

ペンドラムテストモデルにおけるパラメータの一意性

I. 正常者の場合

軸 屋 和 明

川崎医療短期大学 医用電子技術科

(平成9年9月17日受理)

Uniqueness of Parameters in Pendulum Test Model

I. Study on Normal Subjects

Kazuaki JIKUYA

*Department of Medical Engineering,
Kawasaki College of Allied Health Professions
Kurashiki, Okayama 701-01, Japan
(Accepted on Sep. 17, 1997)*

Key words : ペンドラムテストモデル, 膝関節運動, パラメータの一意性, 定量的評価

概 要

筆者は、膝関節における痙縮の定量的評価を目標として、これまでにペンドラムテストモデルを導出し、これを利用してシミュレーション結果が実測結果に極力一致するようにパラメータの値を決定しようとしている。本研究では、このようなシミュレーションにおいて、パラメータの値が唯一決まるか否かを正常者について理論的に検討した。その結果、ペンドラムテストにおける膝関節運動の振動形態と筋の物理的性質とを考慮するとともに筋の粘性変化に関する1つの仮定を設けることにより、パラメータの値が唯一決まり得ること、即ち、パラメータの一意性が示された。

1. ま え が き

近年、リハビリテーション工学の分野では、膝関節などにおける痙縮といった異常反射を定量的に評価することが重要な課題の一つとなっている¹⁾。この課題に対しては、膝関節運動の実測結果とその運動のモデルによるシミュレーション結果とを併用して評価するというアプローチが極めて有効である。このような観点から、筆者は、これまでにペンドラムテストにおける膝関節運動を対象としてモデル（以下、誤解の恐れのない限り、ペンドラムテストモデルという）を構成し²⁾、これを利用して実測結果に極力

一致するようにパラメータの値を決定するというシミュレーションを試みている³⁾。

上述したシミュレーションでは、実測結果との残差2乗和が最小となることを条件としてパラメータの値が決定されるが、この際、重要なことは、実測結果に対してパラメータの値が一意に決定できるという理論的な裏付けを持っていることである。

本研究では、評価の基準となる正常者について、パラメータの値が一意に決定できることを理論的に明らかにしたので報告する。

2. 膝関節運動の測定結果

(1) 測定法

本研究における膝関節運動の測定系は、ゴニオメータの代わりに加速度計を用いること以外 Vodovnik らの測定系⁴⁾と同じである。特に、加速度計を用いた理由は、膝関節の動きをより敏感に検出したいからである。図1にこの測定系を示す。被験者は、下腿部をベッド上から突き出した形で座位に保たれる。加速度計は、被験者の膝関節軸の中心から60cm下方に細長い木製平板を用いて取り付けられる。

膝関節運動は、膝関節角度 θ (下腿の中心線がベッドのマット面に対して垂直方向に向いたとき0度)がある値となるまで下腿部を持ち上げたのち、これを自由落下させて引き起こされる。このとき、膝関節は、下腿部にかかる重力、膝関節部の粘弾性、大腿四頭筋とハムストリングスの反射などで決まる振子運動状の減衰振動を呈する。この減衰振動は、上述した加速度計により屈曲、伸展方向の角加速度変化として検出され、パーソナルコンピュータによってCRT画面に表示されると共に、記録紙上に描かれる⁵⁾。

(2) 測定結果

上述した測定系により測定した正常者と軽度、中程度、重度の痙縮患者の典型的な角加速度波形と大腿四頭筋の筋電図の例を図2に示す。(a)は、正常者の角加速度波形と筋電図であり、(b)、(c)および(d)は、それぞれ、軽度、中程度および

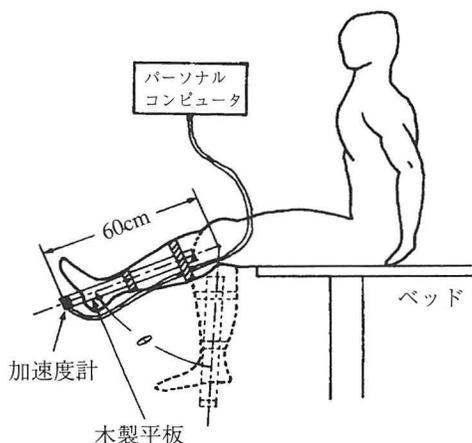


図1 膝関節運動の測定系

重度の痙縮患者の角加速度波形と筋電図である。いずれの波形についても横軸は、下腿部が自由落下し始めた時刻を原点とした時間である。また、角加速度波形の縦軸は、屈曲方向を正にとっている。

正常者では、正弦波状の減衰振動となっており、筋電発火はほとんど認められない。これに対して痙縮患者では、角加速度波形における最初の谷が正常者より大きく、しかも、反射が亢進するにつれて大きくなっている。そして、この谷が生じたあとにおいては、軽度の場合、正常者と同様の周期の正弦波状減衰振動を生じているが、中程度の場合、ほとんど振動が消失

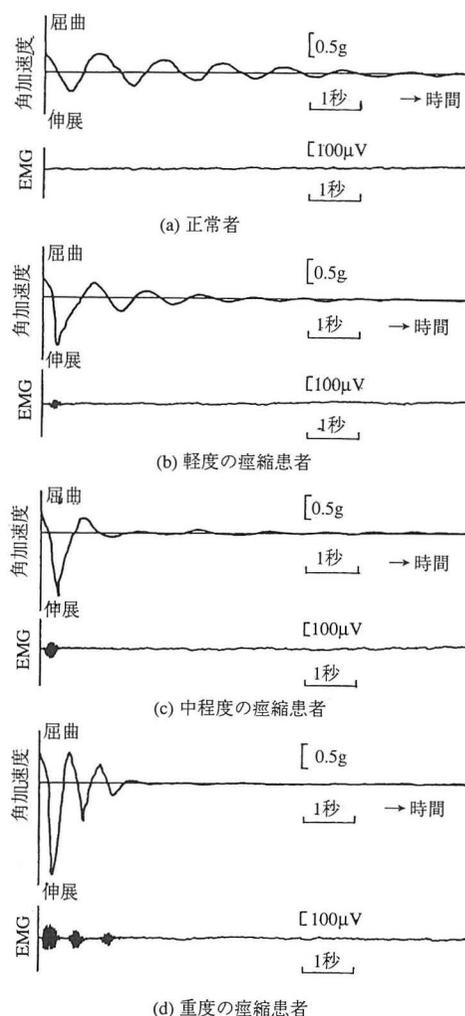


図2 測定結果

し、更に重度の場合、正常者に比してより周期の短い正弦波状減衰振動が生起している。また、軽度および中程度の患者では、最初の谷の付近でのみ筋電発火（中程度の方が大きい）が認められ、重度では、すべての谷の付近でその大きさに応じた筋電発火が認められる。以下、1、で述べたように本研究では、正常者を対象に議論する。

3. 正常者のペンドラムテストモデル

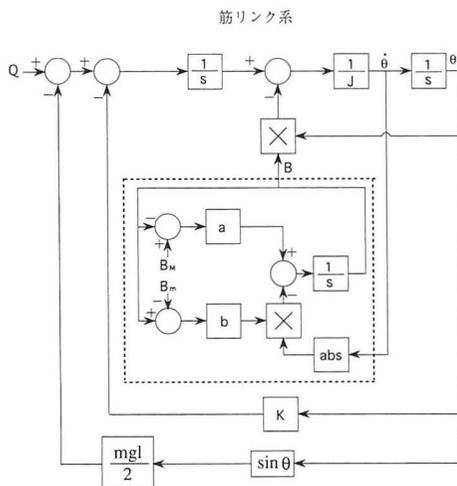
(1) モデルの抽出

2. で述べたように、正常者では、膝関節運動においてほとんど反射が生じないので、この運動は、下腿部の慣性、膝関節に関わる粘弾性などで決まる正弦波状の減衰振動（自由振動）とみることができる。そこで、議論を単純にするため、筆者が既に導出したペンドラムテストモデル²⁾から自由振動を支配する筋リンク系のみを抽出した。このときのモデルを図3に示す。

このモデルは次のように構成されている。一般に、筋リンク系の特性を表す微分方程式は次式で与えられる³⁾。

$$Jd^2\theta/dt^2 + Bd\theta/dt + K\theta + (1/2)mgl\sin\theta = Q \quad (1)$$

但し、Qは筋リンク系の入力であり、 θ はその出力である。また、J、BおよびKは、それぞれ、



s: ラプラス演算子 abs: 絶対値記号

図3 正常者のペンドラムテストモデル

膝関節に関わる慣性係数、粘性係数および弾性係数であり、m、gおよびlは、それぞれ、下腿部の質量、重力加速度および下腿の長さである。図3において、破線の外側が上式に対応するが、Bは、特に、筋におけるミオシン分子とアクチン分子の状態（ゾル、ゲル）変化にもとづいて時間とともに変化するので、式(2)に従って破線内部のようにモデル化されている³⁾。

$$dB/dt = b(B_M - B) - a(B - B_m) |d\theta/dt| \quad (2)$$

ここに、 B_M および B_m は、それぞれ、粘性係数の最大値および最小値である。また、a、bは、正の定数である。Qは、下腿部を持ち上げるときの膝関節に対するトルクであり、これが0となることにより膝関節運動が引き起こされる。

このモデルの入力はQであり、出力（出力端は図示されていない）は $d^2\theta/dt^2$ である。また、定数は、J、 B_M 、 B_m 、a、b、K、m、lである。

(2) パラメータ

J、 B_M 、 B_m 、a、b、K、m、lのうち、J、mおよびlは被験者の各部の寸法を実測することにより推測可能である。また、 B_m は膝関節運動に対して感度が低い⁶⁾。そこで本研究では、J、mおよびlについては推測値が利用でき、 B_M については固定値が利用できるとする。このとき、シミュレーションにおけるパラメータは B_M 、a、b、Kの4つとなる。以下、これらの4つのパラメータの一意性を検討する。

4. 一意性の理論的検討

ここでいう一意性とは、実測結果とシミュレーション結果との残差2乗和が最小となるときのパラメータの値が唯一存在する性質のことである。

3. で述べたように、正常者（反射が存在しない）の膝関節運動は次式で表現される。

$$Jd^2\theta/dt^2 + Bd\theta/dt + K\theta + (1/2)mgl\sin\theta = 0 \quad (3)$$

また、このうちのBには、式(2)を満たす可変性が繰り込まれている³⁾。

ここでは、正常者の膝関節運動の振動形態と粘性係数の物理的性質にもとづいて、この運動に対する粘性係数(B_M 、a、b)と弾性係数(K)の一意性を検討する。

まず、膝関節運動に対する（時間関数としての） B と K の一意性を述べる。式(3)を満たす正弦波状の減衰振動が次式でも表現できるとする。

$$Jd^2\theta/dt^2 + B'd\theta/dt + K'\theta + (1/2)mglsin\theta = 0 \quad (4)$$

即ち、ある膝関節運動が B 、 K 以外にも B' 、 K' により表現できるとする。このとき、式(3)と式(4)から、

$$(B - B')d\theta/dt + (K - K')\theta = 0 \quad (5)$$

が常に成り立つはずである。

他方、正常者の膝関節運動は正弦波状の減衰振動となり、 θ および $d\theta/dt$ は、模式的に、それぞれ、図4(a)および(b)のように示される。同図からわかるように、 $d\theta/dt = 0$ となるときの θ の値は0とならない（ほぼ極大値あるいは極小値をとる）。そこで、この関係を式(5)に当てはめる。このとき、左辺第1項は0であるから、 $K \neq K'$ では式(5)は成立しない。よって、 $K = K'$ となる。続いて、 $K = K'$ としたとき、 $d\theta/dt \neq 0$ となる時刻においては、 $B = B'$ 以外式(5)は成立しない。しかし、 $d\theta/dt = 0$ となる時刻においては、 $B - B'$ の値は不定となるので、この式だけから（この時刻の） B の一意性を検討することはできない。そこで以下、粘性の物理的性質を考慮してこれを検討する。

文献(3)によれば、筋を構成するフィラメントはミオシン分子とアクチン分子を主成分としているが、ゲル状態にある分子は、 $|d\theta/dt|$ に比例した割合でゲル化され、ゾル状態にある分子は

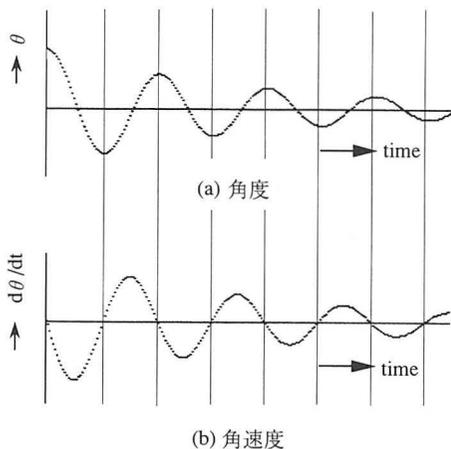


図4 角度と角速度

一定の割合でゲル化される。そして、粘性係数は B_m （すべての分子がゾル状態）と B_M （すべての分子がゲル状態）の間の値をとり、 B_m を越える増分はゲル状態にある分子の割合に比例する。式(2)で記述された粘性係数は、このような物理的性質を表現しており、しかも、ここで対象としている $|d\theta/dt|$ は連続的な関数である。これらのことから、粘性係数は連続的な変化になると考えられる。従って、この結果と上述した結果を勘案すれば、 $d\theta/dt = 0$ において B の値は一つしか存在しないことになり、 $d\theta/dt = 0$ においても B' は B に等しいことになる。

以上から、膝関節運動を表現するための B 、 K の値は一組しか存在しないことになる。

次に、 B に対する諸定数 B_m 、 a 、 b の一意性を述べる。式(2)を満たす B が次式でも表現できるとする。

$$dB/dt = b'(B_m' - B) - a'(B - B_m) |d\theta/dt| \quad (6)$$

このとき、式(2)と(6)から、

$$bB_m - b'B_m' - (b - b')B + (a - a')(B_m - B) |d\theta/dt| = 0 \quad (7)$$

が成立するはずである。

他方、上述したように、 B の値は、ミオシン分子とアクチン分子の（ゲル状態分子の）ゾル化と（ゾル状態分子の）ゲル化に依存するが、Lakieらによれば、このときのゾル化は1回の（十分な）筋の伸縮で急速に進むが、ゲル化はこれに比してかなり遅い（1～2秒）といわれている⁷⁾。また、本研究の膝関節運動は、被験者の静止状態を十分に保ったのちに測定されるため、 B の初期値は B_m の付近にあると考えられる。これらのことを考慮して B の初期値、 B_m 、 B_m' 、 a 、 b を適当にとれば、 B の変化は図5(b)のようになると考えられる。即ち、同図(a)に示されるように、 $|d\theta/dt|$ が大きく変化する期間においては B の値は（多少の変動があるが）低下していき、その後は B_m に向かって漸近していくと考えられる。この結果から、 $|d\theta/dt| = 0$ における B の値すべては一定の値をとることはない予測される。そこでここでは、 $|d\theta/dt| = 0$ における B の値は一定値にはならないと仮定する。このように仮定して $|d\theta/dt| = 0$ における2点の B の値をそれぞれ B_1 、 B_2 とすれば、式(7)より、次の2式が得られる。

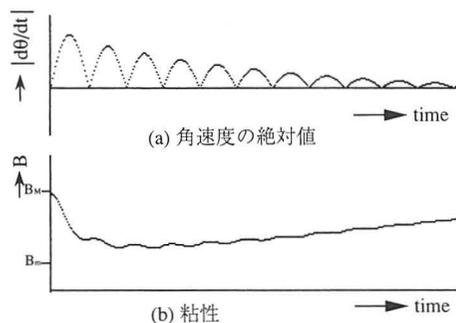


図5 角速度の絶対値と粘性

$$bB_M - b'B_M' - (b-b')B_1 = 0 \quad (8)$$

$$bB_M - b'B_M' - (b-b')B_2 = 0 \quad (9)$$

式(8)-(9)より

$$(b-b')(B_2 - B_1) = 0 \quad (10)$$

となり、 $B_2 \neq B_1$ であるので、

$$b-b' = 0 \quad (11)$$

即ち、

$$b' = b \quad (12)$$

が導かれる。そして、これを式(8)に代入すれば、

$$B_M' = B_M \quad (13)$$

となる。続いて、 $b' = b$ 、 $B_M' = B_M$ としたとき、 $d\theta/dt \neq 0$ となる時刻において式(7)が成立するためには、

$$a - a' = 0 \quad (14)$$

即ち、

$$a' = a \quad (15)$$

でなければならない。

以上、 $|d\theta/dt| = 0$ におけるBの値は一定にはならないという仮定のもとで、膝関節運動に対する B_M 、 a 、 b 、 K の一意性が示された。

5. む す び

ペンドラムテストモデルにおけるパラメータ

の一意性を正常者について理論的に検討した。その結果、膝関節運動の振動形態と筋の物理的性質とを考慮するとともに筋の粘性変化に関する1つの仮定を設けることにより、パラメータの一意性が示された。今後は、痙縮患者についてパラメータの一意性を確かめるとともに、多くの正常者と痙縮患者に対してパラメータの値を求める所存である。

文 献

- 1) Lin, D.C., Rymer, W.Z.: A Quantitative Analysis of Pendular Motion of the Lower Leg in Spastic Human Subjects, IEEE Trans. Biomed. Eng, 38(9), 906-918, 1991.
- 2) 軸屋和明, 岡本卓爾, 横平徳美, 明石 謙: ペンドラムテストにおける膝関節運動の生成機序, 電子情報通信学会論文誌 (D-II) J 74-D-II (9), 1289-1299, 1991.
- 3) 軸屋和明, 岡本卓爾, 横平徳美, 明石 謙: 痙縮患者を対象としたペンドラムテストモデルの精度改善, 電子情報通信学会論文誌 J 78-D-II (4), 650-660, 1995.
- 4) Vodovnik, L., Bowman, B.R., Bajd, T.: Dynamics of spastic knee joint, Medical & Biological Engineering & Computing 22, 63-69, 1984.
- 5) 軸屋和明, 岡本卓爾, 明石 謙: 自由落下により誘発される膝関節運動の生成機序, 医用電子と生体工学 28(特別号), 477, 1990.
- 6) 軸屋和明, 横平徳美, 岡本卓爾, 明石 謙: ペンドラムテストの詳細なシミュレーション, 医用電子と生体工学 31(特別号), 449, 1993.
- 7) Lakie, L., Walsh, E.G., Wright, G.E.: Resonance at the wrist demonstrated by the use of a torque motor: An instrumental analysis of muscle tone in man, J. Physiol. 353, 265-285, 1984.

