diário de bordo, gravações áudio de algumas aulas, elaboração de relatórios escritos pelos alunos e imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica, TI-nspire decorrentes da realização das tarefas. Será garantido o anonimato a todos os participantes envolvidos nesta investigação e comprometo-me a não utilizar os dados recolhidos para outro fim, que não seja a realização deste estudo.

Em anexo, encontra-se o Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação.

____/____/2016

Peço deferimento

____

Manuela Subtil

Anexo 2 - Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação para realização da experiência de ensino

Ex.mo(a) Sr(a). Encarregado(a) de Educação

Eu, Maria Manuela Subtil Brito Pedro, encontro-me neste momento a frequentar o curso de Doutoramento em Ciências da Educação na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade da Universidade Nova de Lisboa. Neste âmbito, estou a realizar uma dissertação intitulada: "**A Tecnologia no desenvolvimento do currículo de Matemática no ensino básico - o contributo da Teoria da Mediação Semiótica**".

Este estudo refere-se a uma experiência de ensino que incide no desenvolvimento do currículo de Matemática do 7.º ano e 8.º ano, do ensino básico, integrando tecnologia gráfica. Recorrendo a um ambiente de aprendizagem de índole exploratória, baseado em tarefas diversificadas que envolvem o uso da calculadora gráfica, pretende-se criar uma dinâmica curricular inovadora neste nível de ensino.

A concretização da referida investigação implica observação e a recolha de dados sobre o trabalho dos alunos em algumas aulas de Matemática. A recolha de dados fundamenta-se na realização de um diário de bordo, gravações áudio de algumas aulas, elaboração de relatórios escritos pelos alunos e imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica TI-nspire, decorrentes da realização das tarefas.

Neste sentido, solicito autorização para proceder à recolha de dados, junto do seu/sua educando(a), comprometendo-me a garantir o anonimato dos alunos e assumindo o compromisso de não utilizar os dados recolhidos para outro fim que não seja o da realização deste estudo. Agradeço a atenção dispensada e apresento os meus melhores cumprimentos.

____/____/2016

____

Manuela Subtil

Eu, ____, autorizo o(a) meu (minha) educando (a) ____ a participar na recolha de dados dirigida pela professora Manuela Subtil, no âmbito da sua dissertação de Doutoramento.

Assinatura: ____________________________________ Data: ____ / ____ /2016

Anexo 3 - Tarefa C- CE1: Soma dos ângulos externos de um triângulo

Domínio: Geometria e Medida (GM5 e GM7);

Objetivo: Reconhecer que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é igual a um ângulo giro;

Natureza da tarefa: Investigação;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Desafio elevado;

Grau de estrutura: Aberta;

Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;

Tempo: 45 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

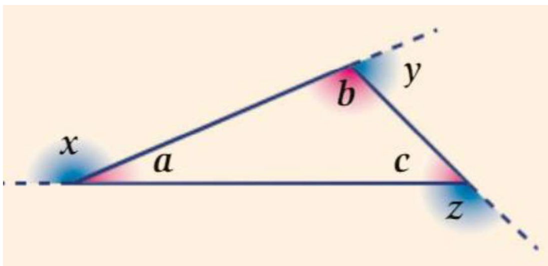
1. Com recurso à calculadora gráfica, segue as instruções:

Constrói um triângulo à tua escolha.

● Assinala os ângulos internos com as letras **a**, **b** e **c.**

● Prolonga, em cada vértice, um dos lados do triângulo. Repara que é indiferente o lado que prolongares para obteres um ângulo externo.

● Assinala os ângulos externos com as letras **x**, **y** e **z.**



a) O que podes concluir relativamente à soma da medida dos ângulos externos de um triângulo? Justifica a tua resposta.

b) Confirma analiticamente a conclusão que realizaste na alínea anterior.

Sugestão: Sabendo que $\hat{x} + \hat{a} = 180º$; $\hat{y} + \hat{b} = 180º$; $\hat{z} + \hat{c} = 180º$, resolve as equações literais em ordem a $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ e determina o valor de $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$.

Esta tarefa foi proposta a seguir à tarefa B - CE1, após a discussão coletiva, onde os alunos demonstraram que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes. A tarefa C – CE1, tinha como objetivo os alunos reconhecerem que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é igual a um ângulo giro. Tal como nas tarefas A – CE1 e B – CE1, no 5º ano de escolaridade os alunos tiveram informação desta propriedade (tarefa C – CE1), sem que lhes tenha sido dada nenhuma justificação ou explicação.

Quando foi proposta esta tarefa aos alunos, no que concerne ao domínio da Geometria, os mesmos já tinham conhecimento sobre os conceitos de triângulo, ângulo, ângulo interno, ângulo externo, semirretas, medida da amplitude de um ângulo, soma de ângulos, classificação de ângulos, ângulos adjacentes, ângulos suplementares, soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, como sendo igual a um ângulo raso[156] e que a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo como sendo igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes[157]. Por outro lado, no que respeita ao domínio da Álgebra os alunos já tinham aprendido a fazer expressões algébricas e equações do 1º grau, com uma incógnita. No entanto, ainda não tinham conhecimento sobre equações literais do 1º grau.

No que respeita à construção da figura, pretendeu-se que os alunos fizessem emergir o conhecimento que tinham sobre triângulos, semirretas, ângulos internos e ângulos externos. No que concerne à alínea a), tendo em consideração a propriedade que demonstraram anteriormente (tarefa B – CE1) que refere que, a medida da amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos, não adjacentes, deveriam de proceder à medição dos ângulos, a, b, c, x, y, z. Tomando como referência o facto de $\hat{x} = \hat{b} + \hat{c}$, $\hat{y} = \hat{a} + \hat{c}$ e $\hat{z} = \hat{a} + \hat{b}$, deveriam de calcular o valor de $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ e provar que esta igualdade dá sempre 360º, em qualquer triângulo, através da função de arrastamento, ao mover os vértices do triângulo.

Relativamente à alínea b) os alunos poderiam utilizar o facto de $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180º$ (tarefa A – CE1) e a sugestão que era dada, resolvendo as três equações literais ($\hat{x} + \hat{a} = 180º$; $\hat{y} + \hat{b} = 180º$; $\hat{z} + \hat{c} = 180º$) em ordem a $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, respetivamente e determinar o valor de $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$, através das devidas substituições. Nesta resolução os alunos deveriam de fazer emergir os conceitos de ângulos adjacentes, ângulos suplementares, resolução de expressões algébricas, equações do 1º grau, com uma incógnita e a propriedade que refere que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso. Era nossa intenção que os alunos comprovassem analiticamente o objetivo da tarefa, alargando o conceito de equações do 1º grau, com uma incógnita ao conceito de equações literais do 1º grau.

Por outro lado, os alunos poderiam aproveitar o conhecimento de que $\hat{x} = \hat{b} + \hat{c}$, $\hat{y} = \hat{a} + \hat{c}$ e $\hat{z} = \hat{a} + \hat{b}$ (tarefa B – CE1) e de que $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180º$ (tarefa A – CE1) e através das devidas substituições, determinarem o valor de $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$. Nesta resolução, os alunos utilizavam as propriedades demonstradas nas tarefas A – CE1 e B – CE2 e os conhecimentos sobre expressões

[156] Tarefa A - CE1.
[157] Tarefa B - CE1.

algébricas, para provarem analiticamente que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360º.

Anexo 4 - Tarefa E-CE1: Função linear e função afim

Domínio: Funções, Sequências e Sucessões (FSS7)

Objetivo: Interpretação gráfica das funções linear e afim - Compreender a influência da variação dos parâmetros a e b, na função linear, $f(x) = a\,x\ (a \neq 0)$ e *função* afim, $f(x) = a\,x + b\ (a \neq 0, b \neq 0)$, exibidas por retas, cuja representação analítica é dada pelas expressões

$y = a\,x$ e $y = a\,x + b$, respetivamente.

Natureza da tarefa: Exploração

Contexto da tarefa: Matemática Pura

Grau de desafio: Desafio reduzido

Grau de estrutura: Aberta

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório individual

Tempo: 60 min

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Utiliza a calculadora gráfica para representar as seguintes funções:

a) $f(x) = 2x$; $f(x) = 3x$; $f(x) = 5x$. O que concluis?

b) $f(x) = -2x$; $f(x) = -3x$; $f(x) = -5x$. O que concluis?

2. Utiliza a calculadora gráfica para representar as seguintes funções: $f(x) = 3x$; $f(x) = 3x - 2$; $f(x) = 3x + 5$. O que concluis relativamente aos valores de a e b?

3. Utiliza a calculadora gráfica para representar as seguintes funções: $f(x) = -3x$; $f(x) = -3x - 2$; $f(x) = -3x + 5$. O que concluis relativamente aos valores de a e b?

4. Utiliza a calculadora gráfica. Relativamente à função $f(x) = 2x + 3$, qual é a relação que existe com as funções $h(x) = 2x - 4$ e $g(x) = -4x + 3$, tendo em conta os valores de a e b?

Nota: Considera $f(x) = a\,x$ e $f(x) = a\,x + b$, respetivamente.

Anteriormente à resolução desta tarefa (tarefa E-CE1), efetivou-se a tarefa D-CE1, em que os alunos deveriam ter consolidado o conceito de gráfico cartesiano, compreendido o conceito de função como relação entre variáveis numéricas e como correspondência entre dois conjuntos numéricos e compreendido em que condições é que um gráfico cartesiano de funções numéricas de variável numérica, corresponde à representação de uma função. Todos estes objetivos foram analisados e discutidos através da discussão coletiva, orquestrada pela professora.

Na aula seguinte, à resolução da tarefa D - CE1, foi abordado o conceito de expressão algébrica ou expressão analítica, como sendo uma das formas de representar uma função, tendo sido feita uma alusão e consolidação do conceito de variável dependente e variável independente. Também foi explanado algebricamente, os conceitos de função linear, função constante e função afim. Esta última, como sendo a soma de duas funções, uma função linear ($f(x) = a\,x$), e uma função constante por ($f(x) = b$), representada por $f(x) = a\,x + b$, onde a é o coeficiente da função linear (denominado por coeficiente de x) e b é o valor da constante (denominado por termo independente).

Com a tarefa E-CE1, pretendeu-se interpretar graficamente e compreender a influência da variação dos parâmetros a e b, na função linear, $f(x) = a\,x$ e *função* afim, $f(x) = a\,x + b$, representadas pelas retas de expressões analíticas, $y = a\,x$ e $y = a\,x + b$, respetivamente. Tratou-se de uma abordagem mais ambiciosa da que foi objetivada no 7.º ano de escolaridade, segundo o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), em Portugal.

No que respeita às questões 1a) e 1b), os alunos deveriam fazer emergir o conceito de função e o conceito de função linear, através da sua representação algébrica, que tinha sido lecionado na aula anterior, aferindo que se tratam de funções representadas por retas que passam pela origem. Fazendo uma comparação entre as funções representadas na questão 1a) e as funções representadas na questão 1b), os alunos deveriam concluir que se tratam de funções crescentes e decrescentes, respetivamente, quando o coeficiente de x, é positivo e negativo, respetivamente. Por outro lado, quanto maior é o coeficiente de x, maior é a inclinação das retas.

No que concerne às questões 2 e 3, os alunos deveriam de fazer emergir os conceitos geométricos de retas paralelas e ângulos, no domínio da Geometria Euclidiana. Ao proceder à medição da amplitude dos ângulos[158], compreendidos entre o eixo das abcissas e as retas que representam as funções, nas questões 2 e 3, respetivamente, e percecionar que os mesmos são geometricamente iguais, deveriam de conjeturar que se tratam de funções representadas graficamente por retas paralelas, quando o valor do coeficiente de x é o mesmo. Por outro lado, são funções crescentes ou decrescentes, quando o valor da amplitude do ângulo da reta que representa a função, é menor que 90º ou maior que 90º, respetivamente e deste modo o coeficiente de x, na função, é positivo ou negativo[159]. E ainda que, o termo independente b é que determina onde a reta interseta o eixo das ordenadas, isto é, o valor da ordenada na origem (0, b).

Relativamente à questão 4, os alunos deveriam de fazer emergir os conceitos geométricos de retas paralelas e retas concorrentes, no âmbito da Geometria Euclidiana. Ao relacionarem os gráficos das funções f e h, respetivamente, deveriam de proceder à medição da amplitude dos ângulos, compreendidos entre o eixo das abcissas e as retas que representavam as funções e concluir que as mesmas são representadas por retas paralelas, dado que têm o mesmo coeficiente de x e diferentes valores da ordenada na origem. Ao relacionarem os gráficos das funções f e g, deveriam de fazer a medição dos quatro ângulos provenientes da interseção das duas retas. Aí

[158] No sentido positivo.
[159] Se a função for crescente ou decrescente, respetivamente.

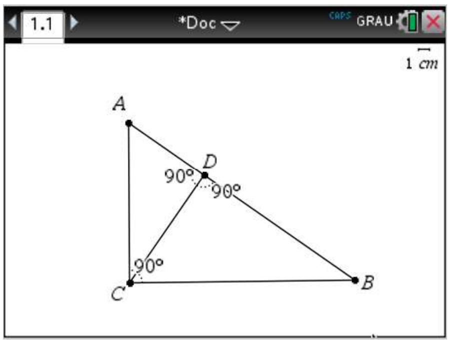
deveriam de aferir que que as funções são representadas por retas concorrentes, cuja interseção é o ponto *(0, b)*, pois ambas têm o mesmo termo independente, isto é, o mesmo valor de *b*.

Anexo 5 - Tarefa A-CE2: Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa

Domínio: Geometria e Medida (GM8);
Objetivo: Demonstrar que a altura referente à hipotenusa decompõe um triângulo retângulo em dois triângulos retângulos semelhantes ao triângulo dado;
Natureza da tarefa: Investigação;
Contexto da tarefa: Matemática Pura;
Grau de desafio: Desafio elevado:
Grau de estrutura: Aberta;
Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório a pares;
Tempo: 45 min;
Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Recorre à calculadora gráfica e constrói o triângulo *[ACB]* retângulo em C. Marca o ponto D sobre o segmento de reta *[AB],* obtendo-se a altura do triângulo relativa à hipotenusa, o segmento de reta *[CD]*.
Nota: A altura de um triângulo relativa à hipotenusa trata-se do segmento de reta com origem num vértice do triângulo e perpendicular ao seu lado oposto.

a) Mostra que os triângulos *[ACB]* e *[ACD]* são semelhantes e relaciona os comprimentos dos lados correspondentes dos referidos triângulos. Que concluis? Num pequeno relatório regista as tuas conclusões.
b) Mostra que os triângulos *[ACB]* e *[DCB]* são semelhantes e relaciona os comprimentos dos lados correspondentes dos referidos triângulos. Que concluis? Num pequeno relatório regista as tuas conclusões.



A tarefa A – CE2 referiu-se à primeira tarefa realizada na segunda sequência de *Ciclos Didáticos* enquadrada no segundo ciclo de experimentação (CE2). A mesma foi proposta aos alunos na unidade, Teorema de Pitágoras, integrada no domínio da Geometria e Medida (GM8). Esta tarefa tinha o objetivo de os alunos demonstrarem, que num triângulo retângulo, a altura referente à hipotenusa decompõe esse triângulo em dois triângulos retângulos semelhantes, ao triângulo inicial e que os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos semelhantes são diretamente proporcionais. Com a resolução desta tarefa pretendia-se posteriormente, na tarefa seguinte (B – CE2), fazer uma demonstração do Teorema de Pitágoras, através da semelhança de triângulos. Trata-se de uma demonstração exigida no currículo do 8º ano de escolaridade de acordo com o Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013).

Quando a tarefa foi proposta aos alunos, no que respeita ao domínio da Geometria e Medida, os mesmos já tinham conhecimento sobre o conceito de triângulos retângulos, triângulos semelhantes e critérios de semelhança de triângulos, sem terem feito prova dos mesmos. Também na unidade, Vetores, Translações e Isometrias, anterior à unidade, Teorema de Pitágoras, os alunos abordaram o conceito de rotação.

No que concerne à construção da figura, os alunos deveriam usar o facto de se tratar de um triângulo em que a medida de um dos ângulos tem 90º de amplitude. Com a resolução da alínea a) pretendia-se que os alunos conjeturassem que os triângulos *[ACB]* e *[ACD]* são semelhantes, fazendo emergir os significados pessoais que tinham relativamente aos critérios de semelhança de triângulos[160]. Poderiam proceder à medição da amplitude dos ângulos dos triângulos e conjeturar que os mesmos são semelhantes pelo critério AA (Ângulo, Ângulo), por exemplo[161]. Através da função de arrastamento, movendo os vértices A, B ou C do triângulo *[ACB]*, confirmavam que o critério AA se verificava noutros triângulos com diferentes dimensões. Por outro lado, tendo em conta as propriedades que resultam da semelhança de triângulos, através da operacionalização da divisão entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos, deveriam concluir a veracidade da igualdade $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DC}}$, através da função de arrastamento.

Relativamente à alínea b) objetivava-se que os alunos conjeturassem que os triângulos [ACB] e [DCB] são semelhantes, tendo em conta o processo utilizado na alínea a). No entanto, tendo em consideração uma consequência da conjetura anterior, deveriam concluir que $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}$, também pelo método descrito na alínea a).

[160] Os alunos poderiam utilizar o critério AA (Ângulo, Ângulo), critério LAL (Lado, Ângulo, Lado) ou critério LLL (Lado, Lado, Lado). Dois triângulos são semelhantes pelo critério AA, se a amplitude de dois ângulos de um triângulo for a mesma que a amplitude de dois ângulos correspondentes, do outro triângulo. Dois triângulos são semelhantes pelo critério LAL, se a amplitude de um ângulo de um triângulo for igual à amplitude de um ângulo correspondente do outro triângulo e as medidas dos comprimentos dos lados desse ângulo de um triângulo, forem diretamente proporcionais às medidas dos comprimentos dos lados do ângulo correspondente, do outro triângulo. Dois triângulos são semelhantes pelo critério LLL (Lado, Lado, Lado), se as medidas dos comprimentos dos três lados de um triângulo são diretamente proporcionais às medidas dos comprimentos dos três lados correspondentes do outro triângulo.

[161] Os alunos também poderiam provar a semelhança dos triângulos, através dos critérios LAL ou LLL.

Anexo 6 - TAREFA B-CE2: Uma verificação do Teorema de Pitágoras

Domínio: Geometria e Medida (GM8);

Objetivo: Relacionar o teorema de Pitágoras com a semelhança de triângulos (demonstrar, dado um triângulo *[ACB],* retângulo em *C* e de altura *[CD],* que os comprimentos $a = \overline{CB}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $x = \overline{AD}$, $y = \overline{DB}$, satisfazem as igualdades $b^2 = xc$ e $a^2 = yc$ e concluir que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa, isto é, $a^2 + b^2 = c^2$);

Natureza da tarefa: Problema;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Desafio elevado;

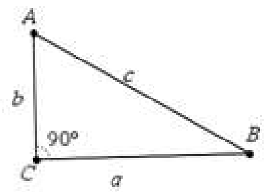
Grau de estrutura: Fechada;

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório individual;

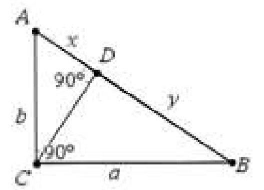
Tempo: 30 min;

Recursos: Papel e lápis.

1. Considera o triângulo *[ABC]* retângulo em C, onde o comprimento do segmento de reta *[CB]* é $\boldsymbol{a}$, o comprimento do segmento de reta *[AC]* é $\boldsymbol{b}$ e o comprimento do segmento de reta *[AB]* é $\boldsymbol{c}$.



Sejam *[CD]* a altura do triângulo relativa à hipotenusa, tal que o comprimento do segmento de reta [AD] é $\boldsymbol{x}$ e o comprimento do segmento de reta [DB] é **y**.



a) Relaciona os triângulos *[ACB]* e *[ACD]* e justifica que $\boldsymbol{b^2 = xc}$.

b) Relaciona os triângulos *[ACB]* e *[DCB]* e justifica que $\boldsymbol{a^2 = yc}$.

c) Observando a figura e tendo em conta as alíneas **a)** e **b)**, mostra que $a^2 + b^2 = c^2$. O que concluis?

Adaptado do Caderno de Apoio às Metas Curriculares do 3º ciclo

A tarefa B – CE2 foi dada aos alunos na aula seguinte à resolução da tarefa A – CE2, onde os mesmos concluíram, através da discussão coletiva, orquestrada pela professora, que em qualquer triângulo retângulo, a altura referente à hipotenusa decompõe esse triângulo em dois triângulos retângulos semelhantes ao triângulo inicial, sendo diretamente proporcionais os lados correspondentes dos dois triângulos semelhantes. A resolução das tarefas A – CE2 e B – CE2, tinham como objetivo, relacionar o Teorema de Pitágoras com a semelhança de triângulos. Tal como foi referido anteriormente, relativamente à primeira tarefa, tratam-se de verificações impostas no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), em Portugal.

Nas alíneas a) e b), os alunos deveriam utilizar apenas papel e lápis e terem em atenção o facto de terem provado a semelhança entre os triângulos *[ACB]* e *[ACD]* e os triângulos *[ACB]* e *[DCB]*, respetivamente, na tarefa A-CE2, tendo como consequência, a proporcionalidade entre os lados correspondentes dos respetivos triângulos semelhantes. Neste sentido, ao utilizarem a relação $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ deveriam de concluir que $\boldsymbol{b^2 = xc}$**.** Por outro lado, ao usarem a relação $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}$ deveriam aferir a igualdade $\boldsymbol{a^2 = yc}$.

Na alínea c) ao conjugarem as igualdades das alíneas a) e b), $\boldsymbol{b^2 = xc}$ e $\boldsymbol{a^2 = yc}$, respetivamente, tendo em conta $y + x = c$ e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, deveriam de mostrar a igualdade $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.

Anexo 7 - TAREFA C-CE2: Mais uma verificação do Teorema de Pitágoras

Domínio: Geometria e Medida (GM8);

Objetivo: Demonstrar, dado um triângulo [ABC], retângulo em B, que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa;

Natureza da tarefa: Investigação;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Desafio elevado;

Grau de estrutura: Aberta;

Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;

Tempo: 45 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Com recurso à calculadora gráfica:

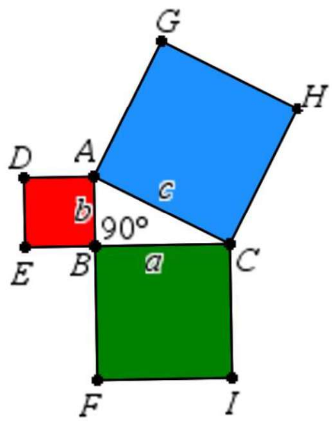
• Constrói um triângulo retângulo *[ABC]*.

• Constrói os quadrados *[ADEB]* e *[BFIC]* sobre cada cateto e o quadrado *[ACHG]* sobre a hipotenusa, do triângulo retângulo *[ABC]*.

• Determina a área dos quadrados *[ABED]*, *[ACHG]* e *[BCIF]*.

• Adiciona a área dos quadrados que se encontram sobre os lados do triângulo e relaciona essa área com a área do quadrado que está sobre a hipotenusa, do triângulo retângulo *[ABC]*.

O que observas? Elabora um pequeno relatório que traduza as tuas descobertas.



Sugestão: Para construir os quadrados sobre os lados do triângulo retângulo *[ABC],* recorre a rotações de 90º ou -90º, consoante o centro de rotação.

Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, ____

____

A resolução da tarefa C - CE2, iniciou-se após a realização da tarefa B – CE2, tendo prosseguido para a aula seguinte. Com a discussão coletiva referente à tarefa B – CE2, os alunos tiveram uma primeira abordagem ao Teorema de Pitágoras, através de linguagem simbólica. Tratou-se de uma tarefa realizada com papel e lápis, onde os alunos não tiveram a perceção do que acontecia noutros triângulos. Com a tarefa C - CE2, utilizando a calculadora gráfica, objetivou-se fazer uma generalização da verificação do teorema de Pitágoras, a todos os triângulos retângulos, através do cálculo de áreas.

Anexo 8 - TAREFA D-CE2: Aplicação do Teorema de Pitágoras e Decomposição de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa

Domínios: Geometria e Medida (GM8);

Objetivo: Aplicação do Teorema de Pitágoras e decomposição de um triângulo pela altura referente à hipotenusa; Medir áreas de figuras planas;

Natureza da tarefa: Exercício;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Desafio reduzido;

Grau de estrutura: Fechada;

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório individual;

Tempo: 30 min;

Recursos: Papel; Lápis.

1. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$, retângulo em C.

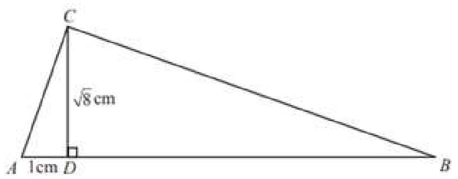
Sabe-se que:

•$[CD]$ é a altura do triângulo $[ABC]$,relativa ao lado $[AB]$;

•$\overline{AD}$ = 1 cm;

•$\overline{CD}$ = $\sqrt{8}$ cm.

A figura não está desenhada à escala.



a) Determina $\overline{AC}$. Apresenta o valor pedido em centímetros. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

b) Determina a área do triângulo $[DBC]$. Apresenta o valor pedido em cm^2, arredondados às centésimas. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva pelo menos três casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

A tarefa D – CE2 foi proposta na aula seguinte à finalização da resolução da tarefa C – CE2 e consequente discussão coletiva. Tendo em conta o facto de todas as tarefas terem um único propósito, criar estratégias de ensino inerentes aos conteúdos curriculares que propiciem a aprendizagem dos alunos (Clements, 2008), a avaliação trata-se de uma das fases subjacente ao desenvolvimento do currículo (Clements, 2008; Coll, 1987; Pacheco, 2001; Ponte, 2011). Por outro lado, devendo existir uma conexão entre a teoria e a prática, esta tarefa procurou reconhecer se a investigação anterior, facilitou a resolução deste exercício (Cobb et al., 2016).

Daí que se torne pertinente a realização de exercícios de modo a percecionar a eficácia das tarefas realizadas. Neste sentido, esta tarefa teve como objetivo a aplicação do Teorema de

Pitágoras (alínea a)) e decomposição de um triângulo pela altura referente à hipotenusa (alínea b)), conteúdos explorados nas tarefas anteriores. O conceito de área de um triângulo também foi analisado na última alínea, tendo sido aprendido no 5º ano de escolaridade.

Anexo 9 - TAREFA E-CE2: A Florista

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS8);

Objetivo: Modelar e interpretar situações que envolvem funções afim, linear e constante;

Natureza da tarefa: Problema;

Contexto da tarefa: Realidade;

Grau de desafio: Desafio elevado;

Grau de estrutura: Fechada;

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório individual;

Tempo: 90 min;

Recursos: Calculadora Gráfica.

1. Numa florista o preço de cada rosa é 2 €.

Para fazer um ramo a florista leva 3 €.

Para as pessoas carenciadas, a florista não faz ramos e pede uma quantia simbólica de 1€, independentemente do número de rosas.

a) Preenche a seguinte tabela:

nº de rosas	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**	***x***
Preço sem ramo							
Preço com ramo							
Preço carenciados							

b) Sejam *f(x), g(x)* e *h(x)* funções tais que:

- *f(x)* representa o preço de *x* rosas, sem ramo;
- *g(x)* representa o preço de um ramo, com *x* rosas;
- *h(x)* representa o preço de *x* rosas, para pessoas carenciadas.

Qual o modelo matemático que se adapta a cada uma das situações?

c) Representa graficamente, no mesmo referencial, as funções *f* , *g* e *h*.

d) Existe alguma situação em que o preço a pagar por um molho de rosas **com ramo** seja o mesmo que o preço a pagar por pessoas carenciadas? Quando? Justifica a tua resposta.

e) Existe alguma situação em que o preço a pagar por um molho de rosas **sem ramo**, seja o mesmo que o preço a pagar por pessoas carenciadas? Quando? Justifica a tua resposta.

A tarefa E - CE2 foi proposta aos alunos quando se iniciou a unidade de Gráficos de Funções Afins, integrada no domínio das Funções, Sequências e Sucessões (FSS8), do 8.º ano de escolaridade. A mesma pretendeu fazer um diagnóstico do que os alunos tinham aprendido no 7.º ano de escolaridade relativamente aos domínios de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) e Álgebra (ALG7), nas unidades de Funções e Equações, respetivamente. Sendo fundamental existir uma articulação entre a teoria e a prática, esta tarefa procurou validar se a investigação anterior, facilitou a resolução de problemas (Cobb et al., 2016). O objetivo da mesma, centrou-se na modelação e interpretação de situações que envolvem funções afim, linear e constante. Este tipo de funções, foi abordado no 7.º ano de escolaridade na primeira sequência de *Ciclos Didáticos*, integrados no primeiro ciclo de experimentação (CE1), com a resolução das tarefas E – CE1 e F – CE1. Na última tarefa (F – CE1) os alunos tiveram oportunidade de modelar uma situação que envolveu uma função linear. Também, na unidade de Equações no 7.º ano de escolaridade, o conceito de equação com uma incógnita x, foi abordado como sendo uma igualdade entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$, "$f(x)= g(x)$", onde se designa "$f(x)$ como primeiro membro da equação" e "$g(x)$ como segundo membro da equação". Por outro lado, na unidade, Vetores, Translações e Isometrias, no 8º ano de escolaridade os alunos tiveram conhecimento sobre o conceito de translação.

Na alínea a), os alunos deveriam interpretar os dados do enunciado da tarefa, fazendo emergir o significado pessoal referente aos conceitos de função linear, função afim e função constante.

Na alínea b) os alunos deveriam analisar os dados registados na tabela da alínea a) e modelar as situações envolvidas, fazendo emergir os significados pessoais dos conceitos de funções lineares, funções afins e funções constantes, como sendo funções que são representadas por retas do tipo $y=ax$; $y=ax+b$ e $y=b$, respetivamente. Neste contexto, $f(x)= 2x$; $g(x)=2x+3$, $h(x)=1$.

Na alínea c) era expectável que os alunos recorressem à calculadora gráfica, para representar as três funções, mas também poderiam utilizar papel e lápis, para a representação das mesmas. No entanto, era expectável que percecionassem que o domínio das funções f e g, são subconjuntos de IN

Na alínea d) os alunos deveriam interpretar criticamente a solução da questão, dado que se trata de um problema da vida real e estavam a trabalhar com gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica, em IN. Neste sentido, ao determinarem a solução da equação $g(x)= h(x)$, observavam que o preço a pagar por um molho de rosas com ramo é o mesmo que o preço a pagar por pessoas carenciadas, quando se compra absurdamente -1 rosa, visto que o par ordenado $(-1, 1)$ é o ponto de interseção dos gráficos das duas funções.

Na alínea e) quando os alunos procedessem à resolução da equação *f(x)=h(x)*, verificavam que o preço a pagar por um molho de rosas sem ramo, é o mesmo que o preço a pagar por pessoas carenciadas, quando se compra *0,5* rosas, dado que o par ordenado *(0,5; 1)* é o ponto de interseção do gráfico das duas funções. Perante este resultado, os alunos deveriam de aferir que se trata de um valor incoerente pelo mesmo motivo da alínea anterior, dado que se encontravam perante um problema da vida real, cuja resolução envolve gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica, em IN.

Anexo 10 - TAREFA F-CE2: Retas não verticais

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS8)

Objetivo: Compreender a influência da variação dos parâmetros a e b, na função linear, $f(x) = a\,x$ e *função* afim, $f(x) = a\,x + b$, representada graficamente retas não verticais, $y = a\,x$ e $y = a\,x + b$, respetivamente; Caracterizar funções lineares, afins e constantes;

Natureza da tarefa: Exploração;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Desafio reduzido;

Grau de estrutura: Aberta;

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório individual;

Tempo: 60 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Representa graficamente funções lineares do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax}$, considerando as várias situações em que $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a < 0}$. Regista as tuas conclusões.

Síntese:

• O gráfico de uma **função linear** $\boldsymbol{f(x) = ax}$, $a \in IR$, $(a \neq 0)$ é representado por uma reta não vertical $\boldsymbol{y = ax}$ que passa pela origem do referencial, onde $\boldsymbol{a}$ é denominado por declive da reta, que é a inclinação que a reta faz com o eixo das abcissas $(a \neq 0)$ O coeficiente $\boldsymbol{a}$ da função linear corresponde à ordenada do ponto do gráfico de abcissa 1. Isto é, tem-se o ponto de coordenadas $(1, f(1) = a)$. • Se o valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$ é **positivo** a função é ________________________. •Se o valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$ é **negativo** a função é_________________________. • Se a > 0, quanto maior é o valor do declive da reta ____________ é a inclinação da reta. • Se a < 0, quanto maior é o valor do declive da reta ____________ é a inclinação da reta.

2. Representa graficamente funções do tipo $\boldsymbol{g(x) = ax}$ *e* $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ considerando as várias situações em que $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a < 0}$. Regista as tuas conclusões.

Síntese:

• A representação gráfica de uma **função afim** do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax+b}$ $(a.b \in IR, a, b \neq 0)$ é representada por uma ___________ não vertical que interseta o eixo das _____________no ponto de coordenadas ________ a que se dá o nome de **ordenada na origem**. • O gráfico da função f, obtém-se aplicando uma _________________ à reta de equação $\boldsymbol{y = ax}$, que representa a função $\boldsymbol{g(x) = ax}$ através do vetor de coordenadas _______. • Se o valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$ é **positivo** a função é _________________.

• Se o valor do coeficiente ***a*** é **negativo** a função é _________________.

• Ao valor do coeficiente ***a*** **chamamos _______________da reta**, que é a inclinação que a reta faz com o eixo das abcissas.

• Se o valor do coeficiente ***a*** é o **mesmo** as retas que representam os gráficos das funções são _______________.

• Se b = 0 trata-se de uma função ___________________.

• Se a = 0 trata-se de uma função ___________________.

A tarefa F - CE2 fundamentou-se num cunho reflexivo, cujo objetivo foi testar a aprendizagem realizada no 7.º ano, na tarefa E – CE1, respeitante a um número limitado de funções (Cobb et al., 2003). Esta tarefa foi proposta na aula seguinte à concretização da tarefa E - CE2, onde foi realizado um diagnóstico da aprendizagem dos alunos no 7.º ano de escolaridade, relativamente aos domínios de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) e Álgebra (ALG7), nas unidades de Funções e Equações, respetivamente. Um dos objetivos desta tarefa[162], centrou-se na interpretação de situações que envolvem funções afim, linear e constante.

A tarefa F - CE2 tratou-se de uma generalização e consequente aprofundamento de conceitos, explorados na tarefa E – CE1, realizada no 7.º ano de escolaridade, no primeiro ciclo de experimentação, integrada na primeira sequência de *Ciclos Didáticos*, onde se pretendeu compreender a influência da variação dos parâmetros a e b, na função linear, $f(x) = a\,x$ e função afim, $f(x) = a\,x + b$, representada graficamente por retas, cujas expressões analíticas são dadas por, $y = a\,x$ e $y = a\,x + b$, respetivamente. Por exemplo, segundo o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), no 7.º ano de escolaridade, relativamente à função linear $f(x) = ax$, representada pela reta não vertical, $y = a\,x$, o valor de a é denominado por coeficiente de x. Na função afim, $f(x) = ax+b$, representada pela reta não vertical, $y = a\,x + b$, o valor de a, é designado por coeficiente de x e b, o termo independente. No 8.º ano de escolaridade, em qualquer das funções, linear ou afim, o valor de a é denominado por declive da reta, que é a inclinação que a reta faz com o eixo das abcissas e o valor de b, por ordenada na origem. Embora, todos estes termos tenham sido antecipados na discussão coletiva inerente à tarefa tarefa E-CE1, no 7.º ano de escolaridade.

Em suma, pretendeu-se que os alunos fossem capazes de relacionar a equação de uma reta não vertical com o gráfico de uma função linear ou função afim ou função constante, identificassem o declive e a ordenada na origem de uma reta não vertical, relacionassem o declive de uma reta, com a inclinação da mesma relativamente ao eixo das abcissas, com a monotonia da função que a mesma representa e relacionassem o declive com o paralelismo entre retas. E ainda,

[162] Tarefa E-CE2

que a equação de uma reta que representa uma função afim, se obtém, aplicando uma translação à reta que representa uma função linear, associada ao vetor de coordenadas *(0, b)*[163].

Neste sentido, os alunos para resolverem a tarefa F-CE2, deveriam de fazer emergir os significados pessoais inerentes aos conceitos e propriedades exploradas na tarefa E-CE1, realizada no anterior ciclo de experimentação (CE1), construindo e aprendendo novos conceitos.

[163] Sendo $y = ax + b$ a reta que representa a função afim e $y = ax$ a reta que representa a função linear, com $a, b \neq 0$

Anexo 11 - TAREFA G-CE2: Retas não verticais (aplicação)

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS8); Geometria e Medida (GM5);

Objetivo: Identificar e caracterizar as equações das retas não verticais que representam as funções linear, afim e constante; Medir áreas de figuras planas;

Natureza da tarefa: Exercício;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Desafio reduzido;

Grau de estrutura: Fechada;

Metodologia de trabalho: Trabalho e relatório individual;

Tempo: 30 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

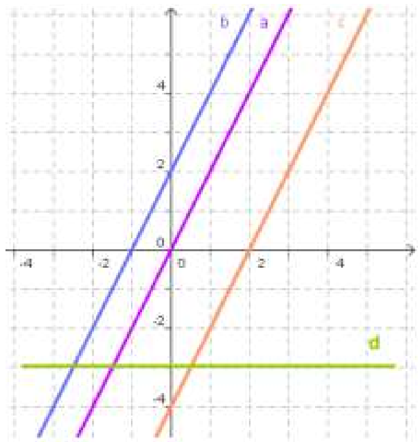
1. Qual é a relação que existe entre a função ***f (x) = -5x + 12*** e as funções ***h (x) = -5x – 4*** e ***g (x) = 6x + 12***? E qual é a relação que existe as funções ***h (x) = -5x – 4*** e ***g (x) = 6x + 12***?

2.Sabendo que a reta que representa a função **a** é dada pela expressão $y = 2x$:

a) Determina as expressões das retas **b** e **c**.

b) Determina a interseção das retas **b** e **d**.

c) Qual é a área do triângulo formado pelas retas **b** e **d**, com o eixo das ordenadas?



A tarefa G-CE2 foi proposta na aula seguinte à finalização da resolução da tarefa F-CE2 e consequente discussão coletiva. A realização desta tarefa (G-CE2) procurou percecionar se a investigação anterior facilitou a resolução destes exercícios (Cobb et al., 2016) avaliando (Clements, 2008; Coll, 1987; Pacheco, 2001; Ponte, 2011) se as estratégias desenvolvidas contribuíram ou não para a aprendizagem dos alunos (Clements, 2008). Por outro lado, pretendeu-se observar o espírito critico dos alunos fase à apresentação das funções no ecrã da calculadora gráfica (Berry & Graham, 2005), tendo em conta a janela de visualização que deveriam escolher – Zoom (Consciência, 2003). A mesma teve como objetivo identificar e caracterizar as equações das retas não verticais que representam as funções linear, afim e constante e medir áreas de figuras planas[164].

Quando a tarefa G-CE2 foi dada aos alunos, no domínio das Funções, Sequências e Sucessões (FSS7 e FSS8), os mesmos já tinham conhecimento sobre a influência da variação dos parâmetros a e b, na função linear, $f\ (x)\ =\ a\ x$ e *função* afim, $f\ (x)\ =\ a\ x\ +b$, representadas graficamente pelas retas não verticais, $y\ =\ a\ x$ e $y\ =\ a\ x\ +b$, respetivamente[165]. Neste sentido, deveriam ter facilidade em caracterizar e interpretar situações que envolvessem funções afim, lineares e constantes. No domínio da Geometria e Medida já estavam familiarizados com retas paralelas e concorrentes (GM4), assim como o conceito de área do triângulo (GM5). No domínio da Álgebra (ALG7) já tinham abordado o conceito de equação, como sendo uma igualdade entre duas funções. E também no domínio dos Números e Operações (NO6), os alunos tinham conhecimento sobre o módulo ou valor absoluto de um número e da diferença de dois números.

Relativamente à questão 1, numa primeira fase, os alunos deveriam resolver analiticamente as questões e posteriormente recorrer à calculadora gráfica para confirmar as suas conjeturas. Assim deveriam fazer emergir o significado pessoal assente no facto de que duas retas são paralelas, quando têm o mesmo declive para concluir que as funções f e h são representadas por retas paralelas. Por outro lado, também deveriam mobilizar o significado pessoal inerente ao conceito de retas concorrentes e ordenada na origem, para aferir que as retas que representam as funções f e g, se intersetam no ponto *(0, 12)*[166]. E ainda, que as retas representadas pelas funções g e h são concorrentes, pois não têm o mesmo declive, nem a mesma ordenada na origem. Para determinar o ponto de interseção entre as funções g e h deveriam fazer emergir o conceito de equação aprendido no 7.º ano de escolaridade e proceder à igualdade entre as duas funções para calcular o valor da incógnita x (variável independente) e posteriormente ao cálculo da variável dependente ($g\ (x)$ ou $h\ (x)$).

A seguir, ao pretenderem confirmar as suas conjeturas através da calculadora gráfica, deveriam percecionar alguns constrangimentos da calculadora gráfica, pelo facto de não conseguirem ter uma ideia global da representação gráfica das funções, sem ajustarem uma janela de visualização – Zoom, que se adaptasse à situação (Consciência, 2003).

No que concerne à questão 2, alínea a), tendo em conta a representação icónica fornecida pelo enunciado, os alunos deveriam de fazer emergir o facto de que o gráfico de uma função $f\ (x) = ax+b$ obtém-se, aplicando uma translação à reta de equação $y = ax$, que representa a função $g(x) = ax$ através do vetor de coordenadas *(0, b).* Neste sentido, deveriam de concluir que a reta **b** é representada por $y = 2x + 2$ e a reta **c** é representada por $y = 2x - 4$.

[164] Conteúdo aprendido no 5º ano de escolaridade.
[165] Objetivo da tarefa F - CE2.
[166] 12 é o valor da ordenada na origem, nas duas retas.

Para resolver a alínea b) da questão 2, os alunos deveriam de mais uma vez recorrer à representação icónica do enunciado e concluir que a reta **d** é definida por $y = -3$. Assim, de modo a determinar o ponto de interseção entre as duas retas, poderiam fazer emergir o significado pessoal respeitante ao conceito de equação e resolver analiticamente a equação $2x + 2 = -3$, concluindo que as duas retas se intersetam no ponto de coordenadas ($-\frac{5}{2}$, - 3). Posteriormente, deveriam de recorrer à calculadora gráfica para fazer a confirmação.

Para resolver a alínea c), de modo a determinar a área do triângulo formado pelas retas **b** e **d**, com o eixo das ordenadas, os alunos deveriam de fazer emergir o significado pessoal inerente ao conceito de módulo ou valor absoluto da diferença de dois números, para determinar a altura do triângulo. No que respeita à base do mesmo, deveriam de ter em conta o valor da abcissa do ponto de coordenadas ($-\frac{5}{2}$, - 3) e determinar o seu valor absoluto. Seguidamente, deveria de ser confirmada através da calculadora gráfica, a área encontrada analiticamente.

Anexo 12 - TAREFA H-CE2: A viagem de finalistas

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS8);

Objetivo: Modelar e interpretar situações que envolvem funções afim e linear;

Natureza da tarefa: Problema de modelação;

Contexto da tarefa: Real;

Grau de desafio: Desafio elevado;

Grau de estrutura: Fechada;

Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;

Tempo: 90 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. O sr. Paulo, gerente de uma agência de viagens recebeu uma solicitação para organizar a viagem de finalistas de uma escola, para as ilhas Canárias. Depois de várias consultas chegou à conclusão que essa viagem terá uma despesa fixa de 2000 euros, mais 100 euros por aluno, já incluindo todas as despesas. O sr. Paulo prevê fixar o preço por pessoa em 160 euros.

a) Organiza na tua calculadora gráfica, recorrendo à aplicação "*Listas e Folha de Cálculo*" a seguinte tabela:

Nº de alunos	Receita da Agência	Despesa da Agência
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		
50		
55		
60		
65		
70		

b) Recorrendo à aplicação "*Dados e Estatística*", traça a função inerente receita da agência em função do número de alunos.

c) Representa graficamente essa função, recorrendo à aplicação "*Gráficos*".

d) Faz um estudo semelhante relativo à despesa da agência em função do número de alunos.

e) Qual é o menor número de alunos que terão que ir à visita para que a agência tenha lucro? Justifica a tua resposta.

A tarefa H-CE2 foi realizada no final da unidade de Gráficos de Funções Afins, integrada no domínio das Funções, Sequências e Sucessões (FSS8). A mesma teve como objetivo que os alunos apresentassem um modelo matemático que relacione a receita da agência em função do número de alunos e um modelo matemático que relacione a despesa da agência em função do número de alunos, interpretando e analisando criticamente os dados. Neste sentido, pretendeu-se modelar e interpretar situações que envolvem funções afim e linear, fazendo-se um reconhecimento fundamentado numa avaliação formativa (Clements, 2008; Ribeiro, 1990; Pacheco, 2001) do que os alunos tinham aprendido no 8º ano de escolaridade, relativamente ao domínio de Funções, Sequências e Sucessões (FSS8).

Na questão 1, alínea a), para o preenchimento da tabela, os alunos deveriam recorrer à aplicação *"Listas e Folha de Cálculo"*, colocar o número de alunos indicado no enunciado e proceder de modo análogo a uma folha de cálculo como o Excel, tendo em conta que o modelo matemático que relaciona a receita da agência em função do número de alunos é dada pela expressão $y = 160x$ (reta que representa uma função linear) e o modelo matemático que relaciona a despesa da agência em função do número de alunos é dada pela expressão $y = 2000 + 100x$ (reta que representa uma função afim).

Na questão 1, alínea b), os alunos deveriam de ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis e definir como variável independente, o número de alunos e variável dependente, a receita da agência. Neste sentido, facilmente comprovavam que os pontos obtidos pertencem à reta que representa a função linear $f(x) = 160x$, sendo este o modelo que se adapta à situação descrita.

Na questão 1, alínea c), os alunos deveriam de escolher uma janela de visualização que se adaptasse à situação de modo a ter uma ideia global da representação gráfica da função (Consciência, 2003).

Na questão 1, alínea d), para traçar a função inerente à despesa da agência em função do número de alunos, recorrendo à aplicação "*Dados e Estatística*", os alunos deveriam de ter em atenção a relação de dependência entre as variáveis e definir como variável independente, o número de alunos e variável dependente, a despesa da agência. Neste sentido, facilmente comprovavam que os pontos obtidos pertencem à reta que representa a função afim $f(x) = 100x + 2000$, sendo este o modelo que se adapta à situação descrita. Posteriormente, ao representar graficamente a função, através da aplicação "*Gráficos*", tal como na alínea c), os alunos deveriam de definir uma janela de visualização que se ajustasse à situação, de modo a ter uma perceção global do gráfico.

Na questão 1, alínea e), os alunos deveriam de representar graficamente, em simultâneo, as duas funções. Para determinar o menor número de alunos que teriam que ir à visita para a agência ter lucro, os alunos deveriam de construir uma tabela, aferindo que seriam 34 alunos.

Anexo 13 - TAREFA I-CE2: Uma abordagem aos sistemas de duas equações do 1ºgrau com duas incógnitas

Domínios: Álgebra (ALG8)

Objetivo: Reconhecer e resolver equações literais em ordem a uma das incógnitas; Resolver analiticamente e interpretar/resolver geometricamente, sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas;

Natureza da tarefa: Problema

Contexto da tarefa: Real

Grau de desafio: Desafio elevado

Grau de estrutura: Fechada

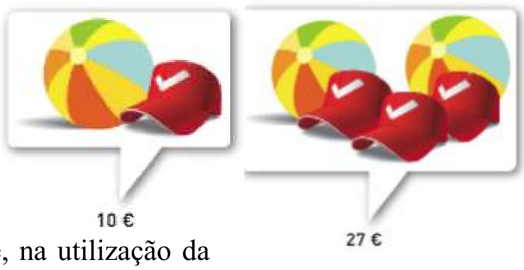
Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual

Tempo: 30 min

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Tendo em conta as duas figuras:

a) Representa através de duas equações do 1º grau, com 2 incógnitas, a informação dada nas duas figuras, sendo $\boldsymbol{x}$ o preço de uma bola e $\boldsymbol{y}$ o preço de um boné, em euros.



b) Determina o preço de um boné e de uma bola, através da calculadora gráfica. Num pequeno relatório evidencia todas as tuas descobertas na resolução da tarefa. Não te esqueças de mencionar todos os constrangimentos que sentiste, na utilização da calculadora gráfica.

c) Confirma analiticamente os resultados obtidos na alínea anterior.

Síntese:

Um **sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas** $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ trata-se de um sistema de duas equações numéricas redutíveis à **forma canónica**:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

onde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representam as incógnitas e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b'}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{c'}$ são as constantes, não sendo simultaneamente nulas.

A tarefa I-CE2 foi proposta aos alunos na unidade de Equações e Sistemas de Equações, integrada no domínio da Álgebra (ALG8), depois de terem sido abordadas as equações literais do 1º grau. No entanto, este tema já tinha sido antecipado no 7.º ano de escolaridade, com a resolução da alínea b) da tarefa C-CE1. Portanto, quando os alunos iniciaram a tarefa I-CE2, já tinham conhecimento sobre equações do 1º grau, como sendo uma igualdade entre duas funções, equações literais do 1º grau, função linear, função afim, variável dependente e variável independente. O objetivo desta tarefa centrou-se no reconhecimento e resolução de equações literais em ordem a uma das incógnitas e resolução analítica e interpretação gráfica de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Através de um ensino exploratório (Canavarro, 2011; Ponte, 2005), a utilização da calculadora gráfica na interpretação gráfica de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas deveria facilitar a sua resolução analítica.

Na questão 1, alínea a) os alunos deveriam de ter facilidade em transcrever o enunciado do problema para linguagem simbólica matemática, tendo em conta o significado pessoal em relação ao conhecimento que tinham sobre equações literais do 1º grau.

Na questão 1, alínea b) os alunos deveriam de evidenciar o significado pessoal inerente ao conhecimento que tinham sobre variável dependente, variável independente, as retas que representam as funções afim e equações literais do 1º grau, resolvendo em ordem a *y* ($y = -x + 10$ e $y = -\frac{2}{3}x + 9$) cada uma das equações da alínea a), ao que Duval (2006) denomina por tratamento. A seguir deveriam inserir essas retas na calculadora gráfica, como representantes de funções afim, onde *x* representa a variável independente e *y* a variável dependente, tendo em conta a janela de visualização - Zoom que se ajustasse à situação. Aí procederiam à determinação do ponto de interseção entre as duas retas, que coincidia com o preço de uma bola e de um boné, respetivamente.

Na questão 1, alínea c) tendo em conta a resolução em ordem a *y* ($y = -x + 10$ e $y = -\frac{2}{3}x + 9$) de cada uma das equações da alínea a), os alunos deveriam de resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita. Isto é, fazendo emergir o facto de que uma equação do 1º grau se trata de uma igualdade entre duas funções, deveriam de igualar o 2º membro da primeira equação ao 2º membro da segunda equação e determinar o valor de *x*, respeitante ao preço da bola. A seguir deveriam de substituir o valor de *x* em qualquer uma das equações iniciais para determinar o valor da variável *y,* correspondente ao valor do boné.

Anexo 14 - TAREFA J-CE2: Interpretação geométrica e analítica de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS8); Álgebra (ALG8);

Objetivo: Interpretar geometricamente e analiticamente os sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, num referencial cartesiano e reconhecer que um tal sistema ou não possui soluções («sistema impossível»), ou uma única solução («sistema possível e determinado») ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das equações equivalentes do sistema («sistema possível e indeterminado»);

Natureza da tarefa: Exploração;

Contexto da tarefa: Matemática Pura;

Grau de desafio: Desafio reduzido;

Grau de estrutura: Aberta;

Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;

Tempo: 90 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Representa graficamente no mesmo referencial, as retas associadas a cada uma das equações, representadas no seguinte sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3 - y = 2x \end{cases}$

a) Qual a posição relativa das retas?

b) O que podes observar relativamente ao declive e ordenada na origem de cada uma das retas?

c) Resolve analiticamente o sistema. O que concluis?

Síntese:

Um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas, diz-se________________ se as retas que o representam são_________________, tendo ______________ declive e ________________ordenada na origem. O sistema ____________ solução.

2. Representa graficamente no mesmo referencial, as retas associadas a cada uma das equações, representadas no seguinte sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ -4 + 2y = -2x \end{cases}$

a) Qual a posição relativa das retas?

b) O que podes observar relativamente ao declive e ordenada na origem de cada uma das retas?

c) Resolve analiticamente o sistema. O que concluis?

Síntese:

Um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas, diz-se____________________ se as retas que o representam são_________________, tendo ______________ declive e _______________ordenada na origem. O sistema tem _____________________ de soluções.

3. Representa graficamente no mesmo referencial, as retas associadas a cada uma das equações, representadas no seguinte sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+\ y=3 \end{cases}$

a) Qual a posição relativa das retas?

b) O que podes observar relativamente ao declive e ordenada na origem de cada uma das retas?

c) Resolve analiticamente o sistema. O que concluis?

4. Representa graficamente no mesmo referencial, as retas associadas a cada uma das equações, representadas no seguinte sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ -2+\ y=x \end{cases}$.

a) Qual a posição relativa das retas?

b) O que podes observar relativamente ao declive e ordenada na origem de cada uma das retas?

c) Resolve analiticamente o sistema. O que concluis?

Síntese:

Um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas, diz-se _________________________se as retas que o representam são_________________, tendo ___________declive e _______________ ou _______________ordenada na origem. O sistema tem ________________ solução.

A tarefa J-CE2 foi realizada na aula seguinte à realização da tarefa I-CE2, onde os alunos consolidaram a resolução de equações literais do 1º grau em ordem a uma das incógnitas e aprenderam interpretar geometricamente e a resolver analiticamente, sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Através de um ensino exploratório (Canavarro, 2011; Ponte, 2005; Stein et al., 2008), com a tarefa J-CE2 objetivava-se interpretar geometricamente e analiticamente os sistemas de duas equações do 1º grau num referencial cartesiano, reconhecendo que um tal sistema ou não possui soluções («sistema impossível»), ou uma única solução («sistema possível e determinado») ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta, definida por uma das equações equivalentes do sistema («sistema possível e indeterminado»).

Em todas as questões da tarefa J-CE2, para representar graficamente as retas associadas a cada uma das equações, os alunos deveriam de mobilizar os procedimentos realizados anteriormente, sobre retas que representam funções afim, variável dependente, variável independente e equações literais do 1º grau. Assim deveriam de resolver em ordem a *y* cada uma das equações literais do 1º grau e inserir as mesmas na calculadora gráfica. Posteriormente, na alínea a) deveriam de fazer emergir os seus conhecimentos sobre retas paralelas, coincidentes e concorrentes no domínio da Geometria e relacionar os mesmos na alínea b), com os conceitos aprendidos sobre declive e ordenada na origem de uma reta, no domínio das Funções, Sequências e Sucessões. Na alínea c), tendo em conta a resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que aprenderam com a resolução da tarefa anterior (I-CE2) e a classificação de equações do 1º grau, com uma incógnita, que aprenderam no 7.º ano, no domínio da Álgebra, os alunos deveriam de ter a capacidade de correlacionar (Coulombe & Berenson, 2001; Domingos, 1994; NCTM, 2017; Tripathi, 2008) as diferentes etapas da presente tarefa através de *representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas,* compreendendo e conjeturando quando é que um sistema é impossível, possível e determinado e possível e indeterminado, mobilizando esses mesmos conceitos.

Anexo 15 - TAREFA L-CE2: Interpretação geométrica e analítica de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas (aplicação)

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS8); Álgebra (ALG8);

Objetivo: Reconhecer e resolver equações literais em ordem a uma das incógnitas; interpretar geometricamente e analiticamente os sistemas de duas equações do 1º grau num referencial cartesiano e reconhecer que um tal sistema ou não possui soluções («sistema impossível»), ou uma única solução («sistema possível e determinado») ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das equações equivalentes do sistema («sistema possível e indeterminado»);

Natureza da tarefa: Exercício;

Contexto da tarefa: Matemática Pura:

Grau de desafio: Desafio reduzido;

Grau de estrutura: Fechada;

Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;

Tempo: 60 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. Considera a equação $3x + 2y = 6$. Acrescenta uma segunda equação de modo a obteres um sistema cuja representação gráfica corresponda a:

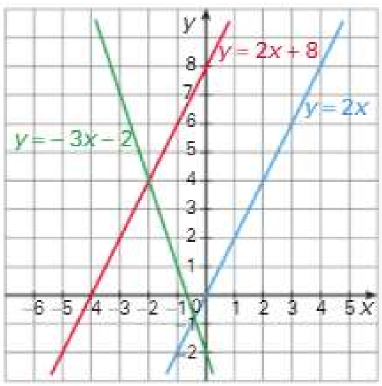
a) um sistema impossível;

b) um sistema possível e determinado;

c) um sistema possível e indeterminado.

2. No referencial da figura ao lado, estão representadas as retas de equações:

$\boldsymbol{y = 2x}$; $\boldsymbol{y = 2x + 8}$; $\boldsymbol{y = -3x - 2}$



a) Utiliza as equações das retas dadas para escrever:

a1) um sistema impossível;

a2) um sistema possível e indeterminado;

a3) um sistema possível e determinado.

b) Sem resolveres analiticamente o sistema,

qual é a solução do sistema: $\begin{cases} y = 2x \\ y = -3x - 2 \end{cases}$

A tarefa L-CE2 foi proposta na aula seguinte à finalização da resolução da tarefa J-CE2 e consequente discussão coletiva. Com a realização desta tarefa (L-CE2) procurou-se confirmar se a investigação anterior com a utilização da calculadora gráfica teve benefícios positivos (NCTM, 2007; Tan, 2012; Tan& Tan, 2015) na resolução destes exercícios (Cobb et al., 2016) avaliando (Clements, 2008; Coll, 1987; Pacheco, 2001; Ponte, 2011) se as estratégias desenvolvidas contribuíram ou não para a aprendizagem dos alunos (Clements, 2008). A mesma teve como objetivo reconhecer e resolver equações literais em ordem a uma das incógnitas; interpretar geometricamente e analiticamente os sistemas de duas equações do 1º grau num referencial cartesiano e reconhecer que um tal sistema ou não possui soluções («sistema impossível»), ou uma única solução («sistema possível e determinado») ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das equações equivalentes do sistema («sistema possível e indeterminado»).

Na questão 1, os alunos deveriam de fazer emergir o conhecimento que tinham sobre as retas que representam as funções afim, variável dependente, variável independente e equações literais do 1º grau, resolvendo em ordem a y $\left(y = -\frac{3}{2}x + 3\right)$ a equação do enunciado. De seguida, tendo em conta o que aprenderam na tarefa J-CE2, deveriam de fazer uma análise em termos do valor do declive e da ordenada na origem e concluir em que condições é que a adição de mais uma equação, corresponde a um sistema impossível, um sistema possível e determinado e um sistema possível e indeterminado.

Na questão 2, alínea a) tendo em conta a aprendizagem realizada na tarefa J-CE2, com o auxilio da *representação icónica* e *representação simbólica* inerente ao enunciado, os alunos deveriam utilizar as equações das retas dadas para escrever um sistema impossível, um sistema possível e indeterminado e um sistema possível e determinado.

Na questão 2, alínea b), dado que os alunos não poderiam recorrer à resolução analítica do sistema e na representação gráfica das retas através da representação icónica fornecida pelo enunciado não era possível percecionar o ponto de interseção das duas retas, a única forma era recorrer à calculadora gráfica para determinar a solução do sistema.

Anexo 16 - TAREFA M-CE2: Resolução de problemas envolvendo funções linear, afim, quadrática e de proporcionalidade inversa

Domínios: Funções, Sequências e Sucessões (FSS8 e FSS9);

Objetivo: Modelar e interpretar situações que envolvem funções linear ($f(x) = ax,\ a \in IR,\ a \neq 0$), afim ($f(x) = ax+b,\ a.\ b \in IR,\ a, b \neq 0$), quadrática ($f(x) = ax^2,\ a \in IR,\ a \neq 0$) e proporcionalidade inversa ($f(x) = \frac{a}{x},\ a \in IR,\ a \neq 0$);

Natureza da tarefa: Problemas de modelação;

Contexto da tarefa: Real;

Grau de desafio: Desafio elevado;

Grau de estrutura: Fechada;

Metodologia de trabalho: Trabalho a pares com relatório individual;

Tempo: 90 min;

Recursos: Calculadora Gráfica; Papel; Lápis.

1. A Maria e a Catarina têm um emprego a tempo parcial, pois ambas estudam numa faculdade privada e os pais não têm capacidades económicas para suportar os custos. A tabela ao lado representa a remuneração (€) da Maria, dependendo do número de horas de trabalho (h).

Por sua vez, a Catarina tem um valor fixo mensal de 10 € e por cada hora de trabalho recebe 6,5 €.

Maria

Horas de Trabalho (h)	Pagamento (€)
2	16
3	24
5	40
9	72

a) Determina a expressão algébrica relativa aos dados da Maria e da Catarina (Representa respetivamente por f e g as funções).

b) Se cada uma das meninas trabalhar 20 horas por semana, qual delas fica beneficiada em termos de remuneração?

c) Quantas horas de trabalho tem de realizar cada menina para receber 400 €.

d) Qual é o número de horas que as duas meninas têm de trabalhar para receber a mesma remuneração? Apresenta o resultado em horas e minutos.

2. Seja g a função, que a cada medida do lado x de uma mesa quadrangular faz corresponder a sua área. Determina a expressão analítica que representa a função g.

3. O filho do professor de Matemática nasceu. O delegado de turma pensou em se oferecer uma prenda no valor de 60 € e pensando no número de alunos que poderiam contribuir na compra da mesma, construiu a seguinte tabela:

Nº de alunos que participam	1	2	3	4	5	6	10
Valor da contribuição (€)	60	30	20	15	12	10	6

Seja h a função, que a cada aluno faz corresponder o respetivo preço a pagar pela prenda. Determina a expressão analítica que representa a função h.

A tarefa M-CE2, foi a última tarefa a ser realizada no âmbito desta experiência de ensino, inerente ao ciclo de experimentação CE2. Por um lado, pretendeu-se modelar e interpretar situações que envolvem funções linear ($f(x) = ax,\ a \in IR,\ a \neq 0$), afim ($f(x) = ax+b,\ a.\ b \in IR,\ a, b \neq 0$), inerentes ao currículo do 8º ano de escolaridade, sendo funções em que os alunos já estavam familiarizados. Procurou-se confirmar se a realização de tarefas anteriores neste domínio (FSS8) facilitaram a resolução destes exercícios (Cobb et al., 2016), avaliando (Clements, 2008; Coll, 1987; Pacheco, 2001; Ponte, 2011) se as estratégias desenvolvidas, nomeadamente o uso da calculadora gráfica, contribuiu (Bittar, 2011; NCTM. 2007; Ponte, 1992a; Tan, 2012; Tan & Tan, 2015) para a aprendizagem dos alunos (Clements, 2008).

Por outro lado, numa perspetiva mais ambiciosa objetivou-se modelar as funções quadrática ($f(x) = ax^2,\ a \in IR,\ a \neq 0$) e de proporcionalidade inversa ($f(x) = \frac{a}{x},\ a \in IR,\ a \neq 0,\ x \neq 0$) pertencentes ao currículo do 9º ano de escolaridade. Continuou-se a promover um ensino exploratório recorrendo ao uso da calculadora gráfica como artefacto mediador (Vygotsky, 1978) no âmbito da génese instrumental e mediação semiótica.

No que respeita à questão 1, alínea a), os alunos deveriam de ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis e definir como variável independente, o número de horas de trabalho e variável dependente, o pagamento, em euros. Neste sentido, a expressão algébrica inerente aos dados da Maria, seria representada pela função linear, $f(x) = 8x$ e a expressão algébrica inerente aos dados da Catarina, seria dada pela função afim, $g(x) = 10 + 6{,}5x$.

Relativamente à questão 1, alínea b), os alunos poderiam determinar analiticamente a imagem de 20, em ambas as funções. Alternativamente, poderiam inserir as funções na calculadora gráfica, tendo em consideração a janela de visualização - Zoom que se ajustasse à situação e recorrer à tabela de ecrã dividido.

Na questão 1, alínea c), os alunos poderiam igualar cada uma das funções a 400 e determinar analiticamente o número de horas de trabalho que cada menina teria de fazer para ganhar essa quantia, através da resolução de uma equação do 1º grau. Por outro lado, também poderiam recorrer à calculadora gráfica através da tabela de ecrã dividido e observar esses valores.

No que concerne à questão 1, alínea d), os alunos poderiam igualar as duas funções, resolvendo analiticamente uma equação do 1º grau ou determinar graficamente o ponto de interseção das duas funções, onde a abcissa do ponto encontrado corresponderia o número de horas que as duas meninas têm de trabalhar para receber a mesma remuneração.

Em termos de conteúdos, no que respeita à questão 2, os alunos tinham conhecimento sobre o conceito de área de um quadrado. Tendo em consideração, a área de um quadrado, pretendeu-se que os mesmos fizessem emergir o significado pessoal sobre esse conceito e conseguissem modelar a situação descrita que se enquadrava na função quadrática, $g(x) = x^2$. Deveriam de concluir que se mantinha, a expressão algébrica da função, mesmo quando usassem a função de arrastamento, ao mover qualquer vértice do quadrado, alterando as dimensões do mesmo. Deveriam ter em atenção a relação de dependência entre as variáveis e definir como variável independente, a medida do lado da mesa quadrangular e como variável dependente, a área da mesa quadrangular.

Relativamente à questão 3, os alunos apenas estavam familiarizados com as funções de proporcionalidade direta. Tendo em conta a leitura da tabela e definindo como variável independente, o número de alunos que participam na compra da prenda e variável dependente, o valor da contribuição por parte de cada aluno, deveriam de constatar que que o produto das duas variáveis era sempre constante (igual a 60) e que correspondia ao valor total do preço da prenda. Poderiam enveredar por fazer o tratamento analítico ou gráfico, da situação, modelando a função em termos de proporcionalidade inversa: $h(x) = \frac{60}{x}, x \neq 0$.