Scientific Journal of Samarkand University

Volume 2020 Article 6

8-24-2020

AN EFFECTIVE METHOD FOR SYNTHESIZING THE ABBREVIATED DISJUNCTIVE NORMAL FORM OF A BOOLEAN FUNCTION

Erkin Urunbaev
Samarkand State University, erkinurunbaev@yandex.ru

УДК: 517 У 697

ЭФЕКТИВНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА СОКРАЩЕННОЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Э. Урунбаев
Самаркандский государственный университет

Аннотация. В дискретной математике минимизация булевых функций в классе дизъюнктивныхнормальных форм является одной из необходимых задач. В настоящей работе изложен эфективный метод синтеза сокращенной дизъюнктивной нормальной формы булевой функции.

Ключевые слова: эфективный метод, синтез, сокращенная, дизъюнктивная нормальная форма, булевая функция, элементарная конъюнкции, склеивания, поглощения.

An effective method for synthesizing the abbreviated disjunctive normal form of a Boolean function

Abstract. In discrete mathematics, minimizing Boolean functions in the class of disjunctive normal forms is one of the necessary tasks. This paper presents an effective method for synthesizing the reduced disjunctive normal form of a Boolean function.

Keyword: effective method, synthesis, abbreviated, disjunctive normal form, Boolean function, elementary conjunctions, gluing, absorption.

Буль функцияларини қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклини ҳосил қилишни самарали усули

Аннотация. Дискрет математикада Буль функцияларини дизъюнктив нормал шакли кўринишида минималлаштириш асосий масалалардан бири ҳисобланади. Ушбу ишда буль функцияларини қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклини ҳосил қилишнинг самарали усули баён этилган.

Ключевые слова: самарали усул, синтез, қисқартирилган дизъюнктив нормал шакл, буль функцияси, элементар конъюнкция, бирлаштириш, ютилиш.

В настоящей работе, основываясь на методе Мак-Класки предлагается алгоритм построения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы (д.н.ф) булевых функций, заданных в табличной форме.

Известно, что одной из главных задач дискретной математики является минимизация функций алгебры логики. Обычно для нахождения минимальных д.н.ф. функции f строится сокращенная д.н.ф. для f . Затем из сокращенной д.н.ф. получается совокупность всех тупиковых д.н.ф. и перебором множества всех тупиковых д.н.ф. выделяется минимальная д.н.ф. реализующая функцию f [1].

Введем некоторые определения, необходимые для изложения алгоритма.

Для простоты изложения рассмотрим конъюнкцию

$$\cup = x_{i_1}^{\sigma_{i1}} \& x_{i_2}^{\sigma_{i2}} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_{i_k}} ,$$

областью определения которой является $(n-k)$ – мерный подкуб E^{n-k} n – мерного куба E^n . Наборы $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in E^n$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in E^n$, определяющиеся следующим образом:

$$\alpha_j = \begin{cases} \sigma_j, & \text{если } j\in\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}; \\ 0, & \text{если } j\in\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}; \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} \sigma_j, & \text{если } j\in\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}; \\ 1, & \text{в противном случае, } \textit{где } j=\overline{1,k},\ k\le n, \end{cases}$$

являются соответственно нижней и верхней вершинами $(n-k)$ – мерного подкуба куба E^n. Подкуб E^{n-k} назовем $(n-k)$ – мерным интервалом, соответствующим конъюнкции $\bigcup$. Каждому набору $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ подкуба E^{n-k} можно сопоставить десятичное число соответственно $A_{\tilde{\alpha}}$ и $A_{\tilde{\beta}}$, определяемое по следующей формуле:

$$A_{\tilde{\alpha}} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i 2^{n-i-1};$$

$$A_{\tilde{\beta}} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i 2^{n-i-1}.$$

Нормой $\|\tilde{\alpha}\|$ набора $\tilde{\alpha} \in E^n$ называется число единичных разрядов $\tilde{\alpha}$. Пара номеров наборов $\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\left(A_{\tilde{\alpha}},A_{\tilde{\beta}}\right)$ соответствует $(n-k)$ – мерному интервалу $N_{\bigcup}$ конъюнкции $\bigcup$, если

$$A_{\tilde{\beta}}-A_{\tilde{\alpha}}=2^k,\ \ k=\overline{0,n-1} \tag{1}$$

Пусть функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ задана следующими значениями (таблица 1.):

Таблица 1

x_1	x_2	…	x_n	$f(x_1,x_2,...,x_n)$
0	0	…	0	$f(0,0,...,0)$
0	0	…	1	$f(0,0,...,1)$
…	…	…	…	…………….
1	1	…	1	$f(1,1,...,1)$

Алгоритм построения сокращенной д.н.ф. функции $f(\tilde{x})$ состоит из двух этапов. На первом этапе из заданной таблицы значений функции $f(\tilde{x})$ формируем последовательность номеров $A_1,A_2,...,A_m$ в порядке возрастания их нормы $a_1 \le a_2 \le ... \le a_m$ для всех $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ наборов, в которых $f(\tilde{\alpha})=1$ (таблица 2).

Таблица 2

$A_{\tilde{\alpha}}$	A_1	A_2	…	A_m
$\|\tilde{\alpha}_A\|$	a_1	a_2	…	a_m

На втором этапе из всех пар (A_i,A_j) таблица 2 удовлетворяющих условию (1), получаем совокупность всех пар, соответствующих максимальным интервалам размерности первой функции $f(x)$, и формируем таблицу 3, где a_i, b_i – нормы наборов $\alpha_{A_i'}$, $\tilde{\alpha}'_{B_i}$ соответственно. Причем, $0 \le a_i' \le a_m$, $a_m'+1=b_i$.

Таблица 3

A'	A_1'	A_1'	…	A_m'
B	B_1	B_2	…	B_m
$\|\tilde{\alpha}_{A'}\|$	a_1'	a_2'	…	a_m'
$\|\tilde{\alpha}_B\|$	b_1	b_2	…	b_m

В таблице 2 фиксируем номера наборов, не образовавших пары в таблице 3. Очевидно, что такие наборы образуют максимальные интервалы в N_f [2].

Множество пар, соответствующих максимальным интервалам функци $f(\tilde{x})$, строим методом индукции по возрастанию размерности интервалов, отвечающих образуемым парам на данном шаге.

Пусть построено множество всех пар (C, D), соответствующих интервалам размерности $i-1$.

Таблица 4

C	C_1	C_2	$\cdots$	$C_{m_{i-1}}$
D	D_1	D_2	$\cdots$	$D_{m_{i-1}}$
$\lVert\tilde{\alpha}_C\rVert$	c_1	c_2	$\cdots$	$c_{m_{i-1}}$
$\lVert\tilde{\alpha}_D\rVert$	d_1	d_2	$\cdots$	$d_{m_{i-1}}$

Здесь $\left(C_j, D_j\right)$ $\left(j=\overline{1,m_{i-1}}\right)$– пары номеров, отвечающих интервалам размерности $i-1$ в N_f:c_j, d_j– нормы наборов $\tilde{\alpha}_{c_j}, \tilde{\alpha}_{D_j}$ соответственно; $c_j = d_j - (i-1)$; $c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_{m_{i-1}}$

Для всех $i, j,\ 1 \le i, j \le m_{i-1}$, удовлетворяющих $d_j - d_i = 1$ и $c_j - c_i = 1$, проверяем условие

$$D_j - D_i = C_j - C_i = 2^l, \tag{2}$$

где $0 \le l \le n$.

При выполнении (2) пара $\left(C_i, D_j\right)$ будет соответствовать интервалу размерности $i-1$в N_f. Из всех таких пар формируем таблицу 5, где $c'_i,\ d'_j$ $\left(i=\overline{1,m_i}\right)$– нормы наборов $\tilde{\alpha}_{c'_i}, \tilde{\alpha}_{D_i}$ соответственно. Причем $c'_i = d'_i - i,\ 0 \le c'_i \le c_{m_{i-1}}$ $i=\overline{1,m_i}$. Пары $\left(C_i, D_j\right)$, для которых не выполняется условие (2), фиксируется в таблице 4 и они соответствуют максимальному интервалу. Процесс заканчивается на очередном $p-$м шаге, если все пары $\left(C_p, D_p\right)$ соответствуют максимальным интервалам.

Таблица 5

C'	C'_1	C'_2	$\cdots$	C'_{m_i}
D'	D'_1	D'_2	$\cdots$	D'_{m_i}
$\lVert\tilde{\alpha}_{C'}\rVert$	c'_1	c'_2	$\cdots$	c'_{m_i}
$\lVert\tilde{\alpha}_{D'}\rVert$	d'_1	d'_2	$\cdots$	d_{m_i}

Литература

1. Журавлев Ю.И. Алгоритм построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики, «Дискретная математика и математические вопросы кибернетики». М., «Энергия», 1975.
2. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. Издательство «Иностранная литература», М., 1962.