

# 複素 3 次関数写像のランダム性の解析

國 末 浩

## The Analysis of Randomness of 3 Ordered Fractal Complex Mapping

Hirosi KUNISUE

キーワード：フラクタル、複素関数、カタストロフィー、カオス

### 概 要

3 次複素関数  $f(Z) = Z^3 + aZ + C$  のフラクタル写像をおこなった。  $a$  の値は  $-1.0$  から  $-0.1$  まで  $0.1$  間隔で変化させた。  $C$  は複素平面上で実数部分は  $-3.25$  から  $+3.25$  まで、虚数部分は  $-2.29$  から  $+2.30$  までそれぞれ  $0.01$  間隔で変化させた。写像結果を図形表示するために繰り返しの回数、繰り返しを抜けたときの絶対値等を色情報として処理した。この写像のストレンジアトラクターの部分詳しく調べるために、繰り返しの回数と色情報を用いて 2 つの関数を定義し、それらの関数の周期性やランダム性を調べた。

### 1. はじめに

繰り返し写像であるフラクタル写像<sup>1)</sup>に現れるストレンジ・アトラクター<sup>2,3)</sup>の性質を詳しく調べるために、その写像から 2 つのタイプの関数を定義し、それらの関数のランダム性についての解析をおこなった。

フラクタル写像として 3 次の複素関数  $f(Z) = Z^3 + aZ + C$  を採用した。  $a$  は実数係数であり写像が  $x$  軸および  $y$  軸に対して対象となるように初期値の複素数  $C$  の値を変化させた。パラメーター  $a$  値に対する写像は、  $Z_{\text{new}} = Z^3 + aZ + C$  を 1 ループとし、1 ループごとに  $Z_{\text{new}}$  の絶対値を求め、設定した最大値または最小値の範囲を越えたときのループの回数、および一定のループ回数の計算をおこなっても設定した極大値または極小値を越えない場合は、ループを抜け出たときの数値、によって初期値  $C$  に対応するストレンジ・アトラクターの特性を 8 色に色分けし、  $C$  に対応する複素平面上の点にプロットした。関数はこれらの写像から定義した。

この 3 次関数は、数学的には 3 次の複素関数

の解と関係があり、実数関数としては初等カタストロフィー関数の内でコントロールの個数が 2 個の「くさび」の分岐集合の型をしている。カタストロフィー理論はトポロジーを数学以外の科学の分野に応用することが可能であると考えたジーマンやトムら<sup>2)</sup>によって作られたものである。「くさび」の分岐集合の場合、トムの定理では静的モデルのポテンシャルを

$$f: R^2 \times R^1 \rightarrow R \text{ として}$$

$$f(a, b, x) = x^4/4 + ax^2/2 + bx$$

ととる。ここで、  $(a, b)$  はコントロール平面  $R^2$  の点で  $x$  が  $R^1$  の点である。

ポテンシャルを  $x$  で微分して 0 とおくと

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

であり、これをみたく  $(a, b, x)$  の点の集合がトムの定理の曲面  $M$  で、さらに、もう一回微分して 0 とおくと

$$3x^2 + a = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

であり、(1)、(2)の両式を同時にみたくコントロール平面の点  $(a, b)$  の集合が「くさび」のカタストロフィーの分岐集合となっている。これらの関係を図 1 に表した。

これを応用した例として、ジーマンは心臓の鼓動や神経インパルスの伝播について数値的に

(平成10年 9 月17日受理)

川崎医療短期大学 一般教養

Department of General Education, Kawasaki College  
of Allied Health Professions

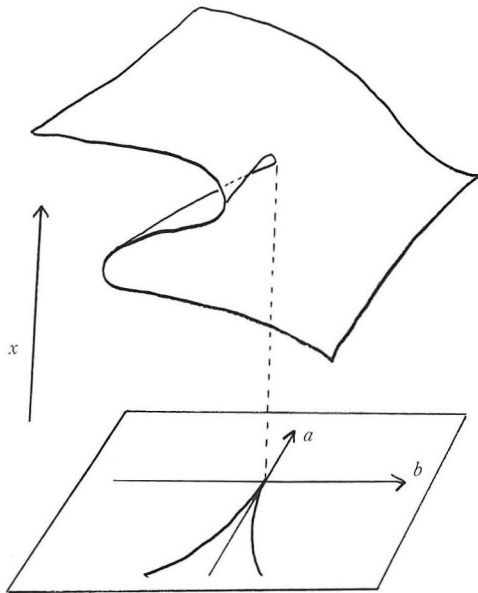


図1 コントロール平面とその面上の点  $(a, b)$  のポテンシャルから得られる  $(a, b, x)$  空間中のくさびの曲面

解析している。野口<sup>2)</sup>は平価の切下げ、恋愛心理、ストライキと騒乱、また心理や行動科学の分野によく現れる驚異の反転（突然の変心、決断）への応用例としてセールスの決め手、恋愛心理、教育ママのジレンマ等を取りあげている。その中で教育ママのジレンマを引用して紹介することにする。図2で  $x$  軸は子供の学業成績を、横軸がその子供のやる気を示し縦軸がママの尻押しを示している。やる気のない子供を母親が強引に尻押ししても、子供のやる気が変わらなければ、尻押しすればするほど子供の成績は悪化する（経路  $R$ ）。つぎにもし何らかの理由で母親の尻押しに子供が反応してやる気を起こしてくると、コントロールは経路  $S$  のように入る。しかし子供の成績は依然良くならない。コントロールの点  $X$  で母親が尻押しをやめて突き放したとすると、子供は点  $X$  で曲がり、点  $Y$  でカタストロフィーを起こして上曲面へジャンプして、好成績をとるようになる。

この論文の目的は繰り返し写像のランダム性を解析することであり、この研究の最終的な目的としてこれらの関数を我々が日常経験する不連続な現象や現実と空想による心理作用などに

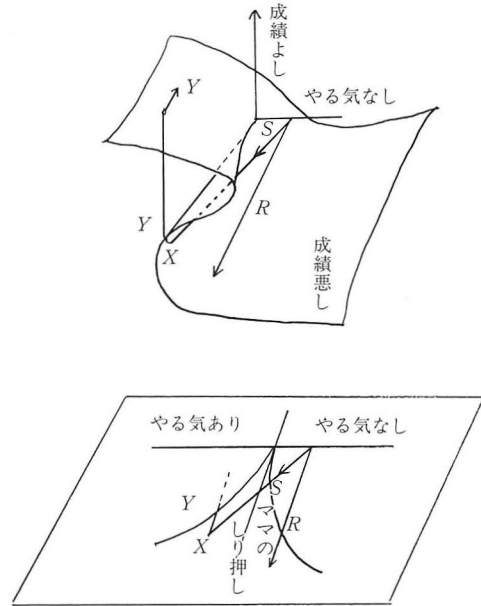


図2 くさびのカタストロフィーの応用  
やる気のない子に良い成績をとらせるには……

適用して、その解析結果からこれらの関数が応用できる自然現象を捜し出して解明することにある。

## 2. 研究方法

### 1) フラクタル写像と定義関数

3次複素関数の定数  $a$  の値は  $-0.1$  から  $-1.0$  まで  $0.1$  間隔で変化させた。初期値の複素数  $C = x + iy$  の実数部分は  $-3.24$  から  $3.24$  まで、虚数部分は  $-2.29$  から  $2.30$  までそれぞれ  $0.01$  の間隔で変化させた。最大値および最小値はそれぞれ  $1.0 \times 10^9$  および  $1.0 \times 10^{-9}$  に設定した。最大値を越える繰り返しの回数は  $100$  回以内であったが、最小値の方は  $5000$  回を越えてもその値を越えなかったため、繰り返しの上限を  $500$  回とした。複素平面の座標を  $x, y$  として、最大値を越えた時は、繰り返しの回数  $V(x, y)$  および  $V$  を  $6$  で割った剰余数に  $1$  を加えた値を色情報  $C(x, y)$  として記録した。  $500$  回繰り返しても最小値を越えない時は、 $V(x, y) = 5$  とし、 $Z_{\text{new}}$  の絶対値に  $10^4$  を掛けた値を  $6$  で割った剰余数に  $1$  を加えた値を色情報  $C(x, y)$  として記録した。

図3に表示した結果は色情報の値0が黒となるようにして、定数 $a$ の値を変えた場合の写像である。図4に表示した結果は図3の中で定数

$a=-0.1$ の場合のものと同様に色情報をそのまま表示したもので、中心部分を3倍に拡大した写像である。

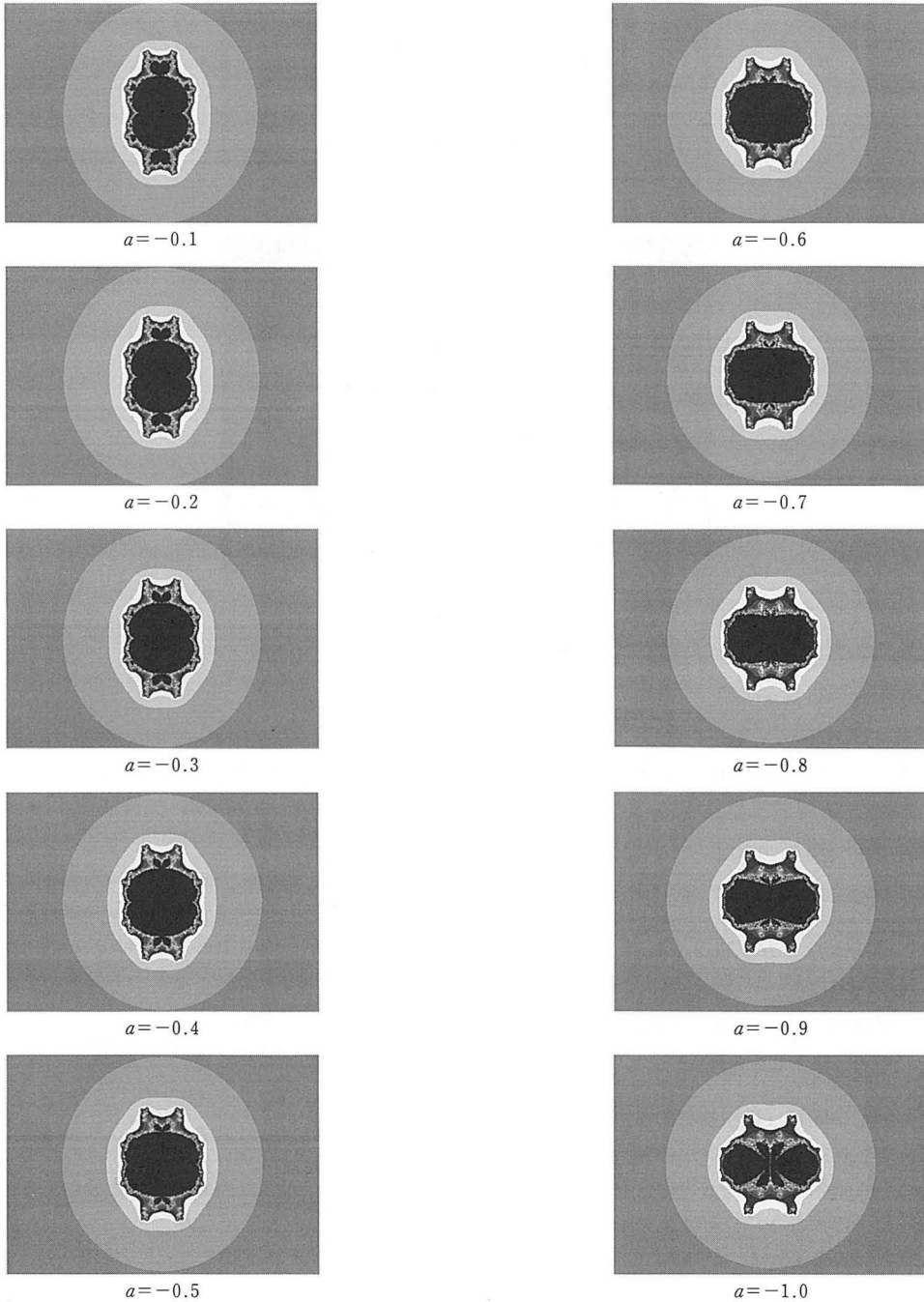
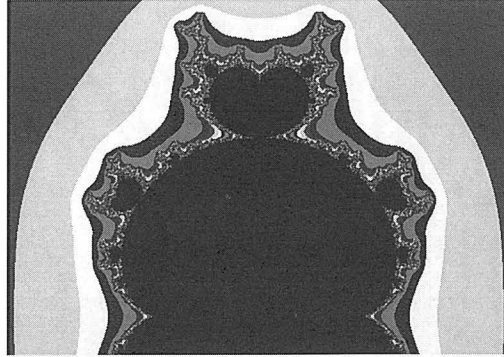
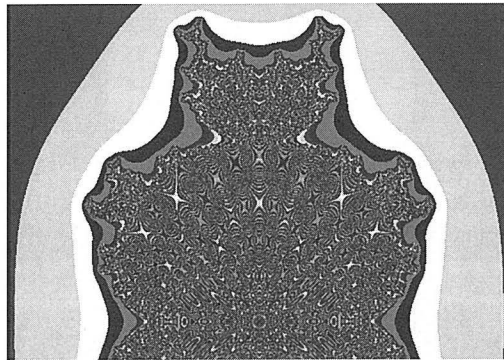


図3 パラメーター  $a$  の名値に対する写像



$a = -0.1$

関数 ABZ に採用したもの



$a = -0.1$

関数 ABZC に採用したもの

図4  $a = -0.1$ の写像；中心部を拡大表示したもの

図3に示した写像を用いてつぎの2つの関数を定義した。

タイプ1 (関数 ABZ)

$$Z(k) = \sum_{M=0}^{M=200} V(M \cos ka_L, M \sin ka_L)$$

$$ABZ(n) = |Z(n)|$$

タイプ2 (関数 ABZC)

$$'Z(k) = \sum_{M=0}^{M=200} C(M \cos ka_L, M \sin ka_L)$$

$$ABZC(n) = |ZC(n)|$$

タイプ1の関数は繰り返しのループを抜け出した回数をもとにし、タイプ2の関数はループを抜け出した時の色情報をもとにした。Mは中心からの動径の大きさに、 $k$ は $x$ 軸からの角度にそれぞれ対応している。 $\pi$ の値は3.1415とした。

## 2) 関数の解析

先に定義した関数についての解析は、写像の

対象性から1つの象限のみで行った。 $k$ の値は0から $90 \times L$ までの整数とし、 $L$ の値は1, 2, 3, 4とした。

図5は $a = -0.1$ ,  $L = 1$ の値に対する2つの関数のグラフとそのフーリエ成分の絶対値をグラフに表したものである。図6は $a = -0.1$ のとき $L = 2, 3, 4$ に対する2つの関数のグラフを表したものである。

$a$ または $L$ の各値に対応する関数について極大点の数 $P$ を数え、ディメンション $D$ を

$$D = (90 \times L + 1) / P$$

で算出した。極大点の間隔の度数分布を求め、その平均値 $M$ を算出した。

$L = 1$ のとき算出したこれらの値を表1, 表2に、パラメーター $a$ の値に対する変動の様子を図7に示した。また、 $L = 1$ のとき変数 $n$ の関

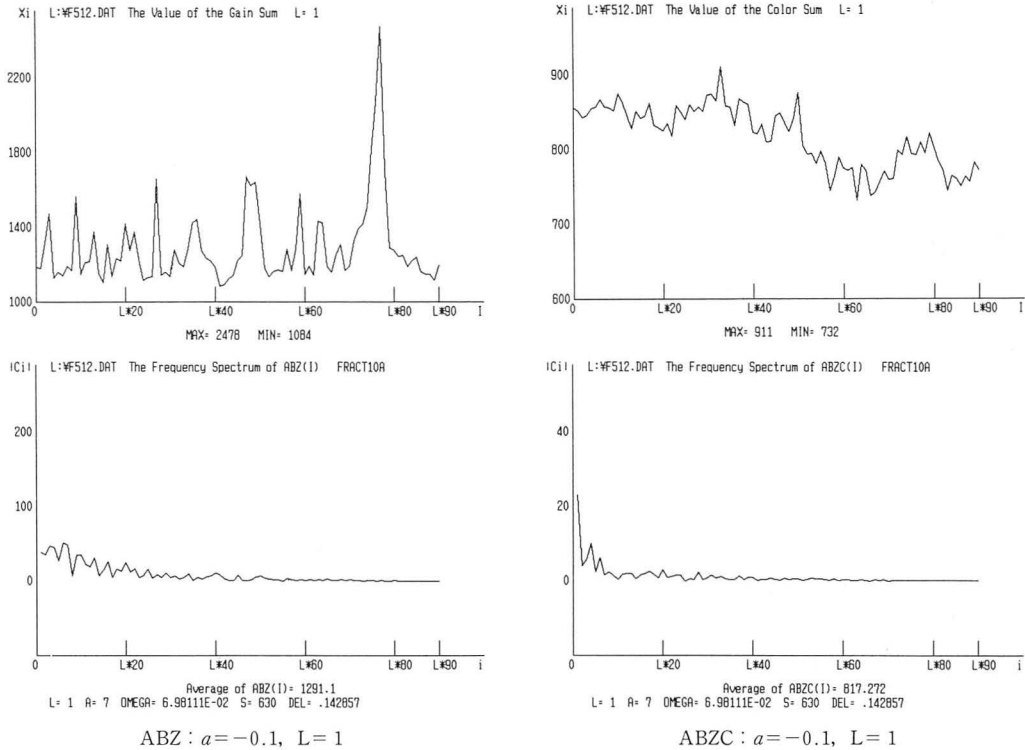


図5 関数 ABZ と ABZC のグラフとそのフーリフ成分の絶対値

数値  $X(n)$  と  $X(n+1)$ ,  $X(n)$  と  $X(n+2)$  および  $X(n)$  と  $X(n+3)$  の関数値の間の相関係数と回帰直線の傾きを最小2乗法で求めた。図8に  $a = -0.1$  のときの相関図と回帰直線を描いた結果を、表3から表6にパラメーター  $a$  の値に対する数値計算結果を、図9、図10にそれらをグラフで示した。

### 3. 結果

これらを調べた結果から、関数について次のことが分かった。

関数  $ABZ$ ,  $ABZC$  のいずれについても  $a$  の値が  $-0.1$  から  $-0.9$  の範囲で  $D$  と  $M$  の値変化の様子はほぼ等しいといえる。

それぞれの関数の  $D$  と  $M$  に関して次の特徴がみられた。

関数  $ABZ$  について

$a$  の値が  $-1.0$  から  $-0.8$  の範囲で単調減少している。

$a$  の値が  $-0.8$  から  $-0.6$  の範囲で単調増加し

ている。

$a$  の値が  $-0.6$  から  $-0.4$  の範囲で単調減少している。

$a$  の値が  $-0.4$  から  $-0.1$  の範囲で4を平均として振動している。

$a$  の値が  $-0.2$  のところで最小値になっている。

$a$  の値が  $-0.9$  から  $-0.7$  の範囲と  $-0.3$  から  $-0.1$  の範囲で  $D > M$  である。

$a$  の値が  $-0.6$  と  $-0.3$  の範囲で  $D < M$  である。

関数  $ABZC$  について

$a$  の値が  $-0.9$  から  $-0.7$  の範囲で単調減少している。

$a$  の値が  $-0.7$  から  $-0.5$  の範囲で単調増加している。

$a$  の値が  $-0.5$  から  $-0.1$  の範囲で3.6を平均として振動している。

$a$  の値が  $-0.4$  のところで最小値になっている。

$a$  の値が  $-0.6$  から  $-0.2$  の範囲で  $D > M$  である。

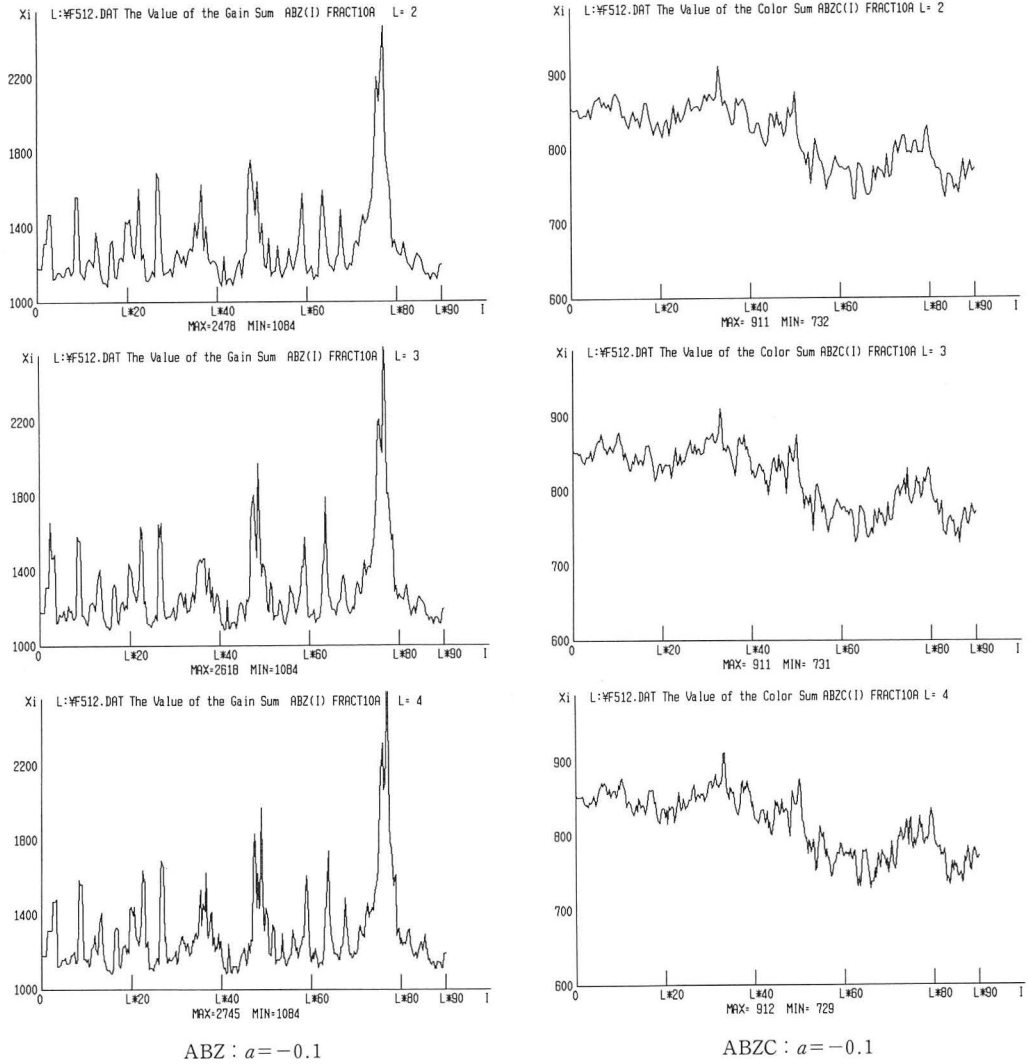


図 6 L= 2, 3, 4 のときの関数 ABZ と ABZC のグラフ

表 1 関数 ABZ : パラメーター  $a$  の次元  $D$  と極大間の平均間隔  $M$

$a$	-1.00	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10
$D$	5.35	3.96	3.64	3.79	4.33	4.14	3.79	4.33	3.50	3.79
$M$	5.50	3.86	3.54	3.78	4.35	4.24	3.83	4.35	3.32	3.70

表 2 関数 ABZC : パラメーター  $a$  の次元  $D$  と極大間の平均間隔  $M$

$a$	-1.00	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10
$D$	3.79	3.96	3.50	3.37	3.50	4.14	3.25	3.96	3.25	3.37
$M$	3.30	3.95	3.48	3.35	3.52	4.05	3.15	3.95	3.19	3.42

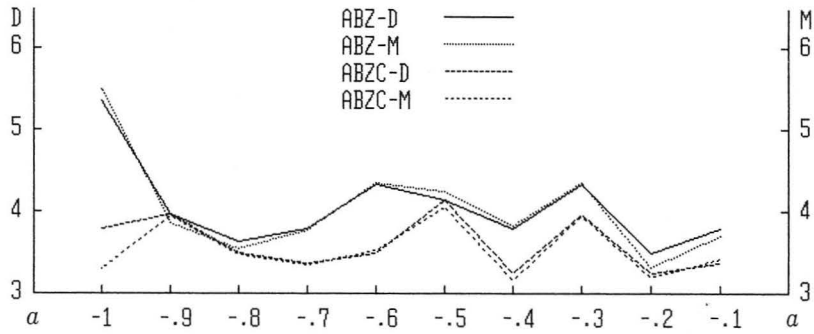
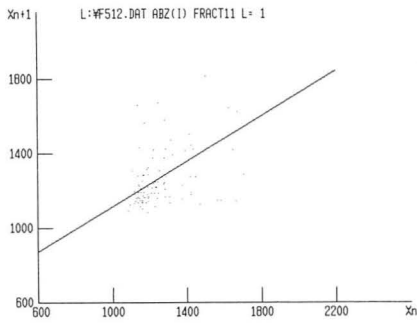
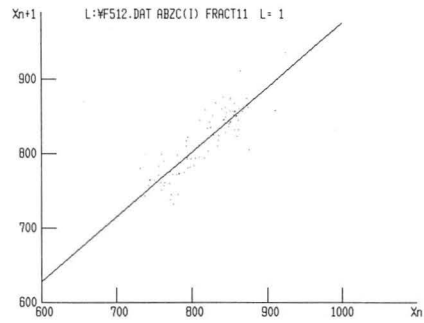


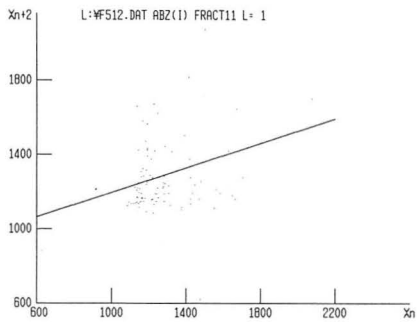
図7 パラメーター  $a$ , 次元  $D$ , 極大間の平均間隔  $M$  の関係図



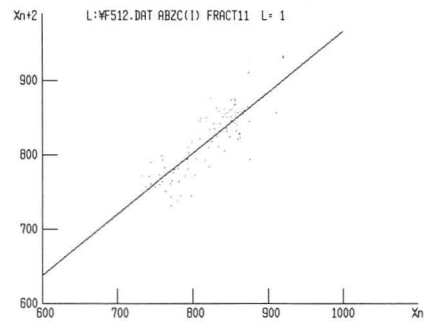
Correlation Coefficient = .606270  
Slope Aa = 0.406 Section B = 508.666



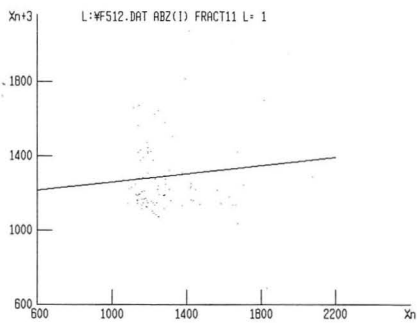
Correlation Coefficient = .866723  
Slope = 0.868 Section = 107.006



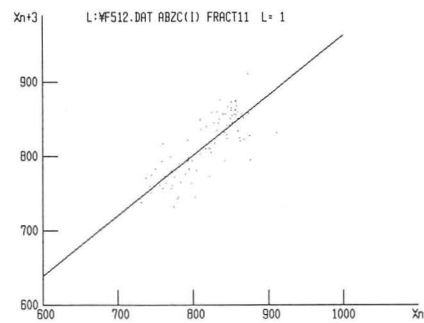
Correlation Coefficient = .321023  
Slope Aa = 0.332 Section B = 863.536



Correlation Coefficient = .818784  
Slope = 0.820 Section = 145.038



Correlation Coefficient = .108428  
Slope Aa = 0.109 Section B = 1151.141



Correlation Coefficient = .801090  
Slope = 0.811 Section = 132.410

ABZ :  $a = -0.1, L = 1$

ABZC :  $a = -0.1, L = 1$

図8 関数 ABZ と ABZC : 離散点間の相関図と回帰直線

表3 関数 ABZ : パラメーター  $a$  と離散点間の相関係数

$a$	-1.00	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10
$X(n) : X(n+1)$	0.895	0.857	0.815	0.800	0.662	0.713	0.670	0.485	0.643	0.606
$X(n) : X(n+2)$	0.770	0.749	0.760	0.742	0.550	0.624	0.487	0.330	0.478	0.331
$X(n) : X(n+3)$	0.640	0.712	0.670	0.699	0.518	0.451	0.406	0.251	0.346	0.108

表4 関数 ABZ : パラメーター  $a$  と離散点間の回帰直線の傾き

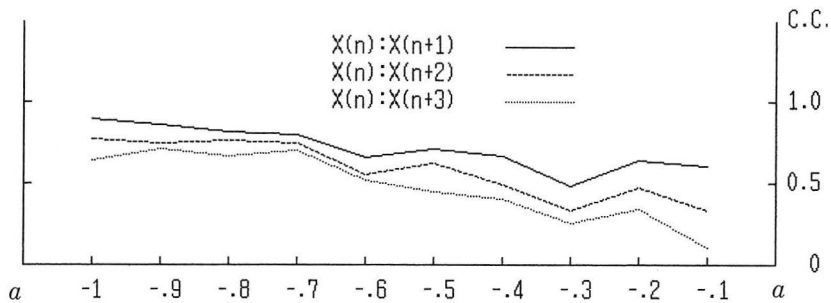
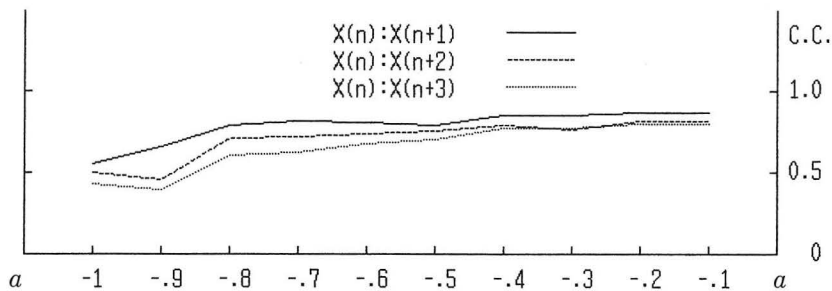
$a$	-1.00	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10
$X(n) : X(n+1)$	0.905	0.853	0.812	0.798	0.660	0.712	0.672	0.483	0.643	0.606
$X(n) : X(n+2)$	0.787	0.742	0.754	0.736	0.548	0.625	0.487	0.329	0.479	0.332
$X(n) : X(n+3)$	0.662	0.703	0.661	0.691	0.514	0.450	0.404	0.250	0.346	0.109

表5 関数 ABZC : パラメーター  $a$  と離散点間の相関係数

$a$	-1.00	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10
$X(n) : X(n+1)$	0.550	0.655	0.793	0.813	0.806	0.786	0.853	0.854	0.867	0.867
$X(n) : X(n+2)$	0.496	0.459	0.710	0.723	0.734	0.756	0.790	0.760	0.818	0.819
$X(n) : X(n+3)$	0.426	0.393	0.604	0.619	0.678	0.700	0.775	0.772	0.801	0.801

表6 関数 ABZC : パラメーター  $a$  と離散点間の回帰直線の傾き

$a$	-1.00	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10
$X(n) : X(n+1)$	0.551	0.656	0.796	0.827	0.812	0.794	0.853	0.843	0.868	0.868
$X(n) : X(n+2)$	0.501	0.461	0.719	0.750	0.744	0.774	0.794	0.745	0.820	0.820
$X(n) : X(n+3)$	0.433	0.396	0.614	0.650	0.687	0.732	0.778	0.753	0.811	0.811

図9 関数 ABZ : パラメーター  $a$  と離散点間の相関係数との関係図10 関数 ABZC : パラメーター  $a$  と離散点間の相関係数との関係



$a$  の値が  $-0.1$  で  $D < M$  である。  
離散点間の相関係数については次の特徴がみられた。

関数  $ABZ$  について

$a$  の値が大きくなるにしたがっていずれも下降傾向があり、相関の度合いは相隣りあう点の間が一番強く、つぎに2離れた点の間、3離れた点の間の順である。

関数  $ABZC$  について

$a$  の値が大きくなるにしたがっていずれも上昇傾向があり、相関の度合いは相隣りあう点の間が一番強く、つぎに2離れた点の間、3離れた点の間の順である。ただ、 $a = -0.3$  のところでのみ3離れた点の間の相関が2離れた点の間の相関より強くなっている。

### 3. 結 語

パラメーター  $a$  の値を0.1間隔で変化させた結果、いずれの関数も  $-0.2$  でカオス<sup>3,4)</sup>の様子を示し、色情報から作った関数は  $-0.4$  でもカオス

の様子を示すことが認められた。隣接する関数値間の相関の度合いは  $a$  の値が  $-0.1$  に近づくほど強くなっていくことが認められた。この研究によって、カオスの様子を示す  $a$  の値がどの付近であるか確認出来たので、今後は  $a$  の値の間隔を小さくしてその値の周辺を調べることをこれからの課題としたい。また、 $-0.1$  から  $0$  までの間についてもより微細に調べること、ディメンジョンの振動が何故生じるのか等についてもこれからの課題としたい。

### 文 献

- 1) ベンワーB・マンデルブロ著、広中平祐監訳：「フラクタル幾何学」, 日経サイエンス社, 193-199, 1985.
- 2) 野口 広：「カタストロフィーの理論」, 講談社, 92-112, 1973.
- 3) J・グリック, 大貫昌子訳：「カオス (新しい科学をつくる)」, 新潮文庫, 209-267, 1991.
- 4) 寺本 英, 広田良吾, 武者利光, 山口昌哉：「無限・カオス・ゆらぎ」, 培風館, 1-28, 1993.

