Scientific Journal of Samarkand University

Volume 2020 Article 7

12-12-2020

A logical method for finding maximum compatible subsystems of systems of boolean equations

Anvar Kabulov
National University of Uzbekistan

Erkin Urunbaev
Samarkand State University, erkinurunbaev@yandex.ru

Mansur Berdimurodov
National University of Uzbekistan

УДК: 519.8

ЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ СОВМЕСТНИХ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Кабулов[1], Э.Урунбаев[2], М.А.Бердимуродов[1]
[1]*Национальный университет Узбекистана*
[2]*Самаркандский государственный университет*

Аннотация. Решается задача поиска максимальной совместной подсистемы систем булевых уравнений. Предлагается алгоритм нахождения максимального верхнего нуля монотонной булевой функции. Исследуется и разрабатывается эффективная процедура вычисления значений монотонных функций f на наборах n - мерного куба. Разрабатывается алгоритм решения систем булевых уравнений на основе поиска максимального верхнего нуля монотонных функций алгебры логики.

Ключевые слова: Систем булевых уравнений, монотонной булевой функции, максимального верхнего нуля, совместной подсистемы.

Mantiqiy tenglamalar sistemasining maksimal qo'shma kichik sistemalarini topishning mantiqiy usuli

Annatatsiya. Bul tenglamalar sistemasida maksimal bir biriga bog'liq bo'lgan qism sistemalarni topish masalasi qaraladi. Monoton bul funksiyasining maksimal yuqori nolini topish uchun algoritm taklif etiladi. n- o'lchovli kub to'plamlarida f monoton funksiyalar qiymatlarini hisoblashning samarali usuli o'rganiladi va ishlab chiqiladi. Mantiq algebrasida monoton funksiyalarning maksimal yuqori nolini topish asosida bul tenglamalar sistemalarini yechish uchun algoritm ishlab chiqilmoqda.

Kalit so'zlar: Bul tenglamalar sistemasi, Monoton bul funksiya, maksimal yuqori nol, bir biriga bog'liq bo'lgan qism sistemalar.

A logical method for finding maximum compatible subsystems of systems of boolean equations

Abstract. The problem of finding the maximum joint subsystem of Boolean equation systems is solved. An algorithm for finding the maximum upper zero of a monotone Boolean function is proposed. An efficient procedure for calculating the values of monotone functions f on sets of a n- dimensional cube is investigated and developed. An algorithm for solving systems of Boolean equations based on the search for the maximum upper zero of monotone functions of the logic algebra is developed.

Keywords: Systems of Boolean equations, Boolean monotone functions, maximum upper zero, compatiblesubsystem.

Введение

Новой областью приложения методов алгебры логики, обозначившейся в последнее время, является проблема распознавания множества объектов и явлений, которая может быть сведена к решению систем логических уравнений. В настоящей работе описаны основные принципы решения систем логических уравнений и строятся алгоритмы получения решений максимальных совместных подсистем булевых уравнений. Предлагается алгоритм нахождения максимального верхнего нуля монотонной булевой функции. Исследуется и разрабатывается эффективная процедура вычисления значений монотонных функций на наборах n - мерного куба. Разрабатывается алгоритм решения систем булевых уравнений на основе поиска максимального верхнего нуля монотонных функций алгебры логики.

1.**Задача поиска максимального верхнего нуля монотонных булевых функций**. Пусть E_n^2 – n-мерный двоичный куб. Нормой $|\tilde{\alpha}|$ набора $\tilde{\alpha}$ в E_n^2 назовем число единичных элементов. Множество всех наборов E_n^2 с нормой j назовем j -м уровнем куба.

Число $A_{\tilde{\alpha}} = \sum \tilde{\alpha}_{\varphi} 2^{\nu-\varphi}$ считаем номером $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Будем говорить, что наборы $\tilde{\alpha}$ n -го уровня упорядочены в лексикографическом порядке, если они расположены в порядке убывания номеров $A_{\tilde{\alpha}}$.

Считаем, что набор $\tilde{\alpha}$ следует непосредственно за $\tilde{\beta}$ на κ -м уровне, $\kappa = 1,2,...,n$, если $A_{\tilde{\beta}} = A_{\tilde{\alpha}}$ и на существует такого $\tilde{\gamma}$, где $|\tilde{\gamma}| = \kappa$, что $A_{\tilde{\beta}} \le A_{\tilde{n}} \le A_{\tilde{\alpha}}$.

Пусть M_n- множество всех монотонных булевых функций от η-переменных. Набор $\tilde{\alpha} \in E_n^2$ назовем верхним нулем функции $f \in M_n$, если $f(\tilde{\alpha}) = 0^n$ и для любого набора $\tilde{\beta} \in E_n^2$ из $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\beta}) \ne 0$. Верхний нуль функций $f \in M_n$ называется её максимальным верхним нулем(м.в.н.), если для любого верхнего нуля (нижней единицы) $\tilde{\beta}$ функции f выполняется условие $|\tilde{\beta}| \le |\tilde{\alpha}|$.

Пусть произвольная функция $f \in M_n$ задана при помощи оператора A_f, который по любому набору $\alpha \in \tilde{M}$ выдает значение $f(\tilde{\alpha})$.

Задача поиска м.в.н. функций из M_n состоит в следующем. Если некоторая функция $f \in M_n$ задана оператором A_f, то требуется минимальным числом обращений к A_f найти хотя бы один м.в.н. функции $f = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Задача поиска м.в.н. монотонных булевых функций в Шенноновской постановке описана в [1]. Там же предлагается эффективный алгоритм A_K.

Опишем модификацию A_M алгоритма A_K, отличающуюся от A_K лишь тем, что он использует лексикографический порядок расположения наборов уровней E_n^2.

Алгоритм A_M состоит из двух этапов.

1-й этап. На первом шаге алгоритма вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_1$ с наибольшим номером $[\frac{n}{2}]$ -го уровня.

Пусть на j -м шаге вычислено значение f на некотором наборе $\tilde{\alpha}_j$ $[\frac{n}{2}] - j + 1$ -го уровня, $1 \le j \le [\frac{n}{2}]$. Если $f(\tilde{\alpha}_j) = 1$, то на $(j+1)$ -м шаге вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_{j+1}$ с наибольшим номером $[\frac{n}{2}] - j$ -го уровня. При условии, что $f(\tilde{\alpha}_j) = 0$ переходим ко второму этапу алгоритма. Если на $([\frac{n}{2}] + 1)$ -м шаге получено $f(\tilde{\alpha}_{[\frac{n}{2}]+1}) = 1$, то $f \equiv 1$ и алгоритм заканчивает работу.

2-й этап. Пусть к началу второго этапа алгоритма с делано $\tilde{\tau} + 1$ шагов на уровне $0 \le \tau \le [\frac{n}{2}]$, т.е. вычислены значения $f(\tilde{\alpha}_1) = f(\tilde{\alpha}_2) = ... = f(\tilde{\alpha}_\tau) = 1$ и $f(\tilde{\alpha}_{\tau+1}) = 0$ где $\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_{\tau+1}$ с наибольшими номерами $[\frac{n}{2}], ..., [\frac{n}{2}] - \tau$ -уровней соответственно.

Тогда на $(\tau + 2)$ -м шаге вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_{\tau+2}[\frac{n}{2}] - \tau + 1$ -го уровня, непосредственно следующем за $\tilde{\alpha}_\tau$ в лексикографическом порядке, на котором значение f еще не определено. Причем, если $\tau = 0$, то за $\tilde{\alpha}_{\tau+2}$ берем крайний левқй набор уровня $[\frac{n}{2}] - \tau + 1$.

Пусть на j -м шаге $(j \geq \tau + 2)$ вычислено значение f на некотором наборе $\tilde{\alpha}_j$ j-го уровня, где $j \geq [\frac{n}{2}] - \tau + 1$. Если $f(\tilde{\alpha}_j) = 1$, то на $(j+1)$ -м шаге вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_j$ j -го уровня, непосредственно следующем в лексикографическом порядке за $\tilde{\alpha}_j$. Если такого набора не существует, то алгоритм заканчивает работу. Если же $f(\tilde{\alpha}_j) = 0$, то на $j+1$ -м шага вычисляем значение f на наборе $\tilde{\alpha}_{j+1}$ $j+1$ -го уровня, непосредственно следующем в лексикографическом порядке за наборам $\tilde{\alpha}$ с наименованием номеров $j+1$ -го уровня таким, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Причем, если набора $\tilde{\alpha}$ не существует, то за $\tilde{\alpha}_{j+1}$ следует набор с наибольшим номером $j+1$ -го уровня. В случае, когда не существует набора $\tilde{\alpha}_{j+1}$, удовлетворяющего указанным свойствам, алгоритм останавливается.

Пусть алгоритм сделал τ шагов до остановки. Получаем цепочку наборов $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_\tau$, на которых последовательно вычислялось значение f. Тогда м.в.н. функции f - это набор $\tilde{\alpha}_S$ из этой цепочки с максимальным S такой, что $f(\tilde{\alpha}_S) = 0$. Действительно, из описания алгоритма следует, что на всех наборах $|\tilde{\alpha}_S| + 1$ -го уровня функция f определена по монотонности или непосредственно и равно единице.

2.Решение задачи поиска максимальных совместных подсистем систем булевых уравнений. Пусть

$$m = \begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \\ .... \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

– система булевых уравнений.

Система уравнений (1) называется совместной, если существует набор $\tilde{\alpha}$ из E_n^2 такой, что $f_j(\tilde{\alpha}) = 1$ для всех $j = 1, 2, ..., m$. Совместная подсистема системы (1) называется максимальной, если она содержит наибольшее число уравнений среди всех совместных подсистем системы (1).
Весом P_i уравнения $f_j = 1$ назовем число всех $f_j = 1$ таких, что $f_i \cdot f_j \neq 0$.

Пусть $\tilde{\alpha}_{i_1}, ..., \tilde{\alpha}_{i_\kappa}$ – суть единичные координаты набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in E_\eta^2$. Рассмотрим булевую монотонную функцию $g(y_1, ..., y_m)$:

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_m) = \begin{cases} 0, \qquad \text{если} \begin{cases} f_{i_1} = 1 \\ f_{i_\kappa} = 1 \end{cases} \\ 1 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В работе [2] задача нахождения максимальных совместных подсистем систем неравенств сведена к задаче поиска м.в.н. монотонной булевой функции. Поэтому для нахождения максимальной совместной подсистемы системы (1) применяем алгоритм A_M поиска м.в.н. функции $g(y_1, ..., y_m)$. Причем, поиск м.в.н. функции $g(\tilde{y})$ ведется в лексикографическом порядке наборов переменных $y_{i_1}, ..., y_{i_m}$, для которых $P_{i_1} \geq P_{i_2} \geq ... \geq P_{i_m}$. На каждом шаге обращения к оператору для вычисления значений $g(\alpha_1,...,\alpha_m)$ на наборе $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_m)$, у которого $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_\kappa}$ – суть нулевые координаты, используем процедуру распознавания совместности подсистемы

$$\left.\begin{matrix} f_{i_1}=1 \\ f_{i_2}=1 \\ f_{i_\kappa}=1 \end{matrix}\right\}$$

системы (1).

Исследуем процесс вычисления значения $g(y_1,...,y_m)$ на наборе E_m^2. Пусть

$$\left.\begin{matrix} f_{l_1}(y_1,...,y_m)=1 \\ \ldots\ldots \\ f_{l_t}(y_1,...,y_m)=1 \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

подсистема системы (1).

Рассмотрим матрицу $\| a_{i\,j} \|_{t\times t}$:

$$a_{i\,j}=\begin{cases} 1 & \text{если } f_{l\,i}\,f_{l\,j}\neq 0 \\ 0 & -\text{в противном случае} \end{cases}.$$

Очовидно, что матрица $\| a_{ij} \|_{i\times j}$ симметрична относительно дивгонали и если система уравнений (2) совместна, то $f_{li}\cdot f_{lj}\neq 0$, $i,j=\overline{1,t}$ и соотвотственно в этом случае $| a_{ij} \|_{t\times t}$ – одиничная матрица. В случае, когда в матрицо $\| a_{ij} \|_{t\times t}$ найдется хотя бы один элемент $a_{ij}=0$ система несовместна.

Положим, что высказывания f_j, $i=\overline{1,m}$ системы (1) заданы в базисе $\left\{\neg x, x_1 \,\&\, x_2, x_1\vee x_2\right\}$. Причем, каждое высказывание f_j есть д.н.ф. n_j. Пусть подсистема (2) имеет вид

$$\left.\begin{matrix} U_{11}\vee U_{12}\vee...\vee U_{1P_1}=1 \\ U_{21}\vee U_{22}\vee...\vee U_{2P_1}=1 \\ U_{t1}\vee U_{t2}\vee...\vee U_{tP_t}=1 \end{matrix}\right\}. \qquad (3)$$

Определим условия совместности системы (3). Нетрудно заметить, что система (3) совместна в том и только в том случае, если существуют элементарные конъюнкции (э.к.) $U_{1j_1}, U_{2j_2},...,U_{tP_t}$, т.е.

$$\underset{\kappa=1}{\&} U_{\kappa j_\kappa}\neq 0. \qquad (4)$$

Предлагаем одну из эффективных процедур (П)[3] проверки выполнения условий (4). Представим д.н.ф. n_{lj}, $j=\overline{1,t}$ системы (3) в виде ортогональной д.н.ф. $n_{lj}=\kappa_{j1}\vee...\vee\kappa_{jt}$. Индукцией по $i,j=\overline{1,t-1}$ определяем совместность системы (3).

<u>1-й шаг индукции</u>. Для э.к. κ_{1j}, $j=\overline{1,t}$ д.н.ф. n_{l1}^0 фиксируем э.к. $U_1,U_2,...,U_\kappa$ в д.н.ф. n_{l2}^1 таких, что $U_i\cdot U_{1j}=0$, $j=\overline{1,\kappa}$. Пусть $\tilde{T}_j=\{U_1,...,U_\kappa\}$, где $a_i=U_i\kappa_{1j}$, $i=\overline{1,\kappa}$. Причем, если для очередного U_i имеет место $(\kappa_{1j}\to U_j)$, то $\tilde{T}_j=\{a_1\}$, где $a_1=\kappa_{1j}\cdot U_i=\kappa_{1j}$. Положим

$T_1 = \mathop{\vee}\limits_{j=1}^{\eta} T_j$. В случае, когда $T_2 = 0$, алгоритм заканчивает работу и система (3) становится несовместной.

Пусть на $(i-1)$ -м шаге построено множество T_{i-1} э.к.

i -й шаг индукции. Для всех э.к. U из T_{i-1} формируем множество T_a э.к. a, $a = U \cdot B$, где B – э.к. в д.н.ф. $n^0_{l\,i+1}$ и $B \cdot U \neq 0$. В случае, когда $U \to B \equiv 1$ $T_a = 0$, где $a_1 = U \cdot B = a$.

Пусть множество $T_i = \mathop{\vee}\limits_{a\, U \in T_{i-1}} T_a$. Если $T_i = 0$, то алгоритмы заканчивает свою работу и система (3) оказывается несовместной.

Пусть после просмотра $(t-1)$–го шага индукции построено множество T_{t-1} э.к. такое, что $T_{t-1} \neq 0$. Отсюда следует, что система (3) совместна.

Таким образом, общий алгоритм определения совместности подсистемы (2) системы (1), заданной в виде (3), состоит из двух этапов. На первом этапе проверяем единичность матрицы $\| a_{ij} \|_{t \times t}$. Если $\| a_{ij} \|_{t \times t}$–единичная, то переходим ко второму этапу, на котором к системе (3) применяем процедуру П.

Приближенный алгоритм поиска. Пусть

$$m = \begin{cases} f_1 = 1, \\ \ldots\ldots \\ f_m = 1 \end{cases} \qquad \text{и}$$

$$a_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } f_i \cdot f_j \neq 0, \\ 0 - \text{в противном случае}, & i, j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Пусть $M_{i_1 \ldots i_\kappa}$ – квадратичная подматрица матрицы $M = \| a_{i\,j} \|_{m \times \kappa l}$ составленная $a_{i\,j}$, где $i, j = i_1, \ldots, i_\kappa$.

Единичную подматрицу $M_{i_1 \ldots i_\kappa}$ назовем максимальной, если любая другая квадратичная подматрица, содержащая $M_{i_1 \ldots i_\kappa}$, не является единичной. Считается, что $M_{i_1 \ldots i_\kappa}$ соответствует подмножеству

$$m_{i_1 \ldots i_\kappa} = \begin{cases} f_{i_1} = 1, \\ \ldots\ldots \\ f_{i_\kappa} = 1 \end{cases}$$

на m, а $m_{i_1 \ldots i_\kappa}$ задается монотонной функцией $g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_\kappa})$

Декомпозиция метода поиска максимальных совместных подсистем состоит в следующем.

1-й этап. Находим все максимальные единичные подматрицы матрицы $\| a_{ij} \|$.

2-й этап. Для всех максимальных подматриц $M_{i_1 \ldots i_\kappa}$ строим систему

$$m = \begin{cases} f_{i_1} = 1, \\ \ldots\ldots \\ f_{i_\kappa} = 1 \end{cases}$$

и применял алгоритм A_{n}, находим м.в.н. монотонной булевой функций, соответствующей m.

Приближенный алгоритм состоит из двух шагов. На первом шаге строим максимальную единичную подматрицу $M_{i_1 \dots i_\kappa}$. Этот шаг включает в себя два этапа. На первом этапе выявляется i -я строка и i -й столбец с наименьшим числом единиц и следует пароход ко второму этапу. Не втором этапе удаляем из M i-ю строку и i-й столбец. Если M – единичная матрица, то алгоритм заканчивает работу. В противном случав переходим к первому этапу.

На втором шаге применяя алгоритм A_M, ищем м.в.н. $g(y_{i_1},...,y_{i_\kappa})$.

Методы решения систем булевых уравнений.

Метод изображающих чисел. Известно, что булева функция считается заданной, если можно указать значения истинности этой функции при всех возможных комбинациях значений истинности, входящих в него элементов. Для всех аргументов 1 булевых функций, зависящих от *2 переменных*, можно построить таблицу (рис.1) из двоичных чисел 0 и 1.

Определение. Таблица называется базисом, а строки этой таблицы - изображающими числами, причем знак $\Delta x_i,\ i=\overline{1,n},$ означает изображающее число аргумента x_i

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ - функция алгебры логики.

Определение. Набор $(\beta_1,\beta_2,\dots,x_{2n})$ длиной 2^n всех разрядов, β_i, для которых $f(\tilde{\alpha}_i)=\beta_i$, где $\tilde{\alpha},\ i-$й столбец, называется изображающим числом функции f и обозначается через Δf.

Рассмотрим функцию $f(x,y)\in D'$. Положим для простоты $f(x,y)=x\vee y$. Пусть $g_1(x_1,\dots,x_n), g_2(x_1,\dots,x_n)\in P_2$ и $\Delta g_1(\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}), \Delta g_2(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$ – изображающие числа функций g_1, g_2 соответственно.

Нетрудно заметить, что

$$\Delta f(g_1,g_2)=(\alpha_1\vee\beta_1,\dots,\alpha_{2n}\vee\beta_{2n})$$

Если $g=\overline{f}$ и $\Delta f=(\gamma_1,\dots,\gamma_{2n})$ то $\Delta g=(\overline{\gamma}_1^n,\dots,\overline{\gamma}_{2n}^n)$.

Следовательно, если функция $f\in P_2$ задана формулой $A(x_1,\dots,x_n)$ в базисе D', то

$$\Delta f = A(\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n)$$

Пример. Пусть $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee\overline{x}_2\vee x_3$. Для x_1,x_2,x_3 базис состоит из 2^3 столбцов:

$$\Delta x_1 = 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1,$$

$$\Delta x_2 = 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1,$$

$$\Delta x_3 = 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1.$$

Тогда

$$\Delta f(x_1,x_2,x_3)=\Delta x_1\vee\Delta x_2\vee\Delta x_3=11111101.$$

Пусть $\Delta f_{i_1},\Delta f_{i_2},\dots,\Delta f_{i_k}$ - изображающие числа высказываний $f_{i_1},f_{i_2},\dots,f_{i_k}$ подсистемы

$$\begin{cases} f_{i_1}(x_1,\dots,x_n)=1,\\ f_{i_2}(x_1,\dots,x_n)=1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_{i_k}(x_1,\dots,x_n)=1 \end{cases} \quad (4)$$

системы (1).

Нетрудно заметить, что если

$$\prod_{j=1}^{k} \Delta f_{i_j} = \Delta\tilde{0},$$

Где 1 - изображающее число константы 2, 3 то система (3) несовместна, т. е. имеются противоречивые высказывания.

Где $\Delta\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - изображающее число константы α, $\alpha \in \{0,1\}$ то система (3) несовместна, т. е. имеются противоречивые высказывания.

Очевидно также, что в случае

$$\Delta f_{i_j} \vee \Delta f_{i_1} \cdot \ldots \cdot \Delta f_{i_{j-1}} \cdot \Delta f_{i_{j+1}} \cdot \ldots \cdot \Delta f_{i_k} = \Delta\tilde{1}$$

высказывание f_{i_j} является зависимой функцией системы (4).

Построение алгоритма поиска решений максимальных совместных подсистем системы включает следующие этапы:

1) вычисление изображающих чисел высказываний;

2) формирование максимальных совместных подсистем с помощью алгоритма A_x. Для анализа совместимости каждой подсистемы

$$f_{j_1}(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$
$$f_{j_2}(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{j_k}(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

проверяем справедливость тождества

$$\prod_{i=1}^{\kappa} \Delta f_{j_i} \equiv \tilde{0}.$$

Если это тождество выполнено, то выделенная подсистема несовместна, и наоборот;

3) вычисление логического произведения изображающих чисел всех высказываний максимальных совместных подсистем;

4) формирование множества M - всех столбцов (наборов) табл. 2.5.1, соответствующих единичным координатам произведения всех изображающих высказываний.

Ясно, что совокупность M является решением данной подсистемы системы.

Метод логических преобразований. Изложим второй метод решений систем булевых уравнений, который основан на аналитическом преобразовании логических высказываний.

Известно, что решение заданной максимальной совместной подсистемы

$$f_{j_1}(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$
$$f_{j_2}(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{j_k}(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

системы эквивалентно нахождению решений уравнения

$$\prod_{i=1}^{\kappa} f_{i_j}(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Для логического умножения двух высказываний *f*и*g*, как нетрудно заметить, удобным является представление их в виде д.н.ф.

Рассмотрим алгоритм, вычисляющий произведение двух булевых функций. Пусть требуется найти произведение функций (высказываний) f_1, f_2, заданных в виде д.н.ф. Представим каждую функцию в виде таблиц (f_1) и (f_2) (рис.1), заполнив разряды колонок числами 0,1 и 2. Каждой колонке таблицы $(f_i), i=1,2,$ соответствуют элементарные конъюнкции д.н.ф. реализующей f_i элементу x_j соответствует значение - 1, $\bar{x}_j$ – 0, а на место отсутствующих элементов записывается 2, причем число колонок таблицы (f_i) равно числу элементарных конъюнкций д.н.ф., реализующей f_i. Чтобы получить произведение д.н.ф. функций f_1 и f_2 все колонки таблицы(рис1) (f_1) поразрядно сравниваются с колонками таблицы (f_2).

0	2	0		1		0	2	(α)
1	1	2		2		1	1	$(\alpha+1)$
0	0	1		0		2	0	$(\alpha+2)$

....

2	1	2		0		2	1	β
2	0	0		1		1	2	$\beta+1$
0	0	1		2		0	0	

Рис.1. Умножение д.н.ф. булевских функций.

Пусть колонки α и β

α_1	α_2		α_n

β_1	β_2		β_n

принадлежат соответственно таблицам f_1 и f_2.

Определение. Колонки α и β называются сравнимыми, если $\alpha_i+\beta_i \neq 1$ для всех $i=\overline{1,n}$.

Ясно, что для э.к. K_α, K_β, соответствующих сравнимым колонкам α, β, имеет место выражение $K_\alpha \cdot K_\beta \neq 0$.

Нетрудно заметить, что если колонки α и β несравнимы, то $K_\alpha \cdot K_\beta \equiv 0$.

Будем говорить, что сравнимые колонки α и β перемножаются поразрядно; в результате получается колонка

γ	γ_1	γ_2	- - -	γ_n

такая, что $\gamma_i=\min(\alpha_i,\beta_i), i=\overline{1,n}.$

Ясно, что э.к. K_γ, соответствующая γ, такова, что $K_\gamma = K_\alpha \cdot K_\beta$. Перемножая все сравнимые колонки α и β таблиц (f_1) и (f_2) соответственно, получаем таблицу (f_1, f_2), которая представляет собой произведение двух булевых функций, заданных в д.н.ф.

Для упрощения получаем таблицу (f_1, f_2) попарно различные колонки α и β этой таблицы сравниваются между собой с учётом следующих условий:

а) если в колонке α все клетки (координаты), содержащие нули и единицы, совпадают с соответствующими клетками (координатами) колонки β, то α исключается из таблицы (т. е. α, β - сравнимые колонки и $\alpha_i \le \beta_i$ для всех $i=\overline{1,n}$ где α_i, β_i - значения *i-х* клеток α, β соответственно);

б) в случае, когда существует одна и только одна *i-я* клетка (координата), такая, что $\alpha_i+\beta_i=1$, в таблицу добавляется колонка

γ	γ_1	γ_2	- - -	γ_n

где $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, для $j \neq i, k = \overline{1,n}, \gamma_i = 2$;

в) если существует одна и только одна *i-я* координата, такая, что $\alpha_i + \beta_i = 1$ и $\alpha_j = \beta_j$; для всех $i = \overline{1,n}$ и $j \neq i$, то колонки α и β исключаются из таблицы $(f_1 * f_2)$ и добавляется колонка

γ	γ_1	γ_2	- - -	γ_n

где $\gamma_i = 2$ и $\gamma_i = \alpha_i = \beta_i$, для всех $j = \overline{1,n},\ j \neq i.$

Нетрудно заметить, что условие а) соответствует операции поглощения э.к. $A \vee A \cdot B = A,$ а условие б) - операции обобщенного склеивания $A \cdot \bar{x} \vee B \cdot x = A \cdot \bar{x} \vee B \cdot x \vee A \cdot B$ (склеивания $A \cdot \bar{x} \vee A \cdot x = A$).

Процедура сокращения производится над всеми колонками таблицы результатов $(f_1 \cdot f_2)$ до тех пор, пока дальнейшие упрощения станут невозможными. В результате получим таблицу колонок, соответствующую сокращенной д.н.ф. (слабо сокращенной д.н.ф.) функции $f_1 \cdot f_2$.

Построение алгоритма поиска решений максимальных совместных подсистем системы (1) включает следующие этапы:

1) преобразование высказываний в уравнениях системы (1) из формул в базисе D^1 в д.н.ф.;

2) построение максимальных совместных подсистем системы (1) с помощью алгоритма A_χ.

Для анализа совместности заданной подсистемы

$$\begin{aligned} &f_{j_1}(x_1, \ldots, x_n) = 1, \\ &f_{j_2}(x_1, \ldots, x_n) = 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{j_k}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{aligned}$$

проверяем справедливость тождества

$$\prod_{i=1}^{\kappa} f_{j_i} \equiv 0 \qquad (5)$$

Известно, что заданная подсистема несовместна в том и только в том случае, если имеет место тождество (5);

3) удаление уравнений с зависимыми высказываниями;

4) переход из максимальных совместных подсистем уравнений системы (1) вида

$$\begin{cases} f_{j_1}(x_1, \ldots, x_n) = 1, \\ f_{j_2}(x_1, \ldots, x_n) = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{j_k}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{cases} \qquad (6)$$

к уравнению

$$\prod_{i=1}^{\kappa} f_{j_i}(x_1, \ldots, x_n) = 1. \qquad (7)$$

с помощью алгоритма умножения функций алгебры логики, заданных в виде д.н.ф.

Пусть

$$\prod_{i=1}^{k} f_{j_i}(\tilde{x}) = K_1 \vee \ldots \vee K_l,$$

где K_i - э.к. и $K_i = x_{t_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{t_p}^{\sigma_p}, i = \overline{1,l}.$

Выпишем решения уравнения (7) следующим образом. Для каждого уравнения $K_i(x_1,\ldots,x_n) = 1, i = \overline{1,l},$ строим $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ так, что $\alpha_{t_1} = \sigma_1, \alpha_{t_2} = \sigma_2, \ldots, \alpha_{t_p} = \sigma_p$ и остальные координаты равны двум, где под двоичными координатами подразумевается 0 или 1.

Заключение

Решена задача поиска максимальной совместной подсистемы систем булевых уравнений. Предложен алгоритм нахождения максимального верхнего нуля монотонной булевой функции. Разработана эффективная процедура вычисления значений монотонных функций f на наборах n -мерного куба. Разработан алгоритм решения систем булевых уравнений на основе поиска максимального верхнего нуля монотонных функций алгебры логики.

Литература

1. Катериночкина Н.Н. Поиск максимального верхнего нуля монотонной функции алгебры логики. ДАН СССР, т.224, 1973, №3.

2. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавании или классификации. В об.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1973, вып. 33.

3. Кабулов А.В., Игамбердыев Т.М. Об одном подходе к решению систем логических уравнений. Вопросы вычислительной и прикладной математики. –Тошкент: РИСО АН УзССР, 1984, вып. 74.

4. Kabulov A., Urunbayev E., Ashurov A. Logical method for constructing the optimal corrector of fuzzy heuristic algorithms. International Conference on Information Science and Communications Technologies: Applications, Trends and Opportunities, ICISCT 2019