**JURNAL FOURIER** | Oktober 2020, Vol. 9, No. 2, 59-74 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2020.92.59-74 E-ISSN 2541-5239

# Sistem Fungsi Iterasi dan Dimensi Fraktal Pada Himpunan Serupa Diri

Sri Wahyuningsih[1], Julan Hernadi[2]

*[1]Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika; [2]Dosen Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Jl. Budi Utomo No. 10 Ponorogo, Indonesia.*

*Korespondensi; Sri Wahyuningsih, Email: sriwahyuningsih7597@gmail.com; Julan Hernadi, Email: julanhernadi@umpo.ac.id*

## Abstrak

**Fraktal merupakan bentuk geometri yang dihasilkan dengan memulai sebuah pola yang sangat sederhana. Beberapa sifat dari fraktal diantaranya yaitu pengulangan, penskalaan, dan keserupaan diri. Ada beberapa cara untuk mengkonstruksi bangun fraktal, salah satunya adalah dengan menggunakan sistem fungsi iterasi (SFI). Penelitian ini bertujuan untuk: (1) menjelaskan sistem fungsi iterasi, (2) mengetahui cara mengkonstruksi fraktal, dan (3) menghitung dimensi fraktal melalui sistem fungsi iterasi. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif dengan bentuk studi pustaka dimana sumber informasi diperoleh dari buku, jurnal ilmiah, dan bahan pustaka lainnya yang berkaitan dengan sistem fungsi iterasi, dimensi fraktal, dan himpunan-himpunan serupa-diri. Referensi utama dari penelitian ini adalah buku *Fraktal Geometry Mathematical Foundations and Applications* karangan Kenneth Falconer (2003). Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji dan menganalisis secara mendalam materi penelitian dari referesi yang digunakan, kemudian menyusun seluruh materi tersebut secara runtut agar memudahkan pembaca dalam memahaminya. Hasil dari penelitian ini menjelaskan bahwa sistem fungsi iterasi merupakan koleksi pemetaan kontraksi berhingga $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ dengan $m \geq 2$. Cara mengkonstruksi fraktal dengan sistem fungsi iterasi yaitu dengan menemukan atraktornya, maka atraktor itulah yang merupakan bentuk fraktal. Untuk menghitung dimensi fraktal adalah dengan mencari skala/ faktor kontraksi $c$ dari pemetaanya, kemudian dimensi fraktal adalah $s$, yaitu $s$ yang memenuhi persamaan $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.**

**Kata Kunci:** Sistem fungsi iterasi; Fraktal; Dimensi fraktal; Himpunan serupa-diri.

## Abstract

**Fractals is the geometric shapes which are produced by starting a very simple pattern. Some of the properties of fractals are repetition, scaling, and self similarity. There were several ways to construct fractal structures, one of them is through the use of iterated function system. This research aims are to: (1) explain the iterated function systems, (2) knowing how to construct and finding the dimensions of fractal objects used iterated function systems. This research was a qualitive descritive with a literature study where the source of information obtained from text books, scientific journals, and other library materials which related to the iterated function systems, fractal dimension, and self-similar sets. The main reference of this research was from the book of *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications* by Kenneth Falconer (2003). This research conducted by reviewed and analyzed in deep the materials of research from the references, then prepare all the materials in coherence to facilitate the reader in understanding it. The result of this research were to explain that the iterated function system is a finite family of contractions $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ with $m \geq 2$. The way to construct a fractal with an iterated function system is to find the attractor, then the attractor was a fractal. To calculate the fractal dimension we have to find the scale or contraction factor $c$ from the mapping, then the fractal dimension is equal to the value of s that was satisfying $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.**

**Keywords:** Iterated function systems;, Fractal; Fractal dimension; self-similar set.

## Pendahuluan

Geometri adalah cabang matematika yang berkaitan dengan titik, garis, kurva dan permukaan. Selama abad ke-3 SM, dengan mengasumsikan kumpulan kecil dari aksioma-aksioma yang secara intuitif menarik dan menyimpulkan banyak proposisi lain dari aksioma-aksioma tersebut, Euclid menempatkan Geometri ke dalam bentuk aksiomatik yang umumnya dikenal sebagai Geometri Euclid. Selama berabad-abad, Geometri Euclid berfungsi sebagai alat penting untuk memecahkan masalah geometri dan astronomi. Namun, Geometri Euclid tidak mampu mempelajari pola yang tidak teratur dan terfragmentasi di sekitar kita. Mandelbrot (1983) menjelaskan bahwa Geometri Euclid tidak mampu untuk menggambarkan bentuk awan, gunung, garis pantai atau pohon. Awan bukan bola, gunung bukan kerucut, garis pantai bukan lingkaran, dan kulit tidak halus, kilat juga tidak bergerak dalam garis lurus.

Mandelbrot mengatakan bahwa studi tentang pola-pola tidak beraturan ini muncul dari bidang geometri klasik, dan ini dikesampingkan oleh Euclid sebagai suatu pola yang tidak berbentuk. Pada abad ke-20, Benoit B. Mandelbrot yang dikenal sebagai bapak geometri fraktal memperkenalkan geometri baru yang mampu menggambarkan bentuk pola yang tidak teratur dan terfragmentasi di sekitar kita, yang dikenal sebagai Geometri Fraktal. Geometri Fraktal menyatukan kelas besar objek di bawah satu atap, dan itu memisahkan matematika klasik abad ke-19 dari matematika modern abad ke-20. Matematika klasik berakar pada struktur beraturan geometri Euclid dan dinamika Newton, sedangkan matematika modern dimulai dengan teori himpunan Cantor dan kurva pengisian-ruang Paeno.

Geometri Fraktal adalah studi formal tentang struktur yang mirip dengan dirinya sendiri dan merupakan inti konseptual dari pemahaman kompleksitas alam. Beberapa sifat dari geometri fraktal diantaranya yaitu pengulangan, penskalaan, dan keserupaan diri. Serupa diri merupakan sifat yang sangat penting dari geometri fraktal, sehingga jika suatu bagian dari objek fraktal diperbesar dalam skala tertentu, maka bagian objek fraktal yang diperbesar tersebut akan mirip dengan bentuk keseluruhannya.

Fraktal merupakan bentuk geometri yang dihasilkan dengan memulai sebuah pola yang sangat sederhana. Bentuk tersebut kemudian berkembang dengan menerapkan suatu aturan tertentu. Dalam banyak kasus, aturan untuk membuat sebuah bentuk menjadi berkembang dapat dilakukan dengan melibatkan pengambilan bentuk asli dan memodifikasinya atau menambahkannya kemudian diterapkan berulang dari satu tahap ke tahap berikutnya.

Ada beberapa cara untuk mengkonstruksi bangun fraktal, salah satunya adalah dengan menggunakan sistem fungsi iterasi (SFI). Pembangunan fraktal dengan SFI dilakukan dengan cara mentransformasi bentuk awal dari sebuah fraktal, sehingga dari transformasi tersebut diperoleh bentuk baru yang terdiri dari beberapa bagian. Bagian-bagian tersebut tidak lain adalah bentuk awal fraktal yang diperkecil dengan skala tertentu. Setiap bagian dari bentuk baru tersebut kemudian ditransformasi lagi dengan transformasi yang sama seperti sebelumnya sehingga setiap transformasi akan membentuk sebuah iterasi. Setelah terjadi iterasi tak berhingga banyaknya, maka akan diperoleh sebuah fraktal.

Transformasi yang diterapkan dalam pembentukan fraktal dengan menggunakan SFI dapat dilakukan dengan pengambilan skala yang berbeda-beda. Berapapun skala yang digunakan untuk mengkonstruksi sebuah fraktal, sifat yang melekat pada fraktal adalah keserupaan diri. Untuk dapat mencerna sifat serupa diri dari fraktal, perlu diketahui bagaimana cara menghitung dimensi fraktal. Dimensi fraktal akan memberikan perbandingan kompleksitas pola fraktal yang berubah ketika diambil skala yang berbeda.

Dalam matematika, dimensi umumnya didefinisikan sebagai jumlah minimum koordinat yang diperlukan untuk menentukan setiap titik dalam ruang atau objek. Dimensi memuat banyak informasi tentang sifat-sifat geometri suatu himpunan. Dalam geometri Euclid dimensi akan selalu berupa bilangan bulat, seperti geometri datar berdimensi 2 dan geometri ruang berdimensi 3. Sedangkan dimensi fraktal tidak harus berupa bilangan bulat, karena fraktal terdiri dari objek-objek yang memiliki bentuk tidak teratur. Dalam pembahasan ini digunakan sistem fungsi iterasi untuk mengkonstruksi fraktal dengan cara yang terpadu dan menggunakan cara yang sederhana untuk menemukan dimensi fraktal.

## Landasan Teori

Pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep dasar dan notasi yang akan digunakan pada pembahasan berikutnya.

**Definisi 2.1 (Barnsley, 1988: 11)**
Ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ adalah ruang $\boldsymbol{X}$ yang dilengkapi dengan fungsi $d: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$, yang mengukur jarak antara pasangan titik $x$ dan $y$ dalam $\boldsymbol{X}$. Sedemikian hingga $d$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i. $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x, y \in \boldsymbol{X}$
ii. $0 < d(x,y) < \infty\ \forall x, y \in \boldsymbol{X}, x \neq y$
iii. $d(x,x) = 0\ \ \forall\ x \in \boldsymbol{X}$
iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\ \forall\ x, y, z\ \in \boldsymbol{X}$

fungsi $d$ disebut sebagai metrik.

**Definisi 2.2 (Barnsley, 1988: 17)**
Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari titik-titik pada ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat $N > 0$ sedemikian sehingga,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,\ \forall\ n, m > N.$$

**Definisi 2.3 Limit Superior dan Limit Inferior (Shirali, 2006: 7)**
Misalkan $\{x_n\}_{n\geq 1}$ adalah suatu barisan terbatas, didefinisikan limit superior sebagai berikut

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k$$

dan didefinisikan limit inferior sebagai berikut

$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_n \mathop{inf}_{k\geq n} x_k.$$

**Definisi 2.4 (Shirali, 2006: 72)**
Misalkan $S$ adalah himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Penutup himpunan (*closure*) $S$ dinotasikan dengan $\bar{S}$ dan didefinisikan sebagai $\bar{S} = S \cup S'$. Dimana $S'$ adalah himpunan titik-titik limit dari $S$.

**Definisi 2.5 Bola Terbuka & Tertutup (Shirali, 2006: 64)**
Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ adalah ruang metrik. Suatu himpunan

$$B(c,r) = \{x \in \boldsymbol{X}: d(c,x) < r\}$$

disebut bola terbuka dengan pusat $c$ dan jari-jari $r$ di $\boldsymbol{X}$. Dimana $c \in \boldsymbol{X}$ dan $r > 0$ untuk $r \in \mathbb{R}$. Dan

$$\bar{B}(c,r) = \{x \in \boldsymbol{X}: d(c,x) \leq r\}$$

disebut bola tertutup dengan pusat $c$ dan jari-jari $r$ di $\boldsymbol{X}$. Dimana $c \in \boldsymbol{X}$ dan $r > 0$ untuk $r \in \mathbb{R}$.

**Definisi 2.6 (Falconer, 2003: 124)**
Diberikan himpunan tertutup $D$ dan $A, B \in D$. Jarak antara himpunan $A$ dan $B$ didefinisikan sebagai $\delta$ terkecil sedemikian sehingga pesekitaran-$\delta$ dari $A$ memuat $B$ dan juga sebaliknya,

$$d(A,B) = \inf\ \{\delta: A \subset B_\delta \text{ dan } B \subset A_\delta\}.$$

**Definisi 2.7 Titik Batas (Shirali, 2006: 70)**
Misalkan $S$ himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Titik $x \in \boldsymbol{X}$ dikatakan titik batas dari $S$, jika untuk setiap bola terbuka dengan pusat $x$ memuat setidaknya satu titik elemen $S$ yang berbeda dari $x$, yaitu

$$(B(x,r) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset.$$

**Definisi 2.8 Himpunan Terbuka & Tertutup**
Misalkan $S$ himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Himpunan $S$ dikatakan terbuka jika tidak memuat titik batasnya dan dikatakan tertutup jika memuat semua titik batasnya.

**Definisi 2.9 (Hernadi, 2015: 79)**
Misalkan $S$ himpunan pada sebuah ruang metrik $\boldsymbol{X}$. Liput terbuka *(open cover)* adalah koleksi himpunan terbuka $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ pada $\boldsymbol{X}$ sehingga gabungannya menyelimuti $E$, yaitu

$$E \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Bila $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ dan gabungan himpunan-himpunan di dalamnya masih memuat $E$ maka $\mathcal{G}'$ disebut liput bagian *(subcover)* dari $\mathcal{G}$. jika $\mathcal{G}'$ memuat berhingga banyak himpunan maka ia disebut liput bagian berhingga *(finite subcover).*

**Definisi 2.10 (Himpunan Kompak)**
Sebuah himpunan $S$ pada ruang metrik $\boldsymbol{X}$ dikatakan kompak jika setiap liput terbuka $S$ memuat liput bagian berhingga. Secara eksplisit jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ liput terbuka $S$ maka terdapat berhingga banyak indeks $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$S \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

**Definisi 2.11 (Falconer, 2003: 27)**
Misalkan $U$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}^n$. Diameter $U$ didefinisikan sebagai

$$|U| \coloneqq sup\,\{|x-y| : x, y \in U\},$$

yaitu jarak terjauh dari sebarang pasangan titik dalam $U$.

**Definisi 2.12**
Misalkan $F$ adalah himpunan bagian tak kososng dari $\mathbb{R}^n$. Jika $\{U_i\}$ adalah kumpulan himpunan terbilang dengan diameter paling besar $\delta$ dan $\{U_i\}$ menutupi $F$, yaitu $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, dengan $0 \le |U_i| \le \delta$ ,$\forall\ i$, maka $\{U_i\}$ disebut $\delta$-$cover$ dari $F$.

**Definisi 2.13**
Diberikan $F$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}^n$ dan $s$ adalah bilangan tak negatif. Untuk setiap $\delta > 0$, didefinisikan

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \coloneqq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ adalah } \delta\text{-}cover \text{ dari } F\right\}$$

**Teorema 2.1 (Yohanes, 2014: 49)**
Untuk $F \subseteq \mathbb{R}^n$ dan bilangan tak negatif $s$, berlaku, jika $\delta_1 < \delta_2$, maka $\mathcal{H}_{\delta_2}^s(F) \le \mathcal{H}_{\delta_1}^s(F)$.
**Bukti:**
Misal $0 < \delta_1 < \delta_2 \le \infty$, maka setiap $\delta_1$-*cover* dari $F$ adalah $\delta_2$-*cover* dari $F$. Oleh karena itu, koleksi semua $\delta_1$-*cover* dari $F$ termuat di dalam koeksi $\delta_2$-*cover* dari $F$. Akibatnya,

$$\inf\{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s \,|F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, |U_i| < \delta_2\} \le \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s \,|F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, |U_i| < \delta_1\} \leftrightarrow \mathcal{H}_{\delta_2}^s(F) \le \mathcal{H}_{\delta_1}^s(F).$$

■

**Definisi 2.14 (Falconer, 2003: 27)**
Diberikan $F \subset \mathbb{R}^n$ dan $s$ adalah bilangan tak negatif, didefinisikan

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

$\mathcal{H}^s(F)$ disebut ukuran Hausdorff dimensi $s$ dari $F$.

**Teorema 2.2 Sifat Penskalaan (Falconer, 2003: 29)**
Misalkan $S$ adalah transformasi kesamaan dengan faktor skala $\lambda > 0$. Jika $F \subset \mathbb{R}^n$, maka

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

**Bukti:**
Jika $\{U_i\}$ adalah $\delta$-cover dari $F$ maka $\{S(U_i)\}$ adalah $\lambda\delta$-*cover* dari $S(F)$, jadi

$$\begin{aligned}\sum |S(U_i)|^s &= \sum |\lambda U_i|^s \\ &= \sum |\lambda|^s\,|U_i|^s \\ &= \sum \lambda^s\,|U_i|^s \\ &= \lambda^s \sum |U_i|^s\end{aligned}$$

diperoleh,

$$\begin{aligned}\inf \sum |S(U_i|^s &\leq \lambda^s \inf \sum |U_i|^s \\ \mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(S(F)) &\leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F)\end{aligned}$$

ketika $\delta \to 0$ diperoleh,

$$\mathcal{H}^s\big(S(F)\big) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Kemudian ganti $S$ dengan $S^{-1}, \lambda$ dengan $\frac{1}{\lambda}$, dan $F$ dengan $S(F)$, sehingga diperoleh

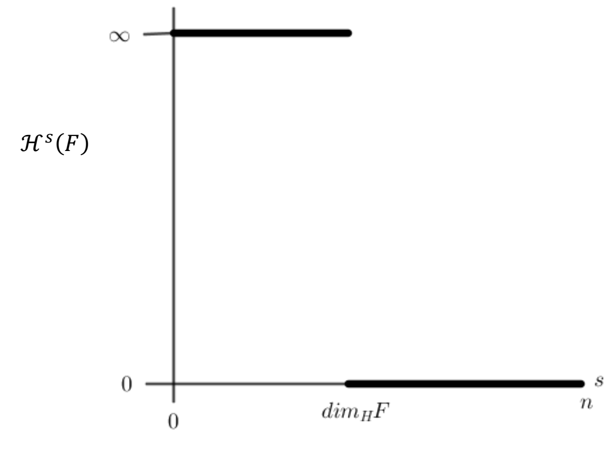
$$\mathcal{H}^s\big(S(F)\big) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$ ■

**Definisi 2.15 (Falconer, 2003: 31)**
Untuk setiap $F \subset \mathbb{R}^n$, dimensi Hausdorff dari $F$ dinotasikan dengan $\dim_{\mathrm{H}}(F)$, sedemikian sehingga

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } 0 \leq s < \dim_{\mathrm{H}} F \\ 0, & \text{untuk } s > \dim_{\mathrm{H}} F. \end{cases}$$

Jika $s = \dim_{\mathrm{H}} F$, maka $\mathcal{H}^s(F)$ mungkin 0, tak berhingga, atau memenuhi

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty.$$




**Gambar 1.** Grafik $\mathcal{H}^s$ terhadap $s$ untuk himpunan $F$.

Definisi dimensi hausdorff ini secara formal dapat ditulis:

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\ \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$ ■

**Definisi 2.16 (Falconer, 2003: 41)**
Diberikan $F$ himpunan bagian terbatas tak kososng dari $\mathbb{R}^n$ dan $N_\delta(F)$ adalah jumlah minimum himpunan-himpunan yang berdiameter tidak lebih dari $\delta$ yang dapat menyelimuti $F$. Dimensi hitung kotak bawah dan atas dari $F$ secara berturut-turut adalah

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Jika $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, maka dimensi hitung kotak dari $F$ adalah

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

**Proposisi 2.1 Prinsip Distribusi Massa (Falconer, 2003: 60)**
Misalkan $\mu$ adalah distribusi massa dari $F$ dan untuk suatu $s$ terdapat $c > 0$ dan $\varepsilon > 0$, sedemikian hingga

$$\mu(U) \le c|U|^s$$

untuk semua himpunan $U$, dengan $|U| \le \varepsilon$. Kemudian $\mathcal{H}^s(F) \ge \mu(F)/c$ dan

$$s \le \dim_{\mathrm{H}} F \le \underline{\dim}_B F \le \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$

## Metode

Metode kajian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka yaitu dengan mengkaji referensi-referensi mengenai geometri fraktal yang mengacu pada buku *Fraktal Geometry Mathematical Foundations and Applications* karangan Kenneth Falconer (2003).

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah:
1. Mengumpulkan sumber pustaka yang digunakan sebagai referensi dengan cara membaca, memahami, mencatat, dan mempelajari literatur yang terkait dengan ukuran dan dimensi fraktal.
2. Mengkaji berbagai referensi mengenai topik geometri fraktal.
3. Menyajikan kembali definisi-definisi serta teorema-teorema yang menjadi dasar dalam mempelajari geometri fraktal.
4. Menyusun seluruh materi yang telah dikumpulkan secara runtut agar memudahkan pembaca dalam memahaminya.

## Hasil dan Pembahasan

### Sistem Fungsi Iterasi

Banyak fraktal yang terbentuk dari bagian-bagian yang mirip dengan bentuk keseluruhannya. Himpunan pertiga tengah Cantor adalah contoh fraktal yang bagian-bagian kecilnya mirip dengan bagian keseluruhan himpunan tersebut. Himpunan pertiga tengah Cantor merupakan gabungan dari dua salinan yang sama dari dirinya sendiri. Begitu juga dengan kurva von Koch yang terdiri dari empat salinan yang sama. Serupa diri (*self-similar*) bukan hanya sifat dari fraktal, namun sifat ini dapat digunakan untuk mendefinisikan fraktal. Sistem fungsi iterasi mengkonstruksi fraktal dengan cara yang terpadu dan menggunakan cara yang sederhana untuk menemukan dimensi.

**Definisi 4.1 (Iterasi)**
Diberikan himpunan kompak tak kosong $A$. Untuk $k \in \mathbb{N}$, iterasi dari $S$ yaitu $S^k: A \to A$didefinisikan dengan

$$S^0(E) = E, S^1 = S(E), S^2 = S \circ S(E), \dots, S^k(E) = S \circ S^{k-1}(E) = S(S^{k-1}(E))$$

Untuk semua $E \in A$.

**Definisi 4.2 (Pemetaan Kontraksi)**
Diberikan himpunan tertutup $D$, dimana $D \subset \mathbb{R}^n$. Pemetaan $S: D \to D$ disebut pemetaan kontraksi jika terdapat konstanta $c$ dengan $0 < c < 1$ sehingga

$$|S(x) - S(y)| \leq c\,|x - y|, \ \ \forall\, x, y\ \in D$$

Konstanta $c$ dinamakan faktor kontraksi.

Setiap pemetaan kontraksi adalah fungsi yang kontinu. Ketika berlaku sama dengan dalam pemetaan kontraksi, yaitu jika $|S(x) - S(y)| = c\,|x - y|$, maka $S$ mentransformasi himpunan menjadi himpunan-himpunan yang serupa secara geometri. Pemetaan kontraksi$|S(x) - S(y)| = c\,|x - y|$disebut pemetaan kontraksi serupa *(contracting similarity)*.

**Definisi 4.3 (Sistem Fungsi Iterasi)**
Diberikan pemetaan-pemetaan kontraksi$\{S_1, \dots, S_m\}$ pada $D \in \mathbb{R}^n$ sehingga

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|, \qquad (x, y) \in D$$

pemetaan-pemetaan kontraksi berhingga $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ dengan $m \geq 2$ disebut Sistem Fungsi Iterasi (SFI).

**Definisi 4.4**
Diberikan himpunan kompak tak kosong $F$, dimana $F \subset D$. $F$ disebut atraktor dari SFI jika

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

Sifat dasar SFI adalah memiliki atraktor tunggal, dimana atraktor tersebut biasanya adalah sebuah fraktal.

**Teorema 4.1**
Diberikan Sistem Fungsi Iterasi $\{S_1, \dots, S_m\}$ pada $D \in \mathbb{R}^n$ sehingga

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|, \qquad (x, y) \in D \tag{1}$$

dengan $c_i < 1, \forall i$. Maka terdapat dengan tunggal atraktor F, yaitu himpunan kompak tak kosong sehingga

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) \tag{2}$$

Selain itu, jika didefinisikan sebuah transformasi $S$ pada kelas $\mathcal{S}$ himpunan kompak tak kosong dengan

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E) \tag{3}$$

Untuk $E \in \mathcal{S}$, dan $S^k$ adalah iterasi ke-$k$ dari $S$, maka

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E) \tag{4}$$

Untuk setiap himpunan $E \in \mathcal{S}$ sedemikian hingga $S_i(E) \subset E, \forall i$.
**Bukti:**
Perhatikan bahwa $S$ ditransformasikan menjadi himpunan-himpunan dalam $\mathcal{S}$. Jika $A, B \in \mathcal{S}$ maka

$$d\big(S(A), S(B)\big) = d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

Menggunakan definisi metrik $d$ dan jika$(S_i(A))_\delta$ memuat $S_i(B)$untuk semua $i$, maka $\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)\right)_\delta$ memuat $\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)$ dan sebaliknya. Berdasarkan (3.1) diperoleh,

$$d\big(S(A), S(B)\big) \leq (\max_{1 \leq i \leq m} c_i) d(A, B) \tag{5}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $d$ adalah metrik lengkap pada $\mathcal{S}$, yaitu setiap barisan Cauchy dari himpunan-himpunan dalam $\mathcal{S}$ konvergen ke sebuah himpunan dalam $\mathcal{S}$. Karena $0 < \max_{1 \le i \le m} c_i < 1,$ maka persamaan (5) menyatakan bahwa $S$ adalah pemetaan kontraksi pada ruang metrik lengkap $(\mathcal{S}, d)$. Berdasarkan teorema pemetaan kontraksi banach, $S$ mempunyai titik tetap tunggal, yaitu terdapat himpunan tunggal $F \in \mathcal{S}$, sedemikian hingga $S(F) = F$, yaitu

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

Dan

$$\lim_{k \to \infty} S^k(E) = F$$

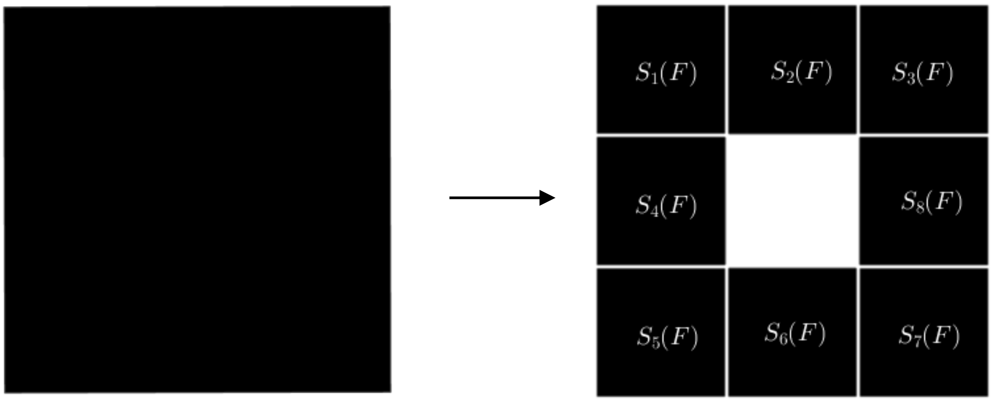
Secara khusus, jika $S_i(E) \subset E, \forall i$ maka $S(E) \subset E$, sehingga $S^k(E)$ adalah urutan menurun himpunan kompak tak kosong dengan $\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$ harus sama dengan $F$. ■

**Dimensi Himpunan Serupa Diri (Self-Similar)**

Salah satu keuntungan menggunakan SFI untuk menghitung dimensi atraktor yaitu dimensi atraktor seringkali relatif mudah untuk dihitung dalam istilah pendefinisian kontraksi. Pada bagian ini akan dibahas ketika pemetaan-pemetaan kontaksi $\{S_1, \dots, S_m\}$ serupa, yaitu $S_1, \dots, S_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dengan

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n) \tag{6}$$

Dimana $0 < c_i < 1, c_i$ disebut *ratio* dari $S_i$. Jadi setiap $S_i$ mentransformasi himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$ menjadi himpunan-himpunan yang serupa secara geometris. Atraktor dari kumpulan himpunan-himpunan yang serupa tersebut dinamakan himpunan serupa-diri *(Self-Similar)*, yaitu himpunan yang terbentuk dari gabungan sejumlah salinan serupa yang lebih kecil dari dirinya sendiri. Perhatikan ilustrasi dari transformasi himpunan berikut




**Gambar 2.** Transformasi himpunan menjadi himpunan-himpunan serupa-diri.

Dalam kondisi tertentu himpunan *self-similar* $F$ mempunyai dimensi Hausdorf dan dimensi *box* yang sama, yaitu dengan nilai $s$ yang memenuhi

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{7}$$

dimana $s$ adalah bilangan tak negatif dan lebih lanjut $F$ mempunyai ukuran $\mathcal{H}^s$ positif dan terbatas. Jika $F = \bigcup_{i=1}^{m} (S_i(F))$ adalah gabungan yang mendekati *disjoint*, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) &= \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(S_i(F)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i^s \mathcal{H}^s(F) \end{aligned} \tag{8}$$

Menggunakan persamaan 6, sifat skala, dan asumsi bahwa $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ pada nilai $s = \dim_H F$, diperoleh bahwa $s$ memenuhi persamaan 7.

Agar argument ini benar, diperlukan kondisi yang memastikan bahwa bagian-bagian $S_i(F)$ dari $F$ tidak tumpang tindih terlalu banyak. $\{S_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ dikatakan sebagai himpunan terbuka jika terdapat himpunan terbuka terbatas tak kosong $V$ sedemikian hingga

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \tag{9}$$

dengan gabungan yang *disjoint.* Jika keserupaan $\{S_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ memenuhi syarat himpunan terbuka, maka dimensi Hausdorf atraktornya adalah $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

**Lemma 4.1**
Diberikan $\{V_i\}$ adalah kumpulan *subset disjoint* terbuka dari $\mathbb{R}^n$ sedemikian hingga setiap $V_i$ berisi bola dengan jari-jari $a_1 r$ dan termuat dalam bola dengan jari-jari $a_2 r$. Kemudian setiap bola $B$ dengan jari-jari $r$ beririsan dengan himpunan penutup $\overline{V_i}$ paling banyak $\left(\frac{1+2a_2}{a_1}\right)^n$.
**Bukti:**
Jika $\overline{V_i}$ memenuhi $B$, maka $\overline{V_i}$ berada dalam bola dengan pusat yang sama dengan $B$ dengan jari-jari $(1 + 2a_2)r$. Misalkan $q \in \overline{V_i}$ beririsan dengan $B$. Kemudian, menjumlahkan volume interior bola yang berjari-jari $a_1 r$, berarti bahwa $q(a_1 r)^n \leq (1 + a_2 r)^n r^n$ menyatakan batas untuk $q$. ■

**Teorema 3.2**
Misalkan kondisi himpunan terbuka pada persamaan 9 berlaku untuk keserupaan $S_i$ pada $\mathbb{R}^n$ dengan rasio $0 < c_i < 1$ untuk $1 \leq i \leq m$. Jika $F$ adalah atraktor dari SFI$\{S_1, \dots, S_m\}$, yaitu

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{10}$$

maka $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = s$, dimana $s$ harus memenuhi

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1. \tag{11}$$

Selain itu, untuk nilai $s$ ini, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.
**Bukti:**
Misalkan $s$ memenuhi persamaan 11. Diberikan $\mathcal{I}_k$ himpunan dari semua barisan dengan panjang $k, (i_1, \dots, i_k)$ dengan $1 \leq i_j \leq m$. Untuk sebarang himpunan $A$ dan $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$, didefinisikan $A_{i_1,\dots,i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$. Dengan menggunakan persamaan 10 secara berulang kali, maka diperoleh,

$$F = \bigcup_{\mathcal{I}_k} F_{i_1,\dots,i_k}.$$

Akan dibuktikan bahwa *cover* $F$ memberikan estimasi atas yang sesuai untuk ukuran Hausdorff. Karena pemetaan $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ adalah pemetaan yang serupa dengan rasio $c_{i_1} \dots c_{i_k}$, maka

$$\sum_{\mathcal{I}_k} \left|F_{i_1,\dots,i_k}\right|^s = \sum_{\mathcal{I}_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \, |F|^s = \left(\sum_{i_1} c_{i_1}{}^s\right) \dots \left(\sum_{i_1} c_{i_k}{}^s\right) |F|^s = |F|^s$$

Untuk sebarang $\delta > 0$, dapat diambil $k$ sedemikian sehingga $|F_{i_1,\dots,i_k}| \leq (\max_i c_i)^k |F| \leq \delta$, jadi $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ dan oleh karena itu $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas bawah. Misalkan $\mathcal{I}$ adalah himpunan semua barisan tak terbatas, $\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ dan misalkan $I_{i_1,\dots,i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$ adalah silinder yang terdiri dari barisan-barisan dalam $\mathcal{I}$ dengan istilah awal $(i_1, \dots, i_k)$. Kita dapat menempatkan distribusi massa $\mu$ pada $\mathcal{I}$ sedemikian hingga $\mu(i_1, \dots, i_k) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$. Karena $(c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^{m} (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s$, yaitu $\mu(I_{i_1,\dots,i_k}) = \sum_{i=1}^{m} \mu(I_{i_1,\dots,i_k,i})$, ini menunjukkan bahwa $\mu$ adalah distribusi massa pada himpunan bagian $\mathcal{I}$ dengan $\mu(\mathcal{I}) = 1$. Selanjutnya ubah $\mu$ menjadi $\tilde{\mu}$ pada $F$ dengan mendefinisikan $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1,i_2,\dots} \in A\}$ untuk himpunan bagian $A$ dari $F$. (Ingat kembali bahwa $x_{i_1,i_2,\dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1,\dots,i_k}$). Jadi $\tilde{\mu}$ massa dari sebuah himpunan adalah $\mu$ massa dari barisan yang sesuai. Mudah dibuktikan bahwa $\tilde{\mu}(F) = 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\tilde{\mu}$ memenuhi prinsip distribusi massa. Diberikan $V$ himpunan terbuka yang memenuhi persamaan 9. Karena $\bar{V} \supset S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(\bar{V})$, urutan menurun dari iterasi $S^k(\bar{V})$ konvergen ke $F$. Secara khusus $\bar{V} \supset F$ dan $\bar{V}_{i_1,\dots,i_k} \supset F_{i_1,\dots,i_k}$ untuk setiap barisan terbatas $(i_1, \dots, i_k)$. Diberikan $B$ sebarang bola degan jari-jari $r < 1$. Estimasikan $\tilde{\mu}(B)$ dengan himpunan $V_{i_1,\dots,i_k}$ yang berdiameter sebanding dengan $B$ dan penutup yang beririsan $F \cap B$.

Batasi setiap barisan tak terbatas $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ setelah istilah pertama $i_k$ dimana

$$\left(\min_{1 \le i \le m} c_i\right) r \le c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \le r \tag{12}$$

dan diberikan $Q$ himpunan terbatas dari semua berisan (terbatas) yang diperoleh dengan cara ini. Kemudian untuk setiap barisan tak terbatas $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ terdapat tepat satu nilai $k$ dengan $(i_1, \dots, i_k) \in Q$. Karena $V_1, \dots, V_m$ saling terpisah (*disjoint*) begitu juga dengan $V_{i_1,\dots,i_k,1}, \dots, V_{i_1,\dots,i_k,m}$ untuk setiap $(i_1, \dots, i_k)$. Dengan menggunakan cara ini secara berulang, berarti kumpulan himpunan terbuka $\{V_{i_1,\dots,i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$ saling terpisah, demikian pula $F \subset \bigcup_Q F_{i_1,\dots,i_k} \subset \bigcup_Q \bar{V}_{i_1,\dots,i_k}$.

Ambil $a_1$ dan $a_2$ sehingga $V$ memuat sebuah bola dengan jari-jari $a_1$ dan termuat dalam sebuah bola dngan jari-jari $a_2$. Kemudian untuk setiap $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, himpunan $V_{i_1,\dots,i_k}$ memuat sebuah bola dengan jari-jari $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_1$, oleh karena itu salah satunya berjari-jari$\left(\min_i c_i\right) a_1 r$ dan termuat dalam bola dengan jari-jari $c_{i_1} \dots c_{i_k} a_2$ dan karenanya dalam bola dengan jari-jari $a_2 r$. Diberikan $Q_1$ barisan $(i_1, \dots, i_k)$ dalam $Q$ sedemikian hingga $B$ beririsan dengan $\bar{V}_{i_1,\dots,i_k}$. Berdasarkan lemma 4.1 terdapat paling banyak $q = (1 + 2a_2)^n {a_1}^{-n} \left(\min_i c_i\right)^{-n}$ barisan dalam $Q_1$. Kemudian

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &= \tilde{\mu}(F \cap B) \\ &= \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1,i_2,\dots} \in F \cap B\} \\ &\le \mu\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1,\dots,i_k}\right\} \end{aligned}$$

karena jika $x_{i_1,i_2,\dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \bar{V}_{i_1,\dots,i_k}$, maka terdapat bilangan bulat $k$ sedemikian hingga $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$, sehingga

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &\le \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1,\dots,i_k}) \\ &= \sum_{Q_1} \left(c_{i_1} \dots c_{i_k}\right)^s \\ &\le \sum_{Q_1} r^s \\ &\le r^s q. \end{aligned}$$

Karena untuk sebarang himpunan $U$ termuat dalam bola dengan jari-jari $|U|$, maka $\tilde{\mu}(U) \le |U|^s q$, sehingga berdasarkan prinsip distribusi massa diperoleh $\mathcal{H}^s(F) \ge q^{-1} > 0$, dan $\dim_{\mathrm{H}} F = s$

Jika $Q$ adalah sebarang himpunan dari barisan terbatas sehingga untuk setiap $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ terdapat tepat satu bilangan bulat $k$ dengan $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, secara induktif berdasarkan 12 diperoleh $\sum_Q \left(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}\right)^s = 1$. Jadi, jika $Q$ dipilih seperti pada (3.12), $Q$ memuat paling banyak $\left(\min_i c_i\right)^{-s} r^{-s}$ barisan. Untuk setiap barisan $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ diperoleh $\left|\bar{V}_{i_1,\dots,i_k}\right| = c_{i_1} \dots c_{i_k} |\bar{V}| \le r|\bar{V}|$, sehingga $F$ mungkin ditutup oleh $\left(\min_i c_i\right)^{-s} r^{-s}$ himpunan-himpunan dengan diameter $r|\bar{V}|$, $\forall\, r <$

1. Berdassarkan definisi ekuivalen diperoleh $\dim_B F \leq s$. Diperhatikan bahwa $s = \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq s$. ■

Jika kondisi himpunan terbuka tidak diasumsikan pada teorema 4.2, dapat ditunjukkan bahwa $\dim_H F = \dim_B F$ walaupun nilai dimensinya mungkin kurang dari $s$. Dengan teorema 4.2 dapat ditemukan dimensi dari banyak fraktal pada himpunan serupa-diri (*self-similar*).

**Contoh 4.1 (Himpunan Cantor)**
Himpunan Cantor adalah salah satu contoh fraktal yang paling dikenal dan paling mudah dikonstruksi serta menampilkan banyak karakteristik fraktal yang khas. Himpunan ini dikonstruksi dari interval satuan dengan serangkaian operasi penghapusan. Misalkan $E_0$ interval $[0,1]$. $E_1$ merupakan himpunan yang diperoleh dengan menghapus $\frac{1}{3}$ bagian tengah dari $E_0$, sehingga $E_1$ terdiri dari $2$ interval, yaitu $[0,\frac{1}{3}]$ dan $[\frac{2}{3},1]$. Pengahapusan $\frac{1}{3}$ bagian tengah dari masing-masing kedua interval ini akan menghasilkan $E_2$, sehingga $E_2$ terdiri dari $4$ interval, yaitu $\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right]$. Cara ini terus dilanjutkan sehingga $E_k$ diperoleh dengan menghapus $\frac{1}{3}$ bagian tengah dari setiap interval pada $E_{k-1}$. Dengan demikian $E_k$ terdiri dari $2^k$ interval dengan panjang masing-masing interval $3^{-k}= \frac{1}{3^k}$ .
**Penghitungan:**
Dalam konstruksi himpunan Cantor, $F$ merupakan atraktor dari $2$ keserupaan dengan SFI yang diberikan oleh himpunan-himpunan $S_1(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)$ dan $S_2(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$. Diperhatikan bahwa,

$$|S_1(x) - S_1(y)| = \left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right| = \frac{1}{3}|x - y|$$

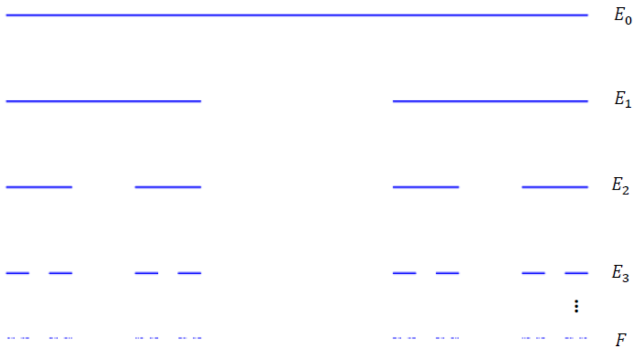
dan

$$|S_2(x) - S_2(y)| = \left|\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right)\right| = \frac{1}{3}|x - y|$$

Sehingga diperoleh rasio masing-masing pemetaan adalah $\frac{1}{3}$ yang memetakkan $E_0$ ke $E_1$. Ambil $V$ interval satuan $[0,1]$ yang tidak lain adalah $E_0$, sehingga berlaku kondisi himpunan terbuka. Dengan demikian diperoleh,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} c_i^s &= 1\\
\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1\\
2\left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1\\
\left(\frac{1}{3}\right)^s &= \frac{1}{2}\\
s &= \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{3}}\\
s &= 0{,}63
\end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan teorema $3.2$ diperoleh $\dim_H F = \dim_B F = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}63$.




**Gambar 3.** Konstruksi himpunan Cantor.

**Contoh 4.2. Segitiga Sierpinski**

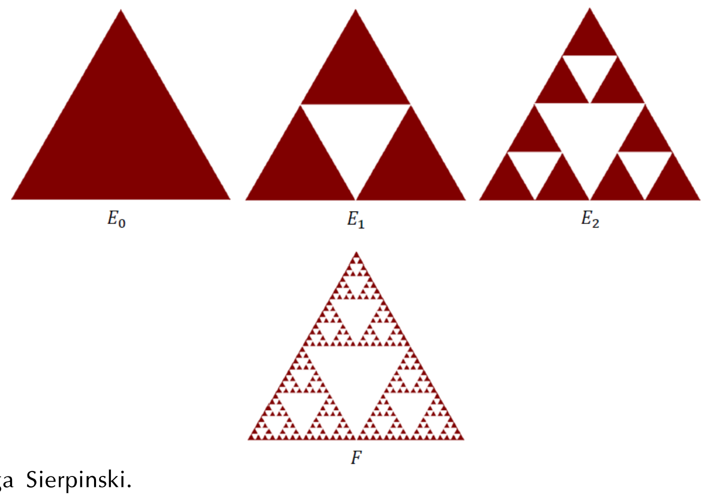
Segitiga Sierpinski atau gasket $F$ dikonstruksi dari segitiga sama sisi dengan berulang kali menghilangkan segitiga sama sisi terbalik (gambar 4). Dimensi dari Segitiga Sierpinski atau gasket $F$ ini yaitu $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = \frac{\log 3}{\log 2}$.

**Penghitungan:**

Dalam konstruksi segitiga Sierpinski, $F$ merupakan atraktor dari 3 keserupaan dengan SFI yang diberikan oleh himpunan-himpunan $S_1(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$, $S_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right)$, dan $S_3(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)$. Dengan rasio masing-masing pemetaaan adalah $\frac{1}{2}$ yang memetakkan $E_0$ ke $E_1$. Ambil $V$ interior dari $E_0$, sehingga berlaku kondisi himpunan terbuka. Dengan demikian diperoleh,

$$\begin{aligned} \sum_1^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s &= 1 \\ 3\left(\frac{1}{2}\right)^s &= 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^s &= \frac{1}{3} \\ s &= \frac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{1}{2}} \\ s &= 1{,}58 \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 3.2 diperoleh $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}58$.

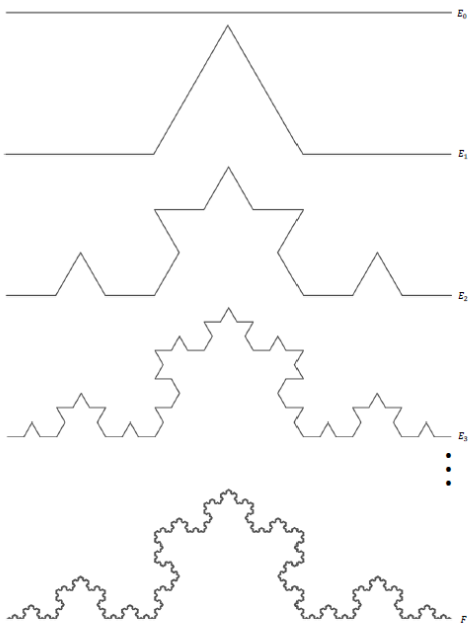



**Gambar 4.** Konstruksi segitiga Sierpinski.

**Contoh 4.3 (Kurva Von Koch)**
Kurva Von Koch juga merupakan bentuk unik dari fraktal, yang dibentuk dari sebuah segmen. Misalkan $E_0$ merupakan sebuah segmen dari satuan panjang. Himpunan $E_1$ terdiri dari $4$ segmen yang diperoleh dengan menghapus $\frac{1}{3}$ bagian tengah dari $E_0$ dan menggantinya dengan $2$ sisi lain dari segitiga sama sisi berdasarkan segmen yang dihapus. Kemudian $E_2$ diperoleh dengan menerapkan langkah sama untuk setiap segmen pada $E_1$, dan seterusnya sehingga $E_k$ diperoleh dengan mengganti $\frac{1}{3}$ bagian tengah dari setiap segmen garis lurus $E_{k-1}$ dengan $2$ sisi lain dari segitiga sama sisi (gambar 5).
**Penghitungan:**
Dalam konstruksi kurva von Koch,$F$ merupakan atraktor dari $4$ keserupaan dengan rasio masing-masing pemetaaan adalah $\frac{1}{3}$ yang memetakkan $E_0$ ke $E_1$. Kondisi himpunan terbuka terpenuhi, yaitu ambil $V$ interior dari segitiga sama kaki dengan alas $1$ dan tinggi $\frac{1}{6}\sqrt{3}$. Dengan demikian diperoleh,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} c_i^s &= 1\\ 4\left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1\\ s &= \frac{\log\frac{1}{4}}{\log\frac{1}{3}}\\ s &= 1{,}26\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 4.2 diperoleh $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}26.$




**Gambar 5.** Konstruksi kurva von Koch.

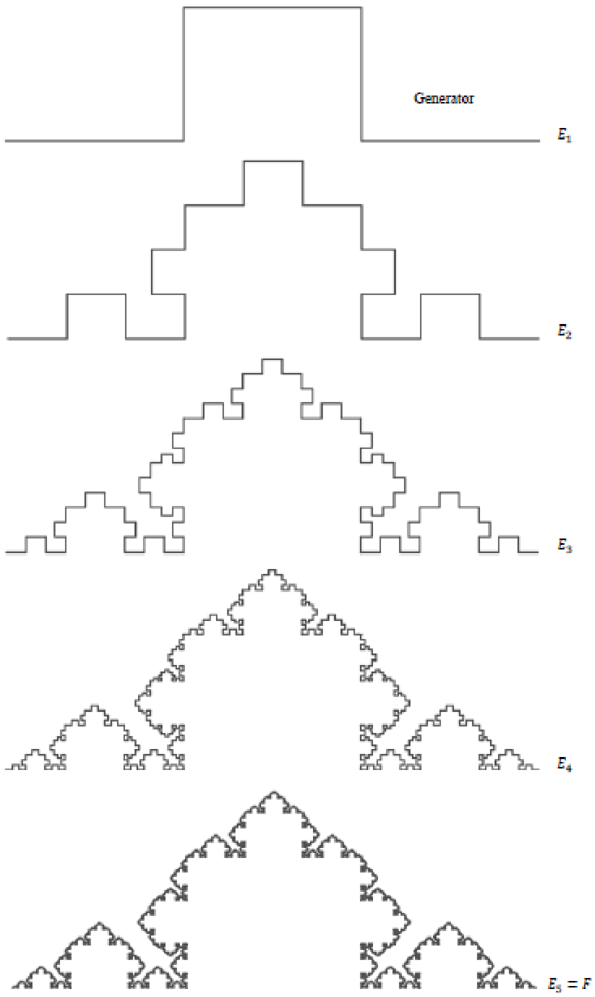
**Contoh 4.5.**
Kurva fraktal ini dikonstruksi dari interval satuan $[0,1]$, kemudian ambil $\frac{1}{3}$ bagian tengah dari interval satuan $[0,1]$ dan digantikan dengan sebuah persegi panjang dengan panjang $\frac{1}{3}$ bagian dan lebar $\frac{1}{4}$ bagian dari interval awal. Proses ini diulangi pada setiap interval-interval baru yang terbentuk (gambar 6).

**Penghitungan:**

Kurva $F$ merupakan atraktor dari 5 keserupaan dengan rasio masing-masing pemetaaan adalah $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ yang memetakkan $E_0$ ke $E_1$. Kondisi himpunan terbuka terpenuhi, yaitu ambil $V$ interior dari persegi panjang dengan panjang $1$ dan lebar $\frac{25}{36}$. Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} c_i^s &= 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 2\left(\frac{1}{4}\right)^s &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = s$, dimana $s$ adalah solusi dari $3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 2\left(\frac{1}{4}\right)^s = 1$, yaitu $s = 1{,}34$.



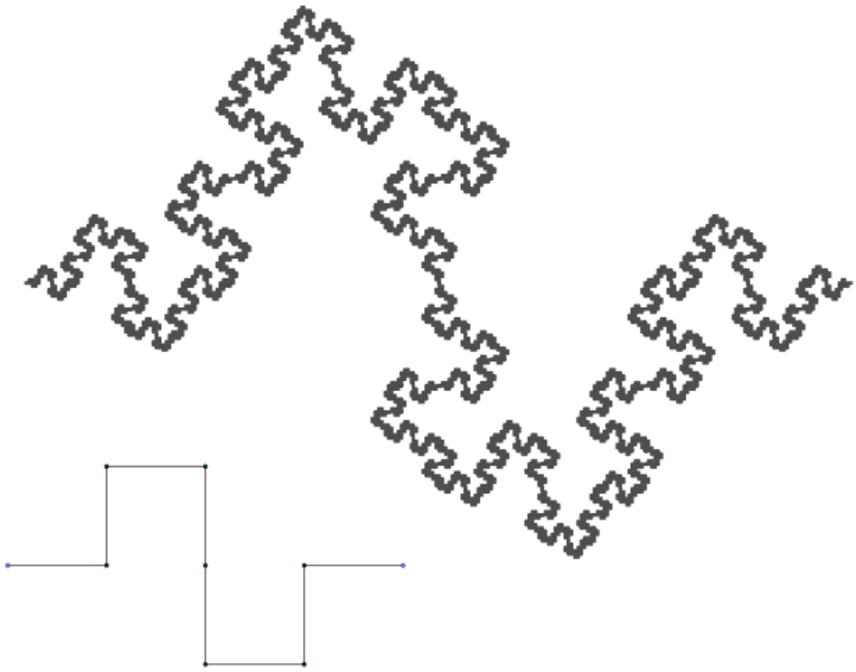

**Gambar 6.** Tahapan pembuatan kurva fraktal dari sebuah generator.

## Contoh 4.6

Sebuah fraktal yang dikonstruksi dari interval satuan $[0, 1]$ dengan kurva fraktal seperti terlihat pada gambar 7 merupakan atraktor dari 8 keserupaan dengan rasio masing-masing pemetaaan adalah $\frac{1}{4}$ yang memetakkan $E_0$ ke $E_1$. Kondisi himpunan terbuka terpenuhi, yaitu ambil $V$ interior dari persegi panjang dengan panjang $1$ dan lebar $\frac{1}{3}$. Dimensi dari kurva fraktal ini adalah

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8} c_i^s &= 1\\ 8\left(\frac{1}{4}\right)^s &= 1\\ s &= \frac{\log 8}{\log 4} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 3.2 diperoleh $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = 1{,}5$.



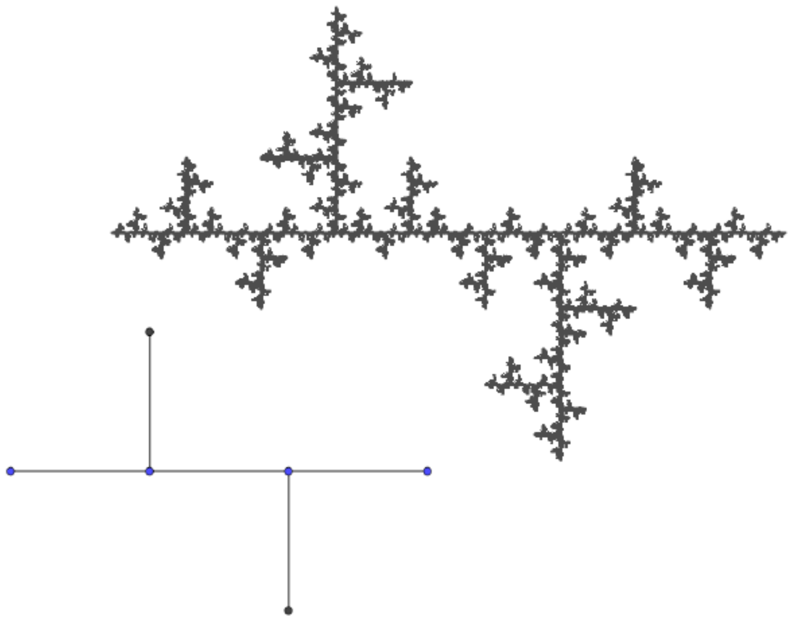
**Gambar 7.** Kurva fraktal dan generatornya.

**Contoh 4.7. (Pohon seperti fraktal)**

Pohon seperti fraktal dikonstruksi dari interval unit dengan kurva fraktal seperti terlihat pada gambar 7 merupakan atraktor dari 5 keserupaan dengan rasio masing-masing pemetaaan adalah $\frac{1}{3}$ yang memetakkan $E_0$ ke $E_1$. Kondisi himpunan terbuka terpenuhi, yaitu ambil $V$ interior dari persegi panjang dengan panjang $1$ dan lebar $\frac{2}{3}$. Dimensi dari kurva fraktal ini adalah

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} c_i^s &= 1\\ 5\left(\frac{1}{3}\right)^s &= 1\\ s &= 1,46\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 3.2 diperoleh $\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{B}} F = \frac{\log 5}{\log 3} = 1,46$.



**Gambar 8.** Pohon seperti fraktal dan generatornya.

## Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa sistem fungsi iterasi adalah pemetaan-pemetaan kontraksi berhingga, yaitu diberikan pemetaan-pemetaan kontraksi$\{S_1, \dots, S_m\}$ pada $D \in \mathbb{R}^n$ sehingga

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|, \qquad (x, y) \in D$$

pemetaan-pemetaan kontraksi berhingga $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ dengan $m \geq 2$. Cara mengkonstruksi fraktal dengan sistem fungsi iterasi yaitu dengan menemukan atraktornya, maka atraktor itulah yang merupakan bentuk fraktal. Sifat dasar SFI adalah memiliki atraktor tunggal, yaitu diberikan himpunan kompak tak kosong $F$, dimana $F \subset D$. $F$ disebut atraktor dari SFI jika $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$. Kemudian untuk menghitung dimensi fraktal adalah dengan mencari skala/ faktor kontraksi $c_i$ dari pemetaanya, kemudian dimensi fraktal adalah $s$, yaitu$s$ yang memenuhi persamaan $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

## Referensi


[1] **Barnsley**, **M.F**. 1988. *Fraktals Everywhere.* London: Academic Press.

[2] **Bovill**, **Carl**. 2000. Fraktal Geometry as Design Aid. *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 2, No. 1, pp. 71-78.

[3] **Falconer**, **K**. 2003. *Fraktal Geometry Mathematical Foundations and Applications.* England: John Wiley.

[4] **Frantz**, **Marc** & **Annalisa**, C. 2011. *Viewpoints: Mathematical Perspective and Fraktal Geometry in Art.* New Jersey: Princeton University Press.

[5] **Hernadi**, **Julan**. 2015. *Analisis Real Elementer dengan Ilustrasi Grafis & Numeris.* Jakarta: Erlangga.

[6] **Lertchoosakul**, **Poj**. 2012. *Introduction to Hausdorff Measure and Dimension*. Dalam: Dynamics Learning Seminar di Liverpool, 28 September.

[7] **Mandelbrot**, **Benoit B**. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company.

[8] **Muslikh**, **Mohamad**. 2013. *Ukuran dan Integral Lebesgue.* Malang: UB Press.

[9] **Pant**, **Vyomesh** & **Poonam**, P. 2013. Fraktal Geometry: An Introduction. *Journal of Indian Research*, Vol. 1, No. 2, pp. 66-70.

[10] **Pearse**, **Erin**. *An Introduction to Dimension Theory and Fraktal Geometry: Fraktal Dimensions and Measures.*

[11] **Shirali**, **Satish** & **Vasudeva**, H.L. 2006. *Metric Space*. United States of Amerika: Springer Science + Business Media.

[12] **Yohanes**, **D**. 2014. *Dimensi Hausdorff dari Beberapa Bangun Fraktal.* Skripsi. Tidak diterbitkan. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Sanata Dharma: Yogyakarta.