Fibonaccin luvut

LuK-tutkielma
Karri Pääkkönen
2435521
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2018

Sisältö

Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan Fibonaccin lukuihin. Tarkoituksena on antaa rekursiivinen määritelmä Fibonaccin luvuille ja tutkia niitä lukuteorian näkökulmasta. Lisäksi tutkitaan Fibonaccin lukujen yhteyttä kultaiseen leikkaukseen ja Binet'n kaavaan. Tutkielman lopuksi todistetaan Zeckendorfin lause.

1 Historiaa

Leonardo Pisano, joka tunnetaan paremmin nimellä Fibonacci, Oli Italialainen matemaatikko ja yksi keskiajan merkittävimpiä matemaatikoita. Hän sai matematiikan opetuksensa Algerian rantakaupungissa Bugiassa (nykyään Béjaïa) ja matkusti myöhemmin Egyptiin, Kreikkaan, Sisiliaan ja Provenceen. Palattuaan matkoiltaan takaisin syntymäpaikkaansa Pisaan hän julkaisi vuonna 1202 kuuluisimman teoksensa Liber Abacin, jolla hän tutustutti koko Euroopan Hindu-Arabialaiseen lukujärjestelmään. Teoksessaan Fibonacci opetti erilaisten esimerkkien avulla perusalgebraa ja geometriaa, ja miten näitä voitiin soveltaa käytännön ongelmissa. Nykyään hänet tunnetaan parhaiten hänen mukaansa nimetyistä Fibonaccin luvuista, jotka saadaan johdettua teoksessa käsitellystä kaniongelmasta. [4]

1.1 Kaniongelma

Yksi Liber Abacissa käsitellyistä ongelmista liittyy kanien lisääntymiseen ideaalitilanteessa. Ongelma kuuluu seuraavasti:

Mies omistaa kaksi vastasyntynyttä kania, joista toinen on uros ja toinen on naaras. Nämä yhdessä muodostavat yhden kaniparin. Kaniparilla kestää yksi kuukausi kasvaa lisääntymisikäiseksi, minkä jälkeen se synnyttää joka kuukausi uuden kaniparin. Oletetaan, että yksikään kani ei kuole vuoden aikana. Kuinka monta kaniparia on yhteensä vuoden kuluttua?

Taulukossa 1 on kuvattu lisääntymisikäisten kaniparien, vastasyntyneiden kaniparien ja kaikkien kaniparien lukumäärän kasvu vuoden aikana.

Jos kaniparit ovat syntyneet kuukaudella n, he kasvavat lisääntymisikäisiksi kuukaudella $n + 1$ ja synnyttävät jälkeläisiä kuukaudesta $n + 2$ alkaen. Kuten taulukosta nähdään, niin kaniparien lukumäärä halutulla kuukaudella saadaan kahden aiempien kuukausien lukumäärien summana. Näin saadaan muodostettua rekursioyhtälö

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n,$$

Taulukko 1: Kaniparien lisääntyminen

Kuukausi	Vastasyntyneet	Lisääntymisikäiset	Yhteensä
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55
11	34	55	89
12	55	89	144

jossa alkutermit ovat $K_1 = 1$ ja $K_2 = 1$. Taulukon perusteella kanipareja on vuoden kuluttua yhteensä 144 kappaletta eli $K_{12} = 144$.

2 Määritelmä ja ominaisuuksia

2.1 Fibonaccin luvut

Aiemmin todettiin, että kaniparien lukumäärä millä tahansa kuukaudella vastaa kahden edeltävän kuukauden kaniparien lukumäärän summaa. Tämän perusteella saadaan muodostettua rekursiivinen määritelmä Fibonaccin luvuille.

Määritelmä 2.1. Asettamalla alkuarvoiksi $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$ saadaan rekursioyhtälön

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad n \geq 0$$

avulla muodostettua lukujono $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$. Jonoa kutsutaan *Fibonaccin lukujonoksi* ja sen yksittäisiä lukuja kutsutaan *Fibonaccin luvuiksi.*

Fibonaccin lukujonolle voidaan vaihtoehtoisesti asettaa alkuarvoiksi $F_1 = 1$ ja $F_2 = 1$, jolloin rekursioyhtälö alkaa indeksistä $n \geq 1$. Eri alkuarvot eivät ole ristiriidassa keskenään, sillä $F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$. Tässä tutkielmassa lukujono on asetettu alkamaan luvusta $F_0 = 0$.

2.2 Suhteelliset alkuluvut

Määritelmä 2.2. Lukuja $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ kutsutaan *suhteellisiksi alkuluvuiksi*, jos

$$\text{syt}(m, n) = 1.$$

Lause 2.3. *Jos $n \geq 1$, niin*

$$\text{syt}(F_n, F_{n+1}) = 1$$

Todistus. [1, s. 286-287]. Olkoon $d = \text{syt}(F_n, F_{n+1})$. Koska $d \mid F_n$ ja $d \mid F_{n+1}$, niin
$d \mid F_{n+1} - F_n$. Nyt

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad \text{eli} \quad F_{n-1} = F_{n+1} - F_n.$$

Näin ollen $d \mid F_{n-1}$. Vastaavasti $d \mid F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$, $d \mid F_{n-3}$, $d \mid F_{n-4}, \cdots$, kunnes lopulta päästään tulokseen $d \mid F_1 = 1$. Näin ollen $d = 1$ eli

$$\text{syt}(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

□

2.3 Jaollisuusominaisuuksia

Todistetaan seuraavaksi Fibonaccin luvuille ominainen identiteetti, jota voidaan hyödyntää myöhemmissä todistuksissa.

Lemma 2.4. *Jos $m \geq 1$ ja $n \geq 0$, niin*

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Todistus. [2, s. 3-4]. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Nyt

$$\begin{aligned} F_{m+0} &= F_{m-1}F_0 + F_mF_1 \\ &= F_{m-1} \cdot 0 + F_m \cdot 1 \\ &= 0 + F_m = F_{m+0} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= F_{m-1}F_1 + F_mF_2 \\ &= F_{m-1} \cdot 1 + F_m \cdot 1 = F_{m+1}. \end{aligned}$$

Oletetaan että väite pätee aina, kun $n = 0, 1, \ldots, k-1, k$. Tällöin

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1} \quad \text{ja} \quad F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k.$$

Lisäämällä nämä kaksi yhtälöä toisiinsa saadaan

$$\begin{aligned} F_{m+k} + F_{m+(k-1)} &= F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1} + F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k \\ &= F_{m-1}F_k + F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_{k+1} + F_mF_k \\ &= F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k). \end{aligned}$$

Fibonaccin lukujen määritelmän nojalla saadaan

$$F_{m+(k+1)} = F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2}$$

eli väite pätee myös silloin, kun $n = k+1$. Induktioperiaatteen nojalla väite pätee aina, kun $m \geq 1$ ja $n \geq 0$. □

Lause 2.5. *Jos* $m \geq 1, \ n \geq 0$ *ja* $m \mid n$, *niin*

$$F_m \mid F_n.$$

Todistus. Oletuksen nojalla $n = mk$ jollain $k \geq 0$. Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen. Nyt

$$F_m \mid F_{m \cdot 0} = F_0 = 0.$$

Oletetaan, että $F_m \mid F_{mk}$ jollain luvun k arvolla. Lemman 2.4 nojalla

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}.$$

Koska $F_m \mid F_{mk}$ ja $F_m \mid F_m$, niin $F_m \mid F_{m(k+1)}$. Induktioperiaatteen nojalla $F_m \mid F_n$. □

Korollaari 2.6. *Jos* $m \geq 1$, *niin*

$$F_m \mid F_{mn}.$$

Esimerkki 2.7. Korollaarin 2.6 perusteella luku $F_3 = 2$ jakaa luvut $F_0 = 0, \ F_3, \ F_6 = 8, \ F_9 = 34, \ F_{12} = 144, \cdots$. Toisin sanoen ainakin joka kolmas Fibonaccin luku on parillinen luku.

Lemma 2.8. *Jos* $m = qn + r$, *niin*

$$\mathrm{syt}(F_m, F_n) = \mathrm{syt}(F_r, F_n).$$

Todistus. [1, s. 289]. Lemman 2.4 perusteella

$$\mathrm{syt}(F_m, F_n) = \mathrm{syt}(F_{qn+r}, F_n) = \mathrm{syt}(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n).$$

Korollaarin 2.5 perusteella $F_n \mid F_{qn}$, joten

$$\mathrm{syt}(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) = \mathrm{syt}(F_{qn-1}F_r, F_n).$$

Ratkaistaan ensin $d = \mathrm{syt}(F_{qn-1}, F_n)$. Koska $d \mid F_n$ ja $F_n \mid F_{qn}$, niin $d \mid F_{qn}$. Näin ollen luku d on lukujen F_{qn} ja F_{qn-1} yhteinen tekijä. Lauseen 2.3 perusteella $d = 1$ eli $\mathrm{syt}(F_{qn-1}, F_n) = 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\mathrm{syt}(F_{qn-1}F_r, F_n) = h_1$ ja $\mathrm{syt}(F_r, F_n) = h_2$. Tällöin

$$\begin{aligned} h_1 = 1 \cdot h_1 &= (F_{qn-1}x + F_n y)(F_{qn-1}F_r x_1 + F_n y_1) \\ &= F_r(F_{qn-1}^2 x x_1 + F_{qn-1}F_n y x_1) + F_n(F_{qn-1}x y_1 + F_n y y_1), \end{aligned}$$

jossa $x, y, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Tämän perusteella $h_2 \mid h_1$. Vastaavasti

$$\begin{aligned} h_2 = 1 \cdot h_2 &= (F_{qn-1}x + F_n y)(F_r x_2 + F_n y_2) \\ &= F_{qn-1}F_r(x x_2) + F_n(F_{qn-1}x y_2 + F_r y x_2 + F_n y y_2), \end{aligned}$$

missä $x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$. Näin ollen $h_1 \mid h_2$. Täytyy siis päteä, että $h_1 = h_2$ eli

$$\mathrm{syt}(F_{qn-1}F_r, F_n) = \mathrm{syt}(F_r, F_n) = \mathrm{syt}(F_m, F_n).$$

□

Lause 2.9.

$$\mathrm{syt}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{syt}(m,n)}.$$

Todistus. [1, s. 290]. Oletetaan, että $m \geq n$. Sovelletaan Eukleideen algoritmia luvuille m ja n, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} m &= q_1 n + r_1, && 0 < r_1 < n \\ n &= q_2 r_1 + r_2, && 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, && 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, && 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + 0 \end{aligned}$$

Tässä $r_k = \mathrm{syt}(m, n)$. Lemman 2.8 nojalla

$$\mathrm{syt}(F_m, F_n) = \mathrm{syt}(F_{r_1}, F_n) = \mathrm{syt}(F_{r_1}, F_{r_2}) = \ldots = \mathrm{syt}(F_{r_k}, F_{r_{k-1}}).$$

Koska $r_k \mid r_{k-1}$, niin lauseen 2.5 nojalla $F_{r_k} \mid F_{r_{k-1}}$. Näin ollen

$$\mathrm{syt}(F_{r_k}, F_{r_{k-1}}) = F_{r_k} \quad \text{eli} \quad \mathrm{syt}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{syt}(m,n)}.$$

□

Esimerkki 2.10. $\mathrm{syt}(F_{10}, F_{15}) = F_{\mathrm{syt}(10,15)} = F_5 = 5$.

Esimerkki 2.11. Asettamalla $n = m + 1$ saadaan lauseessa 2.3 todistettu erikoistapaus

$$\mathrm{syt}(F_m, F_{m+1}) = F_{\mathrm{syt}(m,m+1)} = F_1 = 1.$$

Korollaari 2.12. *$m \mid n$ jos ja vain jos $F_m \mid F_n$ kaikilla $m \neq 2$.*

Todistus. Lauseessa 2.5 on jo todistettu, että $F_m \mid F_n$ aina, kun $m \mid n$. Riittää siis todistaa, että $m \mid n$ aina, kun $F_m \mid F_n$ ja $m \neq 2$.

Oletetaan, että $F_m \mid F_n, m \neq 2$. Tällöin $\mathrm{syt}(F_m, F_n) = F_m$. Lauseen 2.9 mukaan $\mathrm{syt}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{syt}(m,n)}$, joten $m = \mathrm{syt}(m, n)$. Näin ollen $m \mid n$. □

Tapaus $m = 2$ suljetaan pois sen vuoksi, että $F_2 = 1 \mid F_1 = 1$, mutta $2 \nmid 1$.

Esimerkki 2.13. Todista, että $3 \mid F_n$ jos, ja vain jos $4 \mid n$.

Todistus. Oletetaan, että $3 \mid F_n$. Koska $F_4 = 3$, niin $F_4 \mid F_n$. Näin ollen korollaarin 2.12 perusteella $4 \mid n$.

Oletetaan, että $4 \mid n$. Tällöin $n = 4k$, $k \geq 0$ eli $F_n = F_{4k}$. Korollaarin 2.6 perusteella $F_4 \mid F_{4k}$. Edelleen $F_4 = 3$, joten $3 \mid F_n$. □

2.4 Alkuluvut

Määritelmä 2.14. Fibonaccin lukuja, jotka ovat myös alkulukuja, kutsutaan *Fibonaccin alkuluvuiksi.*

Ensimmäiset Fibonaccin alkuluvut ovat

$$F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_7 = 13,\ F_{11} = 89,\ F_{13} = 233, \cdots.$$

Ei tiedetä, onko Fibonaccin alukulukuja ääretön määrä. Seuraava lause kuitenkin helpottaa Fibonaccin alkulukujen etsimistä.

Lause 2.15. *Jos $n > 4$ on yhdistetty luku, niin $F_n > 3$ on yhdistetty luku.*

Todistus. Oletuksen perusteella $m \mid n$ jollain $2 < m < n$. Korollaarin 2.12 perusteella $F_m \mid F_n$ jollain $F_2 = 1 < F_m < F_n$ eli F_n on yhdistetty luku. □

Fibonaccin luvut voivat siis olla alkulukuja vain silloin, kun niiden indeksit ovat alkulukuja, lukuunottamatta poikkeuksia $F_2 = 1$ ja $F_4 = 3$. Alkulukua vastaava Fibonaccin luku ei välttämättä ole alkuluku, koska esimerkiksi $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ ei ole alkuluku.

3 Kultainen leikkaus ja Binet'n kaava

3.1 Kultainen leikkaus

Oletetaan että jana on jaettu kahteen osaan siten, että pidemmän osan suhde lyhyempään osaan vastaa koko janan suhdetta pidempään osaan. Merkitään pidemmän osan pitudeksi a ja lyhyemmän osan pituudeksi b. Tällöin

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Käytetään merkintää $x = a/b$, jolloin $1/x = b/a$. Tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{eli} \quad x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

Kertomalla yhtälö luvulla x saadaan 2. asteen yhtälö

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

jonka juuret ovat

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ja} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Näin ollen

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Määritelmä 3.1. Lukua $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kutsutaan *kultaiseksi leikkaukseksi.*

Huomautus 3.2. Yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ toinen juuri $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ saadaan muokattua muotoon

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi$$

Käytetään jatkossa tästä juuresta merkintää $\phi = 1 - \varphi$. Kultaisen leikkauksen desimaaliarvo on

$$\varphi = 1,618033\ldots$$

jolloin vastaavasti

$$\phi = -0,618033\ldots$$

Lisäksi luvuille φ ja ϕ pätevät seuraavat laskusäännöt:

$$\varphi + \phi = \varphi + (1 - \varphi) = 1,$$

$$\varphi - \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-1+2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5},$$

$$\varphi \cdot \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1^2-\sqrt{5}^2}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Tutkitaan seuraavaksi peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhdetta. Alla olevaan taulukkoon 2 on listattu näitä suhteita ensimmäisille 12 Fibonaccin luvulle. Taulukosta nähdään, että peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhde lähestyy lukua $1,618033\ldots = \varphi$, kun indeksi n kasvaa rajatta. Näin ollaan löydetty Fibonaccin lukujen ja kultaisen leikkauksen välinen yhteys.

Taulukko 2: Peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhde

n	F_{n+1}/F_n	Desimaaliarvo
1	1/1	1
2	2/1	2
3	3/2	$1,5$
4	5/3	$1,666666\ldots$
5	8/5	$1,6$
6	13/8	$1,625$
7	21/13	$1,615384\ldots$
8	34/21	$1,619047\ldots$
9	55/34	$1,617647\ldots$
10	89/55	$1,618181\ldots$
11	144/89	$1,617977\ldots$
12	233/144	$1,618055\ldots$

Lause 3.3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Todistus. [2, s. 7-8]. Todistetaan ensin, että lukujono $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ suppenee. Nyt $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. jaetaan yhtälö molemmin puolin luvulla F_n, jolloin saadaan

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Koska $F_{n-1} \leq F_n \leq F_{n+1}$ kaikilla $n \geq 1$, niin

$$1 \leq \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \leq 1 + 1 = 2$$

eli lukujono x_n on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Todistetaan tässä vaiheessa, että osajono x_{2n} on aidosti vähenevä lukujono ja osajono x_{2n-1} on aidosti kasvava lukujono. Taulukon 2 perusteella

$$x_1 = 1 < x_3 = 3/2 \quad \text{ja} \quad x_2 = 2 > x_4 = 5/3.$$

Oletetaan, että $x_{2k} > x_{2k+2}$ ja $x_{2k-1} < x_{2k+1}$ jollain $k \geq 1$. Nyt

$$x_{2k+2} = 1 + \frac{1}{x_{2k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2k}}} > 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2k+2}}} = x_{2k+4}$$

ja

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{x_{2k}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2k-1}}} < 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2k+1}}} = x_{2k+3}.$$

Induktioperiaatteen nojalla osajono x_{2n} on aidosti vähenevä ja osajono x_{2n-1} on aidosti kasvava. Lisäksi molemmat lukujonot ovat sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettuja, joten ne suppenevat.

Olkoot $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$ ja $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = b$. Nyt

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{b} = a$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_{2n-2}} = 1 + \frac{1}{a} = b.$$

Tällöin

$$ab = b + 1 = a + 1 \Rightarrow a = b.$$

Lukujonot x_{2n} ja x_{2n-1} suppenevat siis kohti samaa lukua. Näin ollen $1 \leq x_{2n-1} < a < x_{2n} \leq 2$. Nyt $x_{2n-1} \leq x_n \leq x_{2n}$ eli lukujono x_n suppenee myös kohti lukua a. Lukujonon x_n raja-arvolle saadaan ehto

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$\Rightarrow a = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0.$$

Koska luku φ on yhtälön $a^2 - a - 1 = 0$ positiivinen ratkaisu, niin

$$a = \varphi \quad \text{eli} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

$\square$

Esimerkki 3.4. Autonkuljettaja on kulkenut autollaan 89 mailia. Hän tietää, että yksi maili vastaa suunnilleen $1,609$ kilometriä. Miten hän voi helposti arvioida, kuinka monta kilometriä hän on kulkenut?

Ratkaisu. Koska $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = 1,618\ldots$, niin voidaan arvioida, että

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ km} \approx 1 \text{ mi}$$

eli

$$F_n \text{ mi} \approx F_{n+1} \text{ km}.$$

Koska $89 = F_{11}$ ja $144 = F_{12}$, niin

$$89 \text{ mi} = F_{11} \text{ mi} \approx F_{12} \text{ km} = 144 \text{ km}.$$

Autonkuljettaja voi siis muuttaa Fibonaccin lukuja maileista kilometreiksi, jos hän tietää Fibonaccin lukujen yhteyden kultaiseen leikkaukseen.

3.2 Binet'n kaava

Vuonna 1843 ranskalainen matemaatikko Jacques Philippe Marie Binet löysi kaavan, jolla pystyttiin määrittämään Fibonaccin lukuja käyttämällä hyödyksi yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuria. Kyseinen kaava nimettiin hänen mukaansa siitä huolimatta, että toinen ranskalainen matemaatikko Abraham De Moivre oli jo löytänyt sen vuosisataa aiemmin. [5]

Lause 3.5 (Binet'n kaava)**.**

$$F_n = \frac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi}.$$

Todistus. [1, s. 296]. Riittää osoittaa, että kaava toteuttaa Fibonaccin lukujen rekursiivisen määritelmän. Muodostetaan ensin kaavalle rekursioyhtälö. Koska luvut φ ja ϕ ovat yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuria, niin

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad \text{ja} \quad \phi^2 = \phi + 1.$$

Kerrotaan vasen yhtälö luvulla φ^n ja oikea yhtälö luvulla ϕ^n, jolloin

$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n \quad \text{ja} \quad \phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n.$$

Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan muodostettua yhtälö

$$\begin{aligned} \varphi^{n+2} - \phi^{n+2} &= \varphi^{n+1} + \varphi^n - \phi^{n+1} - \phi^n \\ &= \varphi^{n+1} - \phi^{n+1} + \varphi^n - \phi^n. \end{aligned}$$

Jakamalla yhtälö luvulla $\varphi - \phi$ saadaan

$$\frac{\varphi^{n+2} - \phi^{n+2}}{\varphi - \phi} = \frac{\varphi^{n+1} - \phi^{n+1}}{\varphi - \phi} + \frac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi}.$$

Käytetään merkintää $H_n = \frac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi}$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$H_{n+2} = H_{n+1} + H_n, \quad n \geq 0.$$

Näin ollaan muodostettu Binet'n kaavalle rekursioyhtälö, joka muistuttaa Fibonaccin lukujen rekursioyhtälöä. Lisäksi

$$H_0 = \frac{\varphi^0 - \phi^0}{\varphi - \phi} = \frac{1-1}{\varphi - \phi} = \frac{0}{\varphi - \phi} = 0 = F_0$$

ja

$$H_1 = \frac{\varphi^1 - \phi^1}{\varphi - \phi} = \frac{\varphi - \phi}{\varphi - \phi} = 1 = F_1,$$

joten rekursioyhtälöllä $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$ muodostettu lukujono on Fibonaccin lukujono. Näin ollen

$$H_n = F_n = \frac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi}.$$

□

4 Zeckendorfin lause

Määritelmä 4.1. Olkoon $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Summaa

$$n = \sum_{i=1}^{m} F_{k_i} = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m},$$

missä $k_i \geq 2$ ja $k_{i+1} - k_i \geq 2$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, m$, kutsutaan luvun n *Zeckendorfin esitykseksi.*

Zeckendorfin lauseen mukaan jokaiselle positiiviselle kokonaisuluvulle on olemassa yksikäsitteinen Zeckendorfin esitys, toisin sanoen jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan yksikäsitteisesti esittää yhden tai useamman eiperäkkäisen Fibonaccin luvun summana. Todistetaan seuraavaksi muutama lemma, joita tarvitaan Zeckendorfin lauseen todistamiseen.

Lemma 4.2.

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Todistus. Koska $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, niin

$$\begin{aligned}
&F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} \\
=&1 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \ldots + (F_{2n} - F_{2n-2}) \\
=&1 - 1 + F_4 - F_4 + F_6 - F_6 + \ldots + F_{2n-2} - F_{2n-2} + F_{2n} \\
=&F_{2n}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.3.

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Todistus. Nyt

$$\begin{aligned}
&F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} \\
=&(F_3 - F_1) + (F_5 - F_3) + (F_7 - F_5) + \ldots + (F_{2n+1} - F_{2n-1}) \\
=&-1 + F_3 - F_3 + F_5 - F_5 + F_7 - F_7 + \ldots + F_{2n-1} - F_{2n-1} + F_{2n+1} \\
=&F_{2n+1} - 1.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. *Jos $n \geq 2$, niin*

$$F_{n+1} \geq n.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Nyt

$$F_3 = 2 \geq 2 \quad \text{ja} \quad F_4 = 3 \geq 3.$$

Oletetaan, että $F_k \geq k - 1$ ja $F_{k+1} \geq k$ jollain $k \geq 2$. Nyt

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \geq k + k - 1 \geq k + 2 - 1 = k + 1.$$

Induktioperiaatteen nojalla $F_{n+1} \geq n$ kaikilla $n \geq 2$. □

Lause 4.5 (Zeckendorfin lause). *Kaikille $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ on olemassa yksikäsitteinen Zeckendorfin esitys.*

Todistus. [3]. Olkoon $R(n)$ Zeckendorfin esitysten lukumäärä luvulle n ja todistetaan että $R(n) = 1$. Nyt

$$n = \sum_{i=1}^{m} F_{k_i} = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m},$$

missä $k_i \geq 2$ ja $k_{i+1} - k_i \geq 2$ kaikilla $i = 1, 2, \cdots, m$. Koska $1 = F_2$, niin $R(1) = 1$. Nyt

$$n - 1 = (F_{k_1} - 1) + F_{k_2} + \ldots + F_{k_m}.$$

Lemmojen 4.2 ja 4.3 perusteella

$$F_{k_1} - 1 = \begin{cases} F_2 - 1 = 0, & \text{jos } k_1 = 2, \\ F_3 + F_5 + \ldots + F_{k_1 - 1}, & \text{jos } k_1 > 2 \text{ on parillinen,} \\ F_2 + F_4 + \ldots + F_{k_1 - 1}, & \text{jos } k_1 > 2 \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Näin ollen luvulle $n - 1$ saadaan Zeckendorfin esityksiksi

$$n-1 = \begin{cases} F_{k_2} + F_{k_3} + \ldots + F_{k_m}, & \text{jos } k_1 = 2, \\ F_3 + F_5 + \ldots + F_{k_1-1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_m}, & \text{jos } k_1 > 2 \text{ on parillinen,} \\ F_2 + F_4 + \ldots + F_{k_1-1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_m}, & \text{jos } k_1 > 2 \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Voidaan siis arvioida, että

$$R(n) \leq R(n-1), \quad \text{kun} \quad n \geq 2.$$

Koska $F_{n+1} \geq n$ ja $R(F_{n+1}) \geq 1$ kaikilla $n \geq 2$, niin

$$1 \leq R(F_{n+1}) \leq \ldots \leq R(n) \leq \ldots \leq R(2) \leq R(1) = 1.$$

□

Seuraavassa esimerkissä käydään läpi, miten positiivisille kokonaisluvuille voidaan muodostaa Zeckendorfin esityksiä.

Esimerkki 4.6. Määritä luvun 120 Zeckendorfin esitys.

Ratkaisu. Etsitään ensin suurin Fibonaccin luku, joka on pienempi kuin 120. Nyt

$$89 = F_{11} < 120 \quad \text{ja} \quad 144 = F_{12} > 120$$

eli F_{11} on etsimämme luku. Tällöin

$$120 - 89 = 31.$$

Etsitään seuraavaksi suurin Fibonaccin luku, joka on pienempi kuin 31. Tässä tapauksessa $21 = F_8 < 31$ on etsimämme luku ja

$$31 - 21 = 10.$$

Jatketaan näin kunnes erotukseksi saadaan nolla. Tässä tapauksessa

$$10 - 8 = 10 - F_6 = 2 \quad \text{ja} \quad 2 - 2 = 2 - F_3 = 0.$$

Luvun 120 Zeckendorfin esitys on

$$120 = 89 + 21 + 8 + 2 = F_{11} + F_8 + F_6 + F_3.$$

Yleisesti kokonaisluvulle n voidaan etsiä Zeckendorfin esitys seuraavalla algoritmilla:

$$\begin{aligned}
n &= F_{k_1} + r_1 & F_{k_1} &< n < F_{k_1+1} \\
r_1 &= F_{k_2} + r_2 & F_{k_2} &< r_1 < F_{k_2+1} \\
&\vdots \\
r_{m-2} &= F_{k_{m-1}} + r_{m-1} & F_{k_{m-1}} &< r_{m-1} < F_{k_{m-1}+1} \\
r_{m-1} &= F_{k_m} + 0.
\end{aligned}$$

Tällöin $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_{m-1}} + F_{k_m}$. Yllä oleva algoritmi on variaatio *ahneesta algoritmista,* jossa ideana on ratkaista optimointiongelma tekemällä joka vaiheessa sillä hetkellä optimaalinen päätös.

Esimerkki 4.7. Autonkuljettaja on nyt kulkenut autollaan yhteensä 189 mailia. Kuinka monta kilometriä hän on suunnilleen kulkenut?

Ratkaisu. Etsitään ensin luvun 189 Zeckendorfin esitys. Käytetään ahnetta algoritmia, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
189 &= F_{12} + 45 = 144 + 45 & F_{12} &< 189 < F_{13} = 233 \\
45 &= F_9 + 11 = 34 + 11 & F_9 &< 45 < F_{10} = 55 \\
11 &= F_6 + 3 = 8 + 3 & F_6 &< 11 < F_7 = 13 \\
3 &= F_4 + 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen Luvun 189 Zeckendorfin esitys on

$$189 = 144 + 34 + 8 + 3 = F_{12} + F_9 + F_6 + F_4.$$

Esimerkissä 3.4 tehtiin arvio, että

$$F_n \text{ mi} \approx F_{n+1} \text{ km}.$$

Voidaan siis arvioida, että

$$\begin{aligned} 189 \text{ mi} = (F_{12} + F_9 + F_6 + F_4) \text{ mi} &\approx (F_{13} + F_{10} + F_7 + F_5) \text{ km} \\ &= (233 + 55 + 13 + 5) \text{ km} \\ &= 306 \text{ km}. \end{aligned}$$

Autonkuljettaja voi siis muuttaa minkä tahansa positiivisen kokonaisluvun maileista kilometreiksi, jos hän osaa muodostaa niille Zeckendorfin esityksiä.

Lähdeluettelo

[1] David M. Burton: Elementary Number Theory, Sixth Edition, s. 283-302

[2] Tyler Clancy: The Fibonacci Numbers, https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/clancy.pdf

[3] Kuo-Jye Chen: Andrews's argument proves the theory of Zeckendorf, https://sms.math.nus.edu.sg/smsmedley/Vol-34-1/Andrews's argument proves a theorem of Zeckendorf(Kuo-Jye Chen).pdf

[4] J J O'Connor ja E F Robertson: Leonardo Pisano Fibonacci, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci.html

[5] J J O'Connor ja E F Robertson,: Jacques Philippe Marie Binet, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Binet.html