拡張されたナラヤナ多項式の合成積について

On convolutions of extended Narayana polynomials

田川 裕之 *

TAGAWA Hiroyuki

(和歌山大学教育学部)

2020 年 10 月 16 日受理

ナラヤナ多項式は, カタラン数の拡張となる多項式である. 本稿では, ナラヤナ多項式の拡張となる多項式の合成積の証明を目的とする. 一般に, 母関数のべき乗における係数として合成積は定義されるため, 合成積の分析には母関数の利用が有効ではあるが, 本稿では, 二重和の等式, 超幾何級数の等式等の計算を主体とした手法を用いる.

1 序

以下, $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合, $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする. まず, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(a)_n = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1}(a+i) & \text{if } n > 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{1}{\prod_{i=0}^{-n-1}(a+n+i)} & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

とおき, $r \geq 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_{r-1} \in \mathbb{C}$ に対して

$${}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_{r-1} \end{matrix}; z\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k \prod_{i=1}^{r}(a_i)_k}{k! \prod_{i=1}^{r-1}(b_i)_k}$$

と定義する. $(a)_n$ はポッホハマー記号, ${}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_{r-1} \end{matrix}; z\right)$ は超幾何級数と呼ばれている. 特に, $(a)_{-1} = \frac{1}{a-1}$ であり, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(a)_n(a+n)_m = (a)_{m+n}$ が成り立っている. また, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ $(n \geq 0)$ に対して

$$\binom{a}{n} = \frac{(-1)^n(-a)_n}{n!}$$

とおく. なお, $\binom{a}{0} = 1$ であり, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$ の場合には

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!} & \text{if } n \leq m, \\ 0 & \text{if } n > m \end{cases}$$

となるので, $\binom{m}{n}$ は二項係数そのものである.

$0 \leq k < n \leq 0$ に対して

$$N_{n,k} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}$$

とおき, さらに, $n \geq 0$ に対して

$$N_0(z) = 1, \quad N_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} N_{n,k} z^k \quad (n \geq 1)$$

*本研究の一部は, JSPS 科研費 JP16K05060 の助成を受けたものです.

と定義する．$N_{n,k}$ はナラヤナ数 (Narayana number), $N_n(z)$ はナラヤナ多項式 (Narayana polynomial) と呼ばれている．例えば

$$N_0(z)=N_1(z)=1,\ N_2(z)=1+z,\ N_3(z)=1+3z+z^2,\ N_4(z)=1+6z+6z^2+z^3$$

であり, 超幾何級数を利用すると, $N_n(z)$ は次のように表せる[1].

$$N_n(z)={}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,-n\\2\end{matrix};z\right).$$

ナラヤナ数 $N_{n,k}$ は, $1,2,\ldots,n$ についての降下点が k 個の 231-回避順列の個数であり, $(0,0)$ から (n,n) への谷の個数が k 個のディック経路の個数とも一致することが知られている（詳細については, 例えば [1] 参照)．また, ディック経路の総数はカタラン数であるので, $N_n(1)$ はカタラン数 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ である．したがって, C_n を超幾何級数で表すと

$$C_n={}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,-n\\2\end{matrix};1\right) \tag{1}$$

であり, この等式は, Chu-Vandermonde identity

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,a\\b\end{matrix};1\right)=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}$$

からも容易に得られる．そこで, [2] で導入した $n,s\geq 0$, $m\geq 1$ に対して定義される拡張されたカタラン数 $C_n(m,s)$, i.e.

$$C_n(m,s)=\frac{(s+1)_{(m+1)n}}{n!(s+2)_{mn}}$$

を Chu-Vandermonde identity を利用して, (1) の拡張となるように超幾何級数で表すことを試みると

$$C_n(m,s)=\binom{n+s}{s}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,-mn\\s+2\end{matrix};1\right) \tag{2}$$

と記述できることが容易にわかる．特に, $C_n(1,0)=C_n$ である．

さて, $r\geq 1$, $n\geq 0$, 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n\\ i_1,i_2,\ldots,i_r\geq 0}}\prod_{k=1}^{r}a_{i_k}$$

は $\{a_n\}$ の (r 次の) 合成積 (convolution) と呼ばれている．言い換えると, $F(x)=\sum_{i\geq 0}a_kx^k$ としたとき, $F(x)^r$ の x^n の係数が合成積である．Narayana polynomial の合成積については, [3] に

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n\\ i_1,i_2,\ldots,i_r\geq 0}}\prod_{k=1}^{r}N_{i_k}(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{r}{n+r}\binom{n-1}{k}\binom{n+r}{k+r}z^k \tag{3}$$

と記載されており, 右辺を超幾何級数で表すと $\binom{n+r-1}{n}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,-n\\r+1\end{matrix};z\right)$ である．また, $C_n(m,s)$ の合成積は, [2] において

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n\\ i_1,i_2,\ldots,i_r\geq 0}}\prod_{k=1}^{r}C_{i_k}(m,s)=\frac{(r(s+1))_{(m+1)n}}{n!(r(s+1)+1)_{mn}} \tag{4}$$

となることが証明されている．

本稿では, $N_n(z)$, $C_n(m,s)$ の拡張となる多項式 $N_{n,m}(s;z)$ を

$$N_{n,m}(s;z)=\binom{n+s}{s}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,-mn\\s+2\end{matrix};z\right)$$

と定義し, $N_{n,m}(s;z)$ の合成積を表す等式であり, (3), (4) の拡張となる次の等式の証明を目的とする．

---

[1] ${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,0\\2\end{matrix};z\right)=1$ に注意

Proposition 1.1. $r, m \geq 1$, $n, s \geq 0$ に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_r\geq 0}} \prod_{k=1}^{r} N_{i_k,m}(s;z) = \binom{n+r(s+1)-1}{n} {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,-mn \\ r(s+1)+1\end{matrix};z\right). \tag{5}$$

なお, 合成積の証明には母関数の利用が一般的であると思われるが, 本稿では, 超幾何級数の等式, 和の等式等を利用した証明を行う．そのため, 計算はかなり複雑になるが, 証明の鍵となる次節で紹介する二重和の等式については, 今後の拡張, 一般化等が期待できる．

以降, 次節において, 鍵となる二重和の等式及び関連した等式の証明を行い, 最終節で Proposition 1.1 を証明する．

2　鍵となる等式

本節では, Proposition 1.1 の証明の鍵となる次の等式の証明を行う．

Proposition 2.1. $m, n \geq 0$, $r \geq 1$, $a, b \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-m)_i(-n)_j(b+m)_j(a)_{i+j}(ra+1)_{ri+rj}(rb+n)_{ri+(r-1)j}}{i!j!(a+1)_j(b+1)_{i+j}(rb)_{ri+rj}(ra+1)_{ri+(r-1)j}} \\ &= \frac{(b-a+m+n)(b-a+1)_{m-1}(r(b-a))_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1}(rb)_n}.\end{aligned} \tag{6}$$

以下, $m, n \geq 0$, $r \geq 1$, $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$ に対して

$$P_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;z) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-m)_i(-n)_j(a)_j(b)_{i+j}(c)_{ri+(r-1)j}(d)_{ri+rj}z^{i+j}}{i!j!(e)_j(f)_{i+j}(g)_{ri+(r-1)j}(h)_{ri+rj}}$$

とおく．特に, (6) の左辺は $P_{m,n}(b+m, a, rb+n, ra+1, a+1, b+1, ra+1, rb, r; 1)$ である．(6) を $m+n$ の帰納法で証明するための鍵となる $P_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;z)$ の関係式は次である．

Lemma 2.2. $m, n, r \geq 1$, $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}&P_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;z) \\ &= P_{m-1,n}(a-1,b,c,d,e,f,g,h,r;z) \\ &\quad - \frac{bz(e+n)(c)_r(d)_r}{ef(g)_r(h)_r} P_{m-1,n}(a,b+1,c+r,d+r,e+1,f+1,g+r,h+r,r;z) \\ &\quad + \frac{bnz(c-g)(c)_{r-1}(d)_r}{ef(g)_r(h)_r} P_{m-1,n-1}(a,b+1,c+r-1,d+r,e+1,f+1,g+r,h+r,r;z).\end{aligned} \tag{7}$$

Proof. まず, (7) の両辺の定数項については, $P_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;z)$ の定数項が 1 であるため一致していることが容易にわかる．したがって, (7) を示すためには, 両辺の z^k $(1 \leq k \leq m+n)$ の係数の一致を示せばよい．そこで, $m, n \geq 0$, $r \geq 1$, $0 \leq k \leq m+n$ に対して

$$\begin{aligned}&P^{(k)}_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;x) \\ &= \frac{(a)_k(b)_k(c)_{(r-1)k}(d)_{rk}}{k!(e)_k(f)_k(g)_{(r-1)k}(h)_{rk}} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i(-k)_i(-m)_i(-n)_{k-i}(c+(r-1)k)_i(-e-k+1)_i x^i}{i!(-a-k+1)_i(g+(r-1)k)_i}\end{aligned}$$

とおく．このとき, 直接の計算により, $P^{(k)}_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;1)$ は, $P_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;z)$ の z^k の

係数であることが容易にわかる. また, $m, n, r \geq 1$, $1 \leq k \leq m+n$ に対して

$$\begin{aligned}
&P_{m,n}^{(k)}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;x)\\
&= P_{m-1,n}^{(k)}(a-1,b,c,d,e,f,g,h,r;x)\\
&\quad - \frac{bx(e+n)(c)_r(d)_r}{ef(g)_r(h)_r} P_{m-1,n}^{(k-1)}(a,b+1,c+r,d+r,e+1,f+1,g+r,h+r,r;x)\\
&\quad + \frac{bnx(c-g)(c)_{r-1}(d)_r}{ef(g)_r(h)_r} P_{m-1,n-1}^{(k-1)}(a,b+1,c+r-1,d+r,e+1,f+1,g+r,h+r,r;x)\\
&\quad + \frac{bn(x-1)(c)_{r-1}(d)_r}{ef(g)_{r-1}(h)_r} P_{m-1,n-1}^{(k-1)}(a,b+1,c+r-1,d+r,e+1,f+1,g+r-1,h+r,r;x) \qquad (8)
\end{aligned}$$

も成立している. 実際, (8) の両辺の x^i $(0 \leq i \leq k)$ の係数の一致については, 直接の計算及び

$$\begin{aligned}
&m(a-i+k-1)(c+i+(r-1)k-1)(e-i+k)+(a-1)(c+i+(r-1)k-1)(e-i+k)(i-m)\\
&-i(a-i+k-1)(c+i+(r-1)k-1)(e+n)+i(a-i+k-1)(c-g)(i-k+n)\\
&+i(a-i+k-1)(g+(r-1)k+i-1)(i-k+n)-(c+i+(r-1)k-1)(e+k-i)(i-k)(i-m)=0
\end{aligned}$$

を利用することにより示せる. したがって, (8) において, $x=1$ とした等式と $P_{m,n}^{(k)}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;1)$ は, $P_{m,n}(a,b,c,d,e,f,g,h,r;z)$ の z^k の係数であることから, (7) の両辺の z^k $(1 \leq k \leq m+n)$ の係数も一致することが分かる. 以上により, (7) は成立する. □

Proof of Proposition 2.1. (6) の左辺を $A_{m,n}(a,b,r)$ とおくと, $A_{m,n}(a,b,r) = P_{m,n}(b+m,a,rb+n,ra+1,a+1,b+1,ra+1,rb,r;1)$ であるので, (7) から $m,n \geq 1$ に対して, 次の関係式が成立している.

$$\begin{aligned}
A_{m,n}(a,b,r) = A_{m-1,n}(a,b,r) &- \frac{ar(a+n+1)(rb+n)_r}{(a+1)(rb)_{r+1}} A_{m-1,n}(a+1,b+1,r)\\
&+ \frac{anr(r(b-a)+n-1)(rb+n)_{r-1}}{(a+1)(rb)_{r+1}} A_{m-1,n-1}(a+1,b+1,r). \qquad (9)
\end{aligned}$$

(9) を利用して, $m+n$ に関する帰納法で, (6) を証明する. $m=0$ のとき, (6) は

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j (ra)_{rj} (rb+n)_{(r-1)j}}{j!(rb+1)_{rj}(ra+1)_{(r-1)j}} = \frac{(b-a+n)(r(b-a)+1)_{n-1}}{(b+n)(rb+1)_{n-1}} \qquad (10)$$

であり, この等式は, すでに [2] の Lemma 2.3 で証明した等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (a)_{(m+1)k} (b)_{mk}}{k!(a+1)_{mk}(b-n+1)_{(m+1)k}} = \frac{(b-a+mn)(a-b+1)_{n-1}}{(b+mn)(-b+1)_{n-1}} \qquad (11)$$

において, (a,b,m) を $(ra, rb+n, r-1)$ と置き換えて整理した等式であるので成立している. また, $n=0$ のときには, (6) は

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{(-m)_i (a)_i}{i!(b+1)_i} = \frac{(b-a+1)_m}{(b+1)_m} \qquad (12)$$

であり, この等式は, Chu-Vandermonde identity そのものであるため成立している. $m+n-1$ まで成立したと仮定する $(m+n \geq 2)$. このとき, (9) と帰納法の仮定, 及び

$$\begin{aligned}
&(a+1)(b-a+m+n-1)(b+m-1)(b+m+n)-a(a+n+1)(b-a+m+n-1)(b+m+n-1)\\
&+an(b-a+m+n-2)(b+m+n)=(a+1)(b-a+m-1)(b-a+m+n)(b+m+n-1)
\end{aligned}$$

を利用して, 直接計算することで, (6) が得られる. □

(7) を利用すると次も成立する.

Corollary 2.3. $m,n \geq 0$, $r \geq 1$, $a,b,c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-m)_i(-n)_j(b+m)_j(a)_{i+j}(rb+n)_{ri+(r-1)j}(c)_{ri+rj}}{i!j!(a)_j(b+1)_{i+j}(rb)_{ri+rj}(c)_{ri+(r-1)j}} = \frac{(b-a+1)_m(rb-c+1)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1}(rb)_n}. \qquad (13)$$

Proof. (13) の左辺を $B_{m,n}(a,b,c,r)$ とおくと, $B_{m,n}(a,b,c,r)=P_{m,n}(b+m,a,rb+n,c,a,b+1,c,rb,r;1)$ であるので, (7) から $m,n\geq 1$ に対して, 次の関係式が成立している.

$$\begin{aligned} B_{m,n}(a,b,c,r) &= B_{m-1,n}(a,b,c,r)-\frac{r(a+n)(rb+n)_r}{(rb)_{r+1}}B_{m-1,n}(a+1,b+1,c+r,r)\\ &\quad+\frac{nr(rb-c+n)(rb+n)_{r-1}}{(rb)_{r+1}}B_{m-1,n-1}(a+1,b+1,c+r,r). \end{aligned} \tag{14}$$

(14) を利用して, $m+n$ に関する帰納法で, (13) を証明する. $m=0$ のとき, (13) は

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j(rb+n)_{(r-1)j}(c)_{rj}}{j!(rb+1)_{rj}(c)_{(r-1)j}}=\frac{b(rb-c+1)_n}{(b+n)(rb)_n} \tag{15}$$

であり, この等式は, [4] に掲載された等式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(a)_{(m+1)k}(b)_{mk}}{k!(a)_{mk}(b-n+1)_{(m+1)k}}=-\frac{(a-b)_n}{(b+mn)(-b+1)_{n-1}} \tag{16}$$

において, (a,b,m) を $(c,rb+n,r-1)$ と置き換えて整理した等式であるので, 成立している. また, $n=0$ のときには, (13) は

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(-m)_i(a)_i}{i!(b+1)_i}=\frac{(b-a+1)_m}{(b+1)_m} \tag{17}$$

であり, この等式も Chu-Vandermonde identity そのものであるため成立している. $m+n-1$ まで成立したと仮定する $(m+n\geq 2)$. このとき, (14) と帰納法の仮定, 及び

$$(b+m-1)(b+m+n)-(a+n)(b+m+n-1)+n(b+m+n)=(b+m+n-1)(b-a+m)$$

を利用して, 直接計算することで, (13) が得られる. □

特に, (6), (13) において, $r=1$ とすると次が得られる.

Corollary 2.4. $m,n\geq 0$, $a,b\in\mathbb{C}$ に対して, 次が成立する.

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-m)_i(-n)_j(b+n)_i(b+m)_j(a)_{i+j}(a+1)_{i+j}}{i!j!(a+1)_i(a+1)_j(b)_{i+j}(b+1)_{i+j}}=\frac{(b-a+m+n)(b-a+1)_{m-1}(b-a)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1}(b)_n}. \tag{18}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-m)_i(-n)_j(b+n)_i(b+m)_j(a)_{i+j}(c)_{i+j}}{i!j!(a)_j(c)_i(b)_{i+j}(b+1)_{i+j}}=\frac{(b-a+1)_m(b-c+1)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1}(b)_n}. \tag{19}$$

なお, (18), (19) を超幾何級数を利用して書き直すと

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(-m)_i(a)_i(b+n)_i}{i!(b)_i(b+1)_i}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,a+i,a+i+1,b+m\\ a+1,b+i,b+i+1\end{matrix};1\right)=\frac{(b-a+m+n)(b-a+1)_{m-1}(b-a)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1}(b)_n}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(-m)_i(a)_i(b+n)_i}{i!(b)_i(b+1)_i}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,a+i,b+m,c+i\\ a,b+i,b+i+1\end{matrix};1\right)=\frac{(b-a+1)_m(b-c+1)_n}{(b+m+n)(b+1)_{m-1}(b)_n}. \tag{21}$$

3 Proposition 1.1 の証明

特に, $s=0$ の場合の $N_{m,n}(0;z)$ を $N_{m,n}(z)$, i.e.

$$N_{m,n}(z)={}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,-mn\\ 2\end{matrix};z\right),$$

で表すことにする. (5) を示すためには, 次が有効である.

Lemma 3.1. $m, r \geq 1$ とする.

(i) $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_r \geq 1}} \prod_{k=1}^{r} N_{i_k,m}(z) = \binom{n-1}{r-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+r, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z\right). \tag{22}$$

(ii) $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_r \geq 0}} \prod_{k=1}^{r} N_{i_k,m}(z) = \binom{n+r-1}{r-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+1, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z\right). \tag{23}$$

Proof. (i) $n < r$ のときには, 両辺ともに 0 となり成立しているので, 以下, $n \geq r$ とする. まず, (22) の右辺を $H_{n,m}^{(r)}(z)$, i.e.

$$H_{n,m}^{(r)}(z) = \binom{n-1}{r-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+r, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z\right),$$

とおき, $2 \leq r \leq n$, $m \geq 1$, $1 \leq a \leq r-1$ に対して

$$\sum_{s=1}^{n-1} H_{s,m}^{(a)}(z) H_{n-s,m}^{(r-a)}(z) = H_{n,m}^{(r)}(z) \tag{24}$$

を証明する. そのためには, $0 \leq k \leq n-r$ に対して, (24) の両辺の z^k の係数が一致することを示せばよい. 以下, (24) の左辺の z^k の係数を $L(k)$ とおく. まず, $H_{n,m}^{(r)}(z)$ の定義から

$$L(k) = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{s-1}{a-1} \binom{n-s-1}{-a+r-1} \frac{(a-s)_j(-ms)_j(-a-n+r+s)_{k-j}(m(s-n))_{k-j}}{j!(k-j)!(a+1)_j(-a+r+1)_{k-j}} \tag{25}$$

である. ここで, $(a-s)_j(-a-n+r+s)_{k-j}$ が分子にかかっていることから, s を $0 \leq s-a-j \leq n-r-k$ を満たす範囲に制限してもよいことに注意して, s を $a+i+j$ と置き換えて, (25) の右辺を整理すると

$$\begin{aligned} L(k) = &\frac{(r-a)(r-a+k+1)_{-k+n-r-1}(r-n)_k(m(a-n))_k}{k!(n-r)!} \\ &\times \sum_{i=0}^{n-k-r} \sum_{j=0}^{k} \frac{(k-n+r)_i(-k)_j(a-k-r)_j(a)_{i+j}(ma+1)_{m(i+j)}(m(a-n)+k)_{mi+(m-1)j}}{i!j!(a+1)_j(a-n+1)_{i+j}(ma+1)_{mi+(m-1)j}(m(a-n))_{mi+mj}} \end{aligned} \tag{26}$$

と書き換えることができる. (6) において, (b, m, n, r) を $(a-n, n-k-r, k, m)$ と置き換えた等式を利用して, (26) を書き直すと

$$\begin{aligned} L(k) &= \frac{(r-a)(r-a+k+1)_{-k+n-r-1}(r-n)_k(m(a-n))_k}{k!(n-r)!} \times \frac{r(-n+1)_{-k+n-r-1}(-mn)_k}{(r-a)(a-n+1)_{-k+n-r-1}(m(a-n))_k} \\ &= \binom{n-1}{r-1} \frac{(-n+r)_k(-mn)_k}{k!(r+1)_k} = (24) \text{ の右辺の } z^k \text{ の係数} \end{aligned}$$

となるので, (24) が成立する. 次に, (24) を利用して, r に関する帰納法で (22) を証明する. $r = 1$ のときには, (22) の両辺ともに $N_{n,m}(z)$ となり成立している. $r-1$ まで成立したと仮定する $(r \geq 2)$. このとき, 帰納法の仮定と (24) を利用すると

$$\begin{aligned} (22) \text{ の左辺} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_r \geq 1}} \prod_{k=1}^{r} N_{i_k,m}(z) = \sum_{i_1=1}^{n-1} N_{i_1,m}(z) \sum_{\substack{i_2+\cdots+i_r=n-i_1 \\ i_2,\ldots,i_r \geq 1}} \prod_{k=2}^{r} N_{i_k,m}(z) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n-1} H_{i_1,m}^{(1)}(z) H_{n-i_1,m}^{(r-1)}(z) = H_{n,m}^{(r)}(z) = (22) \text{ の右辺} \end{aligned}$$

となり成立する. (ii) $n=0$ のときには, (23) の両辺ともに 1 となり成立しているので, 以下, $n \geq 1$ とする. (23) の左辺を (22) を利用して書き直すと

$$
\begin{aligned}
(23)\text{ の左辺} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_r\geq 0}} \prod_{k=1}^{r} N_{i_k,m}(z) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_{r-i}=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_{r-i}\geq 1}} \prod_{k=1}^{r-i} N_{i_k,m}(z) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \binom{n-1}{r-i-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+r-i, -mn \\ r-i+1 \end{matrix}; z \right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{r(-n+1)_k(-mn)_k z^k}{k!(k+1)!} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-r+1)_{r-1-i}(-n+k+1)_{r-1-i}}{(r-1-i)!(k+2)_{r-1-i}}
\end{aligned}
$$

Chu-Vandermonde identity を利用して, 整理すると

$$
= \binom{n+r-1}{r-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+1, -mn \\ r+1 \end{matrix}; z \right) = (23)\text{ の右辺}
$$

となり成立する. □

以上の準備の下で Proposition 1.1 の証明を行う.

Proof of Proposition 1.1.
(23) において, r を $s+1$ と置き換えると

$$
\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_{s+1}=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_{s+1}\geq 0}} \prod_{k=1}^{s+1} N_{i_k,m}(z) = \binom{n+s}{s} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+1, -mn \\ s+2 \end{matrix}; z \right) = N_{n,m}(s;z)
$$

と記述できるので

$$
\begin{aligned}
(5)\text{ の左辺} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_r\geq 0}} \prod_{k=1}^{r} N_{i_k,m}(s;z) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ i_1,i_2,\ldots,i_r\geq 0}} \prod_{k=1}^{r} \Bigg(\sum_{\substack{j_1^{(k)}+j_2^{(k)}+\cdots+j_{s+1}^{(k)}=i_k \\ j_1^{(k)},j_2^{(k)},\ldots,j_{s+1}^{(k)}\geq 0}} \prod_{u=1}^{s+1} N_{j_u^{(k)},m}(z) \Bigg) \\
&= \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_{r(s+1)}=n \\ j_1,j_2,\ldots,j_{r(s+1)}\geq 0}} \prod_{k=1}^{r(s+1)} N_{j_k,m}(z)
\end{aligned}
$$

再度, (23) から

$$
= \binom{n+r(s+1)-1}{n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n+1, -mn \\ r(s+1)+1 \end{matrix}; z \right) = (5)\text{ の右辺}
$$

が成り立つ. したがって, 本稿の目的である (5) の成立が証明された. □

参考文献

[1] 石川雅雄, “二項係数の代数的側面”, 数学セミナー 2020 年 7 月号, 18-24.

[2] 田川裕之, “拡張されたカタラン数の合成積について”, 和歌山大学教育学部紀要-自然科学-, 第 70 集 (2020), 11-15.

[3] https://math.stackexchange.com/questions/1997791/convolution-of-narayana-polynomials

[4] http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/03/01/05/0018/