



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Марина Милићевић

ФОРМАЛНИ СИСТЕМИ ЗА ДОКАЗИВАЊЕ ТЕОРЕМА ИНЦИДЕНЦИЈЕ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2020.



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска документација
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани запис
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација
Аутор, АУ:	Марина Милићевић
Ментор, МН:	др Ђорђе Баралић, др Зоран Петрић
Наслов рада, НР:	Формални системи за доказивање теорема инциденције
Језик публикације, ЈП:	Српски
Језик извода, ЈИ:	Српски
Земља публиковања, ЗП:	Република Србија
Уже географско подручје, УГП:	АП Војводина
Година, ГО:	2020.
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	7/127/45/0/61/0/5
Научна област, НО:	Примењена математика
Научна дисциплина, НД:	Формални системи
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Чева/Менелај докази, теорема инциденције, Δ -комплекси, симплицијална хомологија, формални системи, одлучивост
УДК	
Чува се, ЧУ:	Библиотеци Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	У овој тези развијен је формални систем за доказивање теорема инциденције у пројективној геометрији. Основа система је Чева/Менелај метод за доказивање теорема инциденције. Формализација о којој је овдје ријеч изведена је коришћењем Δ -комплекса, па су тако у дисертацији спојене области логике, геометрије и алгебарске топологије. Аксиоматски секвенти произилазе из 2-циклова Δ -комплекса. Дефинисана је Еуклидска и пројективна интерпретација секвената и доказана је сагласност и одлучивост система. Дати су примјери ишчитавања теорема инциденције из доказивих секвената система. У тези је дата и процедура за провјеру да ли је скуп од n шесторки тачака аксиоматски секвент.
Датум прихватања теме, ДП:	28.11.2019.
Датум одбране, ДО:	
Чланови комисије, КО:	Председник: др Силвиа Гилезан, редовни професор Члан: др Предраг Јаничић, редовни професор Члан: др Ксенија Дорословачки, ванредни професор Члан, ментор: др Ђорђе Баралић, научни сарадник Члан, ментор: др Зоран Петрић, научни саветник
	Потпис ментора



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic publication
Type of record, TR :	Textual printed material
Contents code, CC :	PhD thesis
Author, AU :	Marina Milićević
Mentor, MN :	dr Đorđe Baralić, dr Zoran Petrić
Title, TI :	Formal systems for proving incidence results
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian
Country of publication, CP :	Republic of Serbia
Locality of publication, LP :	AP of Vojvodina
Publication year, PY :	2020.
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Faculty of Technical Sciences, 21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	7/127/45/0/61/0/5
Scientific field, SF :	Applied mathematics
Scientific discipline, SD :	Formal systems
Subject/Key words, S/KW :	Ceva-Menelaus proof, incidence theorem, Δ -complex, simplicial homology, sequent system, decidability
UC	
Holding data, HD :	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, N :	
Abstract, AB :	In this thesis, a formal sequent system for proving incidence theorems in projective geometry is introduced. This system is based on the Ceva/Menelaus method for proving theorems. This formalization is performed using Δ -complexes, so the areas of logic, geometry and algebraic topology are combined in the dissertation. The axiomatic sequents of the system stem from 2-cycles of Δ -complexes. The Euclidean and projective interpretations of the sequents are defined and the decidability and soundness of the system are proved. Patterns for extracting formulation and proof of the incidence result from derivable sequents of system are exemplified. The procedure for deciding if set of n sextuples represent an axiomatic sequent is presented within the thesis.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	28.11.2019.
Defended on, DE :	
Defended Board, DB :	President: dr Silvia Ghilezan, full professor
	Member: dr Predrag Janičić, full professor
	Member: dr Ksenija Doroslovački, associate professor
	Member, Mentor: dr Đorđe Baralić, research assistant professor
	Member, Mentor: dr Zoran Petrić, full research professor
	Mentor's sign

ZAHVALNOST

Iza svakog posla, a posebno jednog kao što je izrada doktorske disertacije, stoji veliki trud i nesebična posvećenost. Ipak, i pored najveće volje i upornosti, a bez pomoći i podrške, teško da bi se ijedan projekat priveo kraju.

Zahvaljujem se mentorima dr Zoranu Petriću i dr Đorđu Baraliću na povjerenju koje su mi ukazali i želji da istrajemo na započetom putu. Pored svih matematičkih i stručnih znanja koja ste mi prenijeli, vaš odnos prema meni načinio me je prije svega boljim čovjekom, a onda i boljim naučnim i prosvetnim radnikom.

Posebnu zahvalnost dugujem profesorici Silvii Gilezan, koja je bila vjetar u leđa tokom cijelih mojih doktorskih studija, pa tako i tokom izrade disertacije. Takođe, zahvaljujem se i članovima komisije prof. dr Predragu Janičiću i prof. dr Kseniji Doroslovački, koji su pročitali rad i svojim komentarima ga značajno unaprijedili. Veliko hvala i prof. dr Filipu Mariću na pomoći u završnoj fazi ove disertacije.

Ostati i istrajati na ispravnom putu tokom izrade disertacije, ali i tokom ličnog i profesionalnog života je imperativ na koji me uvijek podsjeća prof. dr Dušan Jokanović i na čemu mu se iskreno zahvaljujem. Svim kolegama sa Fakulteta za proizvodnju i menadžment Trebinje, koji su svojom pažnjom, razumijevanjem i sitnicama koje mnogo znače, utkali dio sebe u uspješan završetak ovog rada, najljepše se zahvaljujem.

Sve što radim, svaki uspjeh i podvig, biće i jeste obojen bojama onoga ko je polovina mene. Suprugu Siniši neizmjereno hvala za svu ljubav, podršku i razumijevanje.

Ovu doktorsku disertaciju posvećujem svojim roditeljima Milimiru i Radojci, koji su na putu mog odgoja i školovanja sa radošću podnijeli veliki teret.

REZIME

Teoreme incidencije u projektivnoj geometriji su tvrdnje koje uključuju samo tačke i prave, a jedina relacija među ovim objektima je relacija incidencije. Predmet proučavanja ove disertacije su teoreme incidencije u projektivnoj geometriji i njihovi dokazi. Ovdje je povezano više oblasti – logički sistemi, projektivna geometrija, algebarska topologija. Sam motiv za istraživanje koje je sprovedeno tokom izrade disertacije iznikao je iz rezultata Rihtera-Geberta i njegovih koautora. U njihovim radovima [13],[1],[2], a posebno u [39] dat je, između ostalih i Čeva/Menelaj metod za dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji. Suština metoda je u tome da trouglovima iz zatvorene, orijentisane površi bez granice i triangulisane u paran broj trouglova, pridružimo Čevinu (odnosno Menelajevu) teoremu. Do teorema incidencije sada dolazimo automatski: ako smo svakom osim jednom trouglu iz gornje mnogostrukosti dodjelili Čevinu/Menelajevu teoremu, ista teorema je automatski zadovoljena i na poslednjem trouglu. Upravo je pregledu ovog dijela istraživačkog opusa Rihter-Geberta posvećen prvi dio doktorske disertacije.

Zadatak koji je postavljen pred disertaciju jeste formalizacija ove ideje Rihter-Geberta. Ova formalizacija izvedena je uspostavljenjem jednostranog sekventnog sistema za dokazivanje teorema incidencije u kojem su atomske formule date u obliku šestorki tačaka. Atomska formula sistema, kojeg smo nazvali *Menelajev sistem*, označava da data šestorka tačaka formira Menelajevu konfiguraciju, pri čemu prve tri tačke iz šestorke označavaju tjemena trougla, a poslednje tri tačke su kolinearne tačke sa Menelajevе prave. Sekvent Menelajevog sistema čini konačan (multi)skup formula i označava da se proizvoljno izabrana šestorka nalazi u Menelajevoj konfiguraciji ako se sve preostale šestorke nalaze u Menelajevoj konfiguraciji. Vođeni htjenjem formiranja novih dokaza teorema iz već postojećih, jednostavnijih, u sistem su uvedena strukturalna i pravila izvođenja. Pravilo sjećanja uvedeno je u dva oblika i u topološkom smislu ova pravila odgovaraju operaciji povezane sume, odnosno lijepljenju triangulisanih površi. Posebna pažnja posvećena je saglasnosti i odlučivosti ovoga sistema.

Gore pomenuta formalizacija izvedena je korištenjem jedne vrste Δ -kompleksa. Ovi kompleksi omogućili su nam da triangulisane, orijentisane i zatvorene 2-mnogostrukosti bez granice posmatramo kao jednu vrstu dvodimenzionalnih kompleksa, gdje su trouglovi iz površi zapravo simpleksi dimenzije 2. Na taj način u igru je uvedena i topološka aparatura i istražene su mogućnosti proširivanja aksiomatskih sekvenata u okvirima simplicijalne homologije. Dalje, korištenjem topoloških znanja o simplicijalnim kompleksima koji su u temelju ovog formalnog sistema, implementirana je procedura za provjeru da li je neki skup šestorki kompleks čija je geometrijska realizacija zatvorena, orijentisana površ. Dati su primjeri iščitavanja rezultata incidencije iz sekvenata sistema.

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Motivacija	1
1.2	Organizacija disertacije i glavni doprinosi	2
2	Teoreme incidencije i njihovi dokazi	5
2.1	Osnovne definicije i teoreme projektivne geometrije	5
2.2	Teoreme incidencije: važni primjeri i binomni dokazi	10
2.3	Teoreme incidencije na mnogostrukostima	19
2.3.1	Teoreme Čeve i Menelaja	20
2.3.2	Čeva/Menelaj metod za dokazivanje teorema incidencije	23
2.3.3	Čeva/Menelaj dokaz za Pappusovu teoremu	25
2.3.4	Uopštenja Čevine i Menelajevе teoreme	25
2.4	Ekvivalentnost binomnog i Čeva/Menelaj dokaza teorema incidencije	31
2.4.1	Od binomnog do Čeva/Menelaj dokaza	33
2.4.2	Od Čeva/Menelaj do binomnog dokaza teorema incidencije	36
2.5	Metode dokazivanja teorema incidencije - preko simplicijalnih kompleksa do formalnog sistema	39
3	Simplicijalni kompleksi i Menelajevе konfiguracije	40
3.1	Simplicijalni kompleksi: osnovni pojmovi i definicije	41
3.1.1	Δ -kompleksi i simplicijalna homologija	46
3.2	\mathcal{M} -kompleksi	49
3.3	Različiti oblici Menelajevih konfiguracija	55

4	Jednostrani formalni sistem za dokazivanje teorema incidencije u $\mathbb{R}P^2$	59
4.1	Menelajev sistem	59
4.2	Saglasnost \mathcal{M} -sistema	62
4.3	Projektivna interpretacija	65
4.4	Od dokazivih sekvenata do teorema incidencije	68
4.5	Odlučivost Menelajevog sekventnog sistema	78
4.6	O odlučivosti atomskog Menelajevog sistema	88
5	Implementacija sistema	91
5.1	Procedura kojom se provjerava da li $\vdash \Gamma$ može predstavljati aksiomatski sekvent	91
5.2	Primjer	94
5.2.1	Rezultat incidencije iz sekventa sa osam atomskih formula	98
6	Računarski podržano dokazivanje teorema u geometriji	101
7	Zaključak i buduća istraživanja	105
7.1	Pregled doprinosa disertacije	105
7.2	Pravci daljih istraživanja i budući rad	106
	Prilozi	108
A	Od desetougla do torusa sa dvije rupe	109
B	MATLAB procedure	112
B.1	Formiranje Menelajevih konfiguracija na trouglu	113
B.2	Formiranje 4^n ulaznih mogućnosti i provjera osobina (0)-(4) \mathcal{M} -kompleksa	114
B.3	Permutacija tačaka iz šestorki	115
B.4	Procedura kojom se provjerava da li skup od n ulaznih šestorki može predstavljati \mathcal{M} -kompleks	116
	Literatura	127

Pregled slika

2.1	Blez Pascal, francuski matematičar i filozof	6
2.2	Žirar Dezag, francuski matematičar i arhitekta	6
2.3	Projektivna ravan nad \mathbb{R}^3	7
2.4	Papusova teorema	11
2.5	Dezagova teorema	15
2.6	Degenerisani slučaj Dezagove teoreme - prave $(0, 4)$ i $(3, 1)$ se poklapaju	16
2.7	Dva različita crteža Paskalove teoreme	18
2.8	Čevina i Menelajeva teorema	21
2.9	Metod površina po B. Grinbaumu i G. Šepardu [22]	22
2.10	Dvije Čevine konfiguracije zalijepljene duž zajedničke stranice (BC) . . .	23
2.11	Projekcija tetraedra na R^2	24
2.12	Dezagova teorema na tetraedru $(ABCD)$	24
2.13	Triangulacija torusa kao okvir za Čeva/Menelaj dokaz Papusove teoreme	25
2.14	Šest trouglova torusa preklapljeni jedan preko drugog [39]	26
2.15	Karnoova teorema	26
2.16	Karnoova teorema na 2-mnogostrukosti [39]	27
2.17	Četiri Menelajeve konstrukcije na $\triangle ABC$	27
2.18	Četiri Menelajeve i jedna Karnoova konstrukcija na $\triangle ABC$	28
2.19	Paskalova teorema	29
2.20	Dva načina generisanja <i>qvad</i> skupa [40]	29
2.21	Uopštenje Menelajeve teoreme na n -gone, za $n = 5$	31
2.22	Grafičko predstavljanje za <i>bikvadratni izraz</i>	32
2.23	Dva tipa trouglova, tj. 3-ciklusa u grafu Γ i njihova interpretacija kao Čeva/Menelajeve konfiguracije pomoću metoda (2.13)	32
2.24	Grafičko predstavljanje procesa poništavanja izraza iz bikvadratnih jednačina binomnog dokaza i bazni graf Γ za teoremu Papusa [2]	34

2.25	Bazni graf Γ za binomni dokaz Dezagrove teoreme [34]	35
2.26	Dekompozicija binomnog dokaza Dezagrove teoreme u trouglove i rezultujuća mnogostrukost [34]	36
2.27	Čeva/Menelaj dokaz Papusove teoreme (lijevo) i bazni graf za dva zalijepljena Čevina trougla iz dokaza (desno)	36
2.28	Bazni graf za Čevine trouglove iz dokaza	37
2.29	Bazni graf za Čevine trouglove iz dokaza - nastavak	38
3.1	Sa lijeva na desno: 0-simpleks (tačka), 1-simpleks (ivica), 2-simpleks (trougao) i 3-simpleks (tetraedar)	42
3.2	Preslikavanje f transformiše standardni 2-simpleks iz \mathbb{R}^3 (lijevo) u 2-simpleks sa tjemena $f(a_0)$, $f(a_1)$ i $f(a_2)$ (desno)	42
3.3	Simplicijalni kompleks K dimenzije 3	43
3.4	Kolekcije simpleksa K_1 i K_2	43
3.5	Dvije triangulacije torusa	44
3.6	Apstrahovanje jednog geometrijskog kompleksa	45
3.7	Orijentacija simplicijalnog kompleksa (oktaedar)	46
3.8	Dijagrami koji odgovaraju površima - identifikacijom stranica kvadrata vodeći računa o strelicama dobijamo S^2 , odnosno T^2	49
3.9	Δ -kompleks Borsukova šubara i njegova geometrijska realizacija	54
3.10	Δ -kompleksi od kojih su pod (c) i (e) još i \mathcal{M} -kompleksi	54
3.11	Konfiguracija tačaka A, B, C, P, Q, R iz koje čitamo 4 različite Menelajeve konfiguracije	56
3.12	Menelajeva teorema u slučaju kolinearnosti tjemena A, B, C	57
3.13	Dvije permutacije na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	58
4.1	Sfera S^2 i odgovarajući \mathcal{M} -kompleks	61
4.2	Ilustracija sekventa 4.1	64
4.3	Lema 4.1	66
4.4	Lema 4.1 u slučaju kolinearnih tačaka A, B i C	67
4.5	Triangulacija sfere - tetraedar $ABCD$	68
4.6	Triangulacija sfere - tetraedar $ARQU$	69
4.7	Rezultat „ljepljenja” tetraedara $ABCD$ i $BRPE$	71

4.8	Desetougao - torus sa dvije rupe	72
4.9	Šestougaone triangulacije dva torusa	73
4.10	Torus sa dvije rupe sa slike 4.8	74
4.11	Rezultat incidencije iz primjera 7	75
4.12	Triangulacija torusa u šest trouglova sa tjemena 1, 2 i 3	75
4.13	Tetraedarska triangulacija sfere $UXZK$	76
4.14	Rezultat incidencije iz zadatka 8	76
4.15	Rezultat incidencije iz primjera 10	85
5.1	Disk oko tjemena A	92
5.2	Torus i tetraedarska triangulacija sfere $ABCD$	94
5.3	Geometrijska interpretacija posmatranog sekventa	99
6.1	Jednostavan dokaz u interaktivnom asistentu <i>Isabelle/HOL</i>	102
A.1	Od desetougla do torusa sa dvije rupe	110
A.2	Nakon identifikacije stranica šestougla iz koraka 4 (stranice 2, 3 i 4) dolazimo do torusa sa dvije rupe	111
B.1	Procedura MeneKonf	113
B.2	Nastavak procedure B.1 - formiranje 4^n mogućnosti za skup od n ulaznih šestorki i provjera da li tako formirane šestorke mogu predstavljati površ	114
B.3	Procedura MenePerm	115
B.4	Procedura AksiomSekvent	117
B.5	64 od 4^8 kombinacija koje dobijemo kao rezultat procedure B.1 i B.2 za skup šestorki iz primjera 5.2	122
B.6	64 od 6^8 kombinacija koje dobijemo kao rezultat procedure B.3 za skup šestorki 5.1	123

DIO 1

Uvod

1.1 Motivacija

Geometrija je matematička disciplina koju možemo izdvojiti kao onu u kojoj je najviše spojeno vizuelno i apstraktno, pa se dijelom i zbog toga na prirodan način povezuje sa logikom i računarstvom. Teoreme incidencije proučavaju se još od prvog vijeka nove ere, a u ovoj disertaciji proučavaćemo teoreme incidencije u projektivnoj geometriji među tačkama i pravim.

Geometrija na elegantan način otvara mogućnost da se logičarskim pristupom razvije odgovarajući aksiomatski sistem i da se logičkim lancem dedukcija izvode i univerzalnija tvrđenja. Na ovaj način se pruža mogućnost da se upotrebom računara i odgovarajućih softvera razviju algoritmi za automatsko dokazivanje teorema incidencija kao i da se koristeći softvere za dinamičku geometriju pronalaze geometrijske konfiguracije koje realizuju odgovarajuću teoremu formalnog sistema. Preteča ovih ideja se nalazi u radu Tarskog iz 1951. gdje je dat prvi dokaz odlučivosti elementarne geometrije. On je povezao elementarnu geometriju sa teorijom realnih zatvorenih polja koja dopušta eliminaciju kvantifikatora i odatle zaključio odlučivost. Međutim, primjena tog postupka za dokazivanje teorema je daleka od bilo koje moguće prakse. Odatle značaj istraživanja ovog tipa koja nalaze praktične algoritme za dokazivanje nekih tipova geometrijskih rezultata.

Postoji značajan broj radova u kojima su date tehnike za dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji. Pa tako, u radovima [13] i [38] dat je takozvani *binomni metod* dokazivanja teorema incidencije koji porijeklo vuče iz rada [7]. Autori u pomenutim radovima dokazuju teoreme incidencije na algebarskom nivou - koriste bikvadratne jednakosti nastale primjenom Grasman-Plikerovih relacija na tačke projektivnog prostora $\mathbb{R}P^3$. Za svaku hipotezu teoreme koja se dokazuje, formira se binomna jednakost i ispituje da li zaključak teoreme u binomnom obliku može da se izrazi kao kombinacija binomnih izraza koji odgovaraju hipotezama. Iako je jednostavan i elegantan, ovaj metod ima nedostatak jer izračunavanja vrši „na slijepo” što znatno povećava vrijeme potrebno za izvršenje algoritma.

Još jedan zabačaj iz geometrije, ovaj put prema polju algebarske topologije, predstavljen je u radovima [39] i [2] gdje je uveden *Čeva/Menelaj metod* za dokazivanje ovih teorema.

Teoreme incidencije ovdje se posmatraju kao 2-cikli na orijentisanim površima. Dokazi teorema incidencije izvedeni su lijepljenjem Čevinih i (ili) Menelajevih konfiguracija, dok je pozadinska struktura zatvorene, orijentisane i triangulisane mnogostrukosti dimenzije 2 okvir za realizaciju lijepljenja. Kako posmatramo samo orijentabilne površi, svaka dva susjedna trougla imaju takvu orijentaciju da im je zajednička ivica suprotno usmjerena, odnosi iz susjednim trouglovima pridruženih Čevinih ili Menelajevih konfiguracija se poništavaju po zajedničkim ivicama i iz činjenice da smo zapravo na posmatranoj površi formirali 2-cikl proizilazi dokaz teoreme incidencije. Štaviše, u radovima [2] i [39] ekvivalentnost ovog i binomnog metoda je dokazana.

1.2 Organizacija disertacije i glavni doprinosi

U ovoj disertaciji razvijen je formalni sistem za dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji. Osnova sistema je Čeva/Menelaj metod za dokazivanje teorema incidencije, pri čemu su u disertaciji obrađivani samo Menelajevi dokazi. Formalizacija o kojoj je ovdje riječ izvedena je korišćenjem jedne generalizacije simplicijalnih kompleksa, pa su tako u disertaciji spojene oblasti logike, geometrije i algebarske topologije. Formalni sistem koji smo izgradili je jednostrani sekventni sistem u kome su atomske formule date u obliku šestorki tačaka. Ove formule iskazuju postojanje Menelajevih konfiguracija na trouglu čija su tjemena prve tri tačke iz šestorki.

Disertacija je organizovana na sljedeći način.

U drugoj glavi je najprije dat kratak pregled osnovnih pojmova iz projektivne geometrije, a zatim je detaljno izložen osvrt na teoreme incidencije u projektivnoj geometriji i predstavljeni su metodi dokazivanja ovih teorema koje je istraživao Rihter-Gebert. Pregled njegovih istraživanja i metoda dokazivanja teorema incidencije, dopunjen adekvatnim primjerima i ilustracijama dat je u radu

- Marina Milićević, *Teoreme incidencije na površima*, Zbornik radova sa konferencije Savremeni matematički problemi, ISBN 978-99938-47-95-3, COBISS.RS ID 7691288, 2020.

na koji se veći dio ovog dijela oslanja.

Naredne glave disertacije sadrže originalne rezultate. Treća i četvrta glava su centralne glave ove disertacije. U njima su predstavljeni rezultati autora publikovani u radu

- Đorđe Baralić, Pierre-Louis Curien, Marina Milićević, Jovana Obradović, Zoran Petrić, Mladen Zekić, Rade Živaljević. (2020). *Proofs and surfaces. Annals of Pure and Applied Logic.* 102845. 10.1016/j.apal.2020.102845.

U **trećoj glavi** je, nakon kratkog predstavljanja osnovne teorije iz simplicijalnih kompleksa i simplicijalne homologije, definisana jedna klasa Δ -kompleksa. Ovi kompleksi, koje smo nazvali \mathcal{M} -kompleksi i čija je geometrijska realizacija kompaktna, orijentisana površ, poslužili su nam kao određeni okvir u okviru koga modelujemo teoreme incidencije. Umjesto da posmatramo 2-cikl na orijentisanoj i triangulisanoj površi, što je ideja Rihter-Geberta, posmatrali smo 2-cikle na \mathcal{M} -kompleksima. Ovi cikli su sume elemenata iz skupa 2-simpleksa posmatranog Δ -kompleksa i svaki sabirak iz cikla zapravo zamišljamo kao trougao kome su stranice presječene trima kolinearnim tačkama, odnosno trougao kome je *pridružena Menelajeva konfiguracija*. U ovom dijelu obrađene su i različite Menelajeve konfiguracije koje uočavamo na jednom trouglu.

U **četvrtoj glavi** uveden je formalni sistem za dokazivanje teorema incidencije. Aksiomatski sekventi ovog sistema izniču iz triangulacija zatvorenih, orijentabilnih površi, a atomske formule sistema tvrde da neka šestorka tačaka *čini Menelajevu konfiguraciju*. U ovom dijelu posvetili smo se i saglasnosti ovoga sistema u odnosu na željenu interpretaciju i dokazana je njegova odlučivost. Dati su primjeri iščitavanja teorema incidencije iz sekvenata ovoga sistema.

U **petoj glavi** disertacije data je procedura, napisana u programskom jeziku MATLAB, u kojoj provjeramo da li je neki skup šestorki aksiomatski. Ova procedura provjerava da li simplicijalni kompleks, čija je ćelijska struktura određena datim šestorkama, zadovoljava osobine koje smo definisali za \mathcal{M} -komplekse. Ilustrovana je primjena ove procedure, međutim sama teorema incidencije i njen dokaz koje ovdje dajemo ne proizilaze automatski iz dokazivog sekventa.

U posljednje dvije glave disertacije predstavljen je pregled računarski podržanog dokazivanja teorema u geometriji i dat je pregled doprinosa disertacije i pravci budućeg rada.

Glavne doprinose disertacije možemo grupisati kako slijedi:

- U doktoratu se ideja i istraživanje Rihter-Geberta povezuje u jednu logičku i algebarsko-topološku cjelinu na sasvim nov način i daje originalni doprinos ovim oblastima;
- Definisan je i opisan jedan tip Δ -kompleksa. Homološka sredstva su u disertaciji dosta korišćena, a uvedeni \mathcal{M} -kompleksi poslužili su kao određeni okvir za modelovanje teorema incidencije;
- Izgrađen je novi formalni sistem, \mathcal{M} -sistem, za dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji. Osnovne formule sistema su šestorke tačaka iz $\mathbb{R}P^2$ koje govore o postojanju Menelajeve konfiguracije na datom trouglu. Za proizvoljan prebrojiv skup W sa $F^6(W)$ označen je skup svih šestorki međusobno različitih elemenata iz W :

$$F^6(W) = W^6 - \{(X_1, \dots, X_6) \in W^6 \mid X_i = X_j \text{ za neke } i \neq j\},$$

i to je skup atomskih formula \mathcal{M} -sistema. Formule sistema izgrađene su od atomskih formula uvođenjem veznika, a sekvent, kao konačan multiskup formula, označavamo sa $\vdash \Gamma$. Aksiome sistema proizilaze iz triangulacija zatvorenih, orientabilnih površi;

- Zadavanje euklidske i projektivne interpretacije sekvenata ovoga sistema, odnosno funkcija sa W na \mathbb{R}^2 i $\mathbb{R}P^2$. U disertaciji je dokazana saglasnost \mathcal{M} -sistema u odnosu na euklidsku i projektivnu interpretaciju;
- Prikazan je i sam proces modelovanja teorema incidencije i njihovih dokaza u \mathcal{M} -sistemu;
- Poseban doprinos disertacije je dokazana odlučivost za formalni sistem \mathcal{M} , posmatranjem normalnih izvođenja u sistemu;
- U disertaciji je razvijena procedura za provjeru da li je dati skup šestroki aksiomatski, kao i procedure kojima se formiraju različite Menelajeve konfiguracije koje uočavamo na jednom trouglu. Procedure su implementirane u programskom jeziku MATLAB.

Na kraju disertacije dat je pregled literature. Takođe, implementacije svih procedura koje smo spominjali u radu, date su u okviru poglavlja Prilozi. U priložima se nalazi i korak-po-korak ilustracija lijepljenja desetougla u torus sa dvije rupe.

DIO 2

Teoreme incidencije i njihovi dokazi

Dio koji slijedi u potpunosti je posvećen teoremama koje govore o incidenciji geometrijskih objekata u projektivnoj geometriji. Teoreme incidencije možemo posmatrati kao osnovne iskaze projektivne geometrije, a opravdanje za to nalazimo u njenom aksiomatskom zasnivanju ([40], [12]) gdje aksiome isključivo iskazuju incidenciju geometrijskih objekata (tačkaka i pravih). Dokazi nekih teorema incidencije bili su poznati još u vremenu starih Grka.

U ovom dijelu dajemo pregled različitih metoda sa kojima možemo dokazati teoreme incidencije. Za detaljan prikaz ovih metoda preporučujemo radove *Rihter-Geberta* [38], [39], [7], [2], [1]. Prvi metod zasniva se na Grasman-Plikerovim relacijama i metodi bikvadratnih polinoma. Drugi način pokazuje kako se teoreme incidencije mogu predstaviti kao ciklične strukture na adekvatno odabranoj mnogostrukosti koristeći teoreme Čeve i Menelaja. Takođe, ekvivalencija ova dva metoda biće prikazana, kao i neki od otvorenih problema.

2.1 Osnovne definicije i teoreme projektivne geometrije

Tokom istorijskog razvoja nauke uopšte, specifičnost matematike ogledala se u konstantnoj potrebi za formalnim zasnivanjem, preciznim jezikom i pravilima izvođenja. Tokom ovog perioda geometrija je imala važno mjesto. Jedan od najuticajnijih radova u istoriji matematike su svakako Euklidovi *Elementi* u kojim je uveden aksiomatski pristup geometriji i nakon 2000 godina od nastanka ovo djelo predmet je interesovanja naučnika. Ipak, na dosta mjesta u *Elementima* su nađene greške u dokazima ili su dokazi bili nepotpuni, što je inspirisalo matematičare da razvijaju nove, tačnije sisteme kojima bi se aksiomatizovala geometrija. Tako je danas najpoznatiji sistem aksioma koji je razvio Hilbert 1899. godine, a kasnije i sistem aksioma Tarskog. Otkriće na polju geometrije iz 17. vijeka, koje je uticalo na razvoj drugih grana matematike, je svakako Dekartov razvoj koordinatnog sistema i analitičke geometrije. U 19. vijeku intenzivno počinje da se razvija projektivna geometrija, iako su koncepti projektivne geometrije bili poznati još u renesansi.



Slika 2.1: Blez Pascal, francuski matematičar i filozof



Slika 2.2: Žirar Dezarg, francuski matematičar i arhitekta

Za razliku od euklidske geometrije, u projektivnoj geometriji nema metrike, tj. nema udaljenosti između dvije tačke, nema uglova između dva pravca, nema paralelnosti, itd. Odsustvo pomenutih odnosa moglo bi nas odvesti do zaključka da bi takva geometrija mogla biti veoma siromašna. Međutim, ove predrasude razbijene su značajnim otkrićima, najprije od strane grčkog matematičara Papusa u četvrtom vijeku, a zatim Dezarga i Paskala u 16. i 17. vijeku.

Paralelne prave u projektivnoj geometriji sijeku se u beskonačnosti. Keplerovo otkriće beskonačnih tačaka, koje leže na beskonačnoj pravoj omogućilo nam je da projektivnu ravan/prostor izgrađujemo tako što euklidsku ravan/prostor proširimo sa elementima u beskonačnosti.

Teoreme i konstrukcije koje ćemo sretati u ovom tekstu, ukoliko to drugačije nije napomenuto, odnosiće se na projektivnu ravan. Projektivna ravan, kako ćemo u nastavku vidjeti, definisana je sa dva skupa - skupom tačaka i skupom pravih i relacijom incidencije među elementima ta dva skupa. Tačka i prava su incidentne ako tačka leži na pravoj i prava prolazi kroz tačku. Pojmovi kolinearnosti, konkurentnosti i komplarnosti imaju svoje uobičajeno značenje.

Osnovni uslovi za izgradnju teorije projektivne geometrije su njene aksiome kojima se opisuju svojstva relacije incidencije:

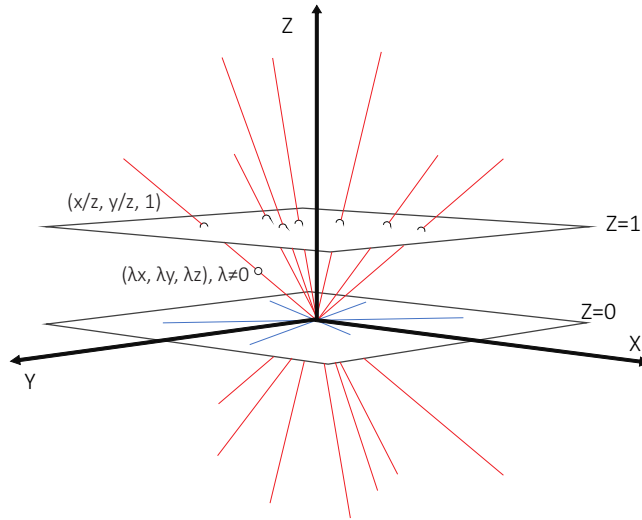
A1 Postoji jedinstvena prava koja je incidentna sa dvije različite tačke.

A2 Postoji jedinstvena tačka koja je incidentna sa dvije različite prave.

A3 Postoje četiri tačke među kojima nema tri kolinearne.

Da bismo pokazali njihovu konzistentnost potreban nam je model koji zadovoljava gornje aksiome. Euklidska ravan daje dobar opis stvarnog svijeta, međutim postojanje paralelnih pravih osporava aksiomu A2, pa euklidska ravan nije projektivna ravan. Međutim, od nje možemo izgraditi projektivnu ravan dodavanjem beskonačno dalekih elemenata. Neka je \mathbb{E} euklidska ravan sa skupom tačaka $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$, skupom pravih $\mathcal{L}_{\mathbb{E}}$ i relacijom incidencije među njima. Za svaku pravu $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{E}}$ označimo sa $[l]$ klasu ekvivalncije svih pravih koje su paralelne sa pravom l . Svakoj klasi $[l]$ pridružimo beskonačno daleku tačku $p_{[l]}$

u kojoj se sijeku sve prave iz klase $[l]$. Dalje, beskonačno daleka prava, u oznaci l_∞ , je prava sa kojom su incidentne sve beskonačno daleke tačke. Lako se provjerava da ovako proširena euklidska ravan zadovoljava aksiome A1-A3. Ovdje smo za strukturu koja odgovara euklidskoj ravni uzeli \mathbb{R}^2 , pa smo zapravo izgradili realnu projektivnu ravan $\mathbb{R}P^2$. Na slici 2.3 prikazana je standardna realizacija $\mathbb{R}P^2$ u \mathbb{R}^3 za $z = 1$.



Slika 2.3: Projektivna ravan nad \mathbb{R}^3

Za vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ neka je

$$[v] = \{v' \in \mathbb{R}^3 \mid v' = \lambda \cdot v, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Ove klase ekvivalencije su zapravo tačke iz $\mathbb{R}P^2$, odnosno

$$\mathcal{P} = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}}{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \{[v] \mid v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}\}.$$

Na slici 2.3 tačke tačke iz $\mathbb{R}P^2$ predstavljene su crvenim pravama koje prolaze kroz koordinatni početak i u $\mathbb{R}P^2$ imaju koordinate oblika $(x, y, 1)$. Prave iz xy ravni koje ne prolaze kroz ravan $z = 1$ predstavljaju beskonačno daleke tačke sa koordinatama $(x, y, 0)$.

U $\mathbb{R}P^2$ analogno uvodimo i pojam prave. Ukoliko ravan $ax+by+cz = 0$ iz \mathbb{R}^3 koja prolazi kroz koordinatni početak (primjetimo da joj je vektor normale (a, b, c) i da ona sadrži sve vektore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koji zadovoljavaju njenu jednačinu) presječemo sa ravni $z = 1$ dobijemo pravu iz $\mathbb{R}P^2$. Drugim riječima, tačke sa prave iz ravni $z = 1$ formiraju ravan koja prolazi kroz koordinatni početak i koju predstavljamo njenim vektorom normale (a, b, c) . Dakle, prave iz $\mathbb{R}P^2$ su ravni kroz korodinatni početak iz \mathbb{R}^3 , a tačka i prava su incidentne ako je skalarni proizvod njihovih koordinata jednak 0.

Ako pak posmatramo xy -ravan, ona ne presjeca $z = 1$ ravan i njen vektor normale je $(0, 0, c)$, $c \neq 0$ i beskonačno daleke tačke $(x, y, 0)$ (koje su prave iz xy -ravni) su ortogonalne na ovaj vektor, pa je i skalarni proizvod $0 \cdot x + 0 \cdot y + c \cdot 0 = 0$. Zaključujemo da sve beskonačno daleke tačke formiraju beskonačno daleku pravu l_∞ .

Aksiome A1-A3 su nas zapravo ograničile na projektivnu ravan. Da bi aksiomatizovali projektivni prostor, gornje aksiome moramo izmijeniti i proširiti, i uvesti relaciju incidencije sada između tačaka i pravih sa jedne i ravni sa druge strane. Jedna od tih aksioma (o aksiomatizaciji projektivnog prostora pogledati [12]) glasi:

Postoje 4 tačke koje nisu incidentne sa istom ravni, među kojima nema tri kolinearne,

kojom se omogućuje definisanje 3-dimenzionalnog projektivnog prostora. Generalizacijom ovih ideja dolazimo do pojma n -dimenzionalnog projektivnog prostora.

Definicija 2.1. *Realni n -dimenzioni projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ je skup klasa ekvivalencije relacije \sim prostora $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}$ definisane sa*

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \sim \lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Klasa ekvivalencije X je tačka projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$ sa homogenim koordinatama $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$, dok je $\mathbf{X}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ njen vektor predstavnik.

Kao što smo već napomenuli, projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ možemo izgraditi tako što afini prostor \mathbb{R}^n dopunimo beskonačno dalekim tačkama. Konačnim tačkama (x_1, x_2, \dots, x_n) prostora \mathbb{R}^n odgovaraju tačke prostora $\mathbb{R}P^n$ sa homogenim koordinatama $(x_1 : x_2 : \dots : x_n : 1)$, dok beskonačno daleke tačke imaju koordinate $(x_1 : x_2 : \dots : x_n : 0)$.

Jednodimenzionalni projektivni prostor $\mathbb{R}P^1$ zovemo *projektivna prava* koja sadrži jednu beskonačno daleku tačku homogenih koordinata $(x : 0)$. *Projektivna ravan* je dvodimenzionalni projektivni prostor i sve njene tačke oblika $(x_1 : x_2 : 0)$, $x_1^2 + x_2^2 > 0$ su beskonačno daleke tačke, koje čine beskonačno daleku pravu. Projektivni prostor dimenzije tri, $\mathbb{R}P^3$ kratko zovemo *projektivni prostor* i u njemu beskonačno daleka ravan sadrži sve beskonačno daleke tačke.

Definicija 2.2. *Neka su $X(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ koordinate proizvoljne tačke prostora u $\mathbb{R}P^n$ u jednom koordinatnom sistemu, a $X'(x'_1 : x'_2 : \dots : x'_{n+1})$ koordinate iste tačke u*

drugom koordinatnom sistemu, tada je projektivno preslikavanje dato formulama:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n+1} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ t_{n+1,1} & t_{n+1,2} & \cdots & t_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \det(t_{ij}) \neq \{0\}.$$

Preslikavanje (2.1) kraće zapisujemo $\lambda X = TX'$, a njemu inverzno preslikavanje sa $\lambda X' = PX, P = T^{-1}$. Projektivno preslikavanje čuva kolinearost tačaka i konkurentnost pravih. Za osobine koje važe za neku geometrijsku konstrukciju, a koje ostaju nepromjenjene nakon primjenjenih projektivnih transformacija na tačke iz konstrukcije, kažemo da su *projektivna invarijanta*. Najpoznatiji primjer projektivne invarijante je *dvorazmjera* (vidjeti [12], [40]).

Definicija 2.3. Za $(n + 2)$ tačke projektivnog prostora kažemo da se nalaze u opštem položaju ako su vektori predstavnici svakih $(n + 1)$ od njih linearno nezavisni.

Teorema 2.1 (Osnovna teorema projektivne geometrije). *Postoji projektivno preslikavanje koje preslikava $(n + 2)$ tačke iz $\mathbb{R}P^2$ u tačke*

$$\begin{aligned} A_1 & (1 : 0 : \cdots : 0), \\ A_2 & (0 : 1 : \cdots : 0), \\ & \vdots \\ A_{n+1} & (0 : 0 : \cdots : 1), \\ B & (1 : 1 : \cdots : 1). \end{aligned}$$

Tačke $A_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$ zovemo bazne tačke, a tačka B je tačka jedinice.

2.2 Teoreme incidencije: važni primjeri i binomni dokazi

Poglavlje koje slijedi uvodi nas u neke posebne primjere teorema incidencije i geometrijskih konstrukcija koje srećemo u projektivnoj ravni. Zajedničko za sve teoreme koje ćemo spominjati u tekstu je da se bave odnosima *kolinearnosti* (određeni skup tačaka koje leže na istoj pravoj) ili *konkurentnosti* (određeni skup pravih koje prolaze kroz tačku). Predstavljamo i binomni metod za dokazivanje ovih teorema koji svoje začecije ima u radovima [7], [38], [13]. Tehnika koju ovaj metod dokazivanja teorema incidencije u projektivnoj geometriji koristi, nasuprot svojoj jednostavnosti, je veoma dalekosežna i zasniva se na formiranju većeg broja jednačina u čijim se izrazima pojavljuju proizvodi određenih determinanti, nakon čega se algebarskim metodama pristupa traženju zavisnosti među ovim izrazima.

Osnovno algebarsko sredstvo koje koristimo u ovim dokazima su *homogene koordinate*. Kako posmatramo teoreme incidencije na realnoj projektivnoj ravni $\mathbb{R}P^2$, to se tačka iz $\mathbb{R}P^2$ predstavlja sa tri homogene koordinate $(x : y : z)$. Koristimo notaciju $[a, b, c]$ kao skraćeni zapis za determinantu homogenih koordinata triju tačaka:

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Dalje u tekstu koristimo notaciju $[a, b, c]$ kao formalni simbol koji označava gore navedenu determinantu. Potreba za uvođenjem ove notacije javila se zbog toga što nam u suštini nije neophodno da determinante razvijamo, nego kompletan račun izvodimo na nivou formalnih simbola, tj. $[\cdot, \cdot, \cdot]$.

Osobina determinanti, koju ćemo koristiti u dokazima koji slijede, je pravilo o promjeni znaka determinante kada dvije kolone zamjene mjesta, a koje kad se primjeni na notaciju $[\cdot, \cdot, \cdot]$ izgleda ovako:

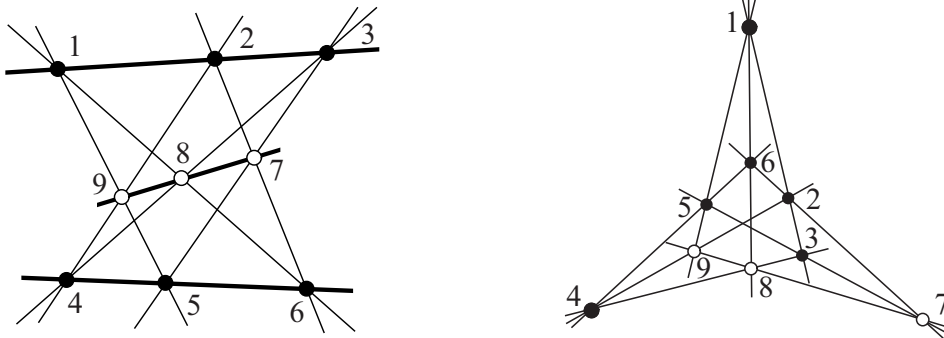
$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[b, a, c] = -[c, b, a] = -[a, c, b].$$

U $\mathbb{R}P^2$ su tri tačke $\{a, b, c\}$ kolinearne ako i samo ako važi

$$[a, b, c] = 0.$$

Osnovni princip binomnih dokaza teorema incidencije pokazaćemo na primjeru najstarije teoreme projektivne geometrije - Papusove teoreme. Ova teorema interesantna je iz više uglova. Ona je najmanja teorema incidencije: sastoji se od devet tačaka i devet pravih

i jedina relacija između ovih objekata je relacija incidencije. Osim toga, ova teorema obiluje simetrijom što doprinosi njenoj eleganciji.



Slika 2.4: Paposova teorema

Teorema 2.2 (Papusova teorema). *Neka su 1, 2 i 3 tri tačke na jednoj, a 4, 5 i 6 tri tačke na drugoj pravoj. Ukoliko prave (15), (26) i (34) sjeku prave (24), (35) i (16), respektivno, tada su sječišta 7, 8 i 9 kolinearne tačke (slika 2.4 lijevo).*

Dokaz. Na slici 2.4 data su dva crteža Paposove konfiguracije. Ilustracija na desnoj strani slike 2.4 otkriva nam obilje simetrije koju posjeduje Paposova teorema.

Za dokaz teoreme 2.2 potrebno je da uvedemo i određene pretpostavke kako bismo izbjegli degenerativne slučajeve. Naime, Paposova teorema ne važi ako se dvije prave ili dvije tačke iz teoreme poklapaju - što su opšti uslovi nedegenerativnosti teorema incidencije, ili ako su tačke 1, 4 i 7 kolinearne.

Pretpostavimo da tačke 1, 4 i 7 nisu kolinearne. Kako transformacije koordinata ne utiču na odnos incidencije tačaka i pravih možemo, bez gubitka opštosti, pretpostaviti da tačke 1, 4 i 7 formiraju jednakostranični trougao. Tako smo ravan u kojoj se one nalaze smjestili u \mathbb{R}^3 na način da 1, 4 i 7 možemo predstaviti sa tri jedinična vektora $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Ostale tačke konfiguracije predstavljamo njihovim homogenim koordinatama: $2 = (a, b, c)$, $3 = (d, e, f)$, $5 = (g, h, i)$, $6 = (j, k, l)$, $8 = (m, n, o)$, $9 = (p, q, r)$. Teoremu 2.2 možemo dokazati koristeći sljedeći obrazac:

- Formiramo skup hipoteza H , tj, skup svih trojki tačaka koje su po uslovu teoreme

2.2 kolinearne:

$$H = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 5, 9\}, \{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \\ \{4, 5, 6\}, \{3, 4, 8\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 5, 7\}\}.$$

- Formiramo skup *nedegenerativnih pretpostavki* B , tj. skup svih trojki tačaka koje ne smiju biti kolinearne:

$$B = \{\{1, 4, 7\}\}.$$

- *Zaključak teoreme* C koji ima oblik tročlanog skupa tačaka koje su kolinearne:

$$C = \{7, 8, 9\}.$$

Teoremu incidencije sada možemo iskazati u obliku tvrdnje $\mathcal{T} = (H, B, C)$. Konačan skup $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ tačaka iz $\mathbb{R}P^2$ sa konkretnim homogenim koordinatama zovemo *instanca* tvrdnje \mathcal{T} ako P zadovoljava kolinearnosti iz H i nekolinearnosti iz B . Tvrdnja \mathcal{T} je teorema incidencije ako za svaku instancu tvrdnje \mathcal{T} , tročlani skup tačaka iz C je takođe kolinearan.

Kolinearnosti trojki iz skupa H možemo iskazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} [1, 2, 3] = 0; \quad [2, 6, 7] = 0; \\ [1, 5, 9] = 0; \quad [3, 4, 8] = 0; \\ [1, 6, 8] = 0; \quad [3, 5, 7] = 0; \\ [2, 4, 9] = 0; \quad [4, 5, 6] = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Kako smo izabrali da tačke 1, 4, 7 predstavljaju bazu sistema i pri tome svaki tročlani skup tačaka koje su nam po uslovu teoreme kolinearne sadrži najmanje jednu baznu tačku, to determinante (2.2) posmatramo kao determinante dimenzija 2×2 . Uslovi

kolinearnosti sada izgledaju:

$$\begin{aligned}
[1, 2, 3] = 0 &\Rightarrow \mathbf{ce} = \mathbf{bf}; & [2, 6, 7] = 0 &\Rightarrow \mathbf{bj} = \mathbf{ak}; \\
[1, 5, 9] = 0 &\Rightarrow \mathbf{iq} = \mathbf{hr}; & [3, 4, 8] = 0 &\Rightarrow \mathbf{fm} = \mathbf{do}; \\
[1, 6, 8] = 0 &\Rightarrow \mathbf{ko} = \mathbf{ln}; & [3, 5, 7] = 0 &\Rightarrow \mathbf{dh} = \mathbf{eg}; \\
[2, 4, 9] = 0 &\Rightarrow \mathbf{ar} = \mathbf{cp}; & [4, 5, 6] = 0 &\Rightarrow \mathbf{gl} = \mathbf{ij}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Kada pomnožimo lijeve i desne strane jednačina (2.3) i izvršimo očigledna djeljenja (po uslovima nedegenerativnosti nijedna od koordinata nije jednaka nuli pa su ova djeljenja moguća) dolazimo do jednačine $\mathbf{mq} = \mathbf{np}$ koja nije ništa drugo nego dokaz kolinearnosti tačaka (7, 8, 9). \square

Prethodno opisani metod dokazivanja oslanja se u potpunosti na pogodan izbor jediničnih vektora što nam u konačnici omogućava da kolinearnosti iz skupa H iskažemo kao 2×2 determinante. Kako se svaka koordinata pojavljuje i na lijevoj i na desnoj strani u jednakostima iz dokaza, to jednostavnim djeljenjem dolazimo do željenog rezultata. Međutim, ako ovaj metod pokušamo uopštiti i primjeniti na druge teoreme, shvatićemo da izbor jediničnih vektora koji bi dokaz vodio u gore opisanom pravcu, čak ni za jednostavne teoreme poput Dezargove, nije moguć. Tada prilazimo više apstraktnom pristupu u kome račun vršimo na nivou determinanti zanemarujući pri tom konkretne koordinate tačaka. Algebarski alat koji koristimo su jednačine nastale primjenom Grasman-Plikerovih relacija na tačke projektivnog prostora. Za potrebe ovoga teksta posmatraćemo tačke u $\mathbb{R}P^2$, odnosno determinante reda 3×3 .

Teorema 2.3. *Za proizvoljne tačke $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}P^2$ važi:*

$$[a, b, c][a, d, e] - [a, b, d][a, c, e] + [a, b, e][a, c, d] = 0 \tag{2.4}$$

Dokaz. Možemo bez gubitka opštosti pretpostaviti da je $a = (1, 0, 0)$. Sada relacija (2.4) ima oblik

$$[b, c][d, e] - [b, d][c, e] + [b, e][c, d] = 0 \tag{2.5}$$

što je zapravo Grasman-Plikerova relacija za tačke $b, c, d, e \in \mathbb{R}P^1$. Pretpostavimo da $[b, c] \neq 0$. Nakon projektivnih transformacija možemo zahtijevati da $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i

$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Razvijanjem determinanti iz (2.5) dolazimo do

$$\begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & e_1 \\ 1 & e_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & e_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

odnosno $d_1e_2 - e_1d_2 + d_2e_1 - e_2d_1 = 0$, što nam dokazuje tvrdnju. \square

U nastavku dajemo dokaz Papusove teoreme u kome kao osnovu koristimo Grasman-Plikerovu relaciju iz teoreme 2.3.

Binomni dokaz Papusove teoreme, tj. dokaz pomoću Grasman-Plikerovih relacija.

Pretpostavimo da kolinearnosti i nekolinearnosti iz skupova H i B važe kako smo to već definisali. Posmatrajmo tačke 1, 2, 3, 4, 7 iz teoreme i primjenimo Grasman-Plikerove relacije:

$$[1, 4, 7][1, 2, 3] - [1, 4, 2][1, 7, 3] + [1, 4, 3][1, 7, 2] = 0.$$

Kako su po uslovu zadatka tačke 1, 2, 3 kolinearne to je $[1, 2, 3] = 0$ pa imamo:

$$[1, 4, 2][1, 7, 3] = [1, 4, 3][1, 7, 2].$$

Za sve kolinearnosti iz H možemo napisati slične jednačine:

$$\begin{aligned} [1, 4, 2][1, 7, 3] &= [1, 4, 3][1, 7, 2] \\ [1, 4, 5][1, 7, 9] &= [1, 4, 9][1, 7, 5] \\ [1, 4, 8][1, 7, 6] &= [1, 4, 6][1, 7, 8] \\ [4, 7, 5][4, 1, 6] &= [4, 7, 6][4, 1, 5] \\ [4, 7, 8][4, 1, 3] &= [4, 7, 3][4, 1, 8] \\ [4, 7, 2][4, 1, 9] &= [4, 7, 9][4, 1, 2] \\ [7, 1, 2][7, 4, 6] &= [7, 1, 6][7, 4, 2] \\ [7, 1, 5][7, 4, 3] &= [7, 1, 3][7, 4, 5] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Kada pomnožimo lijeve i desne strane prethodnih jednakosti i izvršimo očigledna dijeljenja, dolazimo do jednakosti:

$$[7, 1, 8][7, 4, 9] = [7, 1, 9][7, 4, 8] \quad (2.8)$$

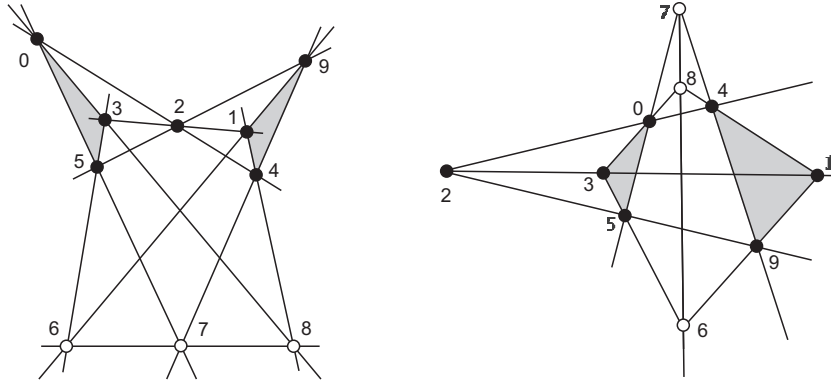
Grasman-Plikerova relacija za tačke 1, 4, 7, 8, 9 glasi:

$$[7, 1, 4][7, 8, 9] - [7, 1, 8][7, 4, 9] + [7, 1, 9][7, 4, 8] = 0.$$

Kako nam vrijedi (2.8) to znači da je $[7, 1, 4][7, 8, 9] = 0$. Iz uslova nedegenerativnosti imamo da trojka tačaka 1, 4, 7 ne smije biti kolinearna, tj. $[1, 4, 7] \neq 0$, pa slijedi da je $[7, 8, 9] = 0$, odnosno slijedi kolinearne tačaka 7, 8, 9. Ovim je dokaz teoreme završen.

□

Veliki broj teorema projektivne geometrije možemo dokazati koristeći ovaj sistem dokazivanja. Razvijeni su i automatski sistemi za dokazivanje teorema koji se zasnivaju na ovom principu. U radu [38], autor *Rihter-Gebert* pored algoritma za automatsko dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji, daje i određeni broj teorema i njihovih dokaza pomoću ovog sistema. U nastavku dajemo nekoliko značajnijih primera iz [38]. Najprije počinjemo sa čuvenom Dezagovom teoremom.



Slika 2.5: Dezagova teorema

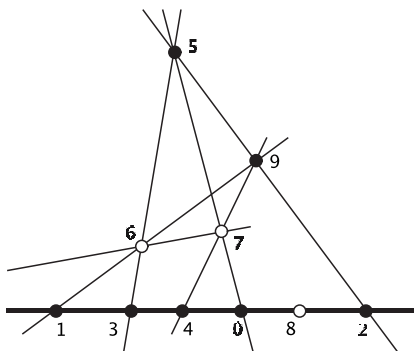
Teorema 2.4 (Dezagova teorema). *Za trougao čija su tjemena tačke 3, 5 i 0 i trougao sa tjemena 9, 4 i 1 (oba u \mathbb{RP}^2) takve da se tačke 3 i 1, tačke 5 i 9 i tačke 0 i 4 ne poklapaju, neka su $(03) \cap (14) = \{8\}$, $(05) \cap (94) = \{7\}$ i $(35) \cap (19) = \{6\}$. Prave (59), (04) i (31) su konkurentne ako i samo ako su tačke 8, 7 i 6 kolinearne.*

Ilustracije na slici 2.5 su dva različita crteža Dezagove teoreme. U nastavku dajemo binomni dokaz Dezagove teoreme [40],[38].

Dokaz. Kolinearne tačke koje nam po uslovima Dezagove teoreme važe su:

$$H = \{\{4, 7, 9\}, \{9, 1, 6\}, \{2, 5, 9\}, \{2, 4, 0\}, \{0, 8, 3\}, \\ \{5, 7, 0\}, \{2, 1, 3\}, \{4, 1, 8\}, \{5, 3, 6\}\}.$$

Ukoliko se neke od pravih iz teoreme poklapaju (slika 2.6), tada nastupa degenerativni slučaj u kome Dezagova teorema ne važi. Zahtijevajući da tačke iz skupa $B = \{\{3, 1, 8\}, \{3, 6, 8\}, \{7, 8, 1\}, \{2, 3, 0\}, \{7, 4, 5\}, \dots\}$ budu nekolinearne zaobilazimo problem degenerativnosti. Sada Dezagovu teoremu možemo iskazati u obliku tvrdnje $\mathcal{T} = (H, B, C)$, gdje je zaključak $C = \{\{7, 6, 8\}\}$.



Slika 2.6: Degenerisani slučaj Dezagove teoreme - prave (0, 4) i (3, 1) se poklapaju

Binomni dokaz Dezagove teoreme sada možemo predstaviti u obliku:

$$\begin{array}{ll}
[4, 7, 9] = 0 & \Rightarrow [4, 7, 1][4, 9, 6] = [4, 7, 6][4, 9, 1] \\
[9, 1, 6] = 0 & \Rightarrow [9, 1, 4][9, 6, 2] = [9, 1, 2][9, 6, 4] \\
[2, 5, 9] = 0 & \Rightarrow [2, 5, 6][2, 9, 1] = [2, 5, 1][2, 9, 6] \\
[2, 4, 0] = 0 & \Rightarrow [2, 4, 8][2, 0, 3] = [2, 4, 3][2, 0, 8] \\
[0, 8, 3] = 0 & \Rightarrow [0, 8, 2][0, 3, 5] = [0, 8, 5][0, 3, 2] \\
[5, 7, 0] = 0 & \Rightarrow [5, 7, 3][5, 0, 8] = [5, 7, 8][5, 0, 3] \\
[2, 1, 3] = 0 & \Rightarrow [2, 1, 5][2, 3, 4] = [2, 1, 4][2, 3, 5] \\
[4, 1, 8] = 0 & \Rightarrow [4, 1, 2][4, 8, 7] = [4, 1, 7][4, 8, 2] \\
[5, 3, 6] = 0 & \Rightarrow [5, 3, 2][5, 6, 7] = [5, 3, 7][5, 6, 2] \\
\hline
[7, 6, 8] = 0 \text{ ili } [7, 4, 5] = 0 & \Leftrightarrow [7, 6, 4][7, 8, 5] = [7, 6, 5][7, 8, 4]
\end{array}$$

Ključna tačka u gore navedenom dokazu je da prilikom naznačenih djeljenja moramo voditi računa da djeljenje sa „0” nije dozvoljeno. Kako djelimo sa determinantama oblika $[\cdot, \cdot, \cdot]$, moramo voditi računa da tačke čije koordinate čine $[\cdot, \cdot, \cdot]$ ne budu kolinearne - u suprotnom bi važio $[\cdot, \cdot, \cdot] = 0$. Drugim rječima, zahtijevamo da sve determinante sa kojim vršimo djeljenja budu iz skupa B .

Na osnovu Grasman-Plikerovih relacija iz dokaza slijedi da jedna od trojki tačaka $(7, 6, 8)$ ili $(7, 4, 5)$ mora biti kolinearna. Kako je trojka $(7, 4, 5)$ iz skupa B , to zaključujemo kolinearnost trojke $(6, 7, 8)$. \square \square

Teorema koju dajemo u nastavku, iako otkrivena od strane šesnaestogodišnjeg Paskala 1300 godina nakon Papusove teoreme jeste zapravo njeno uopštenje. Do Paskalove teoreme dolazimo kada dvije prave iz Papusove teoreme posmatramo kao specijalni slučaj krive drugog reda. Kriva drugog reda je skup tačaka iz $\mathbb{R}P^2$ koji zadovoljava jednačinu:

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot xy + d \cdot xz + e \cdot yz + f \cdot z^2 = 0. \quad (2.9)$$

Geometrijski oblik krivih drugog reda, za koje se u literaturi koristi zajedničko ime - *konike*, zavisi od vrijednosti parametara a, b, c, d, e i f . Elipsa, parabola i hiperbola su međusobno projektivno ekvivalentne - razlikuje se po broju presječnih tačaka sa beskonačno dalekom pravom l_∞ i to 0, 1, 2 respektivno.

Svaka konika u projektivnoj ravni može se projektivnim preslikavanjem preslikati na jedan od sljedećih slučajeva: prazan skup ili u slučaju degenerisane krive u tačku, dvije prave ili dvije prave koje se poklapaju. Nama posebno interesantan slučaj je kada se konika preslika u dvije prave jer tada nastaje specijalan slučaj Paskalove teoreme - Papusova teorema. Konika je degenerisana kada važi:

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot xy + d \cdot xz + e \cdot yz + f \cdot z^2 = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) \cdot (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z).$$

Primetimo da je jednačina 2.9 ekvivalentna sa

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

odnosno sa $p^T A p = 0$.

Degenerativna konika koja prolazi kroz četiri tačke 1, 2, 3 i 4 iz $\mathbb{R}P^2$ ima kvadratnu formu oblika $[p, 1, 2][p, 3, 4] = 0$. Kroz četiri različite tačke imamo tri degenerativne

konike.

Konika u opštem položaju kroz četiri tačke 1, 2, 3 i 4 iz $\mathbb{R}P^2$ je linearna kombinacija dvije od tri kvadratne forme $[p, 1, 2][p, 3, 4] = 0$, $[p, 1, 3][p, 2, 4] = 0$, $[p, 1, 4][p, 2, 3] = 0$, recimo:

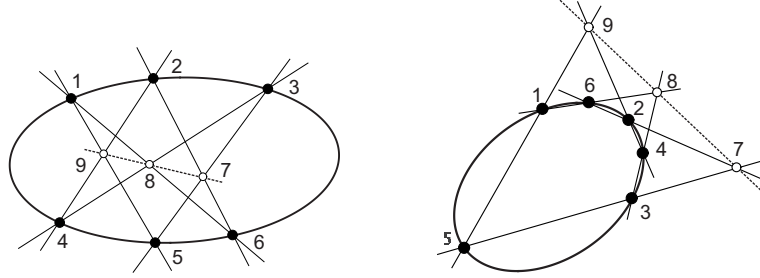
$$\lambda [p, 1, 3][p, 2, 4] + \mu [p, 1, 4][p, 2, 3] = 0.$$

Parametre λ i μ možemo izabrati tako da konika prolazi kroz dodatnu tačku q :

$$[q, 1, 4][q, 2, 3][p, 1, 3][p, 2, 4] - [q, 1, 3][q, 2, 4][p, 1, 4][p, 2, 3] = 0,$$

što je uslov da konika prolazi kroz šest tačaka 1, 2, 3, 4, p i q iz $\mathbb{R}P^2$.

Teorema 2.5 (Paskalova teorema). *Neka su 1, 2, 3, 4, 5, 6 $\in \mathbb{R}P^2$ tačke na konici. Tri sjecišta pravih (15), (26), (34) sa pravim (24), (35), (16) respektivno, su kolinearne tačke.*



Slika 2.7: Dva različita crteža Paskalove teoreme

Dokaz. Na slici 2.7 data su dva prikaza Paskalove teoreme. Za binomni dokaz Paskalove teoreme najprije navodimo uslov da šest tačaka 1, 2, 3, 4, 5, 6 leži na zajedničkoj konici u projektivnoj ravni:

$$[123][156][426][453] = [456][126][254][423]. \quad (2.10)$$

Da bi izbjegli degenerativne slučajeve, pretpostavimo da se nikoje dvije tačke ili prave ne poklapaju. Na osnovu kolinearnosti iz skupa hipoteza H koristeći Grasman-Plikerove relacije formiramo jednačine iz tabele 1. Prva jednačina je uslov (2.10).

Nakon množenja lijevih i desnih strana jednačina iz tabele 1 i izvršavanja naznačenih djeljenja, dolazimo do kolinearnosti tačaka (7, 8, 9). \square

$$\begin{array}{rcl}
\text{tačke na konici} & \Rightarrow & [125][136][246][345] = +[126][135][245][346] \\
[1, 5, 9] = 0 & \Rightarrow & [1, 5, 7][2, 5, 9] = -[1, 2, 5][5, 9, 7] \\
[1, 6, 8] = 0 & \Rightarrow & [1, 2, 6][3, 6, 8] = +[1, 3, 6][2, 6, 8] \\
[2, 4, 9] = 0 & \Rightarrow & [2, 4, 5][2, 9, 7] = -[2, 4, 7][2, 5, 9] \\
[2, 6, 7] = 0 & \Rightarrow & [2, 4, 7][2, 6, 8] = -[2, 4, 6][2, 8, 7] \\
[3, 4, 8] = 0 & \Rightarrow & [3, 4, 6][3, 5, 8] = +[3, 4, 5][3, 6, 8] \\
[3, 5, 7] = 0 & \Rightarrow & [1, 3, 5][5, 8, 7] = -[1, 5, 7][3, 5, 8] \\
\hline
[9, 8, 7] = 0 & \Leftarrow & [2, 8, 7][5, 9, 7] = +[2, 9, 7][5, 8, 7]
\end{array}$$

Tabela 1: Binomni dokaz Paskalove teoreme (iz uslova nedegenerativnosti slijedi da $[1, 5, 7] \neq 0$)

Kao što je to vidljivo iz teorema koje smo obrađivali u ovom poglavlju, binomni metod za dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji je dovoljno snažan da proizvede dobro strukturirane dokaze. Nedostatak ovakvog tipa dokaza je što prilikom procesa rješavanja jednačina nastalih primjenom Grasmann-Plikerovih relacija, gubimo sve informacije o strukturi teoreme koju dokazujemo. U odnosu na ovaj metod dokazivanja teorema incidencije, dokazi tipa Čeva/Menelaj su više sintetički dokazi. Ipak, kao i kod binomnog metoda, suština metoda Čeva/Menelaj je u iskazivanju geometrijskih teorema u algebarski pogodnom obliku tako da se teoreme relativno jednostavno mogu dokazati. Detaljnije o dokazima teorema incidencije primjenom Čevine i Menelajeve teoreme dato je u narednom poglavlju.

2.3 Teoreme incidencije na mnogostrukostima

Poglavlje koje slijedi otkriva nam sponu između teorema incidencije i mnogostrukosti, gdje se kao glavni alat koji spaja ova dva pojma pojavljuju teoreme Čeve i Menelaja. U ovom dijelu rada teoreme incidencije posmatraćemo kao ciklične strukture na pogodno odabranoj, triangulisanoj mnogostrukosti. Mnogostrukosti koje posmatramo su orijentabilne, zatvorene 2-mnogostrukosti i služe nam kao određeni okvir za generisanje teorema incidencije. Ove mnogostrukosti su realizovane u ravni tako da trouglovi iz njihove triangulacije odražavaju kombinatornu strukturu mnogostrukosti, tj. trouglovi koji imaju zajedničku stranicu u mnogostrukosti moraju dijeliti stranicu i u realizaciji u ravni. U algebarskom smislu, ovo nam znači da određene izraze možemo „skratiti”. Pokazaćemo da ako pridružimo Čevinu ili Menelajevu konfiguraciju svakom osim jednom trouglu iz mnogostrukosti tada i taj poslednji trougao, zajedno sa podeonim tačkama čini Čevinu ili Menelajevu teoremu.

Dokaze teorema incidencije koji su generisani teoremama Čeve i Menelaja, a kojima je ovaj dio rada posvećen, zvaćemo *Čeva/Menelaj dokazi*. Kako su glavni protagonisti ove tehnike dokazivanja geometrijskih teorema Čevina i Menelajeva teorema, sasvim je prirodno da im posvetimo naredni dio teksta.

2.3.1 Teoreme Čeve i Menelaja

Opšte poznate teoreme Čeve i Menelaja, nasuprot svojoj jednostavnosti nose značajna svojstva trougla i omogućavaju konstrukciju velikog broja netrivialnih teorema incidenције. Ove teoreme su klasični rezultati u geometriji i do sada je otkriveno više njihovih uopštenja (vidjeti [23], [24]). Ime nose po grčkom matematičaru i astronomu Menelaju Aleksandrijskom koji je živeo oko 100 godina p.n.e i italijanskom matematičaru Đovaniju Čevi koji je svoju teoremu otkrio 1678. godine.

Čuveno dijelo *Sferika*, koje je Menelaj napisao krajem I vijeka n.e. i u kome nalazimo Menelajevu teoremu za trougao u ravni koja je u svojstvu leme iskorišćena za dokaz sferne verzije teoreme, izgubljeno je i samo dijelovi originalnog Grčkog teksta sačuvani su kroz djeljanje kasnijih autora. Tako, najstariji poznati izvor je Al Haravijeva arapska verzija Menelajevе *Sferike* koja datira negdje od IX do X vijeka n.e. Takođe, ista lema se pojavljuje i u Ptolomejevom *Almagestu* iz druge polovine II vijeka n.e. Za istorijske napomene vidjeti [42], [37].

U formulaciji teorema Čeve i Menelaja sa $|XY|$ označavamo dužinu segmenta XY . Za tri različite kolinearne tačke X, Y i Z iz \mathbb{R}^2 neka je

$$\frac{|XZ|}{|ZY|} =_{df} \begin{cases} \frac{XZ}{ZY}, & \text{ako je } Z \text{ između } X \text{ i } Y, \\ -\frac{XZ}{ZY}, & \text{inače.} \end{cases}$$

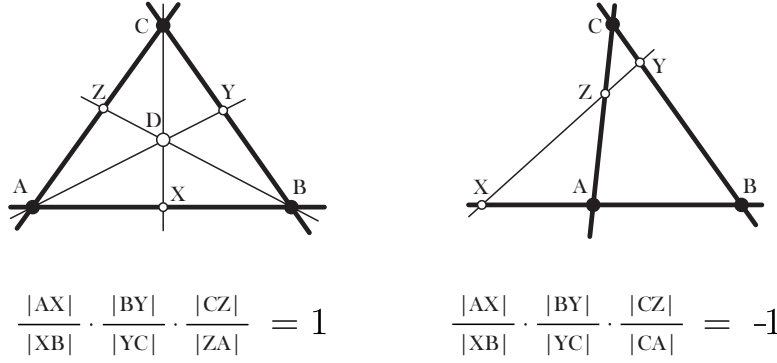
Ukoliko X, Y i Z nisu međusobno različite kolinearne tačke tada $\frac{|XZ|}{|ZY|}$ smatramo *nedefinisanim*. Odnos $\frac{|XZ|}{|ZY|}$ još označavamo i kao $(X, Y; Z)$.

Teorema 2.6 (Čevina teorema). *Neka je ABC proizvoljan trougao i X, Y i Z tačke na stranicama trougla (različite od tjemena) AB, BC i CA redom. Prave*

$$AY, BZ \text{ i } CX \text{ su konkurentne ako i samo ako je } \frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = 1. \quad (2.11)$$

Pod *Čevinom konfiguracijom* podrazumjevamo trougao ABC sa podeonim tačkama X, Y i Z na stranicama AB, BC i CA redom, takav da je proizvod odnosa dužina na stranicama $\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|}$ jednak 1.

Iako Čevina teorema na prvi pogled djeluje kao teorema euklidske geometrije jer uključuje odnose dužina na stranicama, njena projektivna strana dolazi na vidjelo zapažanjem da primjena projektivnih transformacija na tačke iz teoreme 2.6 ne utiče na odnos (2.11), tj. odnos (2.11) je projektivna invarijanta. Upravo ova činjenica nam daje jednostavan dokaz teoreme 2.6.



Slika 2.8: Čevina i Menelajeva teorema

Dokaz. Kako je odnos iz teoreme 2.6 projektivna invarijanta, to položaj tačaka A, B, C i D sa slike 2.8 možemo prilagoditi tako da je D centar jednakostraničnog trougla ABC . Sasvim je dovoljno tada dokazati Čevinu teoremu samo u specijalnom slučaju. Posmatrajmo, na primjer, jednakostranični trougao kod koga su stranice presječene u njihovim središtima. Kako su sva tri odnosa iz relacije (2.11) jednaka 1, onda je i njihov proizvod jednak 1. □

Teorema 2.7 (Menelajeva teorema). *Za trougao ABC i tačke X, Y i Z (različite od tjemena trougla) na stranicama trougla AB, BC i CA redom, važi*

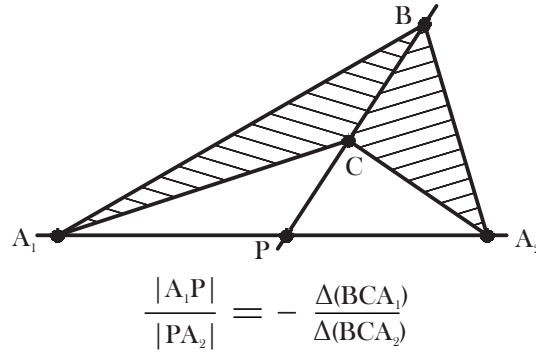
$$X, Y \text{ i } Z \text{ su kolinearne ako i samo ako } \frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = -1. \quad (2.12)$$

Pod *Menelajevom konfiguracijom* podrazumjevamo trougao ABC sa podeonim tačkama X, Y i Z na stranicama AB, BC i CA redom, takav da je proizvod odnosa dužina na stranicama $\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|}$ jednak -1 .

Dokaz. Projektivnu prirodu Menelajeve teoreme možemo objasniti istim argumentima kojima smo se služili kod Čevine teoreme. I u ovom slučaju, projektivne transformacije koje nemaju uticaja na odnos (2.12), daju nam slobodu izbora trougla za koji ćemo dokazati da teorema važi. Opet, da bismo zaključili valjanost Menelajeve teoreme, dovoljno je dokazati da teorema važi u jednom specijalnom slučaju. □

Ove teoreme se, kao što je to prikazano u radu [22], mogu jednostavno dokazati ako odnose dužina posmatramo kao odnos površina određenih trouglova. Ovaj rad srodan

je *metodu površina* iz sljedećih radova [9], [10], [11]. Metod površina možemo iskazati na sljedeći način:



Slika 2.9: Metod površina po B. Grinbaumu i G. Šepardu [22]

Neka je P tačka presjeka pravih (BC) i (A_1A_2) slika 2.9. Tada važi:

$$\frac{|A_1P|}{|PA_2|} = - \frac{\Delta(BCA_1)}{\Delta(BCA_2)}, \quad (2.13)$$

gdje smo sa $\Delta(BCA_1)$ i $\Delta(BCA_2)$ označili orijentisane površine trouglova ΔBCA_1 i ΔBCA_2 .

Pod pojmom *orijentisana* površina trougla podrazumjeva se da površinu trougla računamo sa pozitivnim ili negativnim znakom u zavisnosti od toga da li je trougao ΔABC pozitivno ili negativno orijentisan. Ako su tjemena trougla kolinearne tačke, površina je jednaka nuli.

Da bismo dokazali Čevinu i Menelajevu teoremu posmatrajmo odnose površina trouglova iz Čevine teoreme (slika 2.8 - lijevo)

$$\frac{\Delta(CDA)}{\Delta(CDB)} \cdot \frac{\Delta(ADB)}{\Delta(ADC)} \cdot \frac{\Delta(BDC)}{\Delta(BDA)} = -1, \quad (2.14)$$

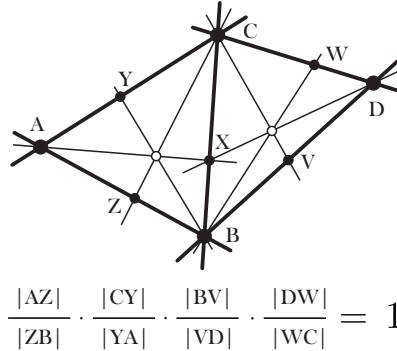
odnosno, odnose površina trouglova iz Menelajevе teoreme (slika 2.8 - desno)

$$\frac{\Delta(ZYA)}{\Delta(ZYB)} \cdot \frac{\Delta(ZYB)}{\Delta(ZYC)} \cdot \frac{\Delta(ZYC)}{\Delta(ZYA)} = 1. \quad (2.15)$$

Direktna primjena principa površina na gore definisane odnose dovodi nas do Čevine/Menelajevе teoreme.

2.3.2 Čeva/Menelaj metod za dokazivanje teorema incidencije

Dokaze teorema incidencije primjenom teorema Čevinog i Menelajevog tipa možemo interpretirati kao određeno „ljepljenje” trouglova kojima je pridružena Čevina, odnosno Menelajeva konfiguracija. Opremanje svih osim jednog trougla iz triangulacije mnogostrukosti sa Čevinom/Menelajevom konfiguracijom implicira postojanje Čevine/Menelajeve konfiguracije i na poslednjem trouglu. Posmatramo slučaj kada su dva Čevina trougla zalijepljena duž zajedničke stranice (slika 2.10) na kojoj dijele i tačku iz Čevine konstrukcije [39].



Slika 2.10: Dvije Čevine konfiguracije zalijepljene duž zajedničke stranice (BC)

Iz Čevine teoreme za trouglove ABC i CBD dobijamo odnose:

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1 \text{ i } \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BV|}{|VD|} \cdot \frac{|DW|}{|WC|} = 1. \quad (2.16)$$

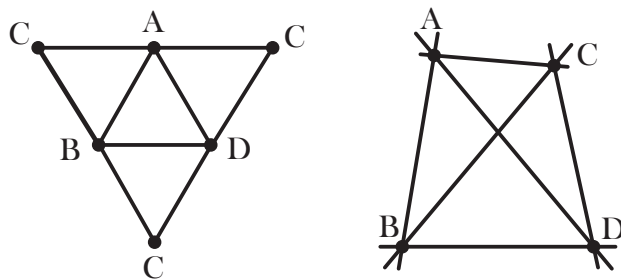
Nakon množenja lijevih i desnih strana relacija (2.16) izrazi $\frac{|BX|}{|XC|}$ i $\frac{|CX|}{|XB|}$ se međusobno poništavaju i dolazimo do relacije:

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|BV|}{|VD|} \cdot \frac{|DW|}{|WC|} = 1.$$

Kako su trouglovi orijentisani tako da ako dva trougla imaju zajedničku stranicu, onda te unutrašnje stranice imaju suprotnu orijentaciju, odnosi koji odgovaraju unutrašnjim stranicama trouglova će se uvijek poništiti. Bez obzira koliko je Čeva/Menelaj trouglova zalijepljeno na kraju ćemo dobiti relaciju u kojoj obitavaju odnosi koji postoje na spoljašnjim stranicama oblasti koju formiraju zalijepljeni trouglovi.

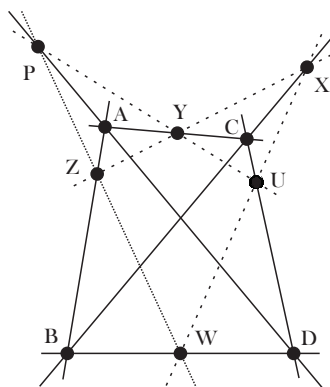
Proces ljepljenja trouglova izvodimo na orijentisanoj, triangulisanoj i zatvorenoj 2-mnogostrukosti.

Kao konketan primjer posmatraćemo projekciju tetraedra ($ABCD$) na \mathbb{R}^2 - slika 2.11 lijevo. U Dezargovoj teoremi možemo uočiti zatvorenu strukturu koja se sastoji od četiri



Slika 2.11: Projekcija tetraedra na R^2

trougla, slika 2.11 desno. Tri od četiri trougla sa slike 2.11 opremimo Menelajevom konfiguracijom. Menelajeve prave istaknute su isprekidanom linijom, slika 2.12.



Slika 2.12: Desargova teorema na tetraedru $(ABCD)$

Nakon formiranja relacija koje odgovaraju trouglovima sa Menelajevom konfiguracijom

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = -1, \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BW|}{|WD|} \cdot \frac{|DU|}{|UC|} = -1, \frac{|DP|}{|PA|} \cdot \frac{|AY|}{|YC|} \cdot \frac{|CU|}{|UD|} = -1, \quad (2.17)$$

i množenja lijevih i desnih strana jednakosti dolazimo do relacije

$$\frac{|DP|}{|PA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BW|}{|WD|} = -1 \quad (2.18)$$

koja uz pomoć Menelajevе teoreme dokazuje postojanje Menelajevе konfiguracije na poslednjem trouglu. Dakle, na slici 2.12 možemo dodati Menelajevu liniju (tačkasta linija) za četvrti trougao. Rezultujuća geometrijska konstrukcija nije ništa drugo nego Desargova teorema.

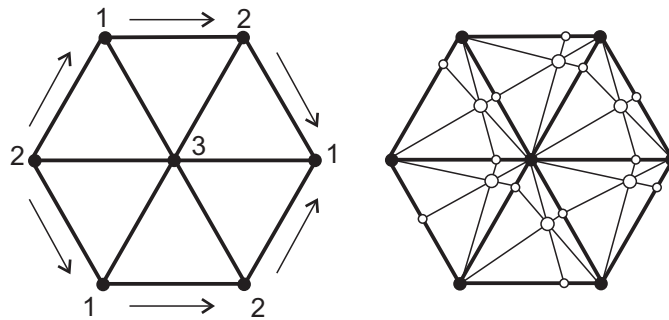
Opisana procesura se može uopštiti, jer se zatvorene strukture ovakvog tipa prirodno pojavljuju na triangulisanim mnogostrukostima.

Važno je napomenuti da ovo nije jedini način da projekciju tetraedra opremimo Čeva/Menelajevom teoremom - trouglovima možemo pridružiti četiri Čevine teoreme, ili po dvije Čevine i Menelajeve teoreme. U strukturi Čeva/Menelajevih dokaza teorema incidencije ukupan broj trouglova kao i broj trouglova koji nose Menelajevu teoremu mora biti paran.

Različiti načini za kreiranje mnogostrukosti koje se sastoje od četiri trougla i teoreme incidencije proizvedene na gore navedeni način dati su u radu [39].

2.3.3 Čeva/Menelaj dokaz za Paposovu teoremu

U dijelu koji slijedi pokazaćemo kako izborom adekvatne mnogostrukosti i njene triangulacije možemo dokazati Paposovu teoremu na gore opisani način. U ovu svrhu posmatraćemo triangulaciju torusa u šest trouglova sa tjemena 1, 2 i 3 pri čemu je torus realizovan u ravni tako da trouglovi formiraju šestougao kod koga su identifikovane suprotne strane (slika 2.13 lijevo). Važno je napomenuti da ovdje dozvoljavamo da trouglovi iz triangulacije imaju više od jedne zajedničke strane, odnosno tjemena, što nije slučaj sa pojmom triangulacije u smislu kategorije triangulisanih mnogostrukosti.



Slika 2.13: Triangulacija torusa kao okvir za Čeva/Menelaj dokaz Paposove teoreme

Trouglovima pridružujemo Čevinu konfiguraciju tako da kada god dva trougla dijele stranicu, odgovarajuće tačke Čevine teoreme koje odgovaraju toj stranici se poklapaju - slika 2.13. Na slici 2.14 lijevo prikazana je situacija kada se trouglovi iz šestougla postave jedan preko drugog vodeći računa o suprotnim stranicama.

Desna strana slike 2.14 prikazuje situaciju kada se uklone tačke koje ne učestvuju u teoremi incidencije već predstavljaju samo presjek dvaju pravih. Ovako proizvedena geometrijska konstrukcija je teorema incidencije - Paposova teorema.

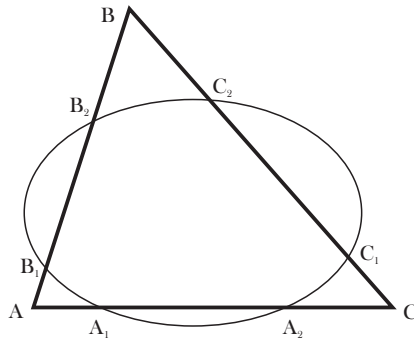
2.3.4 Uopštenja Čevine i Menelajeve teoreme

Teoreme incidencije koje u svojoj strukturi osim trouglova, uključuju konike i poligone, mogu se izborom odgovarajuće mnogostrukosti dokazati primjenom Čeva/Menelaj me-



Slika 2.14: Šest trouglova torusa preklopljeni jedan preko drugog [39]

toda dokazivanja. Najprije dajemo teoremu Karnoa (L. Carnot (1753-1823), francuski matematičar), koja je ekvivalentna Paskalovoj teoremi za konike. Karnoovu teoremu možemo posmatrati kao određeno uopštenje Čevine teoreme.



$$\frac{|AA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BB_1|}{|B_1A|} = 1$$

Slika 2.15: Karnoova teorema

Teorema 2.8 (Karnoova teorema). *Neka su A_1, A_2 tačke na stranici AC , B_1, B_2 tačke na stranici AB i tačke C_1, C_2 tačke na stranici BC trougla $\triangle ABC$, kao na slici 2.15.*

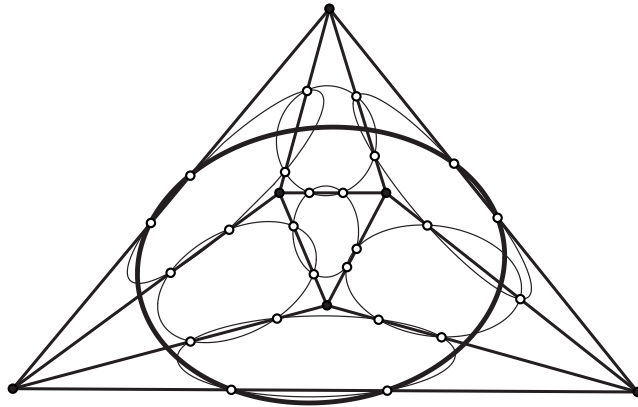
Tada je

$$\frac{|AA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BB_1|}{|B_1A|} = 1$$

ako i samo ako tačke $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leže na zajedničkoj konici.

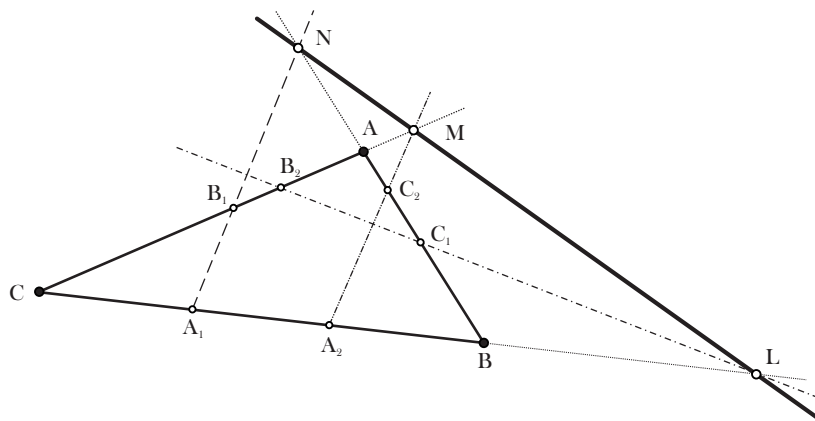
Geometrijsku konfiguraciju koja se sastoji od trougla ABC i tačaka A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 na stranicama AB, AC i BC trougla i koje pripadaju zajedničkoj konici zovemo *Karnoovom konfiguracijom*. Karnoova teorema može poslužiti za izgradnju teorema

incidencije koje uključuju konike. Ako svaki osim jednog trougla orijentisane triangulisane 2-mnogostrukosti opremimo sa Karnoovom konfiguracijom, tada će i tačke na poslednjem trouglu zadovoljavati uslove Karnoove teoreme, slika 2.16.



Slika 2.16: Karnoova teorema na 2-mnogostrukosti [39]

Koristeći ovaj metod moguće je dokazati Paskalovu teoremu [39, 40]. Za dokaz su nam potrebne 4 Menelajeve konstrukcije i jedna Karnoova. Nakon lijepljenja četiri Menelajeve konfiguracije dolazimo do konstrukcije prikazane na slici 2.17.



Slika 2.17: Četiri Menelajeve konstrukcije na $\triangle ABC$

Odnosi koji odgovaraju Menelajevim konfiguracijama za $\triangle ABC$ su:

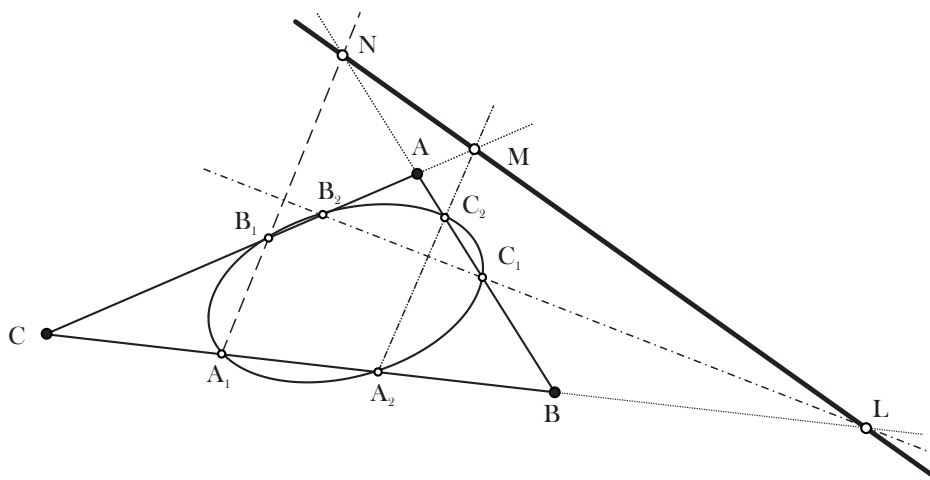
$$\frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} \cdot \frac{|AN|}{|NB|} = -1 \quad (2.19)$$

$$\frac{|AN|}{|NB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = -1 \quad (2.20)$$

$$\frac{|CM|}{|MA|} \cdot \frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_2|}{|A_2C|} = -1 \quad (2.21)$$

$$\frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = -1 \quad (2.22)$$

Radi preglednijeg dokaza, Menelajevе prave na slici 2.17 istaknute su različitim vrstama linija. Kada na trougao iz geometrijske konstrukcije na slici 2.17 priliјepimo trougao kome je pridruženа Karnoova konfiguracija dolazimo do situacije koja je ilustrovana na slici 2.18.

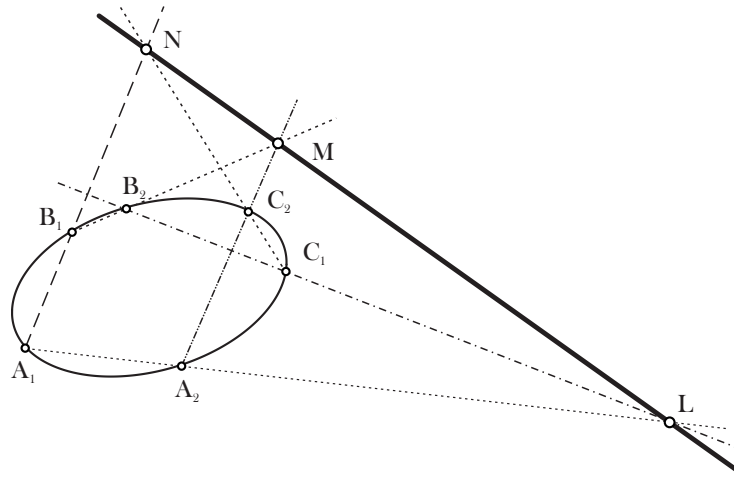


Slika 2.18: Četiri Menelajevе i jedna Karnoova konstrukcija na $\triangle ABC$

Iz Karnoove teoreme za $\triangle ABC$ dolazimo do odnosa:

$$\frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} \cdot \frac{|AB_2|}{|B_2C|} \cdot \frac{|CA_2|}{|A_2B|} \cdot \frac{|BC_2|}{|C_2A|} \cdot \frac{|AB_1|}{|B_1C|} = 1 \quad (2.23)$$

Ukoliko pomnožimo jednačine (2.20), (2.21), (2.22) i (2.23) podebljani izrazi iz jednačina (2.20), (2.21), (2.22) poništiti će se sa izrazima iz jednačine (2.23). Kao rezultat dobićemo relaciju (2.19). Relacija (2.19) implicira kolinearnost tačaka N, M i L što nam u konačnici dokazuje Paskalovu teoremu. Na slici 2.18 primjećujemo da 6 tačaka A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 na konici zajedno sa pravim $(A_1, B_1), (B_1, B_2), (B_2, C_1), (A_2, C_2), (C_2, C_1), (A_1, A_2)$ i presječnim tačkama N, M i L imaju kombinatoriku Paskalove teoreme. Zaključujemo da smo ovim izdejstvovali Menelaj/Karnoov dokaz za Paskalovu teoremu u duhu pristupa opisanog od strane Rihter-Geberta u [39, 40]. Tačke koje predstavljaju tjemena originalnog trougla $\triangle ABC$ nemaju posebnu ulogu u geometrijskoj konstrukciji. Nakon što ih izbrišemo, dolazimo do ilustracije 2.19 koja predstavlja crtež Paskalove teoreme. \square

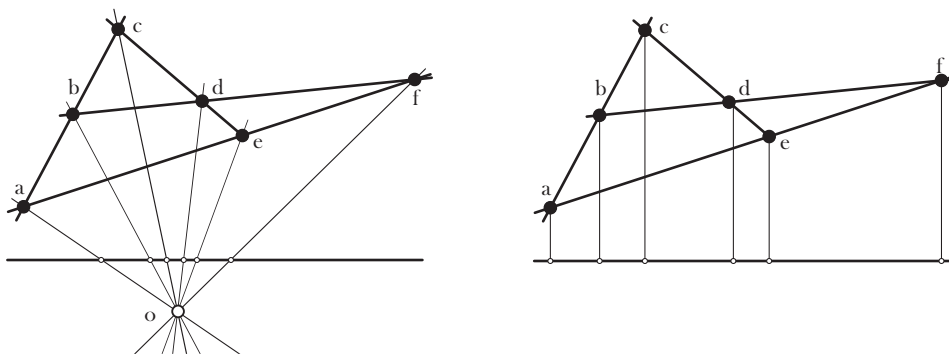


Slika 2.19: Paskalova teorema

Ilustracije na slikama 2.17, 2.18 i 2.19 nastale su u dinamičkom geometrijskom softveru *Cinderella* čiji su tvorci J. Rihter-Gebert i U. Kortenkamp.

Uopštenja Čevine i Menelajevе teoreme mogu se dobiti ako umjesto trouglova posmatramo n -gone. Generalizacija Čevine teoreme na poligone je poznata teorema američkog matematičara Larija Houana (Larry Hoehn), koju u ovom radu nećemo pominjati. U literaturi postoji veliki broj radova koji intenzivno proučavaju ove teme ([22], [23], [24], [25]).

U nastavku dajemo uopštenje Menelajevе teoreme na poligone. Detaljan tretman ove materije grupa autora dala je u radovima [22], [23], [24], [25], [41]. U ovom tekstu, naredni pasusi biće posvećeni uopštenju Menelajevе teoreme na n -gone koristeći određena uopštenja harmonijskih tačaka (u engleskoj literaturi za pomenuta uopštenja koristi se naziv *quadrilateral sets* ili skraćeno *quadset*) na način kako je to u svojoj knjizi [40] dao Rihter-Gebert .



Slika 2.20: Dva načina generisanja *quad* skupa [40]

Pojam *quadset* nastao je kao posledica proučavanja uslova pod kojim tačke na pravou l predstavljaju projekciju konfiguracije incidencije iz $\mathbb{R}P^2$. Posmatrajmo situaciju na

slici 2.20 lijevo, na kojoj je 6 tačaka iz $\mathbb{R}P^2$ projektovano na pravu l u odnosu na tačku projekcije O . Koristeći očigledne kolinearnosti tačaka iz $\mathbb{R}P^2$, Grasman-Plikerove relacije i metod površina dolazimo do željene karakterizacije [40]:

$$[ae][bf][cd] = [ce][af][bd]. \quad (2.24)$$

Tačke na pravoj koje zadovoljavaju relaciju (2.24) zovemo *quadset*-om. Do iste karakterizacije dolazimo ako tačku projekcije O pomjerimo u beskonačnost (slika 2.20 desno). Pojam *quadset* možemo uopštiti ako kao konstrukciju iz $\mathbb{R}P^2$ posmatramo proizvoljne n -gone, što će biti od koristi za uopštenje Menelajeve teoreme na n -gone.

Posmatramo proizvoljni n -gon sa tjemenuima A_1, A_2, \dots, A_n . Na stranicama poligona formiramo tačke presjeka B_1, B_2, \dots, B_n njegovih stranica sa pravom l . Da bismo sve stranice n -gona presjekli sa pravom l , neke od njih moramo produžiti, tj. neke od tačaka presjeka B_1, B_2, \dots, B_n će biti na *spoljašnjem* dijelu stranica n -gona. Tjemena poligona projektujemo na pravu l i rezultujuće tačke označimo sa C_1, C_2, \dots, C_n . Tačke C_1, C_2, \dots, C_n na pravoj l su projekcija geometrijske konstrukcije iz $\mathbb{R}P^2$ na l , pa tako čine pomenuti *quadset* i zadovoljavaju relaciju [40]:

$$\prod_{i=1}^n |A_i B_i| = \prod_{i=1}^n |A_i B_{i-1}|.$$

Drugim rječima, postoji netrivialno *podizanje* kolinearnih tačaka C_1, C_2, \dots, C_n sa prave l do geometrijske konstrukcije (u našem slučaju n -gona) u $\mathbb{R}P^2$. Ovo podizanje tačaka C_1, C_2, \dots, C_n možemo posmatrati kao dodjeljivanje treće homogene koordinate h_1, h_2, \dots, h_n tačkama C_1, C_2, \dots, C_n .

Pod ovako definisanim okolnostima, možemo izreći sljedeću tvrdnju o odnosu $\frac{|A_i B_i|}{|B_i A_{i+1}|}$:

$$\frac{|A_i B_i|}{|B_i A_{i+1}|} = \pm \frac{h_i}{h_{i+1}}. \quad (2.25)$$

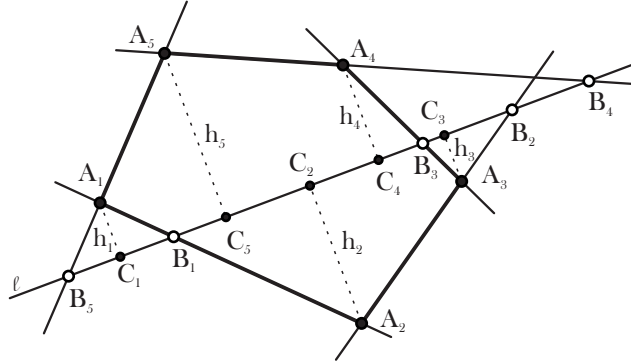
Množenjem svih n odnosa (2.25) dolazimo do

$$\prod_{i=1}^n \frac{|A_i B_i|}{|B_i A_{i+1}|} = \prod_{i=1}^n \pm \frac{h_i}{h_{i+1}} = (-1)^n, \quad (2.26)$$

što je Menelajeva teorema za n -gone (Teorema 1 u [22]).

Za neparno n proizvod iz (2.26) ima vrijednost -1 , što znači da je broj stranica presječenih sa pravom l sa *spoljašne* strane neparan. Za parno n vrijednost proizvoda (2.26) je 1 i broj *spoljašnjih* presjeka stranica n -gona je paran.

Za jednostavan dokaz ove teoreme, podijelimo n -gon u trouglove i primjenimo Menelajevu teoremu na svaki od njih. Kada pomnožimo lijeve i desne strane u jednakostima iz Menelajevih teorema, svi odnosi će se međusobno pokratiti osim odnosa na stranama $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ poligona, a proizvod odnosa na ovim stranama iznosiće $(-1)^n$.



Slika 2.21: Uopštenje Menelajevе teoreme na n -gone, za $n = 5$

U slučaju kada je $n = 5$, crtež koji ilustruje Menelajevu teoremu za ovaj poligon prikazan je na slici 2.21. Odnosi (2.25) koji odgovaraju situaciji na slici 2.21 su:

$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1A_2|} = \frac{h_1}{h_2}, \frac{|A_2B_2|}{|B_2A_3|} = -\frac{h_2}{h_3}, \frac{|A_3B_3|}{|B_3A_4|} = \frac{h_3}{h_4}, \frac{|A_4B_4|}{|B_4A_5|} = -\frac{h_4}{h_5}, \frac{|A_5B_5|}{|B_5A_1|} = -\frac{h_5}{h_1},$$

dok Menelajeva teorema glasi:

$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1A_2|} \cdot \frac{|A_2B_2|}{|B_2A_3|} \cdot \frac{|A_3B_3|}{|B_3A_4|} \cdot \frac{|A_4B_4|}{|B_4A_5|} \cdot \frac{|A_5B_5|}{|B_5A_1|} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{-h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_4} \cdot \frac{-h_4}{h_5} \cdot \frac{-h_5}{h_1} = -1.$$

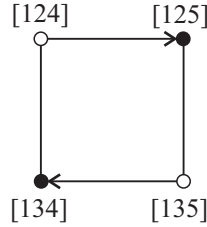
2.4 Ekvivalentnost binomnog i Čeva/Menelaj dokaza teorema incidencije

Osnovni cilj predstojećeg dijela rada je uspostaviti vezu između binomnog i Čeva/Menelaj metoda dokazivanja teorema incidencije. Radovi koji se na dubok i sistematičan način bave ovom temom su [39], [2]. Ove metode dokazivanja teorema incidencije imaju različite pristupe i strukturu i u svojoj tehnici koriste više stvari - od kombinatorne strukture teorema incidencije do konkretnih koordinata tačaka iz projektivne ravni i njihovih determinanti. Ove različite tretmane teorema incidencije možemo svesti na nivo *baznih grafova* koji su koristan grafički alat za vizualizaciju procesa poništavanja izraza iz pomenutih dokaza. Bazni graf $\Gamma(\mathcal{T})$ teorema incidencije $\mathcal{T} = (H, B, C)$ je graf sa skupom čvorova B i dva čvora su susjedna ako se razlikuju samo u jednoj tački.

Posmatrajmo Grasman-Plikerove relacije za tačke $1, 2, 3, 4, 5 \in \mathbb{R}P^2$ i $[1, 2, 3] = 0$:

$$[1, 2, 4][1, 3, 5] = [1, 2, 5][1, 3, 4] \quad (\text{bikvadratni izraz})$$

Bazni graf za bikvadratni izraz dat je na slici 2.22.



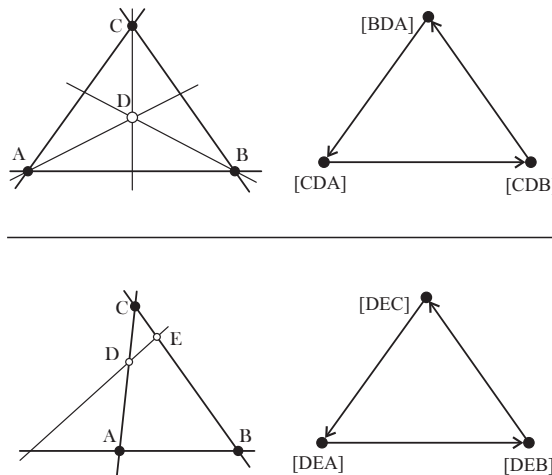
Slika 2.22: Grafičko predstavljanje za *bikvadratni izraz*

Granama iz baznog grafa možemo dodjeliti orijentaciju, tako da orijentisana grana $([1, 2, 4], [1, 2, 5])$ grafa Γ predstavlja odnos $\frac{[1,2,4]}{[1,2,5]}$.

U radu [2] autori su pokazali kako koristeći princip površina (2.13) možemo algebarski dokaz teoreme incidencije prevesti u izraze koji uključuju odnose dužina, a koji pak izraženi na jeziku determinanti imaju oblik:

$$\frac{|ax|}{|xb|} = \frac{[a, p, q]}{[b, q, p]},$$

gdje su p i q tačke na pravoj koja siječe (a, b) u tački x . Tako, pozivajući se na odnose (2.14) i (2.15) Čevina i Menelajeva teorema odgovaraju 3-ciklusima (trouglovima) iz baznih grafova Γ kao na slici 2.23.



Slika 2.23: Dva tipa trouglova, tj. 3-ciklusa u grafu Γ i njihova interpretacija kao Čeva/Menelajeve konfiguracije pomoću metoda (2.13)

Različita kombinatorna struktura Čevinih i Menelajevih trouglova dovodi do dva kombinatorno različita tipa 3-ciklusa u grafu Γ . Čevina konfiguracija uključuje četiri tačke (tri tjemena trougla i jednu Čevinu tačku) pri čemu svaki trougao (2.14) sadrži Čevinu tačku. U odnosima (2.15) za Menelajevu teoremu, svaki trougao sadrži stranicu koja odgovara Menelajevoj pravoj. Na ovaj način grani 3-ciklusa iz grafa Γ odgovara stranica Čevinog ili Menelajevog trougla koristeći argumente (2.14) i (2.15).

2.4.1 Od binomnog do Čeva/Menelaj dokaza

Pretpostavimo da za datu teoremu incidencije $\mathcal{T} = (H, B, C)$ imamo binomni dokaz i želimo da razvijemo Čeva/Menelaj dokaz, tj. da rekonstruišemo cikličnu strukturu na mnogostrukosti. Osnovni pristup ovom zadatku biće kreiranje baznih grafova (tj. 4-ciklusa) za svaku od bikvadratnih jednakosti iz binomnog dokaza teorema. Adekvatno lijepljenje ovih bikvadratnih baznih grafova generiše cikluse koje prevodimo u Čeva/Menelaj trouglove. Ukoliko su ovi ciklusi trouglovi, direktno im možemo pridružiti Čeva/Menelaj konfiguracije. U slučaju ciklusa veće dimenzije neophodno je dodavanje tačaka posmatranoj teoremi da bismo u trivijalnom smislu povećali broj čvorova u grafu Γ i bili u mogućnosti cikluse veće dimenzije raščlaniti na trouglove.

Proceduru prevoda binomnog dokaza u Čeva/Menelaj dokaz ilustrovaćemo na dva primjera: teoremama Papusa i Dezarga.

Papusova teorema

Papusova teorema i njen binomni dokaz dati su u poglavlju 2, dokaz 2.1. Binomni dokaz možemo napisati u formi proizvoda na način da svaku bikvadratnu jednakost iz dokaza napišemo u obliku $\frac{[\dots][\dots]}{[\dots][\dots]} = 1$, što u slučaju Papusove teoreme izgleda:

$$\frac{[142][173]}{[143][172]} \cdot \frac{[145][179]}{[149][175]} \cdot \frac{[148][176]}{[146][178]} \cdot \frac{[475][416]}{[476][415]} \cdot \frac{[478][413]}{[473][418]}. \quad (2.27)$$

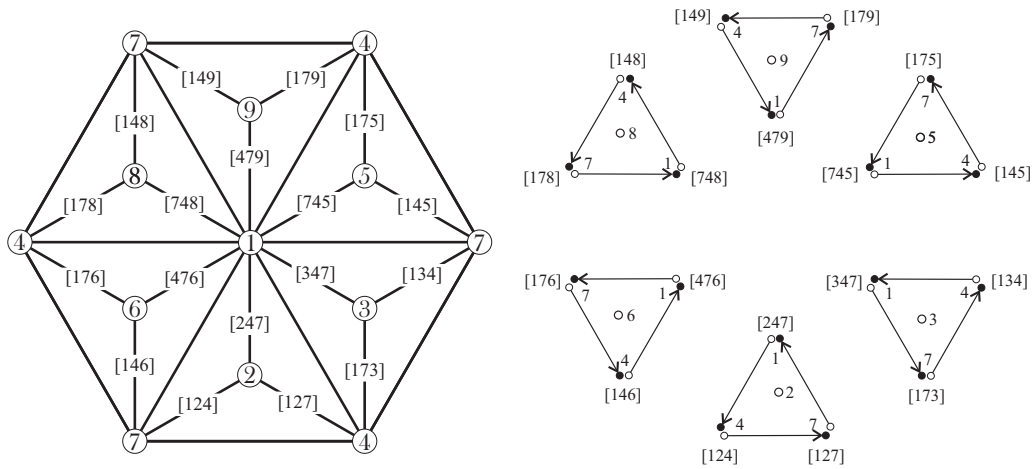
$$\cdot \frac{[472][419]}{[479][412]} \cdot \frac{[712][746]}{[716][742]} \cdot \frac{[715][743]}{[713][745]} \cdot \frac{[718][749]}{[719][748]} = 1.$$

Jednačina (2.27) je binomni dokaz teoreme incidencije što implicira da se svaki izraz iz brojioca pojavljuje takođe i u imeniocu. Teorema o homotopiji na matroidima nastalim iz grafa, koju je u svom radu [33] uveo američki matematičar S. Morer (Stephen B. Maurer) pokazuje da svaki količnik oblika $\frac{[\dots][\dots]}{[\dots][\dots]}$ sa ovom osobinom možemo generisati koristeći konačno mnogo Čeva/Menelaj uslova. U ovu svrhu najprije ćemo prerasporediti odnose iz (2.27). Nakon preraspoređivanja odnosa dobili smo izraz u kome svaki

odnos odgovara jednom Čevinom trouglu (Čevine tačke u svakom odnosu ispisane su podebljanim brojevima):

$$\frac{[124][127][247]}{[127][247][124]} \cdot \frac{[173][413][743]}{[134][374][137]} \cdot \frac{[145][715][475]}{[175][745][415]} \cdot \frac{[179][419][749]}{[149][479][719]} \cdot \frac{[148][718][478]}{[178][748][418]} \cdot \frac{[176][416][746]}{[146][476][716]} = 1 \quad (2.28)$$

Na lijevom dijelu slike 2.24 ilustrovan je princip kako proces poništavanja izraza iz binomnog dokaza implicira cikluse u grafu Γ .



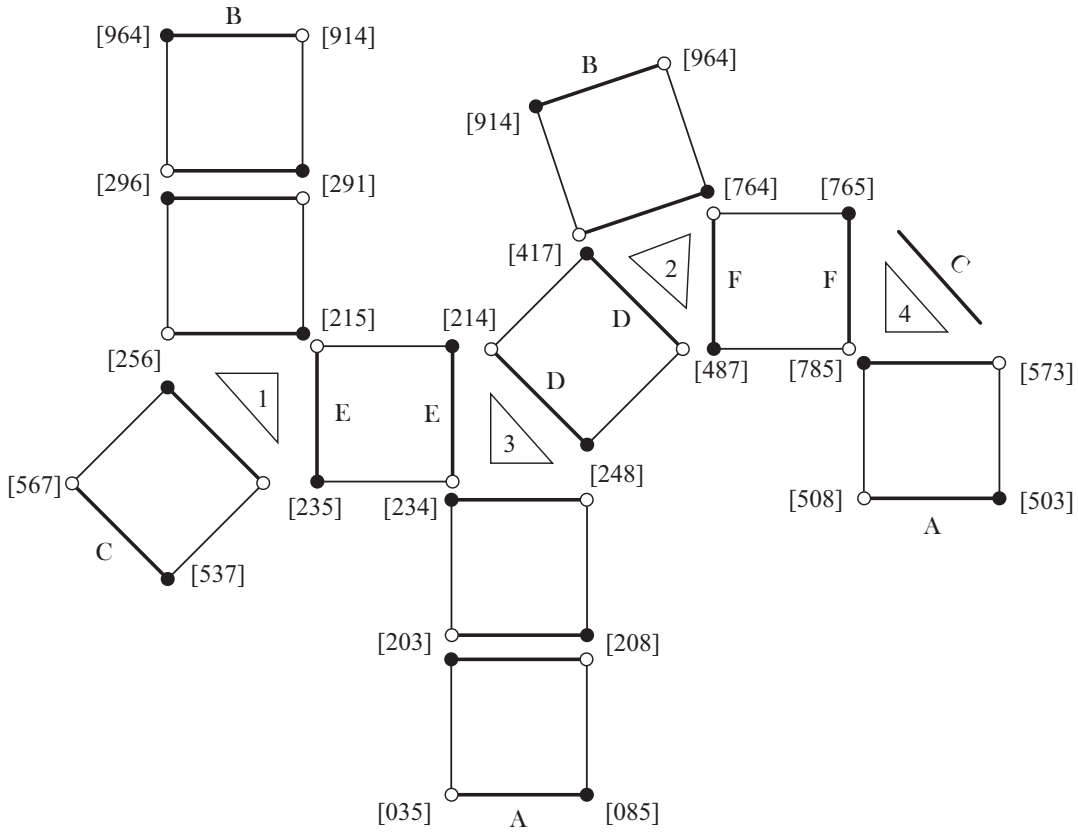
Slika 2.24: Grafičko predstavljanje procesa poništavanja izraza iz bikvadratnih jednačina binomnog dokaza i bazni graf Γ za teoremu Papusa [2]

Bazni graf Γ koji odgovara relaciji (2.28) prikazan je na slici 2.24 desno. Bazni graf Γ sastoji se od šest 3-ciklusa (trouglova). Trouglovi iz baznog grafa Γ odgovaraju Čevinim trouglovima, što možemo lako provjeriti ako ih uporedimo sa Čevinim trouglom i njemu pridruženim ciklusom iz baznog grafa (slika 2.23). Nakon lijepljenja ovih trouglova koje je indukovano izrazima pridruženim čvorovima grafa, dolazimo do strukture torusa koja nam otkriva topologiju binomnog dokaza Papusove teoreme (vidjeti sliku 2.14).

Dezargova teorema

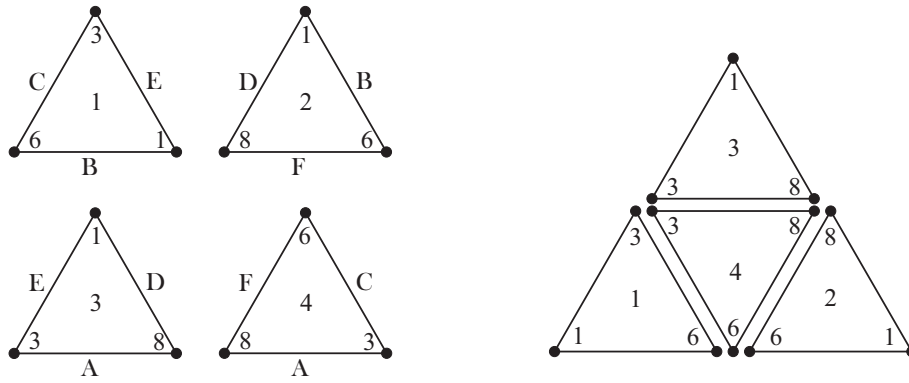
Teorema Dezarga kao i njen binomni dokaz dati su u poglavlju 2, teorema 2.1. Da bi iz ovog binomnog dokaza otkrili topološku strukturu ove teoreme incidencije najprije počnemo sa konstrukcijom baznog grafa Γ . Za svaku jednačinu iz binomnog dokaza konstruisaćemo bazni graf za taj izraz po uzoru na sliku 2.22. Izrazi koji predstavljaju bazu na lijevim stranama binomnih jednakosti iz dokaza pridruženi su bijelim čvorovima, dok su baze na desnim stranama pridružene crnim čvorovima.

Na ovaj način dobili smo dvanaest grafova, tj. 4-ciklusa koji odgovaraju dvanaest jednačina iz binomnog dokaza Dezargove teoreme. Ove grafove sada „lijepimo“ jedan za drugi na način da svakom čvoru određene boje (crne ili bijele) pridružimo njemu adekvatan čvor suprotne boje. Na ovaj način formirali smo graf Γ kao na slici 2.25.



Slika 2.25: Bazni graf Γ za binomni dokaz Dezargove teoreme [34]

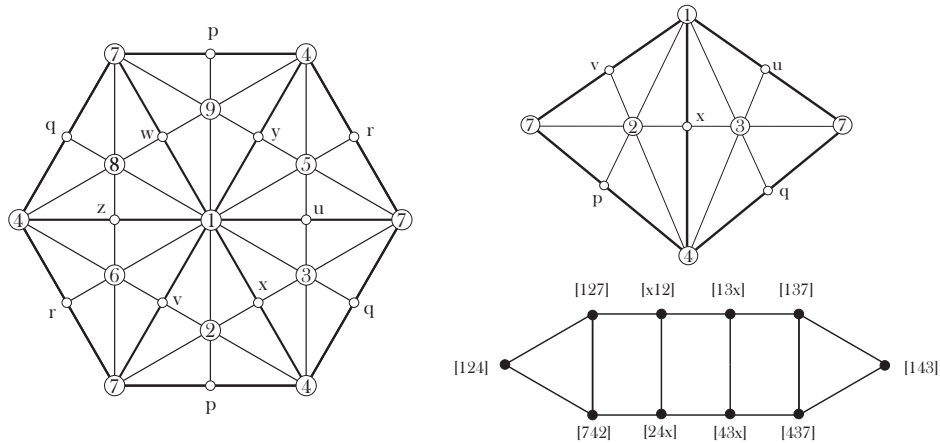
Za svaki 4-ciklus iz grafa Γ odaberemo koji par suprotnih grana ciklusa nosi informaciju i te parove smo istakli podebljenim linijama. Ako su dva 4-ciklusa „zalijepljeni“ tako da im se podebljane grane poklapaju, onda te grane izbacujemo iz daljeg razmatranja. Na kraju dolazimo do skupa podebljanih grana iz grafa Γ koji formira četiri disjunktna trougla, kao na lijevoj strani slike 2.26. Skup od četiri rezultujuća trougla daće nam okvir za Čeva/Menelaj dokaz Dezargove teoreme. Svakom od ovih trouglova možemo pridružiti Menelajevu konfiguraciju (svaki čvor trouglova sadrži dvije tačke sa Menelajevе linije: kod trougla 1 to su tačke 2 i 5, kod trougla 2 tačke 4 i 7, kod trougla 3 tačke sa Menelajevе linije su 2 i 4, a kod trougla 4 tačke 7 i 5). Nakon što izvršimo ljepljenje ova četiri trougla indukovano oznakama na čvorovima i granama, dolazimo do ilustracije na desnom dijelu slike 2.26 koja nam daje topološki okvir za Čeva/Menelaj dokaz Dezargove teoreme.



Slika 2.26: Dekompozicija binomnog dokaza Dezagrove teoreme u trouglove i rezultujuća mnogostrukost [34]

2.4.2 Od Čeva/Menelaj do binomnog dokaza teorema incidencije

U prethodnom poglavlju razradili smo proceduru prelaska iz binomnog dokaza teorema incidencije u Čeva/Menelaj dokaz. Transformacija u suprotnom smjeru je predmet narednog dijela. Kako je to već objašnjeno u poglavlju 4, Čeva/Menelajevim trouglovima možemo pridružiti trouglove (vidjeti sliku 2.23) u baznom grafu Γ koristeći Čeva/Menelaj odnose (2.14) i (2.15). Svakom paru stranica koje su u Čeva/Menelaj dokazu zalijepljene pridružujemo granu u grafu Γ zajedno sa odgovarajućim odnosom iz bikvadratne jednačine. Skup svih gore opisanih odnosa daće nam binomni dokaz posmatrane teoreme incidencije.



Slika 2.27: Čeva/Menelaj dokaz Paposove teoreme (lijevo) i bazni graf za dva zalijepljena Čevina trougla iz dokaza (desno)

Tehniku prelaska sa Čeva/Menelaj na binomni dokaz ilustrovaćemo na primjeru Paposove teoreme. Za polaznu tačku uzimamo Čeva/Menelaj dokaz Paposove teoreme,

slika 2.27.

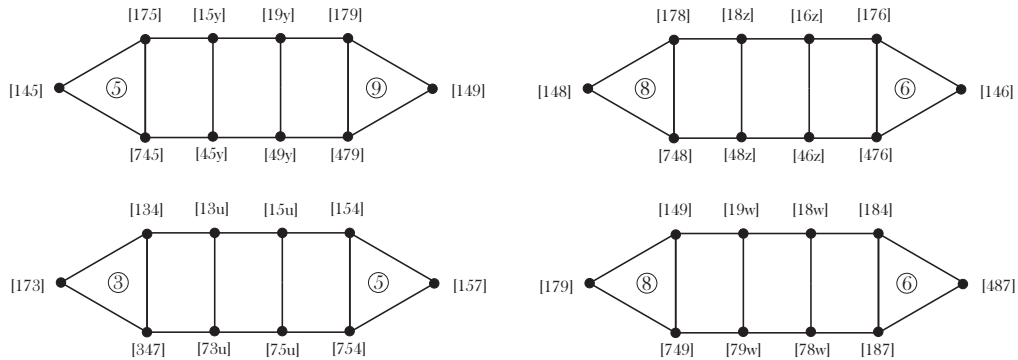
Na slici 2.27 desno su dva Čevina trougla iz Čeva/Menelajevog dokaza Papusove teoreme zalijepljena duž zajedničke stranice (14), kao i pridruženi bazni graf. U baznom grafu primjećujemo 4-cikluse koji odgovaraju bikvadratnim jednačinama. Nizovi ovih 4-ciklusa oblika $\uparrow \dots \downarrow \uparrow \dots \downarrow \uparrow \dots \downarrow$ služe nam kao određena spona između dva Čevina trougla. Kako svakom Čevinom trouglu iz dokaza teoreme odgovara jedan trougao u baznom grafu Γ i kako su dva Čevina trougla iz dokaza koja su zalijepljena duž zajedničke stranice u baznom grafu uparena sa nizom $\uparrow \dots \downarrow \uparrow \dots \downarrow \uparrow \dots \downarrow$, slijedi da bikvadratne jednačine koje odgovaraju ovim 4-ciklusima predstavljaju binomni dokaz za datu teoremu.

Bikvadratna jednačina koja odgovara baznom grafu sa slike 2.27 je:

$$\frac{[127][24x]}{[742][x12]} \cdot \frac{[x12][43x]}{[24x][13x]} \cdot \frac{[13x][437]}{[43x][137]} = 1, \text{ odnosno}$$

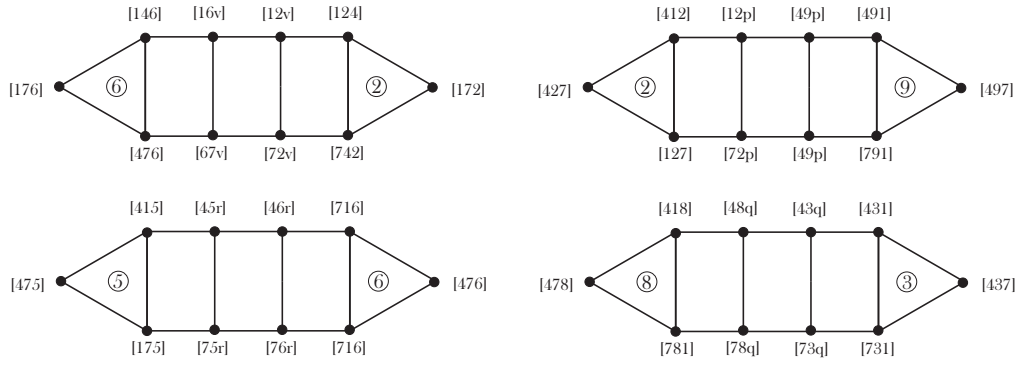
$$[127][437] = [742][137].$$

Da bi Čeva/Menelaj dokaz Papusove teoreme preveli u binomni dokaz potrebno je da za svaka dva trougla iz dokaza koja su zalijepljena duž zajedničke stranice formiramo bazni graf. Na slikama 2.28 i 2.29 prikazani su preostali bazni grafovi za zalijepljene trouglove iz Čeva/Menelaj dokaza.



Slika 2.28: Bazni graf za Čevine trouglove iz dokaza

Bikvadratne jednačine koje odgovaraju baznim grafovima sa slika 2.28 i 2.29 su:



Slika 2.29: Bazni graf za Čevine trouglove iz dokaza - nastavak

$$\begin{aligned}
[175][479] &= [745][197] \\
[178][476] &= [748][176] \\
[134][754] &= [347][154] \\
[149][184] &= [749][187] \\
[146][742] &= [476][124] \\
[412][791] &= [127][491] \\
[415][716] &= [175][416] \\
[418][731] &= [781][431]
\end{aligned}$$

Nakon što prethodne jednačine napišemo u formi $\frac{[\dots][\dots]}{[\dots][\dots]} = 1$ i pomnožimo lijeve i desne strane jednačina dolazimo do binomnog dokaza Pappusove teoreme iskazanog u obliku proizvoda (vidjeti 2.27):

$$\begin{aligned}
&\frac{[127][437]}{[742][137]} \cdot \frac{[175][479]}{[745][197]} \cdot \frac{[178][476]}{[748][176]} \cdot \frac{[134][754]}{[347][154]} \cdot \frac{[149][184]}{[749][187]} \\
&\cdot \frac{[146][742]}{[476][124]} \cdot \frac{[412][791]}{[127][491]} \cdot \frac{[415][716]}{[175][416]} \cdot \frac{[418][731]}{[781][431]} = 1.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ovim smo završili proces prevođenja Čeva/Menelaj dokaza Pappusove teoreme u binomni dokaz.

2.5 Metode dokazivanja teorema incidencije - preko simplicijalnih kompleksa do formalnog sistema

Pozivajući se na Rihter-Geberta i posebno na rad [7], račun koji izvodimo na nivou simbola $[\cdot, \cdot, \cdot]$ (engleski naziv *bracket algebra*) je važna struktura pomoću koje iskazujemo projektivna svojstva geometrijskih konfiguracija, ne ulazeći u same koordinate tačka iz $[\cdot, \cdot, \cdot]$. Metode doazivanja teorema incidencije koje je on zasnovao, a na koje se ova disertacija naslanja, iscrpno smo predstavili u dosadašnjem dijelu rada.

Još jedan metod dokazivanja teorema incidencije, zasnovan na metodu površina, dat je u radovima [9], [11], [10]. U radovima [30], [31] autori su kombinovanjem prethodnih metoda dali dokazivač teorema incidencije koji su implementirali u softveru MAPLE 4 i prikazali njegovu primjenu na više teorema. Metod koristi Keplijevu i *bracket* algebru i daje pravila za eliminaciju tačaka iz geometrijske konstukcije koje se razvrstane u tačke vezanog, poluslobodnog ili slobodnog tipa. Tvrdnja (u ovom dokazivaču moguće je izvoditi dokaze teorema koje uključuju konike) se dokazuje formiranjem niza polinoma u kojima su izrazi sačinjeni od determinanti $[\cdot, \cdot, \cdot]$. Teorema je dokazana ako tokom razvoja polinoma dobijemo vrijednost nula.

Poslednjih decenija primjetan je značajan napredak na polju razvoja automatskog dokazivanja teorema u geometiji. Formalizacija projektivne geometrije u nekom od poznatih dokazivača teorema (kao što su Coq ili Isabelle) nije lagan zadatak. Neki od radova koji su se bavili ovim temama su [32], [16].

Osnovni motiv u nastavku rada je razviti formalni sistem u kojem bi se formalizovala Rihter-Gebertova ideja o teoremama incidencije koje nastaju na cikličnim strukturama. U sistemu bi se uveli veznici i pravila izvođenja, što bi omogućilo formiranje novih dokaza od već postojećih. Želja nam je istražiti kako se različiti dokazi teorema incidencije mogu kombinovati sa ciljem formiranja novih složenijih dokaza.

Pored ovoga, jedan od ciljeva koji u radu želimo postići je i razvoj algoritma za dokazivanje teorema incidencije i njegova implementacija. Dokazivanje teorema incidencije na način opisan u dosadašnjem dijelu ima određena ograničenja kad su u pitanju dokazi teorema sa većim geometrijskim konfiguracijama. Modelovanjem cikličnih struktura na kojima predstavljamo teoreme incidencije pomoću jedne generalizacije simplicijalnih kompleksa, omogućilo nam je formulaciju Rihter-Gebertove ideje i upotrebu topoloških sredstava. Tako, koristeći topološki aparat i primjenjujući znanje o topološkim strukturama, želja nam je razviti algoritam koji će pojednostaviti dokazivanje, makar isključivanjem onih slučajeva na koje nailazimo u dokazima, a koji za tvrdnju koju dokazujemo nemaju smisla.

DIO 3

Simplicijalni kompleksi i Menelajeve konfiguracije

Prethodni dio posvećen je onom dijelu istraživačkog opusa Rihter-Geberta koji se tiče mašinskog dokazivanja teorema u projektivnoj geometriji gdje je, dijelom u saradnji sa Suzanom Apel, istraživao takozvane Čeva/Menelajeve dokaze teorema incidencije (videti [39], [40], [2] i [1]). Posebno je u radu [39] dao dokazno-teoretsku analizu te metode. Osnovni zadatak ove teze je da formalizuje i proširi do krajnjih granica, u okviru teorije dokaza, njegovu osnovnu ideju koja se može parafrazirati na sljedeći način:

Posmatramo zatvorenu, orijentabilnu 2-mnogostrukost i njenu podjelu u vidu CW-kompleksa čije su 2-ćelije trouglovi. Zamislimo da je ovakav 2-cikl interpretiran ravnim trouglovima (bez obzira da li se trouglovi seku, podudaraju ili su komplanarni, dokle god oni reprezentuju kombinatornu strukturu 2-cikla). Prisustvo Menelajeve konfiguracije na svim trouglovima osim jednog, povlači da je ta konfiguracija prisutna i na preostaloj strani.

Grubo govoreći, Čeva/Menelajev dokaz transformiše triangulaciju površi u teoremu incidencije. Na prvi pogled, to bi bilo nešto što povezuje geometriju s geometrijom. Međutim, triangulacija o kojoj govorimo se može posmatrati čisto kombinatorno, kroz jedan tip apstraktnih ćelijskih kompleksa koji su mnogo slobodniji od simplicijalnih kompleksa, ali ipak ne dozvoljavaju toliku slobodu kao CW-kompleksi. Štaviše, moguće je učiniti još jedan korak u oslobađanju pogleda na triangulaciju kao na geometrijski objekat - možemo je posmatrati kao poseban tip sintakse izgrađene od samo dva simbola (tačke i crte) koja se zapisuje na posebnim podlogama.

Korišćenje kombinatornih struktura za dokazivanje teorema u projektivnoj geometriji je ideja koja je već sretana u literaturi. Jedna posebna klasa objekata, poznata kao orijentisani matroidi, između ostalog je pored svojih ogromnih primjena našla i primjenu u automatskom dokazivanju (kao na primjer u [38]). Oni se mogu definisati i kao simplicijalni kompleksi sa svojstvima augmentacije i orijentabilnosti (vidjeti [6]), ali to je drugačiji pravac od onog kojim idemo u tezi.

Formulacija koju smo najavili izvedena je koristeći teoriju simplicijalnih kompleksa, što nas motiviše da u narednim redovima (poglavlje 3.1) izložimo osnovne definicije pojmova korišćenih u radu i damo kratak uvod u simplicijalne komplekse. Nakon toga,

u poglavlju 3.2 definisali smo jedan tip Δ -kompleksa čija je geometrijska realizacija zatvorena orijentabilna površ. U poglavlju 3.3 razmatrali smo različite Menelajeve konfiguracije koje se javljaju na trouglu.

3.1 Simplicijalni kompleksi: osnovni pojmovi i definicije

U ovom poglavlju upoznati ćemo se sa osnovnom terminologijom iz teorije simplicijalnih kompleksa uz adekvatne primjere i ilustracije, a oslanjajući se na izvore [26], [45], [15] i [35].

Potprostore euklidskih prostora možemo sačiniti od jednostavnih dijelova kao što su duži, trouglovi, tetraedri, ..., tako što ih adekvatno polijepimo duž strana. Ove „jednostavne dijelove“ zovemo n -simpleksima i posvećujemo im naredni dio teksta. Na samom početku dajemo elementarni pojam iz afine geometrije.

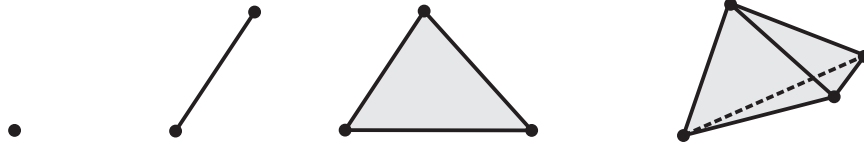
Neka su a_0, a_1, \dots, a_n tačke u nekom \mathbb{R}^m . Tačke a_0, a_1, \dots, a_n su *nezavisne* (u opštem položaju) ako su jednakosti $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$ i $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ istovremeno moguće jedino za $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Jasno se vidi da je ovaj uslov ekvivalentan zahtijevu da su vektori $a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_0$ linearno nezavisni.

Definicija 3.1. *Neka je $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ geometrijski nezavisan skup tačaka u \mathbb{R}^m . Geometrijski n -simpleks određen tačkama a_0, a_1, \dots, a_n je skup*

$$\sigma^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Brojevi $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ jednoznačno su određeni tačkom x i nazivaju se *baricentrične koordinate* tačke x . Tačke a_0, a_1, \dots, a_n koje razapinju simpleks σ^n nazivaju se *tjemena* simpleksa, a broj n njegovom *dimenzijom*. Za simpleks σ^n zadat čvorovima $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, simpleks $\sigma^{n'}$ razapet podskupom $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ skupa $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ (primjetimo da su i tačke a_{i_1}, \dots, a_{i_k} nezavisne) naziva se *lice* simpleksa σ^n . Za lice dimenzije $(n-1)$ određeno tačkama $\{a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n\}$ kaže se da je lice naspram tjemena a_j . U lica simpleksa ubrajaju se i prazan skup \emptyset i sam simpleks σ^n , a osim njih sva ostala lica zovemo *pravim licima* simpleksa σ^n . Unija svih pravih lica naziva se *granica simpleksa* σ^n u oznaci $\partial\sigma^n$ i predstavlja skup tačaka $x \in \sigma^n$ kojima je bar jedna baricentrična koordinata jednaka nuli. *Unutrašnjost simpleksa* σ^n je sve ostalo, tj. $\text{int}(\sigma^n) = \sigma^n - \partial\sigma^n$ i tačka $x \in \sigma^n$ pripada $\text{int}(\sigma^n)$ ako i samo ako $x = \sum \lambda_i a_i \in \sigma^n \mid \lambda_i > 0$. Slijedi da svaka tačka $x \in \sigma^n$ pripada unutrašnjosti tačno jednog lica koje je određeno tačkama x_i koje imaju pozitivne baricentrične koordinate.

Na slici 3.1 dati su n -simpleksi za dimenzije $n = 0, 1, 2, 3$ koje zovemo tačka, ivica, trougao i tetraedar.



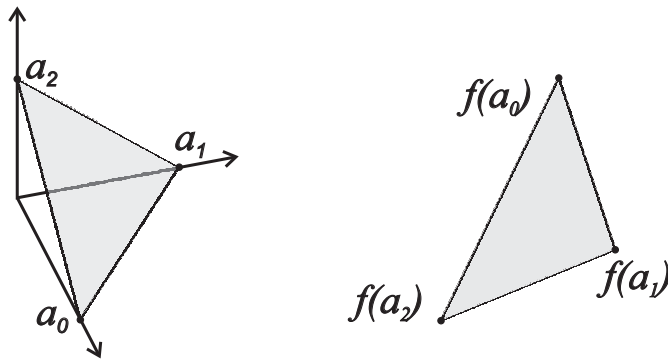
Slika 3.1: Sa lijeva na desno: 0-simpleks (tačka), 1-simpleks (ivica), 2-simpleks (trougao) i 3-simpleks (tetraedar)

Skup

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1, t_i \geq 0\}$$

nazivamo *standardni geometrijski n -simpleks* sa tjemenuima $a_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, a_n = (0, 0, \dots, 1)$. Postoji bijekcija $f_\sigma: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ standardnog n -simpleksa Δ^n na simpleks σ^n data sa:

$$(t_0, t_1, \dots, t_n) \mapsto \sum_{i=1}^n t_i a_i.$$



Slika 3.2: Preslikavanje f transformiše standardni 2-simpleks iz \mathbb{R}^3 (lijevo) u 2-simpleks sa tjemenuima $f(a_0)$, $f(a_1)$ i $f(a_2)$ (desno)

Kolekciju simpleksa zajedno sa svim njihovim licima zovemo *simplicijalni kompleks*.

Definicija 3.2. Geometrijski simplicijalni kompleks K u \mathbb{R}^n je kolekcija simpleksa u \mathbb{R}^n koja zadovoljava sljedeća dva uslova:

- (i) svako lice simpleksa iz familije K je i samo simpleks u K ;
- (ii) neprazan presjek dva simpleksa u K je lice svakog od ta dva simpleksa.

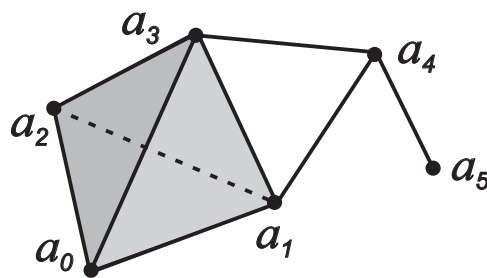
Dimenzija simplicijalnog kompleksa K je najveća dimenzija simpleksa iz familije K . Familija simpleksa

$$K = \{\{a_0, a_1, a_2, a_3\}, \{a_0, a_1, a_2\}, \{a_0, a_1, a_3\}, \{a_3, a_2, a_0\}, \{a_2, a_1, a_3\}, \{a_0, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_0\}, \{a_2, a_3\}, \{a_0, a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_3, a_4\}, \{a_1, a_4\}, \{a_4, a_5\}, \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}\}$$

prikazanog na slici 3.3 čini simplicijalni kompleks, dok familija

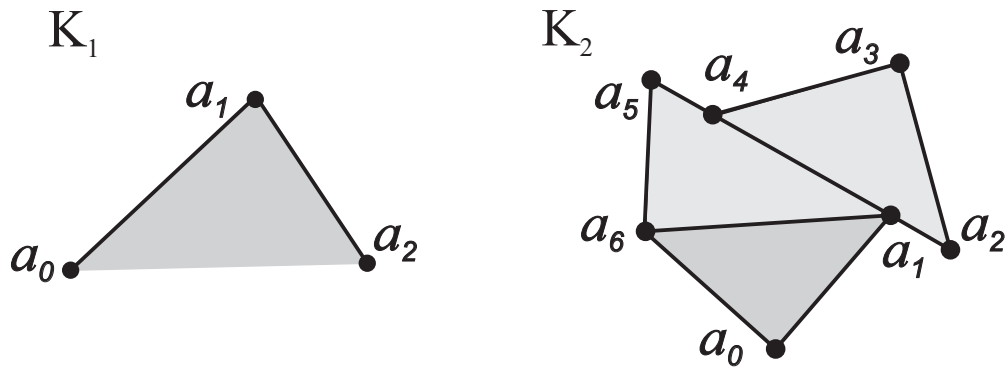
$$K_1 = \{\{a_0, a_1, a_2\}, \{a_0, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}\}$$

sa slike 3.4 ne čini simplicijalni kompleks jer K_1 sadrži 2-simpleks $\{a_0, a_1, a_2\}$, a ne sadrži njegovo lice $\{a_0, a_2\}$.



Slika 3.3: Simplicijalni kompleks K dimenzije 3

Na slici 3.4 kolekcija simpleksa K_2 ne čini simplicijalni kompleks jer se simpleksi ne presjecaju duž zajedničkog lica.



Slika 3.4: Kolekcije simpleksa K_1 i K_2

Unija svih simpleksa kompleksa K u oznaci $|K|$ je podskup prostora \mathbb{R}^n koji se naziva *poliedar* kompleksa K . Ovom skupu data je topologija tako da je podskup $A \subset |K|$ zatvoren ako i samo ako je $A \cap \sigma$ zatvoren za svaki simpleks $\sigma \in K$. Topološki prostor $|K|$ naziva se *geometrijska realizacija* simplicijalnog kompleksa K i određen je do na homeomorfizam.

Triangulacija površi je poseban oblik 2-dimenzionalnog simplicijalnog kompleksa i funkcije sa njega na površ.

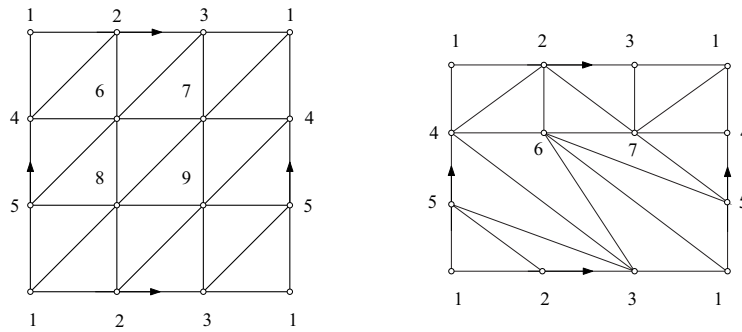
Definicija 3.3. *Triangulacija kompaktne površi M je par (K, τ) , gdje je K konačan simplicijalni kompleks dimenzije 2, a funkcija $\tau : K \rightarrow P(M)$ svakom simpleksu $\sigma \in K$ pridružuje zatvoren podskup $\tau(\sigma) \subseteq M$, tako da vrijedi:*

(i) $\tau(\sigma_1) \cap \tau(\sigma_2) = \tau(\sigma_1 \cap \sigma_2)$, za sve $\sigma_1, \sigma_2 \in K$;

(ii) za svaki $\sigma \in K$ postoji homeomorfizam $\varphi_\sigma : |\sigma| \rightarrow \tau(\sigma)$ takav da za sve stranice $\sigma' \leq \sigma$ važi $\varphi_\sigma(\sigma') = \tau(\sigma')$;

(iii) $\bigcup_{\sigma \in K} \tau(\sigma) = M$ - skupovi $\tau(\sigma)$ pokrivaju površ M .

Na slici 3.5 prikazane su različite triangulacije torusa.



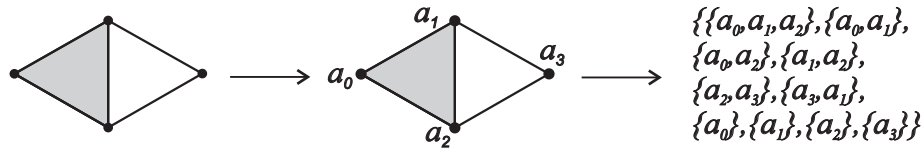
Slika 3.5: Dvije triangulacije torusa

Da bismo dobili više informacija koje nastaju iz kombinatorne strukture objekta zane-
marujemo njegova geometrijska svojstva i posmatramo ih kao skupove tačaka koje su
njihova tjemena, drugim riječima apstrahujemo ih.

Definicija 3.4. *Apstraktni simplicijalni kompleks je uređeni par $\mathcal{K} = (V, K)$, gdje je V konačni skup, a K familija njegovih podskupova sa svojstvima:*

(i) $(\forall v \in V)\{v\} \in K$ - svaki element iz V je i element familije K ;

(ii) $\sigma \in K$ i $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in K$.



Slika 3.6: Apstrahovanje jednog geometrijskog kompleksa

Svaki geometrijski kompleks K je moguće apstrahovati, i obrnuto, za svaki apstraktni simplicijalni kompleks \mathcal{K} postoji geometrijski kompleks K čija je apstrakcija izomorfna sa \mathcal{K} .

Za geometrijsku realizaciju $|K|$ geometrijskog simplicijalnog kompleksa K , kažemo da je *geometrijska realizacija apstraktnog simplicijalnog kompleksa \mathcal{K}* ako je \mathcal{K} apstrahizacija geometrijskog simplicijalnog kompleksa K .

Homomorfizam granice i simplicijalna homologija su pojmovi koji će u ovom radu biti višestruko korišteni. Za opisivanje topologije prostora homologija koristi konačne Abelove grupe tako što simplicijalnom kompleksu K pridruži niz ovih grupa. Kako je za homologiju važan redosled čvorova u simpleksu najprije uvodimo pojam orijentacije.

Definicija 3.5. *Neka je K simplicijalni kompleks. Orijetacija simpleksa $\sigma \in K$, $\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ je klasa ekvivalencije definisana na redoslijedu čvorova simpleksa σ , gdje su $(a_0, a_1, \dots, a_k) \sim (a_{\pi(0)}, a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(k)})$ dva ekvivalentna redoslijeda ako je permutacija π parna.*

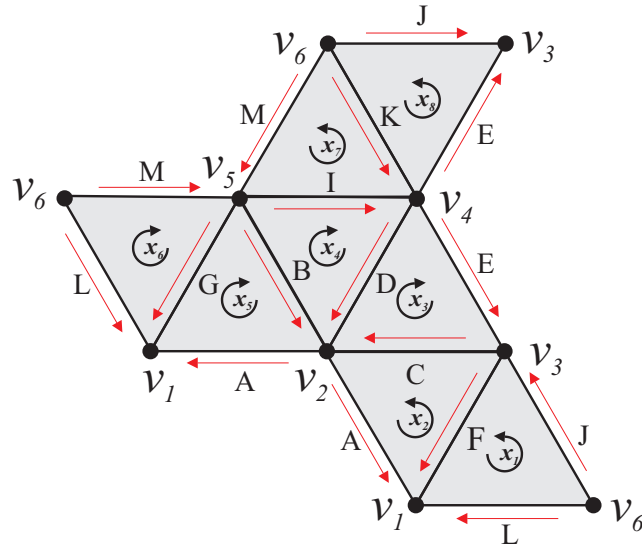
Kako permutacije na nekom skupu možemo podijeliti u dvije klase ekvivalencije, to relacija \sim dijeli prostor na dvije moguće orijentacije, a σ zajedno sa jednom od klasa ekvivalencije zovemo *orijentisani simpleks* i označavamo sa $[\sigma]$. Lice nekog simpleksa je uvijek orijentisano onako kako je njegova orijentacija određena u simpleksu čije je ono lice.

Definicija 3.6. *Dva orijentisana n -simpleksa $[\sigma_1]$ i $[\sigma_2]$ koja dele jedno $(n-1)$ -dimenziono lice σ su skladno orijentisana ako lice σ ima suprotne orijentacije u $[\sigma_1]$ i $[\sigma_2]$.*

Koristeći pojam orijentisanih simpleksa možemo definisati i pojam orijentabilnosti triangulisanih n -dimenzionih mnogostrukosti.

Triangulabilna mnogostrukost dimenzije d je orijentabilna ukoliko se svi d -dimenzioni simpleksi mogu skladno orijentisati, u suprotnom mnogostrukost je neorijentabilna.

Od sada će svi simpleksi biti orijentisani pa ćemo pod pojmom n -simpleks σ uvijek podrazumijevati orijentisani simpleks.



Slika 3.7: Orijehtacija simplicijalnog kompleksa (oktaedar)

3.1.1 Δ -kompleksi i simplicijalna homologija

Δ -kompleksi, koji su pod imenom *semi-simplicial complex* uvedeni u [14], biće od posebnog značaja za formalizaciju Rihter-Gebertovog istraživanja. Ovi kompleksi sreću se još i pod imenom *Delta sets* u [15], a mi ćemo koristiti termin Δ -kompleks po uzoru na [26].

Definicija 3.7. Δ -kompleks K je kolekcija međusobno disjunktih skupova K_0, K_1, \dots zajedno sa funkcijama $d_i^n : K_n \rightarrow K_{n-1}, n \geq 1$ i $0 \leq i \leq n$, koje za $l-1 \geq 1$ zadovoljavaju jednakost

$$d_j^{n-1} \circ d_l^n = d_{l-1}^{n-1} \circ d_j^n.$$

Intuitivno govoreći, elementi K_n su n -dimenzionalni orijentisani simpleksi, a funkcije d_i^n koje nazivamo *lica* (engl. face map) pridružuju svakom n -simpleksu ($n > 0$) Δ -kompleksa K njegovo lice tj. $(n-1)$ -dimenzioni simpleks naspram i -tog tjemena.

Svakom Δ -kompleksu K možemo pridružiti njegovu *geometrijsku realizaciju* $|K|$, definisanu kao

$$|K| = \left(\prod_n K_n \times \Delta^n \right) / \sim,$$

gdje je Δ^n standardni (orijentisani) n -simpleks i \sim relacija ekvivalencije određena sa $(d_i^n x, t) \sim (x, \delta_i^n t)$ za $x \in K_n, t \in \Delta^{n-1}$ pri čemu je preslikavanje $\delta_i^n : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ dato sa

$$\delta_i^n(t_0, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).$$

Sada, nakon što smo definisali Δ -kompleks K , uvodimo i pojam operatora granice i njegove simplicijalne homološke grupe.

Za Δ -kompleks K označimo sa $C_n(K)$ slobodnu Abelovu grupu kojoj bazu čine svi orijentisani n -simpleksi iz K . Elemente grupe C_n zovemo n -lanci i zapisujemo ih kao sume $\sum_i \varepsilon_i x_i$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in K_n$.

Definicija 3.8. Za Δ -kompleks K i n -simpleks $x \in K$, $x = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ operator granice $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ je homomorfizam

$$\partial_n(x) = \sum_i (-1)^n (a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n) \text{ za } n \geq 1,$$

gdje \hat{a}_i označava da se tjeeme \hat{a}_i izostavlja. Za $n = 0$ je $\partial_0 : C_0(K) \rightarrow 0$ nul-homomorfizam.

Vidimo da je granica n -simpleksa $x \in K$ zapravo $(n - 1)$ -lanac, dakle suma oblika $\sum_i \varepsilon_i y_i$ pri čemu koeficijenti ε_i mogu uzeti vrijednost iz skupa $\{+1, -1\}$, a y_i su $(n - 1)$ -dimenziona lica n -simpleksa x . Tako, granicu $\partial_n x$ možemo napisati kao sumu

$$\partial_n x = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i x.$$

PRIMJER 1. Posmatrajmo 2-simpleks $x = \begin{array}{c} a_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ a_0 \quad \rightarrow \quad a_1 \end{array}$. Granica ovoga simpleksa je sada:

$$\begin{aligned} \partial_2 x &= \sum_{i=0}^2 (-1)^i d_i x \\ &= d_0 x - d_1 x + d_2 x \\ &= (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1). \end{aligned}$$

□

Osnovno svojstvo graničnog operatora je

$$\partial_{n-1}(K) \circ \partial_n(K) = 0 \text{ za } n \geq 1.$$

Niz Abelovih grupa i homomorfizama

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

takav da je $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ za svako n naziva se *slobodni lančasti kompleks*.

Pod *n-ciklom* c podrazumijevamo n -lanac sa osobinom $\partial(c) = 0$. Jedan n -lanac c je *granica* ako postoji $(n+1)$ -lanac $c' \in C_{n+1}$ takav da je $\partial_{n+1}(c') = c$.

PRIMJER 2. Na slici 3.7, 2-lanac $l = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_4)$ je ujedno i 2-cikl, dok 1-lanac $M + L - A$, nije cikl. Lanac $(K - J + E)$ je granica (2-simpleksa x_8). Takođe, 2-cikl l je granica. Da bi n -dimenzioni lanac bio granica mora da ograničava $(n+1)$ -dimenzioni simpleks, ili da je linearna kombinacija takvih granica. \square

Skup svih n -ciklova u odnosu na sabiranje čini Abelovu grupu u oznaci Z_n i predstavlja *jezgro graničnog homomorfizma* $Z_n = \ker \partial_n$.

Sve n -granice čine podgrupu grupe Z_n sa oznakom B_n i mogu se vidjeti kao $B_n = \text{im} \partial_{n+1}$. Za ove grupe važi inkluzija $B_n \subset Z_n \subset C_n$.

U grupi Z_n uvodimo relaciju ekvivalencije na sljedeći način.

Dva n -cikla z_1 i z_2 , $z_1, z_2 \in Z_n$ su *homološki ekvivalenta (homologna)* ako i samo ako postoji granični cikl $b \in B_n$ takav da je $z_1 = z_2 + b$. Koristimo oznaku $z_1 \sim z_2$.

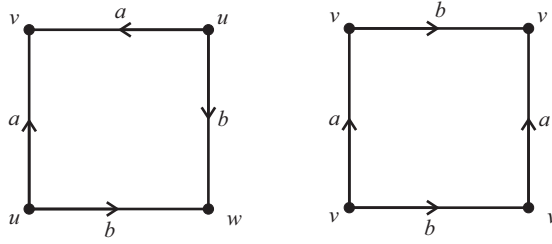
Klase ekvivalencije grupe Z_n možemo posmatrati kao kvocijentnu grupu Z_n/B_n koju nazivamo *homološka grupa*.

Definicija 3.9. *n-ta homološka grupa slobodnog lančastog kompleksa je*

$$H_n = Z_n/B_n = \ker \partial_n / \text{im} \partial_{n+1}.$$

Orijentabilnost povezane n -mnogostrukosti odražava se u strukturi njegove homologije (vidjeti [26, teorema 3.25]). Naime, povezana n -mnogostrukost je orijentabilna ako i samo ako je $H_n(M) = \mathbb{Z}$.

Grupe homologija za površi sa slike 3.8 su: $H_0(S^2) = \mathbb{Z}, H_1(S^2) = 0, H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ i $H_0(T^2) = \mathbb{Z}, H_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, H_2(T^2) = \mathbb{Z}$. Kako su i sfera i torus mnogostrukosti dimenzije 2, njihove H_n za $n > 2$ su trivijalne.



Slika 3.8: Dijagrami koji odgovaraju površima - identifikacijom stranica kvadrata vodeći računa o strelicama dobijamo S^2 , odnosno T^2

3.2 \mathcal{M} -kompleksi

U prvom dijelu rada dat je detaljan pregled Rihter-Gebertovog istraživanja. U ovom dijelu namjera nam je da njegovu ideju o teoremama incidencije koje „niču na kompaktnim, orijentisanim i triangulisanim površima” pretočiti u čisto kombinatorni oblik koristeći teoriju Δ -kompleksa. Za razliku od Rihter-Geberta koji je istraživao mogućnosti dokazivanja teorema incidencije korišćenjem uporedo i Čevine i Menelajevе teoreme, u ovoj disertaciji ograničili smo se samo na Menelajevе dokaze.

Posmatramo kompaktnu, orijentisanu površ, triangulisanu u paran broj trouglova. Na svakoj stranici trouglova iz triangulacije izaberemo po jednu tačku. Tjemena i tačke na stranicama trouglova interpretiramo kao tačke u euklidskoj ravni.

Na primjer, iz tetraedarske triangulacije sfere sa slike 2.12, tjemena A, B, C i D i stranice X, Y, Z, P, U i W tetraedra posmatramo kao tačke u \mathbb{R}^2 . U dokazu iz poglavlja 2.3.2 smo iz pretpostavke da trouglovi BCA, CBD i DAC zajedno sa trojkama kolinearnih tačaka YZX, WUX i YUP , čine tri Menelajevе konfiguracije, dobili odnose 2.17 odakle slijedi odnos 2.18 iz koga, po Menelajevoj teoremi, zaključujemo da imamo Menelajevу konfiguraciju i na četvrtom trouglu DAB . Ovdje smo zapravo pretpostavili da su trougao BCA i prava YZX (isto smo pretpostavili i za preostale strane tetraedra i njima odgovarajuće Menelajevе prave) takvi da za odnose dužina na stranicama trougla, na kojima su tačke Y, Z i X i to tačka Y na stranici CA , tačka Z na stranici BA i tačka X na CA , važi odgovarajući odnos iz 2.17, pa za šestorku (B, C, A, Y, Z, X) kažemo da čini Menelajevу konfiguraciju. Uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.10. Šestorka (A, B, C, P, Q, R) tačaka iz \mathbb{R}^2 čini Menelajevу konfiguraciju kada su odnosi $\frac{|BP|}{|PC|}$, $\frac{|CQ|}{|QA|}$ i $\frac{|AR|}{|RB|}$ definisani i njihov proizvod je -1 .

Primjećujemo da ako (A, B, C, P, Q, R) čini Menelajevу konfiguraciju, tada su tačke P, Q i R kolinearne, što jednostavno slijedi iz Menelajevе teoreme u slučaju kada tačke A, B i C nisu kolinearne. U slučaju kolinearnosti tačaka A, B i C tada su sve tačke A, B, C, P, Q i R kolinearne. Sa druge strane, ako su A, B i C nekolinearne i tačke P, Q i R (različite od tačaka A, B i C) kolinearne i leže na pravim BC, CA i AB , redom tada šestorka (A, B, C, P, Q, R) , po Menelajevoj teoremi, čini Menelajevу konfiguraciju.

U prethodnom primjeru, tjemena i stranice trouglova iz triangulacije interpretiramo kao tačke iz \mathbb{R}^2 i pretpostavili smo da tri šestorke tačaka koje su dobijene kao interpretacija tjemena i ivica neke tri strane tetraedra čine Menelajevu konfiguraciju. Ove pretpostavke bile su dovoljne da zaključimo da šestorka koju čine tjemena i ivice četvrte strane tetraedra, takođe čini Menelajevu konfiguraciju.

Nakon što je dat kratak i koncizan prikaz pojmova i teorema iz teorije simplicijalnih i Δ -kompleksa, dat uvod u simplicijalnu homologiju i dosta opširnije opisane metode dokazivanja teorema incidencije u projektivnoj geometriji, stekli su se uslovi da gore izloženu materiju formalizujemo u okviru teorije Δ -kompleksa.

Neka je dat Δ -kompleks K . Kako posmatramo šestorku tačka koje interpretiramo kao tjemena i ivice trouglova iz triangulacije površi (koju ćemo ovdje posmatrati kao Δ -kompleks koji zadovoljava određene osobine), zainteresovani smo za 2-cikl c , koji za $n \geq 1$ zapisujemo kao sumu

$$c = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1} - x_n$$

gdje je $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, x_i su simpleksi dimenzije 2 iz Δ -kompleksa K i dva x_i, x_j mogu biti jednaki za $i \neq j$. Ukoliko se 2-simpleks x_n pojavljuje u c sa pozitivnim predznakom, cikl c možemo zamjeniti sa $-c$. Važi sljedeće tvrđenje.

Napomena 3.1. Broj n u zapisu $c = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1} - x_n$ je paran.

Dokaz. Za 2-cikl c , 2-simpleks $x_i \in K_2$ i homomorfizam granice $\partial x_i = y_{3i-2} - y_{3i-1} + y_{3i}$ za $y_j \in K_1$ važi

$$0 = \partial c = \sum_{j=1}^{3n} \tau_j y_j,$$

gdje je $\tau_j \in \{-1, 1\}$. U gornjem izrazu 1-simpleks y_i se mora pojaviti dva puta, jer je C_1 slobodna Abelova grupa i dva sabirka se ponište samo u slučaju istih y sa različitim predznakom. Stoga, broj $3n$ mora biti paran iz čega zaključujemo parnost broja n . \square

Za proizvoljnu funkciju $v: K_0 \cup K_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ neka je operator $\mu: K_2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^6$ definisan sa

$$\mu x = (vd_1 d_2 x, vd_0 d_2 x, vd_0 d_0 x, vd_0 x, vd_1 x, vd_2 x).$$

Operator μ preslikava orijentisani trougao ABC sa stranicama a, b i c redom u šestorku tačaka (vA, vB, vC, va, vb, vc) . Važi sljedeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.1. *Ako su šestorke $\mu x_1, \dots, \mu x_{n-1}$ u Menelajevoj konfiguraciji, onda je i šestorka μx_n u Menelajevoj konfiguraciji.*

Da bismo dokazali tvrđenje 3.1 uvodimo restrikciju $h: (C_1, +, 0) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot, 1)$. Svako a iz $C_1 - \{0\}$ možemo predstaviti jedinstveno do na asocijativnost i komutativnost kao $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m$, gdje su $\alpha_i \in \mathbf{Z} - \{0\}$, a y_i međusobno različiti elementi skupa K_1 . Ako je za svako $i \in \{1, \dots, m\}$ odnos

$$hy_i = (vd_0 y_i, vd_1 y_i; vy_i)$$

definisan, tada je $ha =_{df} (hy_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (hy_m)^{\alpha_m}$. U suprotnom, ha je nedefinisana. Definišemo i $h0 = 1$.

Napomena 3.2. *Ako su ha_1 i ha_2 definisani, onda je $h(a_1 + a_2)$ takođe definisan i važi*

$$h(a_1 + a_2) = ha_1 \cdot ha_2.$$

Napomena 3.3. *Šestorka tačaka μx je u Menelajevoj konfiguraciji ako i samo ako je $h\partial x$ definisan i ima vrijednost -1 .*

Dokaz tvrđenja 3.1. Za 2-cikl c imamo

$$\partial x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \partial x_i.$$

Pozivajući se na napomenu 3.3, za svaki indeks $i \in \{1, \dots, n-1\}$, imamo da je $h(\varepsilon_i \partial x_i)$, koji predstavlja $h(\partial x_i)$ ili njegovu recipročnu vrijednost, jednak -1 . Broj $n-1$ je po napomeni 3.1 neparan, a sa druge strane po napomeni 3.2 važi $h\partial x_n = -1$, što na kraju znači da šestorka μx_n čini Menelajevu konfiguraciju, prema napomeni 3.3. \square

Napomena 3.4. *Ukoliko fragment dvodimenzionalnog Δ -kompleksa od koga je sačinjen cikl c ne zadovoljava uslov: za svako $1 \leq i \leq n$ i za svako $1 \leq j \leq 3n$, dva različita lica preslikavaju x_i (y_j) u dva različita elementa K_1 (K_0), tada je implikacija iz tvrđenja 3.1 zadovoljena naprasno jer joj je antecedens netačan. Od interesa su nam samo 2-cikli iz Δ -kompleksa u kojima dva različita lica slikaju element iz $K_2(K_1)$ u dva različita elementa iz $K_1(K_0)$.*

Iz tvrđenja 3.1 jasno je da se Rihter-Gebertova ideja može proširiti sa zatvorenih orientabilnih i trianguliranih površi na 2-cikle Δ -kompleksa.

Neka je K , Δ -kompleks i 2-cikl $c = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$ za $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ i $x_i \in K_2$, pri čemu 2-dimenzionalna struktura Δ -kompleksa koja formira 2-cikl c zadovoljava uslove sa kraja napomene 3.4. Za $\partial x_i = y_{3i-2} - y_{3i-1} + y_{3i}$, važi

$$0 = \partial c = \sum_{j=1}^{3n} \tau_j y_j,$$

gdje je $\tau_j \in \{-1, 1\}$, i $3n = 2m$ za neko $m \geq 1$. Odredimo particiju skupa $\{1, \dots, 2m\}$ sa klasama ekvivalencije koje sadraže po tačno dva elementa pri čemu elementi i i j pripadaju istoj klasi ako je $y_i = y_j$ i $\tau_i = -\tau_j$. Označimo ove klase sa s_1, \dots, s_m .

Za Δ -kompleks L takav da je $L_m = \emptyset$ za $m \geq 3$, sa skupom 2-simpleksa $L_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ i skupom $L_1 = \{s_1, \dots, s_m\}$, gdje su s_j gore navedene klase ekvivalencije, funkcije $d_k : L_2 \rightarrow L_1$ za $k \in \{0, 1, 2\}$ definisane su na sljedeći način

$$d_k(x_i) = s_j \text{ za } 3i - 2 + k \in s_j.$$

Skup L_0 je količnički skup $\{(s_1, 0), (s_1, 1), \dots, (s_m, 0), (s_m, 1)\} / \approx$, gdje je \approx relacija ekvivalencije takva da za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ važi

$$(d_1 u_i, 0) \approx (d_0 u_i, 0), \quad (d_2 u_i, 0) \approx (d_0 u_i, 1), \quad (d_2 u_i, 1) \approx (d_1 u_i, 1).$$

Konačno, imamo $d_0 s_j = (s_j, 0) \approx$ i $d_1 s_j = (s_j, 1) \approx$.

Napomena 3.5. *Cikl dimenzije 2, Δ -kompleksa L je $c' = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i$. Ovaj kompleks određen je 2-ciklom c Δ -kompleksa K i datim „lijepljenjem” simpleksa dimenzije 1 iz ciklusa c .*

Morfizam $f : L \rightarrow K$ među Δ -kompleksima je familija funkcija $\{f_i : L_i \rightarrow K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ koje komutiraju sa odgovarajućim licima kompleksa K i L . Za gore definisane Δ -komplekse K i L neka su f_2, f_1 i f_0 funkcije takve da $f_2(u_i) = x_i, f_1(s_j) = y_k$, za $k \in s_j$, i za $l \in \{0, 1\}$, $f_0((s_j, l) \approx) = d_l f_1(s_j)$. Familija $f = (f_0, f_1, f_2, \emptyset, \dots)$ je morfizam sa L na K .

Funkcija $v : K_0 \cup K_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ koju smo ranije definisali, pod dejstvom morfizma f prelazi u $v' : L_0 \cup L_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, odnosno važi $v' = v \circ (f_0 \cup f_1)$. Za operator $\mu' : L_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisan analogno već datom operatoru μ i zajedno sa funkcijom v' , važi da $\mu' u_i$ je u Menelajevoj konfiguraciji ako i samo ako je μx_i u Menelajevoj konfiguraciji. Dakle, ako teorema inci-

dencije proističe iz interpretacije 2-cikla $c = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$ kompleksa K , tada ona proističe iz interpretacije 2-cikla $c' = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i$ kompleksa L .

Kako smo i navikli, lice 2-simpleksa u iz Δ -kompleksa L zvaćemo stranicom, a lice stranice tjemenom, što je zapravo lice 1-simpleksa. Δ -kompleks je *povezan* kada za svaka dva različita čvora w i w' postoji niz čvorova $w = w_0, \dots, w_n = w'$, takav da su svaka dva susjedna čvora iz niza lica nekog 1-simpleksa. *Povezana komponenta* Δ -kompleksa definiše se na očigledan način. Za dva 2-simpleksa kažemo da su w -susjedi ako imaju zajedničku stranicu kojoj je jedno od tjemena w .

Naš Δ -kompleks L zadovoljava sljedeće osobine:

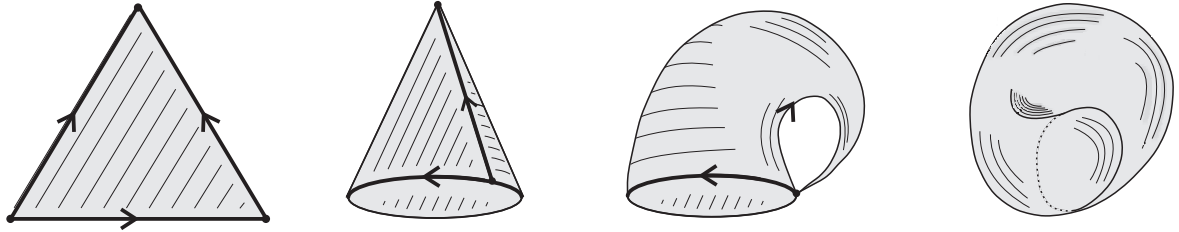
- (0) L je *konačan* - ima konačan broj ćelija;
- (1) L je *homogen* dvodimenzionalni simplicijalni kompleks - za $m \geq 3$ važi $L_m = \emptyset$ i svaki element $L_0 \cup L_1$ je lice nekog elementa iz $L_1 \cup L_2$;
- (2) L je *regularan* - dvije različite funkcije d_i^n slikaju element iz $L_2(L_1)$ u dva različita elementa $L_1(L_0)$;
- (3) svaka 1-ćelija iz L je lice tačno dvije 2-ćelije iz L ;
- (4) za svako tjeme $w \in L_0$ skup $L_w = \{u \in L_2 \mid w \text{ je tjeme ćelije } u\}$ je *vezan*, u smislu da za svake dvije 2-ćelije $u, u' \in L_w$ postoji niz 2-ćelija počevši od u pa do u' , takav da su svake dvije susjedne 2-ćelije w -susjedi.
- (5) L je *orijentabilan* - druga homologija $H_2(L)$ izomorfna je sa \mathbb{Z} , pri čemu se za orijentaciju kompleksa L može uzeti generator $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i$, za $u_i \in L_2$ i $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$.

Osobina regularnosti Δ -kompleksa slijedi iz pretpostavke da cikl c zadovoljava uslove napomene 3.4. Uslov (4) slijedi iz definicije relacije \approx . Povezan Δ -kompleks koji zadovoljava uslove (0)-(5) zovemo *\mathcal{M} -kompleksom*. Oznaka \mathcal{M} izabrana je sa ciljem asocijacije na Menelajevu teoremu.

Napomena 3.6. Iz osobine (2) regularnosti kompleksa uočavamo da svaki 2-simpleks u ima tri različite stranice d_0u, d_1u i d_2u i tri različita tjemena: prvi $d_1d_2u = d_1d_1u$, drugi $d_0d_2u = d_1d_0u$ i treći $d_0d_0u = d_0d_1u$. Svaki čvor 2-simpleksa u je čvor tačno dvije stranice simpleksa u .

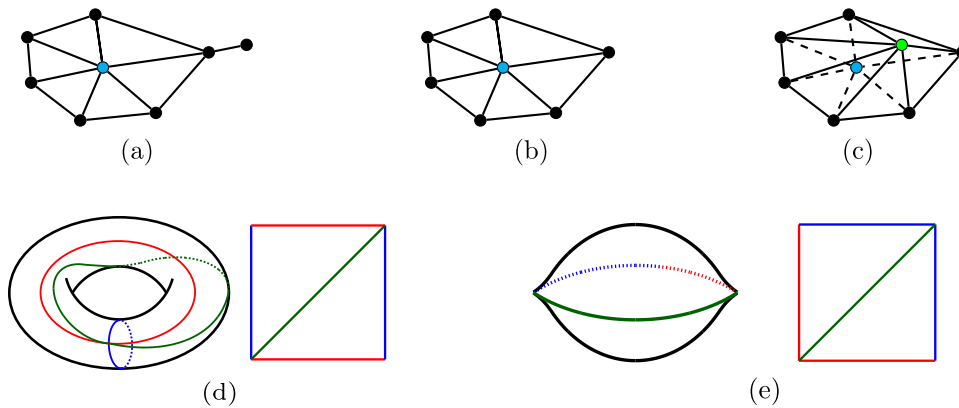
PRIMJER 3. Δ -kompleks koji se sastoji od samo jednog simpleksa dimenzije 2 i sve tri stranice tog trougla su identifikovane vodeći računa o njihovoj orijentaciji je Borsukova šubara (eng. „dunce hat”) čije je utopljenje u \mathbb{R}^3 dato na slici 3.11. Ovaj

Δ -kompleks nije regularan. Takođe, Borsukova šubara nije mnogostrukost i druga homologija Borsukove šubare $H_2 = 0$, stoga ovaj Δ -kompleks nije zanimljiv sa aspekta u kome izvodimo zaključke o incidenciji pridružujući Menelajevu teoremu triangulisanim površima, tj. nije \mathcal{M} -kompleks. \square



Slika 3.9: Δ -kompleks Borsukova šubara i njegova geometrijska realizacija

PRIMJER 4. Posmatrajmo Δ -komplekse na slici 3.10 pod (a), (b), (c), (d) i (e). Δ -kompleks (a) nije homogen jer sadrži „antenu“ tj, stranicu koja nije lice nijednog trougla iz kompleksa. Δ -kompleks (b), dobijen kada smo iz Δ -kompleksa pod (a) uklonili pomenutu stranicu je homogen, ali ne zadovoljava osobinu (3) iz definicije \mathcal{M} -kompleksa. Δ -kompleks (d), koji je reprezentacija torusa u obliku kvadrata triangulisano dijagonalom pri čemu vršimo lijepljenje suprotnih stranica kvadrata (bez uvijanja), nije regularan. Δ -kompleksi (c) i (e) jesu \mathcal{M} -kompleksi. \square



Slika 3.10: Δ -kompleksi od kojih su pod (c) i (e) još i \mathcal{M} -kompleksi

Tvrđenje 3.2. Geometrijska realizacija $|L|$, Δ -kompleksa L , kao i geometrijska realizacija proizvoljnog \mathcal{M} -kompleksa je zatvorena orijentabilna površ.

Dokaz. Iz osobina pod tačkama (1) i (3) jasno je da je $|L|$ mnogostrukost, lokalno homeomorfna \mathbb{R}^2 . Neka je $w \in L_0$ i neka je skup L_w definisan kao ranije. Za 2-simpleks $u \in L_w$ ako je w njegovo i -to tjeme, neka je Δ_u^2 presjek Δ^2 i otvorenog poluprostora $t_i > \frac{1}{2}$. Za \sim restrikciju relacije ekvivalencije kojom smo definisali geometrijsku realizaciju Δ -kompleksa u poglavlju 2.1.1, pokazaćemo da je količnički prostor

$$U_w = \left(\prod_{u \in L_w} \{u\} \times \Delta_u^2 \right) / \sim,$$

otvorena okolina čvora w homeomorfna \mathbb{R}^2 .

Neka je 2-simpleks $u \in L_w$ pri čemu su y i y' njegove stranice koje za tjeme imaju tačku w . Označimo sa u' 2-simpleks koji sa 2-simpleksom u djeli stranicu y' i neka je y'' druga stranica simpleksa u' čiji je čvor w . Ako je $y = y''$, tada je $L_w = \{u, u'\}$, u suprotnom L_w ne može biti vezan. U slučaju $y \neq y''$ neka je u'' , 2-simpleks koji sa u' dijeli stranicu y'' i y''' druga stranica simpleksa u'' sa w kao tjemnom.

Kako važi $y''' \neq y', y''$ i ako je $y = y'''$, tada na isti način kao u prethodnom pasusu imamo $L_w = \{u, u', u''\}$. Ako je $y \neq y'''$, tada nastavljamo ovu proceduru kroz elemente L_w sve dok ne formiramo $L_w = \{u, u', u'', \dots, u^{(k)}\}$ na način da su svaka dva susjedna elementa uključujući i 2-simplekse u i $u^{(k)}$, w -susjedna. Otuda, okolina U_w je otvoreni disk triangulisan sa $k + 1$ trougla. Po osobini (5), realizacija $|L|$ je orijentabilna površ i ako je povezana, tada je generator $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i$ orijentacija površi. \square

3.3 Različiti oblici Menelajevih konfiguracija

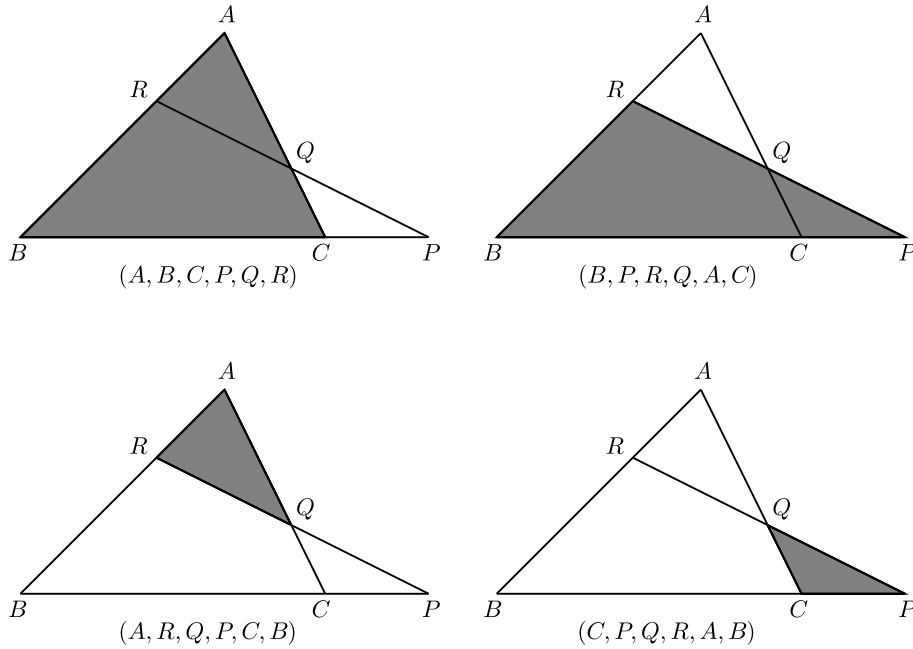
Izvesti rezultat o incidenciji u euklidskoj ili projektivnoj geometriji na osnovu više Menelajevih konfiguracija koje pridružujemo triangulisanim površima je tok razmišljanja koji, u intuitivnom smislu, stoji iza svih dosadašnjih rasuđivanja u radu. Naravno, Menelajeve konfiguracije na trouglovima služe kao osnovne „ciglice” na kojima razvijamo temu. Menelajeve konfiguracije predstavljamo šestorkama (A, B, C, P, Q, R) i značenje koje im je prirodno dodjeljeno je da prve tri tačke predstavljaju tjemena trougla, a preostale tri kolinearne tačke leže na stranicama BC , CA i AB , redom. Ove *ciglice* moguće je „pročitati” na više načina. Važe sljedeća tvrđenja.

Napomena 3.7. Ako šestorka $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ čini Menelajevu konfiguraciju i neka je π permutacija na skupu $\{1, 2, 3\}$, lako utvrđujemo da šestorka

$$(A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, A_{\pi(3)}, B_{\pi(1)}, B_{\pi(2)}, B_{\pi(3)})$$

nastala permutovanjem tjemena i tačaka na stranicama trougla takođe formira Menelajevu konfiguraciju.

Napomena 3.8. Ako (A, B, C, P, Q, R) čini Menelajevu konfiguraciju, tada Menelajevu konfiguraciju čine i šestorke (B, P, R, Q, A, C) , (A, R, Q, P, C, B) i (C, P, Q, R, A, B) .



Slika 3.11: Konfiguracija tačaka A, B, C, P, Q, R iz koje čitamo 4 različite Menelajeve konfiguracije

Dokaz. Za nekolinearne tačke A, B i C tvrđenje 3.8 dokazujemo koristeći Menelajevu teoremu u oba smjera.

\Rightarrow Ako šestorka (A, B, C, P, Q, R) čini Menelajevu konfiguraciju tada je

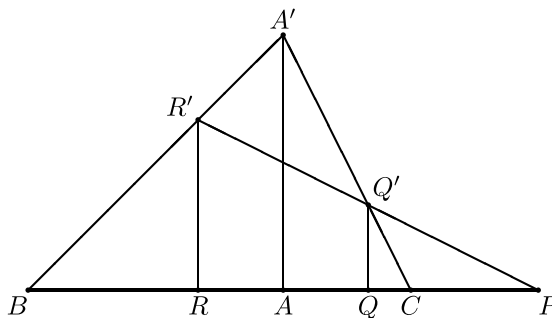
$$(B, C; P) \cdot (C, A; Q) \cdot (A, B; R) = -1$$

i tačke P, Q i R su kolinearne. Osim toga, znamo da su kolinearne i tačke B, C, P kao i tačke A, R, B . Dakle, imamo trougao BRP i tačke A, Q i R na stranicama BR, RP i PB , respektivno. Iz šestorke (A, B, C, P, Q, R) znamo da su tačke A, Q i R kolinearne, stoga šestorka (B, P, R, Q, A, C) čini Menelajevu konfiguraciju. Analogno zaključujemo i za preostale dvije šestorke iz napomene 3.8.

⇐ Za šestorke (B, P, R, Q, A, C) , (A, R, Q, P, C, B) i (C, P, Q, R, A, B) koje čine Menelajevu konfiguraciju važe sljedeći odnosi:

$$\begin{aligned} \frac{|AR|}{|AB|} \cdot \frac{|BC|}{|CP|} \cdot \frac{|PQ|}{|QR|} &= -1 \\ \frac{|AB|}{|BR|} \cdot \frac{|RP|}{|PQ|} \cdot \frac{|QC|}{|CA|} &= -1 \\ \frac{|QR|}{|RP|} \cdot \frac{|PB|}{|BC|} \cdot \frac{|CA|}{|AQ|} &= -1. \end{aligned}$$

Množenjem gornjih jednakosti svi izrazi osim podebljanih se međusobno ponište. Iz rezultujućeg izraza $\frac{|AR|}{|BR|} \cdot \frac{|QC|}{|AQ|} \cdot \frac{|PB|}{|CP|} = -1$ zaključujemo da je (A, B, C, P, Q, R) u Menelajevoj konfiguraciji.



Slika 3.12: Menelajeva teorema u slučaju kolinearne tjemena A, B, C

Za kolinearne tačke A, B i C , označimo sa A' tačku negdje izvan stranice BC , na primjer $A'A$ je normalna na BC kao na slici 3.12. Neka su $Q' \in A'C'$ i $R' \in A'B'$ takve da važi

$A'A \parallel Q'Q \parallel R'R$. Sada, po Talesovoj teoremi imamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{|BA|}{|BR|} &= \frac{|AA'|}{|RR'|} \\ \frac{|PR|}{|PQ|} &= \frac{|RR'|}{|QQ'|} \\ \frac{|CQ|}{|CA|} &= \frac{|QQ'|}{|AA'|}. \end{aligned}$$

Nakon množenja gornjih jednačina i kraćeg sređivanja izraza dolazimo do $\frac{|AB|}{|BR|} \cdot \frac{|RP|}{|PQ|} \cdot \frac{|QC|}{|CA|} = -1$. Zaključujemo, šestorka (A, R, Q, P, C, B) čini Menelajevu konfiguraciju. Da bi završili dokaz primjenimo Menelajevu teoremu u oba smjera kao u slučaju nekolinearnih tačaka A, B i C . Ovim je dokaz završen. \square



Slika 3.13: Dvije permutacije na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Grupa G koja predstavlja podgrupu simetrične grupe S_6 koja prirodno djeluje na šestorku generisana je sa sljedeće dvije permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: $s = (123)(456)$ i $t = (26)(35)$.

Za grupu G važi $|G|=24$ i izomorfna je oktaedarskoj grupi (koja je opet izomorfna sa S_4) sa prezentacijom $\langle s, t \mid s^3, t^2, (st)^4 \rangle$. Posijecanje po grupi G nam omogućava da svaku šestorku čitamo na četiri suštinski različita načina. Zapravo, svaka orbita grupe G sadrži 24 elementa, jer svaki trougao možemo pročitati na šest načina, ali nam oni nisu od značaja. Iz napomena 3.7 i 3.8 slijedi da ako šestorka čini Menelajevu konfiguraciju, onda i svaka šestorka iz njene G -orbite takođe čini Menelajevu konfiguraciju.

DIO 4

Jednostrani formalni sistem za dokazivanje teorema incidencije u $\mathbb{R}P^2$

U ovom dijelu rada uspostavićemo formalni sistem koji će biti dat u obliku jednostranog sekventnog sistema i u kome će se aksiomatski sekventi formirati direktno na osnovu triangulacija zatvorenih, orijentabilnih površi. Osnovne formule u našem sistemu tvrde da neka šestorka tačaka čini Menelajevu konfiguraciju. Na taj način u potpunosti formalizujemo Rihter-Gebertovu ideju.

Pored strukturalnih pravila sjećanja koja se nameću u ovom sekventnom sistemu i na nivou triangulacija su vezana za operaciju povezane sume odnosno, dodavanja komponenti povezanosti, u ovom dijelu rada istražujemo mogućnost uvođenja logičkih veznika u sistem kao i odgovarajućih pravila izvođenja. Posebnu pažnju ovdje posvećujemo valjanosti ovog sistema u odnosu na željenu interpretaciju kao i njegovoj odlučivosti. Tretirane su mogućnosti iščitavanja rezultata incidencije iz dokazivih sekvenata.

Namjena sistema kojeg formiramo u radu je da bude određeni pomoćnik u dokazima teorema incidencije u projektivnoj geometriji, ali on nikako nije formalni sistem za cijelu projektivnu geometriju kakav je na primjer sistem aksioma Tarskog za euklidsku planimetriju. Ovaj dio rada u potpunosti se oslanja na originalne rezultate iz [4].

4.1 Menelajev sistem

Razviti jednostrani sekventni sistem u kome će se dokazivati da je neka šestorka tačaka u Menelajevoj konfiguraciji je osnovni cilj dijela koji slijedi.

U suštini, formalne sisteme zadajemo formalnim jezikom (alfabetom i formulama), aksiomama i pravilima izvođenja. Formalni sistem se koristi za izvođenje jednog izraza iz jedne ili više aksioma ili izvedenih izraza u oznaci $\Gamma \vdash A$, gdje su formule iz Γ *premise*, dok je A *zaključak* u sekventu. Kod jednostranih sekventnih sistema sve se nalazi sa desne strane simbola \vdash i kod njih je tumačenje šta su premise, a šta zaključak slobodnije.

Najpoznatiji jednostrani sekventni sistem - *mreže dokaza*, uveden je od strane Žirara u [21] za potrebe multiplikativne linearne logike. Linearna logika je supstrukturalna logika takođe uvedena u [21], nastala izbacivanjem pravila slabljenja i kontrakcije čime svako od pravila dobija aditivnu i multiplikativnu formu. Postoje više kriterijuma po kojima izdvajamo mreže dokaza od onih izvođenja koja to nisu. Kriterijum koji je uporediv sa obrazloženjima iz poglavlja 3.2 koja se odnose na triangulaciju površi je uveden od strane Danosa i Regniera u [43].

Kod Menelajevog formalnog sistema, jedan sekvent čini konačan (multi)skup formula i njegovo intuitivno značenje je da se proizvoljna šestorka iz datog skupa nalazi u Menelajevoj konfiguraciji ako se sve preostale formule nalaze u Menelajevoj konfiguraciji. Jezik formalnog sistema koji ovdje gradimo sačinjen je od *atomskih formula*, pa najprije uvodimo skup $F^6(W)$ čiji su elementi upravo pomenute formule. Za proizvoljan prebrojiv skup W sa $F^6(W)$ označen je skup svih šestorki međusobno različitih elemenata iz W :

$$F^6(W) = W^6 - \{(X_1, \dots, X_6) \in W^6 \mid X_i = X_j \text{ za neke } i \neq j\}.$$

Formule sistema gradimo od atomskih formula i veznika \otimes koji u zavisnost od toga sa koje strane znaka \vdash se pojavljuje posmatramo kao konjukciju, odnosno disjunkciju i veznika \leftrightarrow koji ima ulogu ekvivalencije. Formule označavamo sa $\varphi, \psi, \theta, \dots$, uz povremenu upotrebu indeksiranja. *Sekvent* je konačan multiskup formula i koristimo oznaku $\vdash \Gamma$ za sekvent sačinjen od formula multiskupa Γ .

Aksiomatski sekventi se formiraju na sledeći način. Za \mathcal{M} -kompleks L sa $L_0 \cup L_1 \subseteq W$ neka je funkcija $\nu : L_2 \rightarrow F^6(W)$ definisana sa:

$$\nu x = (d_1 d_2 x, d_0 d_2 x, d_0 d_0 x, d_0 x, d_1 x, d_2 x).$$

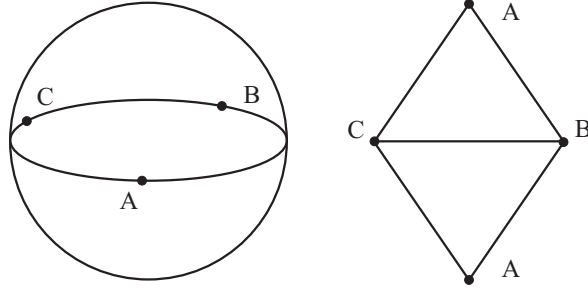
Za svaki \mathcal{M} -kompleks L , sekvent oblika

$$\vdash \{\nu x \mid x \in L_2\}$$

je aksiomatski sekvent Menelajevog sistema.

Da bi ilustrovali gornje definicije, za kompleks L posmatrajmo sferu S^2 kojoj smo pridružili \mathcal{M} -kompleks koji se sastoji od dva simpleksa (trougla) dimenzije 2 koji dijele sva lica. Lica ovih simpleksa označimo sa A, B i C (0-simpleksi) i odgovarajuće 1-simplekse sa P, Q i R redom. Sekvent

$$\vdash (A, B, C, P, Q, R), (A, B, C, P, Q, R)$$



Slika 4.1: Sfera S^2 i odgovarajući \mathcal{M} -kompleks

je aksiomatski sekvent koji ima ulogu *identiteta*.

U skladu sa permutacijom tjemena trougla i posmatranjem različitih trouglova u Menela-jevoj konfiguraciji koje smo diskutovali u poglavlju 3.3, imamo sljedeće dvije aksiome:

$$\begin{aligned} &\vdash (A, B, C, P, Q, R), (B, C, A, Q, R, P), \\ &\vdash (A, B, C, P, Q, R), (A, R, Q, P, C, B). \end{aligned}$$

Pravila izvođenja sistema data su dole navedenim shemama. Pravilo *sječanja* uvodimo u dva oblika

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Delta, \varphi}{\vdash \Gamma, \Delta} \qquad \frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

Formulu φ u prvom pravilu sječanja zovemo *formula sječanja*. U drugom pravilu za formulu sječanja kažemo da je „prazna”. Ovo pravilo nam omogućuje da, u toku formiranja familije \mathcal{M} -kompleksa, razmatramo samo povezane komplekse. Analogno, prvo pravilo sječanja nam omogućava da gradimo aksiomatske sekvente ne u odnosu na proizvoljne \mathcal{M} -komplekse, već da ograničimo familiju ovih kompleksa na one koje se ne mogu izraziti kao *povezane sume* dva jednostavnija kompleksa.

Osim pravila sječanja, imamo sljedeća pravila izvođenja:

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wp \psi} \quad \wp\text{-uvođenje} \qquad \text{i} \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Delta, \psi}{\vdash \Gamma, \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi} \quad \leftrightarrow\text{-uvođenje.}$$

Formle $\varphi \wp \psi$ i $\varphi \leftrightarrow \psi$ iz pravila uvođenja veznika \wp i \leftrightarrow su *glavne formule* odgovarajućeg pravila izvođenja. Ove formule se nalaze u zaključku pravila izvođenja i u njih se primjenom pravila uvodi veznik.

Gore uvedeni veznik \wp odgovara *aditivnom* vezniku $\&$, dok \leftrightarrow odgovara *multiplikativnom*

vezniku \otimes linearne logike uvedene u [21]. Takođe, pravilo sjećanja iz [21] oblika

$$\frac{\vdash \varphi, \Gamma \quad \vdash \varphi^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta},$$

gdje φ^\perp označana *linearnu negaciju* formule φ , razlikuje se od pravila koje smo mi uveli. Slobodno govoreći, u Menelajevom sistemu formula φ se poklapa sa svojom linearnom negacijom φ^\perp .

Formalni sistem \mathcal{M} mogli smo uvesti na manje sintaksni način, tako što umjesto $F^6(W)$ kao skupa atomskih formula posmatramo skup orbita $\mathcal{W} = F^6(W)/G$ i na taj način izbjegnemo dvije prethodno uvedene aksiome. Grupa G je podgrupa simetrične grupe S_6 generisana sa dvije permutacije koje odgovaraju napomenama 3.7 i 3.8 (vidjeti kraj poglavlja 3.3). U nastavku, korišćićemo ovaj praktičniji sistem sa \mathcal{W} kao skupom atomskih formula.

4.2 Saglasnost \mathcal{M} -sistema

Pod *euklidskom interpretacijom* smatramo funkciju sa skupa W na \mathbb{R}^2 i za tačku koja je euklidska interpretacija tačke $X \in W$ takođe koristimo oznaku X . Kažemo da interpretacija *zadovoljava* atomsku formulu (A, B, C, P, Q, R) kada šestorka (A, B, C, P, Q, R) tačaka iz \mathbb{R}^2 čini Menelajevu konfiguraciju.

Sa $\Gamma \models_E \varphi$ označavamo da svaka euklidska interpretacija koja zadovoljava formule iz Γ takođe zadovoljava i φ . Svaku pojavu veznika \bowtie u Γ tumačimo kao disjunkciju \vee , dok svaku pojavu \bowtie u φ tumačimo kao konjunkciju \wedge . Veznik \leftrightarrow uvijek tumačimo kao klasičnu ekvivalenciju.

Tvrđenje 4.1 (Saglasnost). *Ako postoji izvođenje aksiomatskog sekventa $\vdash \Gamma, \varphi$ tada važi $\Gamma \models_E \varphi$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti izvođenja $\vdash \Gamma, \varphi$. Pretpostavimo da interpretacija zadovoljava sve formule iz Γ .

Ako je $\vdash \Gamma, \varphi$ aksiomatski sekvent dobijen iz \mathcal{M} -kompleksa L tada dokaz izvodimo analogno dokazu Propozicije 3.1, gdje je cikl c orijentacija kompleksa L . Ako je $\vdash \Gamma, \varphi$ instanca jedne od dvije aksiome, oslanjamo se na napomene 3.7 i 3.8.

Ukoliko je poslednje primjenjeno pravilo u izvođenju $\vdash \Gamma, \varphi$

$$\frac{\vdash \Gamma_1, \psi \quad \vdash \Gamma_2, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \varphi},$$

onda primjenivši induktivnu pretpostavku na $\vdash \Gamma_1, \psi$ imamo da interpretacija zadovoljava ψ . Odavde, primjenom induktivne pretpostavke na $\vdash \Gamma_2, \varphi, \psi$ zaključujemo da interpretacija zadovoljava φ . Ako je formula sjećanja ψ prazna, tada po induktivnoj pretpostavci iz $\vdash \Gamma_2, \varphi$ zaključujemo φ . U slučaju kada je formula φ u lijevoj premisi pravila sjećanja, postupamo analogno.

Ako je poslednje primjenjeno pravilo u izvođenju

$$\frac{\vdash \Gamma_1, \varphi, \psi \quad \vdash \Gamma_1, \varphi, \theta}{\vdash \Gamma_1, \varphi, \psi \bowtie \theta},$$

tada interpretacija koja zadovoljava $\Gamma_1, \psi \bowtie \theta$, u skladu sa načinom na koji tumačimo veznik \bowtie u Γ , mora zadovoljiti ili Γ_1, ψ ili Γ_1, θ . Dalje, kada primjenimo induktivnu pretpostavku na odgovarajuću premisu zaključujemo da interpretacija takođe zadovoljava i formulu φ .

Ako je poslednje primjenjeno pravilo u izvođenju

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi_1 \quad \vdash \Gamma, \varphi_2}{\vdash \Gamma, \varphi_1 \bowtie \varphi_2},$$

tada primjenom induktivne pretpostavke na obje premise imamo da su i φ_1 i φ_2 zadovoljene. Stoga, $\varphi = \varphi_1 \bowtie \varphi_2$ je zadovoljeno uzimajući u obzir tumačenje veznika \bowtie u φ .

Ukoliko je poslednje primjenjeno pravilo u izvođenju

$$\frac{\vdash \Gamma_1, \psi \quad \vdash \Gamma_2, \varphi, \theta}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \varphi, \psi \leftrightarrow \theta},$$

onda iz lijeve premise, a primjenom induktivne pretpostavke nalazimo da interpretacija

zadovoljava ψ i kako je $\psi \leftrightarrow \theta$ zadovoljeno slijedi da je i formula θ zadovoljena. Primjenom induktivne pretpostavke na desnu premisu zaključujemo da je φ takođe zadovoljena. Postupamo analogno u slučaju formule φ u lijevoj premisi pravila sjećanja.

Konačno, ukoliko je poslednje primjenjeno pravilo u izvođenju

$$\frac{\vdash \Gamma_1, \varphi_1 \quad \vdash \Gamma_2, \varphi_2}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2},$$

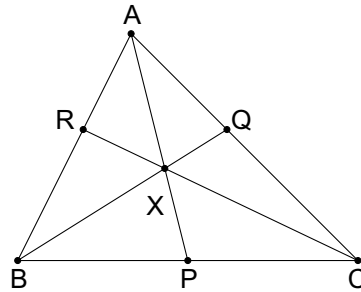
tada primjenom induktivne pretpostavke na obje premise zaključujemo da su i φ_1 i φ_2 zadovoljene u odnosu na interpretaciju. Otuda, $\varphi = \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ je zadovoljena takođe. \square

Za multiskup formula Δ kažemo da je valjan, u oznaci $\models \Delta$, ako je za svaku formulu $\delta \in \Delta$ važi $\Delta - \{\delta\} \models_E \delta$. Tvrđenje 4.1 možemo preformulisati na sljedeći način.

Tvrđenje 4.2. *Ako postoji izvođenje sekventa $\vdash \Delta$, onda je skup Δ valjan.*

Obrnuto tvrđenje tvrđenju 4.2 ne važi. Kao kontraprimer posmatrajmo sekvent

$$\vdash (A, B, P, C, X, R), (A, C, P, B, X, Q), (B, R, C, X, P, A), (A, R, C, X, Q, B) \quad (4.1)$$



Slika 4.2: Ilustracija sekventa 4.1

Da bi dokazali da je sekvent 4.1 valjan, pretpostavimo da interpretacija zadovoljava

prve tri formule sekventa, odnosno da važe jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{|PC|}{|CB|} \cdot \frac{|BR|}{|RA|} \cdot \frac{|AX|}{|XP|} &= -1, \\ \frac{|CB|}{|BP|} \cdot \frac{|PX|}{|XA|} \cdot \frac{|AQ|}{|QC|} &= -1, \\ \frac{|RA|}{|AB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CX|}{|XR|} &= -1,\end{aligned}$$

iz kojih lako dolazimo do

$$\frac{|BR|}{|AB|} \cdot \frac{|AQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CX|}{|XR|} = -1$$

što znači i da je četvrta formula iz sekventa zadovoljena. Analogno postupamo i sa preostala tri moguća slučaja koja se javljaju prilikom dokazivanja valjanosti sekventa 4.1. Ovaj sekvent nije dokaziv u Menelajevom sistemu (za dokaz vidjeti primjer 9 iz poglavlja 4.5).

4.3 Projektivna interpretacija

Projektivnu interpretaciju i relaciju zadovoljivosti definisaćemo po analogiji na prethodni odeljak. Tako, i saglasnost sistema u odnosu na projektivnu interpretaciju posljedica je tvrđenja 4.1.

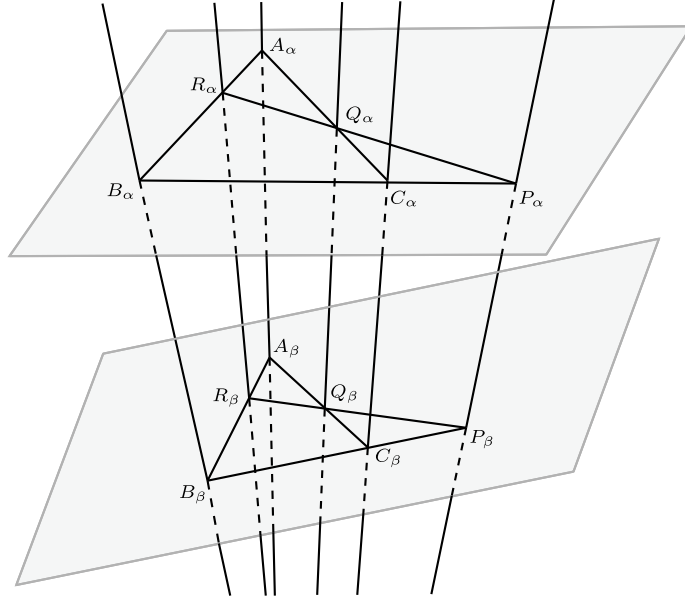
Projektivna interpretacija je funkcija sa skupa W na *projektivnu ravan* $\mathbb{R}P^2$. Takođe, sa X označavamo tačku u $\mathbb{R}P^2$, koja je projektivna interpretacija tačke $X \in W$.

Tačke iz projektivne ravni $\mathbb{R}P^2$ su prave koje prolaze kroz koordinatni početak iz \mathbb{R}^3 . Za konačan skup \mathcal{S} tačaka iz $\mathbb{R}P^2$ postoji ravan α iz \mathbb{R}^3 , koja ne prolazi kroz koordinatni početak, a koja presjeca sve odgovarajuće prave. Za ravan α dovoljno je da izaberemo ravan čiji vektor normale nije normalan ni na jedan vektor pravca pravih iz skupa \mathcal{S} . Ovakva ravan sigurno postoji jer \mathbb{R}^3 ne možemo prekriti sa konačno mnogo ravni. U ovom slučaju, kažemo da ravan α *pravilno presjeca* tačke iz \mathcal{S} i za svaku tačku $A \in \mathcal{S}$ koristimo oznaku A_α za presjek A i ravni α .

Lema 4.1. *Neka su α i β dvije ravni iz \mathbb{R}^3 koje pravilno presijecaju tačke A, B, C, P, Q i R iz $\mathbb{R}P^2$. Ako šestorka $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha)$ čini Menelajevu konfiguraciju, tada $(A_\beta, B_\beta, C_\beta, P_\beta, Q_\beta, R_\beta)$ takođe čini Menelajevu konfiguraciju.*

Dokaz. Za nekolinearne A, B i C , tada ni A_α, B_α i C_α , ni A_β, B_β i C_β nisu kolinearne i

kako su P_α, Q_α i R_α tri kolinearne tačke na pravim $B_\alpha C_\alpha, C_\alpha A_\alpha$ i $A_\alpha B_\alpha$ redom, imamo da su P_β, Q_β i R_β tri kolinearne tačke na pravim $B_\beta C_\beta, C_\beta A_\beta$ i $A_\beta B_\beta$ redom, što znači da šestorka $(A_\beta, B_\beta, C_\beta, P_\beta, Q_\beta, R_\beta)$ čini Menelajevu konfiguraciju.



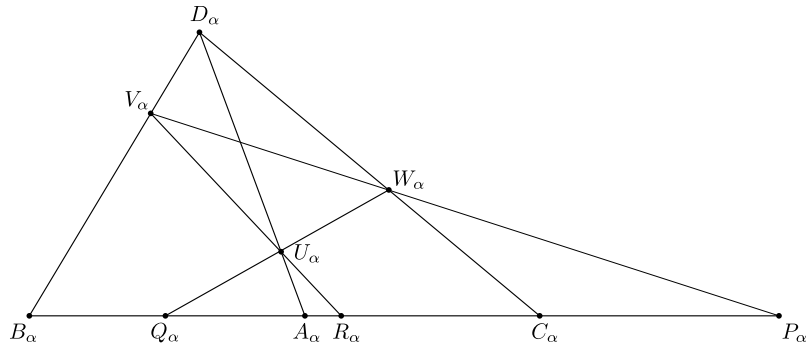
Slika 4.3: Lema 4.1

Ako su A, B i C kolinearne tačke, tada za ravan β_0 uzmemo takvu da je $0 \in \beta_0$ i $\beta \parallel \beta_0$ i označimo sa b presjek ravni α i β_0 . Kako su β i β_0 ravni, to je b ili prava ili prazan skup. Dalje, pretpostavimo da su sve izabrane tačke izvan b . Neka je D_α tačka iz α van prave $A_\alpha B_\alpha$ i neka je U_α tačka na segmentu $A_\alpha D_\alpha$ takva da se prave $R_\alpha U_\alpha$ i $B_\alpha D_\alpha$, kao i prave $Q_\alpha U_\alpha$ i $C_\alpha D_\alpha$ sijeku (tačku U_α koja zadovoljava pomenute uslove uvijek možemo izabrati). Označimo tačke presjeka sa $\{V_\alpha\} = R_\alpha U_\alpha \cap B_\alpha D_\alpha$ i $\{W_\alpha\} = Q_\alpha U_\alpha \cap C_\alpha D_\alpha$. Primjetimo da šestorke $(A_\alpha, B_\alpha, D_\alpha, V_\alpha, U_\alpha, R_\alpha)$ i $(A_\alpha, C_\alpha, D_\alpha, W_\alpha, U_\alpha, Q_\alpha)$ čine Menelajevu konfiguraciju.

Posmatrajmo sljedeći aksiomatski sekvent izveden iz tetraedarske triangulacije sfere S^2

$$\vdash (A, B, C, P, Q, R), (A, B, D, V, U, R), (A, C, D, W, U, Q), (B, C, D, W, V, P),$$

i euklidsku interpretaciju koja svako $X \in \{A, B, C, D, P, Q, R, U, V, W\}$ interpretira kao X_α . Ova interpretacija zadovoljava prve tri šestorke iz aksiomatskog sekventa, i po



Slika 4.4: Lema 4.1 u slučaju kolinearnih tačaka A, B i C

tvrđenju 4.1 koje smo dokazali za euklidsku interpretaciju, šestorka $(B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha, W_\alpha, V_\alpha, P_\alpha)$ čini Menelajevu konfiguraciju takođe.

U slučaju nekolinearnih tačaka A, B i C , znamo da euklidska interpretacija koja skup $X \in \{A, B, C, D, P, Q, R, U, V, W\}$ interpretira kao X_β zadovoljava zadnje tri šestorke, i pozivajući se na tvrđenje 4.1, šestorka $(A_\beta, B_\beta, C_\beta, P_\beta, Q_\beta, R_\beta)$ čini Menelajevu konfiguraciju.

□

Nakon ove leme u mogućnosti smo kazati da šestorka (A, B, C, P, Q, R) tačaka iz $\mathbb{R}P^2$ čini Menelajevu konfiguraciju kada za neku (ili svaku) ravan α iz \mathbb{R}^3 , koja pravilno siječe sve tačke iz šestorke, šestorka $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha)$ čini Menelajevu konfiguraciju u smislu euklidske interpretacije. Kažemo da projektivna interpretacija zadovoljava atomsku formulu (A, B, C, P, Q, R) kada šestorka (A, B, C, P, Q, R) tačaka iz $\mathbb{R}P^2$ čini Menelajevu konfiguraciju.

Pod $\Gamma \models_P \varphi$ definisanom kao u euklidskoj interpretaciji, tj. svaka projektivna interpretacija koja zadovoljava sve formule iz Γ takođe zadovoljava i φ . Kao posljedicu tvrđenja 4.1 imamo sljedeći rezultat.

Tvrđenje 4.3 (Projektivna saglasnost). *Ako postoji izvođenje aksiomatskog sekventa $\vdash \Gamma, \varphi$ tada važi $\Gamma \models_P \varphi$.*

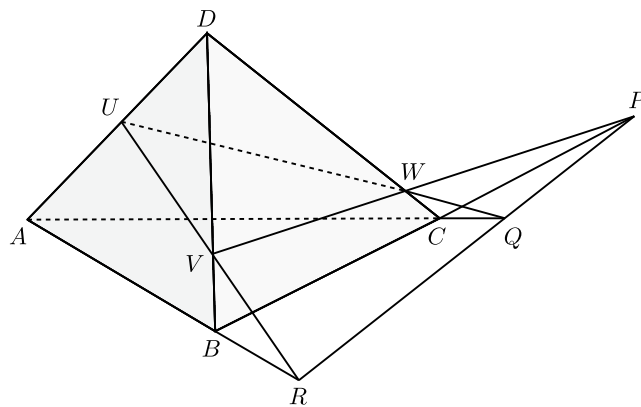
4.4 Od dokazivih sekvenata do teorema incidencije

Opšti obrazac za „čitanje” teorema incidencije i njihovih dokaza iz dokazivih sekvenata je sljedeći. Najprije, potrebno je koristiti interpretaciju koja zadovoljava sve osim jedne formule iz dokazivog sekventa. Iz valjanosti sistema slijedi da takva interpretacija zadovoljava i tu posljednju formulu iz sekventa. Da bi formulisali teoremu incidencije nekad nam je dovoljna jedna interpretacija i jedan sekvent, dok neki rezultati incidencije zahtijevaju nekoliko interpretacija i jedan dokaziv sekvent. Takođe, postoji mogućnost da je u nekim slučajevima potrebno više dokazivih sekvenata da bi se proizvela teorema incidencije.

U suštini, Menelajev sistem tretiramo kao sintaksu, a projektivnu ravan kao semantiku. Za dokaziv sekvent iz koga čitamo teoreme incidencije najprije treba izdvojiti jednu formulu koja je posljedica ostalih formula iz sistema. Da bismo dokazali da su ostale formule iz sekventa zadovoljene po standardnim pretpostavkama koje stoje u formulacijama teorema incidencije, ne možemo se u potpunosti osloniti na Menelajev sistem. Razlog je što u ovom sistemu ne možemo iskazati neke negativne tvrdnje (npr. izjave o nekolinearnosti tačaka ili o tome da su tačke međusobno različite) ili pak neka pozitivna tvrđenja kao što je koincidencija pravih. Ove tvrdnje se iskazuju aksiomama projektivne geometrije.

U primjerima iščitavanja teorema incidencije koje dajemo u nastavku, skupom aksiomatskih formula Menelajevog sistema smatramo skup \mathcal{W} , što znači da ne pravimo razliku između šesterke elemenata iz skupa \mathcal{W} i bilo koga člana iz G -orbite date šesterke.

PRIMJER 5. U ovom primjeru dajemo dokaz Dezargove teoreme u kome smo koristili dva aksiomatska sekventa od kojih smo napravili dokaziv sekvent primjenom pravila \mathfrak{K} -uvođenja. Posmatrajmo tetraedarsku triangulaciju sfere S^2 (tetraedar $ABCD$ na slici 4.5).

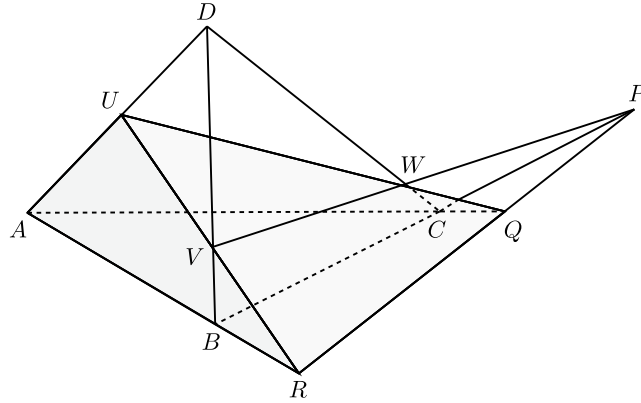


Slika 4.5: Triangulacija sfere - tetraedar $ABCD$

Iz ove triangulacije, a sa slike 4.5, možemo iščitati aksiomatski sekvent

$$\vdash (A, B, D, V, U, R), (B, C, D, W, V, P), (A, C, D, W, U, Q), (A, B, C, P, Q, R).$$

Sa druge strane, postoji još jedna tetraedarska triangulacija sfere S^2 (tetraedar ARQU sa slike 4.6,



Slika 4.6: Triangulacija sfere - tetraedar ARQU

iz koje dolazimo do aksiomatskog sekventa

$$\vdash (A, R, U, V, D, B), (A, R, Q, P, C, B), (U, R, Q, P, W, V), (A, Q, U, W, D, C).$$

Kako ova dva sekventa imaju tri zajednička elementa

$$(A, B, D, V, U, R), (A, C, D, W, U, Q), (A, B, C, P, Q, R)$$

dolazimo do sekventa

$$\vdash (A, B, D, V, U, R), (A, C, D, W, U, Q), (A, B, C, P, Q, R), \\ (B, C, D, W, V, P) \bowtie (U, R, Q, P, W, V).$$

Postoji određena povezanost gornjeg, dokazivog sekventa i poznate teoreme incidencije - Dezagove teoreme (vidjeti 2.4).

Dokaz Dezargove teoreme. \Rightarrow Iz perspektivnosti trouglova ABC i UVW u odnosu na tačku D , dokazaćemo da slijedi kolinearnost tačaka P , Q i R .

Posmatrajmo projektivnu interpretaciju koja tačke $A, B, C, U, V, W, P, Q, R$ preslikava u $\mathbb{R}P^2$ po uslovima teoreme i tačku D koja je po interpretaciji tačka presjeka pravih AU , BV i CW . Ova interpretacija zadovoljava

$$(A, B, D, V, U, R), (A, C, D, W, U, Q) \text{ i } (B, C, D, W, V, P),$$

pa stoga i

$$(A, B, D, V, U, R), (A, C, D, W, U, Q) \text{ i } (B, C, D, W, V, P) \vee (U, R, Q, P, W, V),$$

što nam, pozivajući se na valjanost, garantuje da interpretacija zadovoljava i (A, B, C, P, Q, R) . Slijedi da su tačke P , Q i R kolinearne.

\Leftarrow Iz kolinearnosti tačka P , Q i R dokazaćemo perspektivnost trouglova ABC i UVW , odnosno konkurentnost pravih AU , BV i CW .

Posmatrajmo opet projektivnu interpretaciju koja tačke $A, B, C, U, V, W, P, Q, R$ preslikava u $\mathbb{R}P^2$ po uslovima teoreme i tačku D koja je sada presječna tačka pravih AU i BV . Ova interpretacija zadovoljava

$$(A, R, U, V, D, B), (A, R, Q, P, C, B) \text{ i } (U, R, Q, P, W, V),$$

pa stoga i

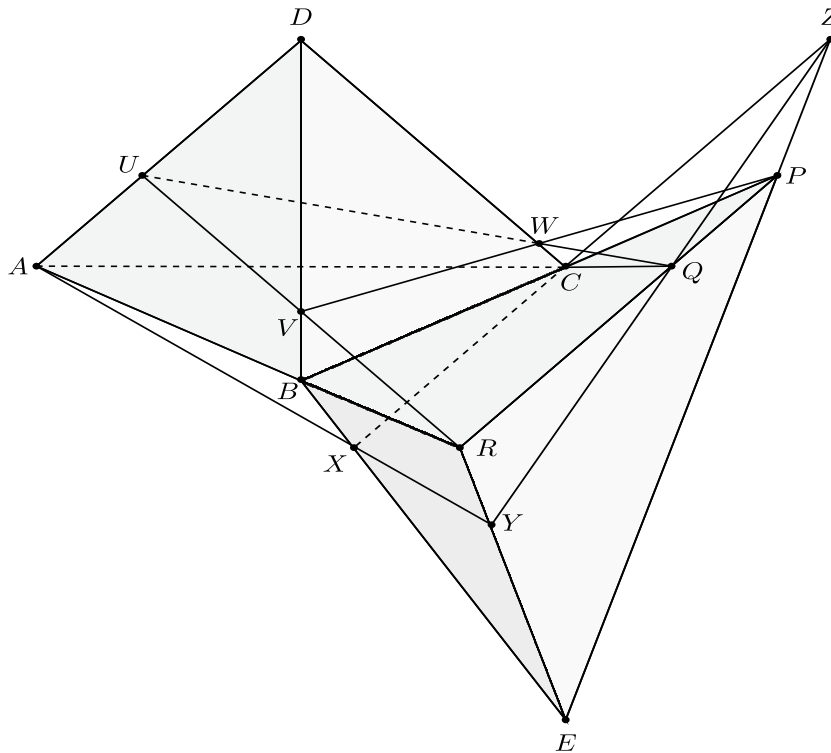
$$(A, B, D, V, U, R), (A, B, C, P, Q, R) \text{ i } (B, C, D, W, V, P) \vee (U, R, Q, P, W, V),$$

što nam, pozivajući se na valjanost, garantuje da interpretacija zadovoljava i (A, C, D, W, U, Q) , odnosno (A, Q, U, W, D, C) . Iz ovoga slijedi kolinearnost tačaka W , D i C , što znači da su prave AU , BV i CW konkurentne. \square

PRIMJER 6. U ovom primjeru dajemo dokaz teoreme incidencije iz sekventa dobijenog primjenom sječnja koje nije eliminabilno. Posmatrajmo naredna dva aksiomska sekventa dobijena iz tetraedarskih triangulacija $ABCD$ i $BRPE$ dvije sfere.

$$\vdash (A, B, D, V, U, R), (B, C, D, W, V, P), (A, C, D, W, U, Q), (A, B, C, P, Q, R)$$

$$\vdash (B, R, E, Y, X, A), (B, P, E, Z, X, C), (R, P, E, Z, Y, Q), (B, P, R, Q, A, C)$$



Slika 4.7: Rezultat „ljepljenja” tetraedara $ABCD$ i $BRPE$

Kako ovi sekventi imaju zajednički element (A, B, C, P, Q, R) i (B, P, R, Q, A, C) , možemo primjeniti pravilo sječnja i proizvesti sekvent

$$\vdash (A, B, D, V, U, R), (B, C, D, W, V, P), (A, C, D, W, U, Q), (B, R, E, Y, X, A), \\ (B, P, E, Z, X, C), (R, P, E, Z, Y, Q).$$

koji koristimo za dokaz sljedećeg rezultata incidencije.

Neka su AU , BV i CW tri konkurentne prave iz $\mathbb{R}P^2$ i neka su tačke X i E takve da

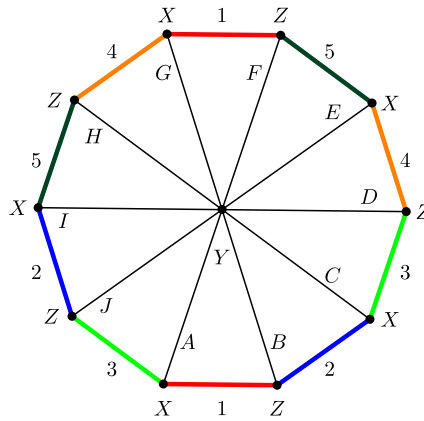
su B, X i E kolinearne tačke. Tačke Q, Y i Z , gdje je

$$\begin{aligned} \{P\} &= BC \cap VW, & \{Q\} &= AC \cap UW, & \{R\} &= AB \cap UV, \\ \{Y\} &= AX \cap RE, & \{Z\} &= XC \cap EP, \end{aligned}$$

su kolinearne.

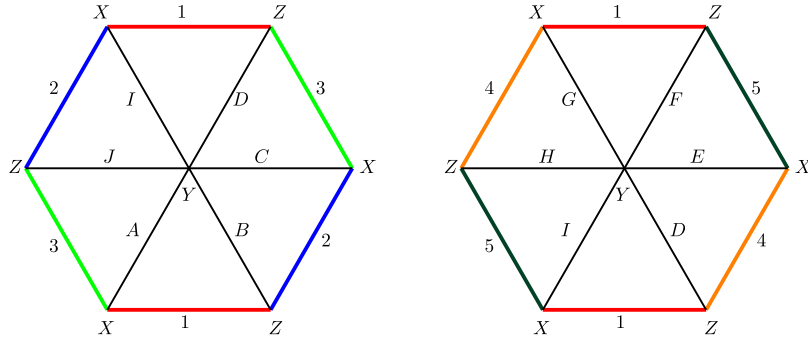
PRIMJER 7. Posmatrajmo triangulaciju torusa sa dvije rupe u deset trouglova sa ukupno tri tjemena. Odgovarajući aksiomatski sekvent je

$$\begin{aligned} \vdash & (X, Y, Z, B, 1, A), (X, Y, Z, B, 2, C), (X, Y, Z, D, 3, C), (X, Y, Z, D, 4, E) \\ & (X, Y, Z, F, 5, E), (X, Y, Z, F, 1, G), (X, Y, Z, H, 4, G), \\ & (X, Y, Z, H, 5, I), (X, Y, Z, J, 2, I), (X, Y, Z, J, 3, A). \end{aligned}$$



Slika 4.8: Desetougao - torus sa dvije rupe

Ovaj sekvent možemo dobiti i primjenom pravila sječenja na dva aksiomatska sekventa koja su dobijena iz triangulacije torusa u šest trouglova. Šestougona triangulacija torusa odgovara Papusovoj teoremi o čemu je govoreno u 2.3.3, a koristićemo je i u narednom primjeru. Za više detalja vidjeti [39, poglavlje 3.4].



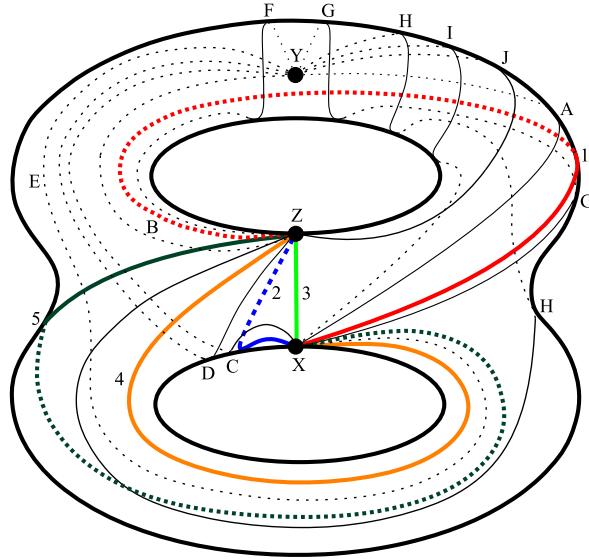
Slika 4.9: Šestougaone triangulacije dva torusa

$$\begin{aligned}
\vdash & (X, Y, Z, B, 1, A), (X, Y, Z, B, 2, C), (X, Y, Z, D, 3, C), (X, Y, Z, J, 2, I), \\
& (X, Y, Z, J, 3, A), (X, Y, Z, D, 1, I), \\
\vdash & (X, Y, Z, D, 4, E), (X, Y, Z, F, 5, E), (X, Y, Z, F, 1, G), (X, Y, Z, H, 4, G), \\
& (X, Y, Z, H, 5, I), (X, Y, Z, D, 1, I).
\end{aligned}$$

Desetougao koji predstavlja torus sa dvije rupe (slika 4.9) dobili smo kao povezanu sumu, u odnosu na trougao sa stranicama D , 1 i I , dva torusa koji su dati šestouglovima (slika A.2). Znači, neke aksiomatske sekvente možemo proizvesti iz jednostavnijih aksiomatskih sekvenata. U nastavku dajemo rezultat incidencije koji je proistekao iz gornjeg sekventa (slika 4.11).

Neka su p , q i s tri nekonkurentne prave u projektivnoj ravni. Izaberimo tačku A na pravoj p , tačku B na pravoj q i neka prava AB siječe pravu s u tački 1 . Zatim, izaberimo tačku C na pravoj p i neka prava BC presjeca s u tački 2 . Postupamo po opisanom postupku sve dok ne stignemo do tačke F na pravoj q i presječnoj tačkom 5 pravih EF i s . Nastavljamo dalje sa ovom „cik-cak igrom” vodeći računa da pravu s presjecamo u tačkama $1, 4, 5, 2$ i 3 redom. Odnosno, prava FG siješe s u tački 1 , GH siječe s u 4 , itd. Na kraju, poslednja prava koju crtamo počinje iz tačke J , prolazi kroz tačku 3 na pravoj s i pravu p siječe u početnoj tački A .

PRIMJER 8. Pri dokazivanju incidencije iz narednog primjera primjenili smo pravilo \leftrightarrow -uvođenja na dva aksiomatska sekventa.



Slika 4.10: Torus sa dvije rupe sa slike 4.8

Tvrđenje 4.4. *Posmatrajmo Pappusovu konfiguraciju koja se sastoji od dvije trojke (A, B, C) i (D, E, F) kolinearnih, međusobno različitih tačaka. Pretpostavimo da za $\{X\} = CD \cap AE$ i $\{Z\} = BE \cap CF$ prave AB, DE i XZ nisu konkurentne. Za*

$$\begin{aligned} \{K\} &= BE \cap CD, & \{L\} &= AF \cap CD, & \{M\} &= AF \cap BE, \\ \{U\} &= AE \cap CF, & \{V\} &= AE \cap BD, & \{W\} &= CF \cap BD, \end{aligned}$$

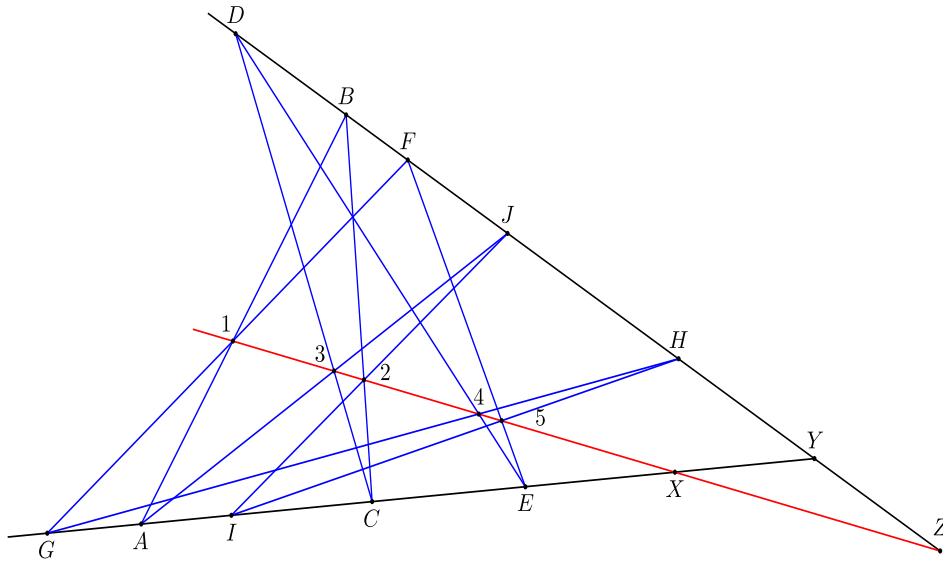
Pappusove prave KU, LV i MW su konkurentne.

Dokaz. Neka su $\{1\} = XZ \cap AB, \{2\} = AB \cap DE, \{3\} = XZ \cap DE, \{O\} = KU \cap LV,$
i $\{Y\} = 13 \cap BD$.

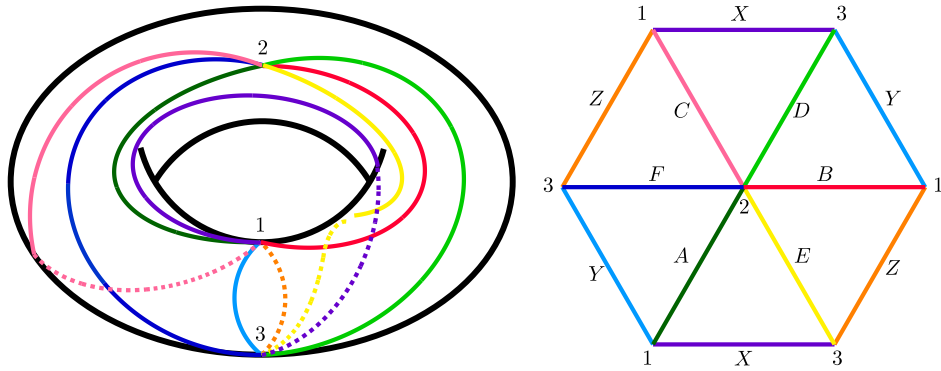
Naredni aksiomatski sekvent dobijen je iz triangulacije torusa u šest trouglova sa tje-
menima 1, 2 i 3.

$$\begin{aligned} \vdash (1, 2, 3, E, X, A), (1, 2, 3, E, Z, B), (1, 2, 3, D, Y, B), (1, 2, 3, D, X, C), \\ (1, 2, 3, F, Z, C), (1, 2, 3, F, Y, A). \end{aligned}$$

Sa druge strane, kao u primjeru 1, iz tetraedarske triangulacije sfere $UXZK$ imamo



Slika 4.11: Rezultat incidencije iz primjera 7



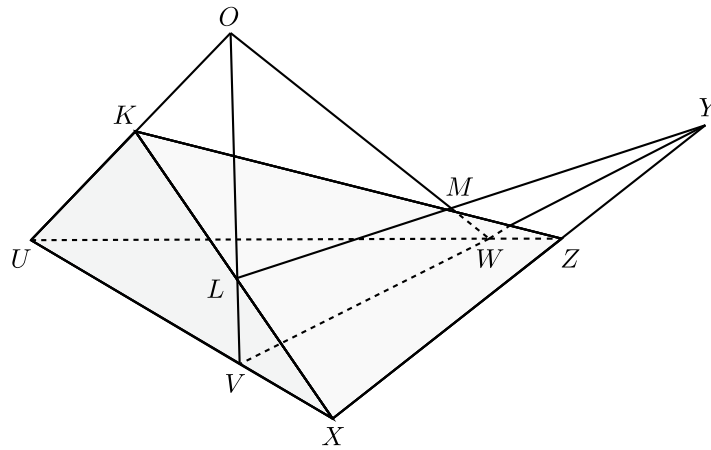
Slika 4.12: Triangulacija torusa u šest trouglova sa tjemenuima 1, 2 i 3

sljedeći aksiomatski sekvent

$$\vdash (U, X, K, L, O, V), (U, X, Z, Y, W, V), (K, X, Z, Y, M, L), (U, Z, K, M, O, W).$$

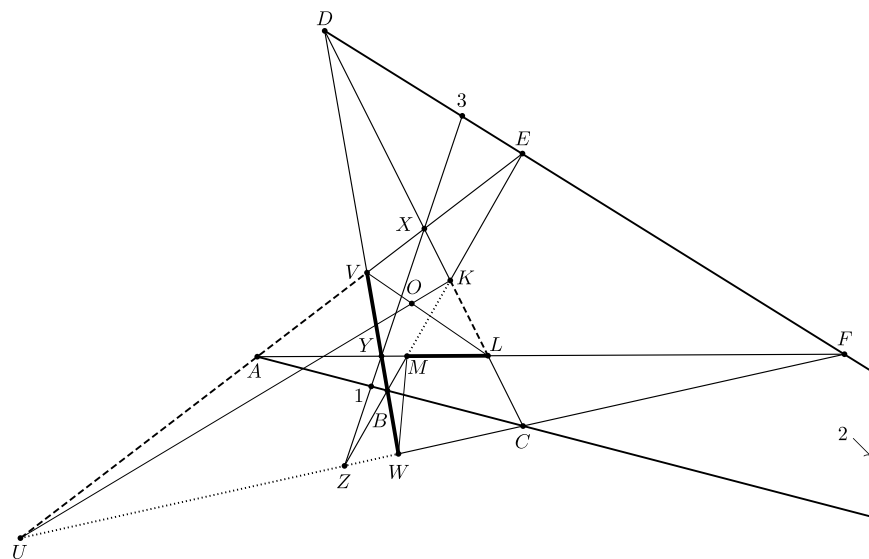
Primjenom \leftrightarrow -uvođenja, dobijamo sljedeći devetočlani aksiomatski sekvent.

$$\begin{aligned} \vdash (1, 2, 3, E, X, A), (1, 2, 3, E, Z, B), (1, 2, 3, D, Y, B), (1, 2, 3, D, X, C), \\ (1, 2, 3, F, Z, C), (1, 2, 3, F, Y, A) \leftrightarrow (K, X, Z, Y, M, L), \\ (U, X, K, L, O, V), (U, X, Z, Y, W, V), (U, Z, K, M, O, W). \end{aligned}$$



Slika 4.13: Tetraedarska triangulacija sfere $UXZK$

Posmatrajmo projektivnu interpretaciju koja preslikava sve tačke iz konfiguracije na način ukazan u propoziciji. Parovi odgovarajućih stranica trouglova KLM i UVW istaknuti su na slici 4.14.



Slika 4.14: Rezultat incidencije iz zadatka 8

Najprije dokažimo da interpretacija zadovoljava prvih osam formula iz sekventa. Negativna tvrdjenja, o kojim smo već govorili na početku poglavlja, tretiramo kao pretpostavljene uslove koje tačke iz konfiguracije zadovoljavaju. Tokom dokaza pažnju posvećujemo pozitivnim tvrdnjama - iskazima o kolinearnosti triju tačaka, iza čega stoji upotreba Menelajevе teoreme.

Da bismo dokazali da interpretacija zadovoljava $(1, 2, 3, E, X, A)$ primjetimo da su tačke 1, 2 i 3 nekolinearne i da su sve 1, 2, 3, E , X , A međusobno različite. Tačke E , 2, 3 su kolinearne po definiciji tačkaka 2 i 3, tačke X , 1, 3 su kolinearne po definiciji 1 i 3 i tačke A , 1, 2 su kolinearne po definiciji tačkaka 1 i 2. Najzad, tačke E , X , A su kolinearne po definiciji tačke X . Analogno nastavljamo sa sljedeće četiri formule iz sekventa.

Da bismo dokazali da je formula $(1, 2, 3, F, Y, A) \leftrightarrow (K, X, Z, Y, M, L)$ zadovoljena primjetimo da je lijevi dio ekvivalencije zadovoljen ako i samo ako su tačke F, Y i A kolinearne. Po definiciji tačkaka L i M znamo da se prave AF i LM podudaraju. Stoga, gornji uslov je ekvivalentan tvrđenju da su tačke L, Y i M kolinearne. Kao i u prethodnom pasusu, jasno je da su tačke L, Y i M kolinearne ako i samo ako interpretacija zadovoljava (K, L, M, Y, Z, X) što znači da je ekvivalencija $(1, 2, 3, F, Y, A) \leftrightarrow (K, X, Z, Y, M, L)$ zadovoljena u interpretaciji.

Da bismo dokazali da interpretacija zadovoljava (O, U, V, X, L, K) primjetimo da tačke O, U, V nisu kolinearne i da su O, U, V, X, L, K sve međusobno različite. Prave UV i AE se podudaraju i stoga, po definiciji tačke X , slijedi da su X, U i V kolinearne tačke, a po definiciji tačke O slijedi da su tačke K, O, U kao i L, O, V kolinearne i konačno, kako su prave CD i KL podudarne po definiciji tačke X slijedi kolinearnost tačkaka K, L i X .

Da bismo dokazali da interpretacija zadovoljava (U, V, W, Y, Z, X) primjetimo da tačke U, V, W nisu kolinearne i da su U, V, W, Y, Z, X sve međusobno različite. Prave VW i BD se podudaraju i stoga, po definiciji tačke Y slijedi da su Y, V, W kolinearne. Prave UW i CF se podudaraju, i stoga po definiciji tačke Z slijedi da su Z, U i W kolinearne. Rezonujući kao u prethodnom pasusu, imamo da su tačke X, U, V kolinearne. I na kraju, kako su prave XZ i 13 podudarne, iz definicije tačke Y slijedi da su X, Y i Z kolinearne tačke.

Iz saglasnosti sistema slijedi da interpretacija zadovoljava formulu (U, Z, K, M, O, W) , što znači da prava WM prolazi kroz presječnu tačku pravih KU i LV i da su ove tri prave konkurentne. \square

4.5 Odlučivost Menelajevog sekventnog sistema

U ovom dijelu rada pažnju posvećujemo odlučivosti Menelajevog sekventnog sistema. Sekventni sistem je *odlučiv* onda kada postoji procedura kojom se za svaki sekvent koji je dat na odgovarajućem jeziku, u konačno mnogo koraka može utvrditi da li je u tom sistemu dokaziv ili ne. U svom dijelu [18], Gencen je pomoću teoreme o eliminaciji sječnja, odnosno svojstva potformule, dokazao odlučivost za intuicionističku i klasičnu iskaznu logiku.

Cilj je da dokažemo sljedeće tvrđenje.

Tvrđenje 4.5. *Menelajev sistem je odlučiv.*

Izvođenje u Menelajevom sistemu je *normalno* kada ni pravilo \bowtie -uvođenja ni pravilo \leftrightarrow -uvođenja ne prethodi pravilu sječnja u izvođenju. Pod *formulom u izvođenju* podrazumijevamo pojavljivanje te formule u posmatranom izvođenju.

Lema 4.2. *Ukoliko je posljednje primjenjeno pravilo u izvođenju pravilo*

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

i u izvođenju nema drugih primjena pravila sječnja kojim prethodi primjena pravila \bowtie -uvođenja ili \leftrightarrow -uvođenja, tada postoji normalno izvođenje sekventa $\vdash \Gamma, \Delta$.

Dokaz. Primjenjujemo indukciju po $n \geq 0$, gdje je n broj primjena pravila \bowtie -uvođenja i \leftrightarrow -uvođenja u izvođenju. Za $n = 0$ izvođenje je već normalno. Za $n > 0$ je po pretpostavci jedna od premisa dobijena primjenom ili pravila \bowtie -uvođenja ili pravila \leftrightarrow -uvođenja. Ukoliko kraj izvođenja ima oblik

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \gamma_1 \quad \vdash \Gamma', \gamma_2}{\vdash \Gamma', \gamma_1 \bowtie \gamma_2} \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma', \gamma_1 \bowtie \gamma_2, \Delta},$$

možemo ga transformisati u izvođenje koje se završava sa

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \gamma_1 \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma', \gamma_1, \Delta} \quad \frac{\vdash \Gamma', \gamma_2 \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma', \gamma_2, \Delta}}{\vdash \Gamma', \gamma_1 \bowtie \gamma_2, \Delta},$$

u kome je moguće primjeniti induktivnu pretpostavku na podizvođenja sa krajnim sekventima $\vdash \Gamma', \gamma_1, \Delta$ i $\vdash \Gamma', \gamma_2, \Delta$.

Ako krajnji sekvent u izvođenu oblika

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \gamma_1 \quad \vdash \Gamma'', \gamma_2}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2} \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2, \Delta},$$

možemo ga transformisati u izvođenje sa krajnjim sekventom

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \gamma_1 \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma', \gamma_1, \Delta} \quad \vdash \Gamma'', \gamma_2}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2, \Delta},$$

u kome primjenjujemo induktivnu pretpostavku na podizvođenje sa krajnjim sekventom $\vdash \Gamma', \gamma_1, \Delta$. □

U nastavku dajemo analizu normalnih formi izvođenja u kojima formula sječenja *nije* prazna. Najprije definišemo neophodne pojmove.

Stepen sječenja je broj veznika \bowtie i \leftrightarrow u formuli sječenja. Za pravila sječenja i \leftrightarrow -uvođenja svaka formula iz nižeg sekventa (zaključka) osim formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ u slučaju \leftrightarrow -uvođenja ima jedinstvenog *sledbenika*, tj. svaka formula iz nižeg sekventa pojavljuje se tačno jednom u gornjem sekventu. U slučaju \bowtie -uvođenja sve formule iz nižeg sekventa osim formule $\varphi \bowtie \psi$ imaju dva *sledbenika*, jer se pomenute formule pojavljuju dva puta u gornjem sekventu. *Rang formule* u nekom izvođenju je broj formula koje su sa posmatranom formulom u relaciji sledbenika. *Rang sječenja* u izvođenju je zbir rangova formule sječenja iz obje premise sječenja.

Procedura koja je primjenjena u dokazu naredne leme korespondira sa Gencenovom eliminacijom sječenja iz [19].

Lema 4.3. *Ukoliko je poslednje primjenjeno pravilo u izvođenju pravilo*

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Delta, \varphi}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

i u izvođenju nema drugih primjena pravila sječenja kojim prethodi primjena pravila \bowtie -uvođenja ili \leftrightarrow -uvođenja, tada postoji normalno izvođenje sekventa $\vdash \Gamma, \Delta$.

Dokaz. Primjenjujemo indukciju po leksikografski uređenim parovima (d, r) , gdje je $d \geq 0$ stepen, a $r \geq 2$ rang sječenja. Baza indukcije je slučaj $(d, r) = (0, 2)$ i ona je zadovoljena jer posljednjem primjenjenom pravilu ne prethodi ni jedno od pravila \bowtie -uvođenja i \leftrightarrow -uvođenja pa obje premise moraju biti aksiomatski sekventi i izvođenje je normalno.

U slučaju ranga $r > 2$, krajnji sekvent u izvođenu može biti oblika

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \psi \quad \vdash \Gamma', \varphi, \chi}{\vdash \Gamma', \psi \bowtie \chi, \varphi}}{\vdash \Gamma', \psi \bowtie \chi, \Delta}, \quad \vdash \Delta, \varphi$$

i transformišemo ga u izvođenje sa krajnjim sekventom

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \psi \quad \vdash \Delta, \varphi}{\vdash \Gamma', \psi, \Delta} \quad \frac{\vdash \Gamma', \varphi, \chi \quad \vdash \Delta, \varphi}{\vdash \Gamma', \chi, \Delta}}{\vdash \Gamma', \psi \bowtie \chi, \Delta},$$

gdje oba pravila sječenja koja smo primjenili u izvođenju imaju isti stepen, ali manjeg su ranga. Ako je krajnji sekvent u izvođenju oblika

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \psi \quad \vdash \Gamma'', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \psi \leftrightarrow \chi, \varphi}}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \psi \leftrightarrow \chi, \Delta}, \quad \vdash \Delta, \varphi$$

tada ga transformišemo u izvođenje sa krajnjim sekventom

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \psi \quad \vdash \Delta, \varphi}{\vdash \Gamma', \Delta, \psi} \quad \vdash \Gamma'', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \psi \leftrightarrow \chi, \Delta},$$

gdje je pravilo sječenja koje smo primjenili istog stepena, a manjeg ranga.

Sa druge strane, krajnji sekvent u izvođenju može biti oblika

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma_1, \varphi, \psi \quad \vdash \Gamma_2, \psi}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \varphi}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta} \quad \text{ili} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma_1, \varphi \quad \vdash \Gamma_2}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \varphi}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta},$$

i tada, kako pravila \bowtie -uvođenja i \leftrightarrow -uvođenja nisu primjenjivana u podizvođenjima sa krajnjim sekventom $\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \varphi$, formula φ mora biti atomska formula. Ako ovo izvođenje nije normalno, tada u podizvođenju sa krajnjim sekventom $\vdash \Delta, \varphi$ posljednje primjenjeno pravilo je \bowtie -uvođenje ili \leftrightarrow -uvođenje, što situaciju svodi na prethodni slučaj.

Za $r = 2$ i $d > 0$ imamo dvije mogućnosti. Ako je krajnji sekvent u izvođenju oblika

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma, \varphi_1 \quad \vdash \Gamma, \varphi_2}{\vdash \Gamma, \varphi_1 \bowtie \varphi_2}}{\vdash \Gamma, \Delta} \quad \frac{\frac{\vdash \Delta, \varphi_1 \quad \vdash \Delta, \varphi_2}{\vdash \Delta, \varphi_1 \bowtie \varphi_2}}{\vdash \Gamma, \Delta},$$

to izvođenje možemo transformisati u izvođenje koje se završava primjenom sječenja

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi_1 \quad \vdash \Delta, \varphi_1}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

sa manjim stepenom. Ukoliko je krajnji sekvent u izvođenju oblika

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi_1 \quad \vdash \Gamma'', \varphi_2}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \Delta', \Delta''} \quad \frac{\frac{\vdash \Delta', \varphi_1 \quad \vdash \Delta'', \varphi_2}{\vdash \Delta', \Delta'', \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \Delta', \Delta''},$$

transformišemo ga u izvođenje koje se završava sa

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi_1 \quad \vdash \Delta', \varphi_1}{\vdash \Gamma', \Delta'}}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \Delta', \Delta''} \quad \frac{\frac{\vdash \Gamma'', \varphi_2 \quad \vdash \Delta'', \varphi_2}{\vdash \Gamma'', \Delta''}}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \Delta', \Delta''},$$

gdje su obje primjene pravila sječenja manjeg stepena. Po induktivnoj pretpostavci,

postoji normalno izvođenje sa krajnjim sekventima $\vdash \Gamma, \Delta'$ i $\vdash \Gamma'', \Delta''$ i po lemi 4.2 postoji normalno izvođenje za $\vdash \Gamma', \Gamma'', \Delta', \Delta''$. \square

Posledica 4.5.1. *Za svako izvođenje sekventa, postoji normalno izvođenje istog toga sekventa.*

Za multiskup formula Γ označimo sa $\lambda(\Gamma)$ skup elemenata iz W koji se pojavljuju u formulama iz Γ , a sa $\kappa(\Gamma)$ broj formula (pri čemu postoji mogućnost da se elementi ponavljaju) iz Γ .

Lema 4.4. *Ako postoji izvođenje $\vdash \Delta, \varphi$ tada je $\lambda(\{\varphi\}) \subseteq \lambda(\Delta)$.*

Dokaz. Osobina iskazana u gornjoj lemi očigledno važi za aksiomatske sekvente. Prilikom dokazivanja leme indukcijom posmatramo slučaj kada se izvođenje $\vdash \Delta, \varphi$ završava sa

$$\frac{\vdash \Delta', \psi \quad \vdash \Delta'', \varphi, \psi}{\vdash \Delta', \Delta'', \varphi}.$$

Ako je $A \in \lambda(\{\varphi\})$ i $A \notin \lambda(\Delta'')$, tada $A \in \lambda(\{\psi\})$. Po induktivnoj pretpostavci koju primjenjujemo na podizvođenje sa krajnjim sekventom $\vdash \Delta', \psi$, važi da $A \in \lambda(\Delta')$. \square

Lema 4.5. *Svaki sekvent $\vdash \Delta$ koji se pojavljuje u izvođenju sekventa $\vdash \Gamma$ zadovoljava $\lambda(\Delta) \subseteq \lambda(\Gamma)$ i $2 \leq \kappa(\Delta) \leq \kappa(\Gamma)$.*

Dokaz. Po lemi 4.4 znamo da primjena pravila sjećanja očuvava slova (tj. elemente skupa W) iz premisa, a očigledno je da ista osobina važi i za ostala pravila sistema. Takođe, za sva pravila važi $2 \leq \kappa(\Delta) \leq \kappa(\Gamma)$, gdje je sekvent $\vdash \Delta$ premissa, a $\vdash \Gamma$ zaključak posmatranog pravila. \square

Osobina iz naredne leme obično se podrazumijeva za formalne sisteme.

Lema 4.6. *Skup aksiomatskih sekvenata je odlučiv.*

Dokaz. Jednostavno je provjeriti da li su svojstva (0)-(5) Δ -kompleksa kojim definišemo \mathcal{M} -komplekse odlučiva. Otuda je skup aksiomatskih sekvenata koji dolaze iz \mathcal{M} -kompleksa odlučiv. Takođe, lako provjeravamo da li sekvent odgovara nekoj od dvije aksiome

proistekle iz permutacije tjemena trougla i različitih trouglova u jednoj Menelajevoj konfiguraciji. Tako, skup svih aksiomatskih sekvenata je rekurzivan. \square

Pod *atomskim* Menelajevim sistemom podrazumijevamo originalni sistem, s tim da su veznici \bowtie i \leftrightarrow izostavljeni iz jezika sistema i pravila \bowtie -uvođenja i \leftrightarrow -uvođenja su izostavljena iz skupa pravila. Sekvente ovoga sistema zovemo takođe *atomskim*.

Lema 4.7. *Atomski Menelajev sistem je odlučiv.*

Dokaz. Neka je $\vdash \Gamma$ atomski sekvent. Po lemi 4.5, ako se $\vdash \Delta$ pojavljuje u razvoju $\vdash \Gamma$, tada važi $\lambda(\Delta) \subseteq \lambda(\Gamma)$ i $\kappa(\Delta) \leq \kappa(\Gamma)$. Označimo sa S skup atomskih sekvenata

$$\{\vdash \Delta \mid \lambda(\Delta) \subseteq \lambda(\Gamma) \text{ i } \kappa(\Delta) \leq \kappa(\Gamma)\}.$$

Skup S je konačan, pa proceduru izvodimo po ugledu na [19].

Neka je $S_0 \subseteq S$ skup aksiomatskih sekvenata iz S . Kako je po lemi 4.6 skup aksiomatskih sekvenata odlučiv, tada ako je $(\vdash \Gamma) \in S_0$ onda je sekvent $\vdash \Gamma$ izvodljiv. Ukoliko nije nastupio ovaj slučaj, tada označimo sa S_1 skup koji sadrži sve elemente skupa S_0 i sve sekvente iz S koje možemo dobiti tačno jednom primjenom pravila sječenja na dva sekventa iz skupa S_0 . Ako je $S_1 = S_0$ tada $\vdash \Gamma$ nije izvodljiv. U suprotnom nastavljamo sa ovom procedurom sve dok se ili $\vdash \Gamma$ ne pojavi kao element nekog S_i , i u ovom slučaju $\vdash \Gamma$ je izvodljiv, ili dok ovom procedurom ne iscrpimo sve moguće izvodljive sekvente. U ovom drugom slučaju sekvent $\vdash \Gamma$ nije izvodljiv u atomskom Menelajevom sistemu. \square

Za formulu A kažemo da je potformula sekventa Γ ako je A podformula neke od formula iz Γ .

Dokaz tvrđenja 4.5. Neka je $\vdash \Gamma$ sekvent. Po posljedici 4.5.1 za svako izvođenje sekventa $\vdash \Gamma$ postoji normalno izvođenje tog sekventa, odnosno izvođenje koje možemo podijeliti na atomski i neatomski dio. Ako se $\vdash \Delta$ pojavljuje u neatomskom dijelu izvođenja, tada sve formule iz Δ su podformule Γ . Takođe, po lemi 4.5 važi $\kappa(\Delta) \leq \kappa(\Gamma)$.

Označimo sa S skup sekvenata

$$\{\vdash \Delta \mid \text{svaka formula iz } \Delta \text{ je podformula od } \Gamma \text{ i } \kappa(\Delta) \leq \kappa(\Gamma)\}.$$

Primjetimo da je skup S konačan i dokaz izvodimo procedurom kao u lemi 4.7, s tim da su u skupu S_0 sada osim aksiomatskih sekvenata i sekventi iz S koji su izvodljivi u atomskom Menelajevom sistemu koji je po lemi 4.7 odlučiv. Ako $\vdash \Gamma$ ne pripada skupu S_i , tada S_{i+1} sadrži sve elemente iz S_i i sve sekvente iz S dobijene tačno jednom primjenom ili pravila \times -uvođenja ili pravila \leftrightarrow -uvođenja na dva sekventa iz S_i . \square

U nastavku dajemo primjere sekvenata koji si valjani, ali nisu dokazivi u Menelajevom sistemu.

PRIMJER 9. Pokazaćemo da sekvent

$$\vdash (A, B, P, C, X, R), (A, C, P, B, X, Q), (B, R, C, X, P, A), (A, R, C, X, Q, B)$$

sa kraja poglavlja 4.2 nije dokaziv u Menelajevom sistemu.

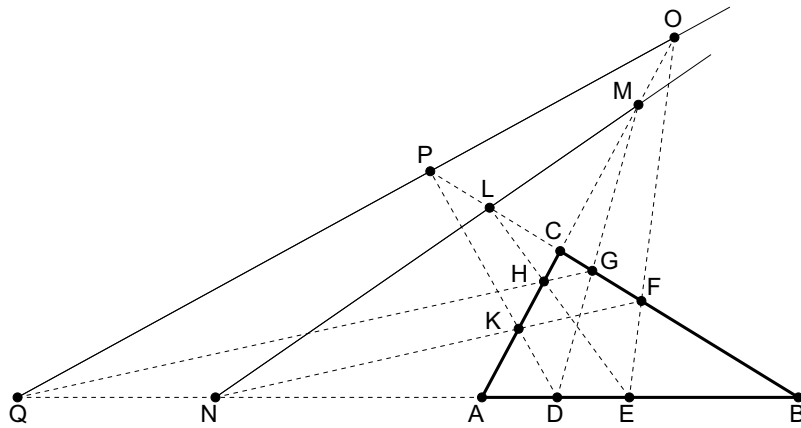
Prema posledici 4.5.1 dokazivost sekventa 4.1 povlači postojanje njegovog normalnog izvođenja, što u ovom slučaju znači da postoji izvođenje sekventa 4.1 u atomskom Menelajevom sistemu.

Svaki sekvent koji je dokaziv u atomskom Menelajevom sistemu ima paran broj formula jer i aksiomatski sekventi imaju paran broj formula, a primjena pravila sječenja ne utiče na parnost formula iz zaključka. Takođe, svaki dvočlani sekvent sadrži elemente iz iste orbite grupe G (vidjeti poglavlja 3.3). Kako u 4.1 ne postoje dva elementa iz iste orbite grupe G , poslednje primjenjeno pravilo u izvođenju ne može biti sječenje sa praznom formulom sječenja. Zaključujemo da je 4.1 ili aksiomatski sekvent ili je dobijen primjenom pravila sječenja sa nepraznom formulom sječenja na dvije premise, jednu sa četiri a drugu sa dva elementa. Znači, sekvent 4.1 je (do na akciju grupe G) aksiomatski sekvent, što nije moguće iz sljedećih razloga.

U sekventu 4.1 postoje 7 elemenata iz skupa W . Da je sekvent 4.1 proistekao iz \mathcal{M} -kompleksa L važi bi $|L_2| = 4$ i $|L_1| + |L_0| = 7$. Ojlerova karakteristika $|L_2| - |L_1| + |L_0|$ geometrijske realizacije kompleksa L (vidjeti tvrđenje 3.2) je $2 - 2g$, gdje je g rod površi koju posmatramo, pa imamo da broj $|L_2| - |L_1| + |L_0|$ mora biti paran. Zbog ovoga bi trebalo da broj $|L_0| - |L_1|$ bude paran, što bi zahtijevalo da $|L_1|$ i $|L_0|$ ne budu cijeli brojevi jer važi $|L_1| + |L_0| = 7$.

PRIMJER 10. Posmatrajmo sljedeći rezultat incidencije.

Za trougao ABC i tačke D, E, F, G, H, K na njegovim stranama (vidjeti sliku 4.15) neka je $AB \cap FK = \{N\}$, $AB \cap GH = \{Q\}$, $BC \cap EH = \{L\}$, $BC \cap DK = \{P\}$, $AC \cap DG = \{M\}$ i $AC \cap EF = \{O\}$. Tačke M, L i N su kolinearne ako i samo ako su kolinearne i tačke O, P i Q .



Slika 4.15: Rezultat incidencije iz primjera 10

Pokazaćemo da je sekvent

$$\begin{aligned} & \vdash(A, B, C, L, M, N), (A, B, C, L, H, E), (A, B, C, P, K, D), (A, B, C, G, M, D), \\ & (A, B, C, F, O, E), (A, B, C, G, H, Q), (A, B, C, F, K, N), (A, B, C, P, O, Q) \end{aligned}$$

koji je proistekao iz gornjeg rezultata incidencije, valjan.

Posmatrajmo projektivnu interpretaciju koja tačke $A, B, C, D, E, F, G, H, K, N, Q, L, P, M$ i O preslikava po uslovima teoreme i pretpostavimo da važi kolinearne tačaka

M , L i N . Ova interpretacija zadovoljava prvih sedam formula iz sekventa, odnosno važe sljedećih sedam jednakosti.

$$\begin{aligned} \frac{|AN|}{|NB|} \cdot \frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CM|}{|MA|} &= -1, & \frac{|AH|}{|HC|} \cdot \frac{|CL|}{|LB|} \cdot \frac{|BE|}{|EA|} &= -1, \\ \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CK|}{|KA|} \cdot \frac{|AD|}{|DB|} &= -1, & \frac{|CG|}{|GP|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} \cdot \frac{|AM|}{|MC|} &= -1, \\ \frac{|CO|}{|OA|} \cdot \frac{|AE|}{|EB|} \cdot \frac{|BF|}{|FC|} &= -1, & \frac{|AQ|}{|QB|} \cdot \frac{|BG|}{|GC|} \cdot \frac{|CH|}{|HA|} &= -1 \end{aligned}$$

$$i \frac{|AK|}{|KC|} \cdot \frac{|CF|}{|FB|} \cdot \frac{|BN|}{|NA|} = -1.$$

Nakon množenja lijevih i desnih strana gornjih jednakosti, pojedini razlomci se međusobno ponište i dolazimo do jednakosti

$$\frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CO|}{|OA|} \cdot \frac{|AQ|}{|QB|} = -1,$$

što dokazuje kolinearnost tačkaka O , P i Q pa interpretacija zadovoljava i osmu formulu iz sekventa.

Analogno dokazujemo da interpretacija koja zadovoljava bilo kojih sedam formula iz sekventa, zadovoljava i poslednju formulu. Tako, posmatrani sekvent je valjan, ali u Menelajevom sistemu on nije dokaziv. Da bismo to dokazali, pretpostavimo suprotno: neka je pomenuti sekvent (označimo ga sa Γ) dokaziv u Menelajevom sistemu. Tada se lako vidi da posljednje pravilo u izvođenju tog sekventa ne može biti uvođenje veznika. Koristeći lemu 4.4, slijedi da ne može biti ni sječenje sa praznom formulom. Takođe, na potpuno isti način kao što je dokazano u prethodnom primjeru (koristeći Ojlerovu karakteristiku), slijedi da Γ ne može biti ni aksiomatski. Jedina mogućnost koja nam je ostala je da je sekvent Γ dobijen primjenom pravila sječenja sa nepraznom formulom. Pošto aksiomatski sekventi imaju paran broj formula, a sječenje čuva parnost, imamo dvije mogućnosti:

- (1) Jedna premisa ima 4 elementa (označimo je sa Δ), a druga 6. Dokažimo da Δ ne može biti aksiomatski sekvent. Kada bi on bio aksiomatski, morao bi poticati od tetraedarske triangulacije sfere, jer nam ta triangulacija daje jedini četvoroelementni aksiomatski sekvent. Međutim, primijetimo da Δ ima tri formule koje u sebi sadrže elemente A , B i C , što nam daje kontradikciju, jer u tetraedarskoj triangulaciji sfere ne postoje tri trougla koja imaju tri zajednička elementa. Dakle, Δ nije aksiomatski, pa je onda dobijen sječanjem od dva sekventa koji imaju 4 i 2 elementa. Sekvent od 4 elementa ponovo ima tri formule koje sadrže elemente A , B i C , tako da opet možemo primijeniti istu analizu i zaključiti da ni on nije aksiomatski, pa mora biti dobijen sječanjem. Nastavljajući da posmatramo četvoroelementne sekvente u izvođenju, pošto je izvođenje konačno, dolazimo do zaključka da jedan od njih mora biti aksiomatski, što smo vidjeli da nije izvodljivo. Dakle, Γ ne može biti dobijen sječanjem u kome jedna premisa ima 4 elementa, a druga 6 elemenata.
- (2) Jedna premisa ima 2 elementa, a druga 8. Tada premisa od 8 elemenata mora biti jednaka početnom sekventu (do na dejstvo grupe G), pa onda ponovo razmatramo njegovu dokazivost. Pošto on ne može biti dobijen sječanjem od dvije premise koje imaju 4 i 6 elemenata (prethodni slučaj), slijedi da je opet dobijen sječanjem od dvije premise koje imaju 2 i 8 elemenata. Onda ponovo posmatramo premisu od 8 elemenata i tako dalje. Pošto je izvođenje konačno, slijedi da Γ mora biti aksiomatski sekvent, a pokazano je da nije.

Tako, posmatrani sekvent nije dokaziv u Menelajevom sistemu. Rezultat incidencije iz ovoga primjera ekvivalentan je Paskalovoj teoremi o šest tačaka na konici (vidjeti [3]) i zapravo nam je pokazao da ovakav tip rezultata incidencije nije dokaziv u Menelajevom sistemu.

4.6 O odlučivosti atomskog Menelajevog sistema

Važno je napomenuti da je odlučivost skupa aksiomatskih sekvenata, atomskog Menelajevog sistema i na kraju, Menelajevog sistema dokazana u poglavlju 4.5 (leme 4.6, 4.7 i propozicija 4.5).

Iz posledice 4.5.1 znamo da za svako izvođenje sekventa, postoji normalno izvođenje tog istog sekventa, tj. ni pravilo \bowtie -uvođenja ni pravilo \leftrightarrow -uvođenja ne prethodi primjeni pravila sječenja u izvođenju. Takođe, važe sljedeće leme.

Lema 4.8. *Ako je sekvent $\vdash \Gamma, \varphi \bowtie \psi$ izvodljiv, tada za ovaj sekvent postoji normalno izvođenje u kome je kao poslednje pravilo primjenjeno pravilo uvođenja veznika \bowtie , kojem je glavna formula $\varphi \bowtie \psi$.*

Dokaz. Primjenjujemo indukciju po $n \geq 1$, gdje je n broj pojavljivanja veznika \bowtie i \leftrightarrow u sekventu $\vdash \Gamma, \varphi \bowtie \psi$. Ako je $n = 1$ tada proizvoljno normalno izvođenje zadovoljava lemu.

Ako je $n > 1$ i u normalnom izvođenju sekventa $\vdash \Gamma, \varphi \bowtie \psi$ poslednje primjenjeno pravilo je \bowtie -uvođenje čija glavna formula nije $\varphi \bowtie \psi$, tada kraj izvođenja ima oblik

$$\frac{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta \quad \vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \chi}{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta \bowtie \chi}.$$

Primjenom induktivne hipoteze na izvođenja sa krajnjim sekventima $\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta$ i $\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \chi$ dobijemo normalno izvođenje koje se završava sa

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \theta, \varphi \quad \vdash \Gamma', \theta, \psi}{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta} \quad \frac{\vdash \Gamma', \chi, \varphi \quad \vdash \Gamma', \chi, \psi}{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \chi}}{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta \bowtie \chi}.$$

Najzad, nakon što promjenimo raspored primjene pravila \bowtie -uvođenja dolazimo do normalnog izvođenja koje se završava sa

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \theta, \varphi \quad \vdash \Gamma', \chi, \varphi}{\vdash \Gamma', \theta \bowtie \chi, \varphi} \quad \frac{\vdash \Gamma', \theta, \psi \quad \vdash \Gamma', \chi, \psi}{\vdash \Gamma', \theta \bowtie \chi, \psi}}{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta \bowtie \chi}.$$

Ako je u normalnom izvođenju sekventa $\vdash \Gamma, \varphi \bowtie \psi$ posljednje primjenjeno pravilo zapravo pravilo uvođenja veznika \leftrightarrow tada kraj izvođenja ima oblik

$$\frac{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta \quad \vdash \Gamma'', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \varphi \bowtie \psi, \theta \leftrightarrow \chi}.$$

Po induktivnoj pretpostavci, postoji normalno izvođenje koje se završava sa

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \theta \quad \vdash \Gamma', \psi, \theta}{\vdash \Gamma', \varphi \bowtie \psi, \theta} \quad \vdash \Gamma'', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \varphi \bowtie \psi, \theta \leftrightarrow \chi},$$

koje transformišemo u normalno izvođenje koje se završava sa

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \theta \quad \vdash \Gamma'', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \varphi, \theta \leftrightarrow \chi} \quad \frac{\vdash \Gamma', \psi, \theta \quad \vdash \Gamma'', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \psi, \theta \leftrightarrow \chi}}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \varphi \bowtie \psi, \theta \leftrightarrow \chi}.$$

□

Lema 4.9. *Ako postoji izvođenje sekventa $\vdash \Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi$ i u Γ ne postoji formula oblika $\theta \bowtie \chi$, tada postoji normalno izvođenje ovoga sekventa u kome je kao posljednje pravilo primjenjeno pravilo uvođenja veznika \leftrightarrow , kome je glavna formula $\varphi \leftrightarrow \psi$.*

Dokaz. Primjenjujući indukciju po $n \geq 1$, gdje je n broj pojavljivanja veznika \leftrightarrow u sekventu $\vdash \Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi$. Ako je $n = 1$ tada proizvoljno normalno izvođenje zadovoljava lemu.

Ako je $n > 0$ i krajnji sekvent u normalnom izvođenju sekventa $\vdash \Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi$ ima oblik

$$\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \theta \quad \vdash \Gamma'', \psi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \varphi \leftrightarrow \psi, \theta} \quad \vdash \Gamma''', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \Gamma''', \varphi \leftrightarrow \psi, \theta \leftrightarrow \chi},$$

tada, nakon što promjenimo raspored primjene pravila \leftrightarrow -uvođenja, dolazimo do nor-

malnog izvođenja koje se završava sa

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Gamma', \varphi, \theta \quad \vdash \Gamma''', \chi}{\vdash \Gamma', \Gamma''', \varphi, \theta \leftrightarrow \chi} \quad \vdash \Gamma'', \psi}{\vdash \Gamma', \Gamma'', \Gamma''', \varphi \leftrightarrow \psi, \theta \leftrightarrow \chi}}{.}$$

□

Iz leme 4.8 slijedi da postoji izvođenje sekventa $\vdash \Gamma, \varphi \bowtie \psi$ ako i samo ako postoji izvođenje sekvenata $\vdash \Gamma, \varphi$ i $\vdash \Gamma, \psi$. Lema 4.9 implicira da ako u Γ ne postoji formula oblika $\theta \bowtie \chi$, tada postoji izvođenje sekventa $\vdash \Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi$ ako i samo ako za neku podjelu skupa Γ na Γ', Γ'' , postoji izvođenje sekvenata $\vdash \Gamma', \varphi$ i $\vdash \Gamma'', \psi$. Tako, Menelajev sistem je odlučiv ako je odlučiv njegov atomski Menelajev sistem, tj. dio sa atomskim formulama i bez primjene pravila uvođenja veznika \bowtie i \leftrightarrow .

Jedine mogućnosti za dvočlane skupove aksiomatskih sekvenata su identitet i dvije aksiome (vidjeti poglavlje 4.1). Dakle, ako u atomskom Menelajevom sistemu postoji izvođenje dvočlanog sekeventa, tada taj sekvent sadrži šestorku i element iz orbite grupe G za datu šestorku (vidjeti poglavlje 3.3). Možemo zaključiti da ako je sekvent $\vdash \Gamma$ dobijen primjenom pravila sjećanja kome je jedna premisa $\vdash \Gamma'$ i multiskupovi Γ i Γ' imaju istu kardinalnost, tada je skup Γ' isti kao skup Γ s tim da je jedna šestorka iz Γ zamjenjena nekom drugom šestorkom iz njene G -orbite.

Algoritam za provjeru da li postoji izvođenje sekventa $\vdash \Gamma$ u atomskom Menelajevom sistemu počiva na indukciji po broju $n \geq 2$, gdje je n kardinalnost skupa Γ . Induktivna pretpostavka je da za sekvente sa manje od n elemenata postoji izvođenje u sistemu.

Za skup Γ kardinalnosti n postoji tačno 24^n multi(skupova) Γ' koji su nastali od Γ tako što je neki od njegovih elemenata zamjenjen elementom iz njegove G -orbite. Dakle, postoji izvođenje sekventa $\vdash \Gamma$ ako i samo ako je jedan od 24^n sekvenata Γ' ili aksiomatski ili postoji izvođenje tog sekventa u kome poslednje pravilo sjećanja ima premise sa manje od n elemenata. Tako, algoritam možemo svesti na pitanje da li je sekvent sa n elemenata aksiomatski (ovo pitanje je po lemi 4.6 odlučivo) ili sekvent možemo dobiti primjenom pravila sjećanja kod koga premise imaju manje od n elemenata.

DIO 5

Implementacija sistema

U dijelu koji slijedi izložene su efikasne procedure za provjeru da li je neki sekvent aksiomatski ili nije. Ove procedure realizovane su u programskom jeziku MATLAB, prvi put razvijenom 80-tih godine prošlog vijeka. MATLAB posjeduje širok spektar primjene, od matematičkih izračunavanja, simulacije i modelovanja, analize i obrade podataka do grafičkog predstavljanja podataka i razvoja algoritama. Ime je dobio od riječi MATrična LABoratorija (engl. matrix laboratory) jer kao osnovni oblik podatka ima matricu, odnosno niz. Upravo je ova činjenica zaslužna za izbor MATLAB-a za realizaciju pomenutih procedura, jer su aksiomatski sekventi proizašli iz triangulacija orijentisanih površi i dati su u obliku skupa od n šestorki tačaka. Više o ovom programskom jeziku nalazi se u [20].

Procedura koje dajemo u nastavku odnose se na ispitivanje da li je neki sekvent kardinalnosti n , dat u obliku skupa od n šestorki tačka, aksiomatski.

5.1 Procedura kojom se provjerava da li $\vdash \Gamma$ može predstavljati aksiomatski sekvent

Iz skupa od n (n je parno) ulaznih šestorki proizilazi struktura 2-dimenzionalnog kompleksa L kojem su definisani: tjemena, ivice i trouglovi (dakle, simpleksi dimenzije 0, 1 i 2). Takođe, dato je i lijepljenje 2-simpleksa (vidjeti klase ekvivalencije s_1, \dots, s_m iz poglavlja 3.2) duž njegovih jednodimenzionalnih lica (ivica iz kompleksa). Cilj je ispitati da li nakon izvršenog lijepljenja dobijamo zatvorenu, orijentabilnu površ. Drugim riječima, ispitujemo da li skup ulaznih šestorki, odnosno kompleks L , zadovoljava osobine (0)-(5) kojima smo definisali \mathcal{M} -komplekse, kako slijedi.

0. Skup šestorki je konačan, pa je i L konačan.
1. Svako tjeme i ivica se pojavljuju kao element neke šestorke i ne postoji simpleks dimenzije 3, pa je L homogen, 2-dimenzionalan kompleks.
2. Elementi na prvom, drugom i trećem mjestu u šestorci moraju biti različita tjemena, a elementi na četvrtom, petom i šestom mjestu moraju biti različite ivice.

Element koji predstavlja tjeme (ivicu) ne smije se naći na poslednja (prva) tri mjesta u šestorci. Ispitivanjem ovih osobina provjerili smo regularnost kompleksa L .

3. Potrebno je ispitati da li se svaki element koji interpretiramo kao ivicu pojavljuje tačno dva puta u šestorkama.
4. Za svaki element w koji u šestorkama predstavlja tjeme potrebno je formirati skup L_w i ispitati osobinu (4) za skup L_w . Na primjer, posmatrajmo sekvent iz poglavlja 4.4:

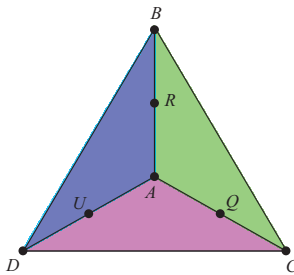
$$\vdash (A, B, D, V, U, R), (B, C, D, W, V, P), (A, C, D, W, U, Q), (A, B, C, P, Q, R).$$

Uzmimo tjeme A i krenuvši od proizvoljne šestorke iz skupa

$$L_A = \{(A, B, D, V, U, R), (A, C, D, W, U, Q), (A, B, C, P, Q, R)\}$$

možemo nanizati šestorke iz L_A tako da svake dvije susjedne, uključujući i prvu i posljednju, budu A -susjedi, tj. da dijele ivicu sa tjemenom A , što je ilustrovano na slici 5.1.

5. Svaki 2-simpleks iz L lokalno je orijentisan sa svojim funkcijama $d_i^2 : K_2 \rightarrow K_1$, $i = 0, 1, 2$, koje smo definisali u poglavlju 3.2 (vidjeti primjer 1). Potrebno je iz skupa $\{+1, -1\}$, za svaki 2-simpleks izabrati koeficijent tako da 2-lanac formiran na L bude 2-cikl. Takav izbor uvijek postoji ukoliko je geometrijska realizacija $|L|$ orijentisana površ.



Slika 5.1:
Disk oko tjemena A

Procedura **AksiomSekvent** koja vrši gore naznačene provjere data je u prilogu B.4.

Proizvoljna šestorka iz datog skupa od n šestorki za koje vršimo gore pomenutu proceduru je atomska formula sistema i zapravo predstavlja trougao kome je pridružena Menelajeva konfiguracija. Dakle, tačke iz šestorke su tačke trougla i to: prve tri tačke u šestorci su tjemena trougla, a zadnje tri tačke u šestorci su tri kolinearne tačke sa Menelajevе prave koje leže na stranicama trougla. U zavisnosti od toga da li posmatramo euklidsku ili projektivnu interpretaciju datih šestorki, tačke iz šestorke imaju afine ili homogene koordinate. Tako je, tokom razvoja procedure

odlučeno da se upotrijebi MATLAB-ova komponenta Symbolic Math Toolbox, specijalno razvijena za rad sa simboličkim promjenljivim.

Usled više Menelajevih konfiguracija koje uočavamo na jednom trouglu, postoji mogućnost da geometrijskoj realizaciji $|K|$ odgovara više sekvenata, od kojih možemo imati

više aksiomatskih, pa su razvijene procedure koje, po aksiomama sistema, a na osnovu skupa ulaznih šestorki, prave ove sekvente za koje je onda potrebno ispitati da li su aksiomatski.

Ulazne šestorke dajemo u obliku matrice dimenzija $6 \times n$ i za svaku kolonu matrice (tj. šestorku) imamo 24 elementa iz orbite grupe G za datu šestorku. Tako, za skup Γ od n šestorki možemo formirati 24^n (multi)skupova Γ' zamjenom nekog od elementa iz Γ sa elementom iz njegove G -orbite, što je u praksi prilično teško realizovati. Već za $n = 6$ dobijamo višemilionski broj mogućnosti, a kad se uzme u obzir da je od njihovog ukupnog broja samo nekolicina vrijedna pažnje za ispitivanje koje vršimo, zaključujemo da je poprilično nepraktično računati svih 24^n mogućnosti. Najveći dio ovako formiranih skupova Γ' odbacujemo usled neispunjenja uslova iz provjera od 0. do 3. sa početka ovog poglavlja, sa kojima ispitujemo da li ulazne šestorke zadovoljavaju osobine \mathcal{M} -kompleksa. Do ovih neskladnosti u skupovima iz Γ' dolazi usled četiri različite Menelajeve konfiguracije koje uočavamo na jednom trouglu što rezultuje da jednu šestorku možemo napisati na četiri načina, ali u ovim načinima se u šestorkama prebacuju elementi koje predstavljaju tjemena u elemente kojima je interpretacija ivica trougla (i obrnuto). Procedure koje formiraju $4^n \cdot 6^n$ mogućih načina na koje možemo napisati n šestorki su:

1. Procedura `MeneKonf` - prilozi B.1 i B.2

1.1 Za svaku od n ulaznih šestorki formirati po 4 različite Menelajeve konfiguracije po 3.8, odnosno aksiomi $\vdash (A, B, C, P, Q, R), (A, R, Q, P, C, B)$.

1.2 Za svaku od n šestorki, od 4 moguća oblika za tu šestorku izabrati jedan i tako formirati skup on n šestorki. Na kraju dobijemo 4^n mogućnosti za n ulaznih šestorki.

1.3 Od 4^n mogućnosti formiranih pod tačkom 1.2 izdvojimo samo one koje su nam bitne za dalje razmatranje, tj. odbacimo sve one skupove šestorki koji ne prođu ispitivanja pod tačkama 0-3. iz procedure `AksiomSekvent`.

2. Procedura `MenePerm` - prilog B.3

2.1 Po aksiomi

$$\vdash (A, B, C, P, Q, R), (B, C, A, Q, R, P)$$

svaku šestorku napišemo na šest načina i na kraju formiramo 6^n mogućnosti za n -člani skup ulaznih šestorki. Napominjemo da ove permutacije ne utiču na prethodno ispitane osobine pod tačkom 1.3, pa tako njih ima smisla raditi samo za one skupove šestorki koji zadovolje ove osobine.

Primjenu gornjih procedura i procedure `AksiomSekvent` pokazaćemo na primjeru u narednom poglavlju.

5.2 Primjer

Posmatramo osmočlani sekvent

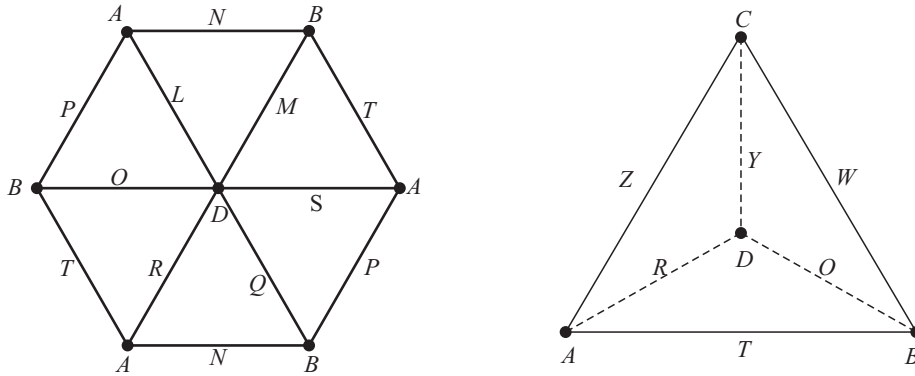
$$\vdash (A, D, B, O, P, L), (D, A, B, N, M, L), (A, B, D, M, S, T), (A, B, D, Q, S, P), \\ (A, B, D, Q, R, N), (A, D, C, Y, Z, R), (B, D, C, Y, W, O), (A, B, C, W, Z, T).$$

Ovaj sekvent dobili smo primjenom pravila sječanja na sekvente:

$$\vdash (A, D, B, O, P, L), (D, A, B, N, M, L), (A, B, D, M, S, T), (A, B, D, Q, S, P), \\ (A, B, D, Q, R, N), (A, B, D, O, R, T) \text{ i}$$

$$\vdash (A, D, C, Y, Z, R), (B, D, C, Y, W, O), (A, B, C, W, Z, T), (A, B, D, O, R, T).$$

Osmočlani sekvent sa početka odgovara torusu koji je nastao kao povezana suma torusa i tetraedra sa slike 5.2 u odnosu na trougao ABD čije smo stranice označili sa O, R i T .



Slika 5.2: Torus i tetraedarska triangulacija sfere $ABCD$

Da je rezultujući osmočlani sekvent aksiomatski ispitali smo pokretanjem programa **AksiomSekvent** sa ulaznom matricom koju smo nazvali *UlazneSestorke*, i u kojoj su elementi iz i -te ulazne šestorke predstavljeni u i -toj koloni matrice.

$$UlazneSestorke = \begin{bmatrix} A & D & A & A & A & A & B & A \\ D & A & B & B & B & D & D & B \\ B & B & D & D & D & C & C & C \\ O & N & M & Q & Q & Y & Y & W \\ -P & -M & -S & -S & -R & -Z & -W & -Z \\ L & L & T & P & N & R & O & T \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Nakon što izvršimo pokretanje procedure AksiomSekvent kao rezultat dobijamo sledeće obavještenje.

Osobina (0) je zadovoljena - imamo konacan i paran broj sestorka!

Svaka sestorka sadrzi 6 razlicitih tacaka!

Nijedna tacka koja predstavlja tjeme ne nalazi se na 4., 5., i 6. mjestu!

Nijedna tacka koja predstavlja stranicu ne nalazi se na 1., 2., i 3. mjestu!

Osobine (1) i (2) su ZADOVOLJENE!

Osobina (3) je ZADOVOLJENA -- svaka stranica se pojavljuje tacno 2 puta u sestorkama!

[L, N, P, R, S, T, Z]

Oko cvora A JESTE disk!

[M, N, O, P, Q, T, W]

Oko cvora B JESTE disk!

[W, Z, Y]

Oko cvora C JESTE disk!

[L, M, O, Q, R, S, Y]

Oko cvora D JESTE disk!

Osobina (4) je zadovoljena -- kompleks dat ulaznim sestorkama je povrs!

Matrica =

[0, -N, -M, Q, -Q, Y, -Y, -W]

[-P, M, S, -S, R, -Z, W, Z]

[L, -L, -T, P, -N, R, -O, -T]

Provjera =

$2*R - 2*N - 2*T$

Koeficijenti uz sestorke

1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1

Iz rezultata koji nam je saopšten nakon pokretanja MATLAB-ove skripte, vidimo da je Δ -kompleks dat ulaznim šestorkama *konačan, homogen, regularan*, svaka ivica koja prestavlja simpleks dimenzije 1 je *lice tačno dva* simpleksa dimenzije 2, svaki element

koji predstavlja simpleks dimenzije 0 (u ovom primjeru to su tjemena A, B, C i D) je *vezan*. Osobina koja u ovom trenutku, po programu koji smo napravili, nije zadovoljena je *orijentabilnost*, tj. osobina koja odgovara tački (5) iz poglavlja 3.2. Ova „prividna” nezadovoljenost osobine orijentabilnosti biće razriješena nakon što na ulazne šestorke primjenimo MATLAB-ove procedure koje odgovaraju aksiomama formalnog sistema. Tako, ulazne šestorke možemo napisati na određeni broj načina i provjeriti koji to njihov zapis, pored gornjih osobina, zadovoljava i orijentabilnost.

Zatim pokrenemo proceduru `MenePerm`.

Procedura `MenePerm` svaku šestorku napiše na šest različitih načina, i na kraju napravi 6^8 mogućih kombinacija za ulazni sekvent. Zbog ekonomičnosti prostora, samo neke od 6^8 kombinacija date su u prilogu B.6.

Jedna od 6^8 ovako dobijenih mogućnosti data je u obliku sljedeće matrice:

$$UlazneSestorke = \begin{bmatrix} A & B & A & D & D & C & C & C \\ B & A & B & B & A & D & D & B \\ D & D & D & A & B & A & B & A \\ O & L & M & P & N & R & O & T \\ -L & -M & -S & -S & -Q & -Z & -W & -Z \\ P & N & T & Q & R & Y & Y & W \end{bmatrix}$$

Sada, rezultat provjere osobina od (0) do (5) Δ -kompleksa određenog šestorkama iz gornje matrice je:

Osobina (0) je zadovoljena - imamo konacan i paran broj sestorka!

Svaka sestorka sadrzi 6 razlicitih tacaka!

Nijedna tacka koja predstavlja tjeme ne nalazi se na 4., 5., i 6. mjestu!

Nijedna tacka koja predstavlja stranicu ne nalazi se na 1., 2., i 3. mjestu!

Osobine (1) i (2) su ZADOVOLJENE!

Osobina (3) je ZADOVOLJENA -- svaka stranica se pojavljuje tacno 2 puta u sestorkama!

[L, N, P, R, S, T, Z]

Oko cvora A JESTE disk!

[M, N, O, P, Q, T, W]

Oko cvora B JESTE disk!

[W, Z, Y]

Oko cvora C JESTE disk!

[L, M, O, Q, R, S, Y]

Oko cvora D JESTE disk!

Osobina (4) je zadovoljena -- kompleks dat ulaznim sestorkama je povrs!

Matrica =

[0, L, M, -P, -N, R, -O, -T]

[-L, -M, -S, S, Q, -Z, W, Z]

[P, N, T, -Q, -R, Y, -Y, -W]

Provjera =

0

Koeficijenti uz sestorke

1 1 1 -1 -1 1 -1 -1

U izlaznom rezultatu procedure, $Provjera = 0$ znači da je $\partial c = 0$, pri čemu je cikl $c = \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \varepsilon_3 t_3 + \varepsilon_4 t_4 + \varepsilon_5 t_5 + \varepsilon_6 t_6 + \varepsilon_7 t_7 + \varepsilon_8 t_8$, gdje su t_1, t_2, \dots, t_8 šestorke date u kolonama matrice *UlazneSestorke* redom, a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8$ *Koeficijenti uz šestorke* i iznose $+1, +1, +1, -1, -1, +1, -1, -1$, redom.

Dakle, cikl c za koji važi $\partial c = 0$ je

$$c = t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5 + t_6 - t_7 - t_8.$$

Važno je napomenuti da ovo nije jedina mogućnost od 6^8 koliko smo ih formirali, da skup od osam šestorki predstavlja aksiomatski sekvent. Na osnovu načina na koji smo formirali ovih 6^8 mogućnosti, jasno je da svaka od mogućnosti zadovoljava osobine od (0) do (4). U ovom trenutku, zadovoljenje ili nezadovoljene osobine (5) određuje nam da li neki osmočlani skup šestorki prihvatamo kao aksiomatski ili odbacujemo.

Kao rezultat incidencije koji stoji iza gore uvedenog osmočlanog aksiomatskog sekventa možemo smatrati teoremu iz narednog poglavlja.

Da bi provjerili da li iz ulaznih šestorki možemo formirati još neki aksiomatski sekvent, pokrećemo proceduru *MeneKonf* koja odgovara aksiomi

$$\vdash (A, B, C, P, Q, R), (A, R, Q, P, C, B).$$

Ova procedura za 8 ulaznih šestorki formira ukupno 4^8 mogućnosti i ispituje koja od ovih mogućnosti može predstavljati aksiomatski sekvent. U ovom primjeru rezultat je dat u narednim redovima. Napominjemo da ovaj dio procedure zanemaruje granice 2-cikla, pa su tako u šestorkama elementi na petom mjestu sa pozitivnim predznakom.

Kombinacija 1 ulazi u razmatranje!

ans =
'ADBOPL'

ans =
'DABNML'

ans =
'ABDMST'

ans =
'ABDQSP'

ans =
'ABDQRN'

ans =
'ADCYZR'

ans =
'BDCYWO'

ans =
'ABCWZT'

Dakle, od svih 4^8 mogućnosti, samo jedna može predstavljati površ. Za detaljno objašnjenje usled čega odbacujemo sve ostale mogućnosti pogledati 5.1. Neke od 4^8 kombinacija date su u prilogu B.5.

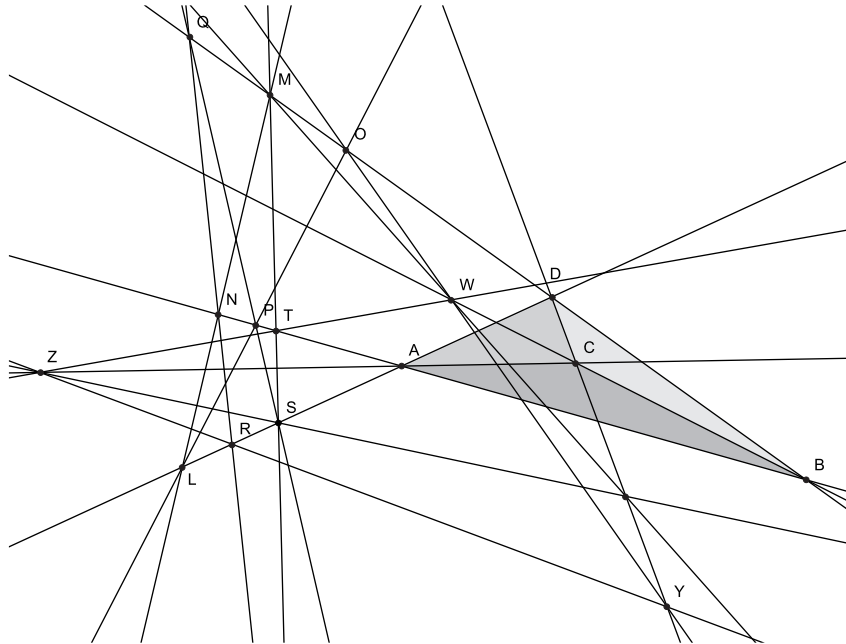
5.2.1 Rezultat incidencije iz sekventa sa osam atomskih formula

Procedure koje su uvedene u prethodnom poglavlju nemaju mogućnost da se teorema incidencije i njen dokaz automatski proizvedu iz aksiomatskog sekventa. Razvijanje jednog takvog dokazivača je pravac u kojem planiramo usmjeriti istraživanja u budućnosti.

Iščitavanje rezultata incidencije iz aksiomatskog sekventa

$$\vdash (A, D, B, O, P, L), (D, A, B, N, M, L), (A, B, D, M, S, T), (A, B, D, Q, S, P),$$
$$(A, B, D, Q, R, N), (A, D, C, Y, Z, R), (B, D, C, Y, W, O), (A, B, C, W, Z, T).$$

je cilj koji je postavljen u ovoj sekciji. Naravno, uvijek možemo od osam kolinearnosti proizvoljno izabrati sedam i tvrditi da je osma kolinearnost automatski zadovoljena. Osim toga važi i konkurentnost koju iskazujemo u nastavku.



Slika 5.3: Geometrijska interpretacija posmatranog sekventa

Tvrđenje 5.1. *Posmatrajmo Pappusovu konfiguraciju koja se sastoji od dvije trojke međusobno različitih kolinearnih tačaka (Q, M, O) i (L, R, S) . Neka je $\{D\} = QM \cap LR$. Tačke na Pappusovoj pravoj označimo sa*

$$\{N\} = QR \cap LM, \{P\} = LO \cap SQ \text{ i } \{T\} = QS \cap RO,$$

a tačke presjeka Pappusove prave sa pravama LR i QM sa $\{A\} = NP \cap LR$ i $\{B\} = NP \cap QM$.

Označimo sa C i Z dvije različite tačke sa proizvoljne prave koja prolazi tačkom A . Neka je

$$\{W\} = CB \cap TZ \text{ i } \{Y\} = ZR \cap DC.$$

Prave WM, SZ i DC su konkurentne.

Dokaz. Posmatrajmo projektivnu interpretaciju koja preslikava tačke $A, B, C, D, Q, M, O, L, R, S, N, P, T, Z, W, Y$ kako je navedeno u propoziciji. Jasno je da ova interpretacija zadovoljava svih osam formula iz sekventa. Znači, interpretacija zadovoljava i formulu sječenja (A, B, D, O, R, T) , što zajedno sa atomskim formulama (A, B, D, M, S, T) i (A, B, C, W, Z, T) implicira da su trouglovi MOW i ZRS perspektivni u odnosu na tačku T . Stoga je

$$MO \cap RS = \{D\}$$

$$WO \cap RZ = \{Y\} \in DC$$

$$WM \cap SZ \in DC$$

odnosno prave WM, SZ i DC su konkurentne. □

DIO 6

Računarski podržano dokazivanje teorema u geometriji

Težnja matematičara za formalizacijom matematike, zajedno sa pojavom, razvojem i sveopštoj dostupnosti računara, dovela je do upotrebe računara za dokazivanje teorema i provjeru dokaza. Sistemi za formalno dokazivanje teorema intenzivno se razvijaju još od 1967. godine kada se pojavio prvi - De Bruijnov *AutoMath*. Sa mogućnošću mašinskog dokazivanja teorema, što je razvoj ovih sistema omogućio, neke teoreme čiji su dokazi bili prekomplikovani (enormno dugi i kompleksni) za čovjeka, formalizovane su u okviru sistema za formalno dokazivanje. Najpoznatiji primjer je svakako bojenje grafova i teorema o četiri boje: planarni graf može se obojiti tako da nikoja dva susjedna tjemena nemaju istu boju, pri tom koristeći najviše četiri boje. Teorema je formalizovana u okviru *Coq* dokazivača teorema početkom tekućeg vijeka i od tada se smatra i konačno formalno dokazanom.

Sistemi za formalno dokazivanje teorema današnjice mogu biti u određenoj mjeri automatizovani, gdje u suštini čovjek nema uvid u sam dokaz tvrđenja, pa iako jako teška i komplikovana tvrđenja se mogu sa njima dokazati, postoji i određena doza nepovjerenja u način njihove implementacije. Naročito popularni i sa velikim brojem korisnika su sistemi za interaktivno dokazivanje teorema. To su programi - asistenti za dokazivanje teorema u kojim korisnik (čovjek) unosi određene korake dokaza, a sam program pronalazi automatske dokaze kad god je to moguće. U moru interaktivnih asistenata za dokazivanje teorema koji su danas dostupni, važno mjesto sa velikim brojem korisnika imaju *Isabelle/HOL* i *Coq*.

Da bi dokazali zadato tvrđenje, asistenti za dokazivanje teorema koriste određene *taktike*, odnosno alate unutar samog programa koji kad se primjene na zadati cilj, isti dokazuju ili uprošćuju. Prilikom dokazivanja teorema u asistentu, dokazivanje se može vršiti *unaprijed* i/ili *unazad*. Dokazivanje unaprijed znači da od zadatih hipoteza izvodimo nove hipoteze sve do trenutka dok među tim novim hipotezama ne bude i tvrđenje koje dokazujemo. Kod dokazivanja unazad, tvrđenje koje dokazujemo primjenom taktika razlažemo na jednostavnije podciljeve, a zatim je potrebno iz skupa hipoteza dokazati svaki od generisanih podciljeva. Postoje i dva različita pristupa pisanju programa u asistentima. U zavisnosti od toga da li je potrebno da je korisnik upoznat sa koracima prilikom dokazivanja i da ih razumije, ili nam je cilj samo ispitati da li je tvrđenje tačno ili ne, razlikujemo *deklarativni* i *proceduralni* način pisanja dokaza u asistentu.

Isabelle/HOL je asistent za dokazivanje teorema koji primjenjuje logiku višeg reda. Da bismo formalizovali neku teoriju u ovom sistemu najprije definišemo pojmove (tipovi, funkcije i sl), a zatim dokazujemo tvrdjenja koja za njih važe. Veliki broj teorija je već formalizovan u ovom sistemu i dostupan je korisnicima. U *Isabelle/HOL* dostupno je više tipova podataka (bool, real, nat, ...) i ugrađene su osnovne aritmetičke operacije. *Isabelle/HOL* koristi jezik za dokazivanje *Isar* koji izgleda kao mješavina engleskog jezika, logike i programskog jezika i zasnovan je na prirodnoj dedukciji.

Prirodna dedukcija je formalni sistem koji je 1934. godine uveo Gencen kao odgovor na potrebu da se nađe sistem u kojem su izvođenja jednostavnija i prirodnija u odnosu na Hilbertov. U sistemu prirodne dedukcije za klasičnu logiku postoji jedna aksioma, dok sistem za intuicionističku logiku nema aksioma, a svaki veznik ima pravila koja ga uvode i eliminišu.

U nastavku je kratki prikaz jednostavnog dokaza teoreme u *Isabelle/HOL*. Dokaz je pisan u proceduralnom stilu i koraci dokaza predstavljaju primjenu nekog pravila prirodne dedukcije (na primjer *rule conjI* je pravilo uvođenja konjunkcije).

```

theory example
imports FOL
begin
lemma "[A; B]  $\implies$  A  $\wedge$  B"
apply (rule conjI)
apply assumption
apply assumption
done
end

```

Slika 6.1: Jednostavan dokaz u interaktivnom asistentu *Isabelle/HOL*

Prilikom rada u asistentu *Isabelle/HOL* najprije je potrebno definisati *teoriju*, odnosno odrediti tipove, funkcije, teoreme i leme. Zatim pomoću ključne riječi *imports T*, omogućujemo korišćenje već postojeće teorije T. Između **begin** i **end** upisujemo definicije i dokaze.

U primjeru sa slike 6.1, definisali smo teoriju imena *example* i koristili smo već postojeću teoriju - FOL (logika prvog reda). U prvom redu posle riječi **begin** definisali smo cilj koji želimo dokazati - ako imamo *A*, i ako imamo *B* onda imamo $A \wedge B$. U prozoru sistema *Isabelle/HOL* u kojem pratimo trenutno stanje dokaza naš cilj izgleda ovako:

goal (1 subgoal):

1. $A \implies B \implies A \wedge B$

Naredna linija koda koristi pravilo uvođenja veznika \wedge (*rule conjI*) i razbija ovaj cilj u dva podcilja:

goal (2 subgoals):

1. $A \Rightarrow B \Rightarrow A$
2. $A \Rightarrow B \Rightarrow B$

Sada jednostavnom primjenom hipoteza na podciljeve (linija koda *apply assumption*) dokazujemo željeni cilj.

U disertaciji su teoreme incidencije posmatrane kao ciklične strukture na pogodno odabranim površima i izgrađen je formalni sistem u kome modelujemo date teoreme i njihove dokaze. Sistem koji smo razvili oslanja se na metode dokazivanja teorema incidencije iz radova [7], [39], [7], gdje je predočena veza topologije, kombinatorike i algebre sa jedne strane i teorema incidencije i njihovih dokaza sa druge strane.

Ideja da se algebarska sredstva primjenjuju u automatskom dokazivanju teorema iz geometrije nije nova i postoji veliki broj istraživanja i rezultata na tom polju. Kada je 1978. godine kineski matematičar Vu (engleski Wu Wenjun) u radu [44] predstavio svoj metod mehaničkog dokazivanja teorema u geometriji, napravio je svojevrstan uspon u automatskom dokazivanju ovih teorema. Vu-ovom metodom dokazano je veliki broj tvrdjenja, a brojni autori su ga izučavali i nadograđivali. Određeni nedostatak dokazivača koji u svojoj pozadini primjenjuju algebarske tehnike je što se tokom dokaza izgubi svaka informacija o geometrijskoj konstrukciji, i proizvode odgovor u obliku potvrđne ili odrečne rečenice. Metod za dokazivanje teorema incidencije koji u svojoj osnovi koristi geometrijske veličine i kao takav zadržava geometrijske informacije u svojim koracima je *metod površina* od Ču-a, [11], [10]. Kasnije je Ču u saradnji sa drugim autorima dao još jedan dokazivač - *metod punog ugla*, [11]. Većina ovdje pomenutih metoda formalizovana je u nekom od asistenata: za formalizaciju u *Coq*-u metoda površina pogledati [27] i [36], za formalizaciju Vu-ove metode [17]. Za studiju o tome kako se asistenti za dokazivanje teorema u geometriji mogu koristiti za formalizaciju u geometriji preporučujemo [8].

Uporedo sa razvojem računara, sveopšte su postali prisutni i softveri za zadavanje konstrukcija i za automatsko dokazivanje teorema. Svoju primjenu su našli kako u nauci i istraživanju tako i u obrazovanju. Da pomenemo neke: *GEOTHER* koji je razvijen u Maple-u, *GCLC* i *GEOMETRY EXPERT* koji imaju ugrađenje dokazivače pomenute u prethodnom pasusu. Veoma značajna u obrazovanju je svakako i *GeoGebra*.

Za geometrijske konstrukcije iz ove disertacije koristili smo interaktivni geometrijski softver *Cinderella*, (vidjeti [29]). Softver je od strane Rihter-Geberta i Krapa kreiran sa ciljem automatskog dokazivanja teorema koristeći binomni metod dokazivanja teorema incidencije Rihtera-Geberta. Kasnije su Rihter-Gebert i Kortenkamp softver unaprijedili i napisali u Javi, a besplatno je dostupan od 2013. godine. Svojom interaktivnošću i mogućnošću provjera nekih geometrijskih osobina (kolinearnost tačka i konkurentnost pravih u prvom redu) softver korisnicima pruža dobru intuiciju prilikom analize konstrukcije. Mogućnosti ovoga softvera smo često koristili u disertaciji, a u radu [5] smo upravo vođeni eksperimentima u softveru *Cinderella*, koristeći inverziju koja transformiše dva data kruga u koncentrične krugove, dokazali analognu verziju Ponceletovog teorema

za Štajnerov porizam. O softveru *Cinderella* i njegovoj primjeni u matematici, tehnici i obrazovanju vidjeti rad [28].

Formalizacija projektivne geometrije u nekom od poznatih dokazivača teorema (kao što su *Coq* ili *Isabelle*) nije lagan zadatak. Jedna formalizacija projektivne ravni izvedena je u sistemu *Coq* od strane Mago, Narbu i Šrek u [32]. Pokazana su osnovna svojstva i dokazan je princip dualnosti za projektivnu geometriju. Formalizacija Grasman-Kejljeve algebre sa primjenama na dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj ravni data je u radu [16].

DIO 7

Zaključak i buduća istraživanja

7.1 Pregled doprinosa disertacije

U ovoj disertaciji na potpuno inovativan način, izgrađen je formalni sistem za dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji. Osnova sistema je odranije poznat Čeva/Menelaj metod za dokazivanje teorema incidencije, pri čemu su u disertaciji obrađivani samo Menelajevi dokazi. Formalizacija koja je izvedena u tezi postignuta je korišćenjem jedne generalizacije simplicijalnih kompleksa, pa su tako u disertaciji spajene oblasti logike, geometrije i algebarske topologije. Formalni sistem koji smo izgradili je jednostrani sekventni sistem u kome su atomske formule date u obliku šestorki tačaka. Ove formule iskazuju postojanje Menelajevih konfiguracija na trouglu čija su tjemena prve tri tačke iz šestorki.

Homološka sredstva su u osnovi dovela do zasnivanja ovoga sistema. Uveli smo i definisali jednu klasu Δ -kompleksa. Ovi kompleksi, koje smo nazvali \mathcal{M} -kompleksi i čija je geometrijska realizacija kompaktna, orijentisana površ, poslužili su nam kao određeni ram u okviru koga modelujemo teoreme incidencije. Umjesto da posmatramo 2-cikl na orijentisanoj i triangulisanoj površi, što je ideja Rihter-Geberta, posmatrali smo 2-cikle na \mathcal{M} -kompleksima. Ovi cikli su sume elemenata iz skupa 2-simpleksa posmatranog Δ -kompleksa i svaki sabirak iz cikla zapravo zamišljamo kao trougao kome su stranice presječene trima kolinearnim tačkama, odnosno trougao kome je pridružena Menelajeva konfiguracija. Uočili smo i posmatrali i različite Menelajeve konfiguracije koje se pojavljuju na jednom trouglu.

U \mathcal{M} -sistemu aksiomatski sekventi izniču iz triangulacija zatvorenih, orijentabilnih površi, a atomske formule sistema tvrde da neka šestorka tačaka čini Menelajevu konfiguraciju. Prikazani su značajni i originalni rezultati iz saglasnosti i odlučivosti \mathcal{M} -sistema. Saglasnost sistema u odnosu na željenu interpretaciju je dokazana. Jedan od glavnih rezultata u radu je i dokazana odlučivost \mathcal{M} -sistema. Dati su primjeri iščitavanja teorema incidencije iz sekvenata ovoga sistema.

Jedan od rezultata disertacije je i procedura, napisana u programskom jeziku MATLAB, u kojoj provjeramo da li je neki skup šestorki aksiomatski. Ova procedura provjerava da li simplicijalni kompleks, čija je ćelijska struktura određena datim šestorkama, zadovoljava osobine koje smo definisali za \mathcal{M} -komplekse. Ilustrovana je primjena ove proce-

dure, međutim sama teorema incidencije i njen dokaz koje ovdje dajemo ne proizilaze automatski iz dokazivog sekventa. Ove procedure su karakteristične po tome što u njihovoj pozadini stoje homološka i topološka sredstva.

7.2 Pravci daljih istraživanja i budući rad

Originalni rezultati disertacije vežu se za formalni sistem za dokazivanje teorema incidencije u projektivnoj geometriji. Sistem je dat u obliku jednostranog sekventnog sistema, a aksiomatski sekventi formiraju se iz triangulacija zatvorenih, orijentabilnih površi. Osnovne formule sistema tvrde da je neka šestorka tačaka u Menelajevoj konfiguraciji, otuda i naziv \mathcal{M} -sistem.

U \mathcal{M} -sistemu pored strukturalnih pravila sječenja, koja ogovaraju operaciji povezane sume triangulisanih površi, uvedeni su i logički veznici i pravila izvođenja. Ovaj sistem smatramo određenim asistentom prilikom dokazivanja teorema incidencije u projektivnoj geometriji, i on nije nikako formalni sistem za cijelu projektivnu geometriju (kao što je Hilbertov sistem za euklidsku geometriju). Jedan od mogućih pravaca kojim bi moglo da ide istraživanje koje se nadovezuje na tezu, jeste i ispitivanje koji je to minimalni skup tvrđenja koji ne važi u \mathcal{M} -sistemu, (ali važi u projektivnoj geometriji), a koji kompletira cijelu projektivnu geometriju.

U prethodnom odeljku naveli smo neke od formalizacija projektivne geometrije. Pravci budućeg istraživanja koji proizilaze iz disertacije prirodno se odnose upravo na formalizaciju logičkog sistema iz rada i upotrebu asistenata za dokazivanje teorema. Najprije, cilj nam je proučiti i prilagoditi postojeće formalizacije projektivne geometrije, na čijim osnovama bi dalje izgrađivali \mathcal{M} -sistem. Plan nam je pomenutu formalizaciju izvesti u okviru interaktivnog dokazivača teorema *Isabelle/HOL*.

Formalizacija je proces pomoću kojeg se matematika prilagođava mašinskom procesuiranju. Postupak formalizacije matematičkih teorija podrazumijeva definisanje tipova, konstanti i funkcija, a potom dokazivanja teorema i lema koje važe za ove pojmove. Tako, formalizacija \mathcal{M} -sistema u dokazivaču bi, najprostije rečeno, najprje zahtijevala definisanje dva skupa objekata - tačaka i pravih, a zatim definisanje relacije incidencije među njima. Ovdje bi se naravno nadovezali na rezultate postojećih istraživanja na polju formalizacije projektivne geometrije, u prvom redu na [32], [36], [27], [17]. Na temelju proučenih i prilagođenih formalizacija projektivne geometrije (ali i topologije koja je zaslužna za zasnivanje \mathcal{M} -sistema), pristupili bi formalizaciji originalnih rezultata iz doktorske disertacije.

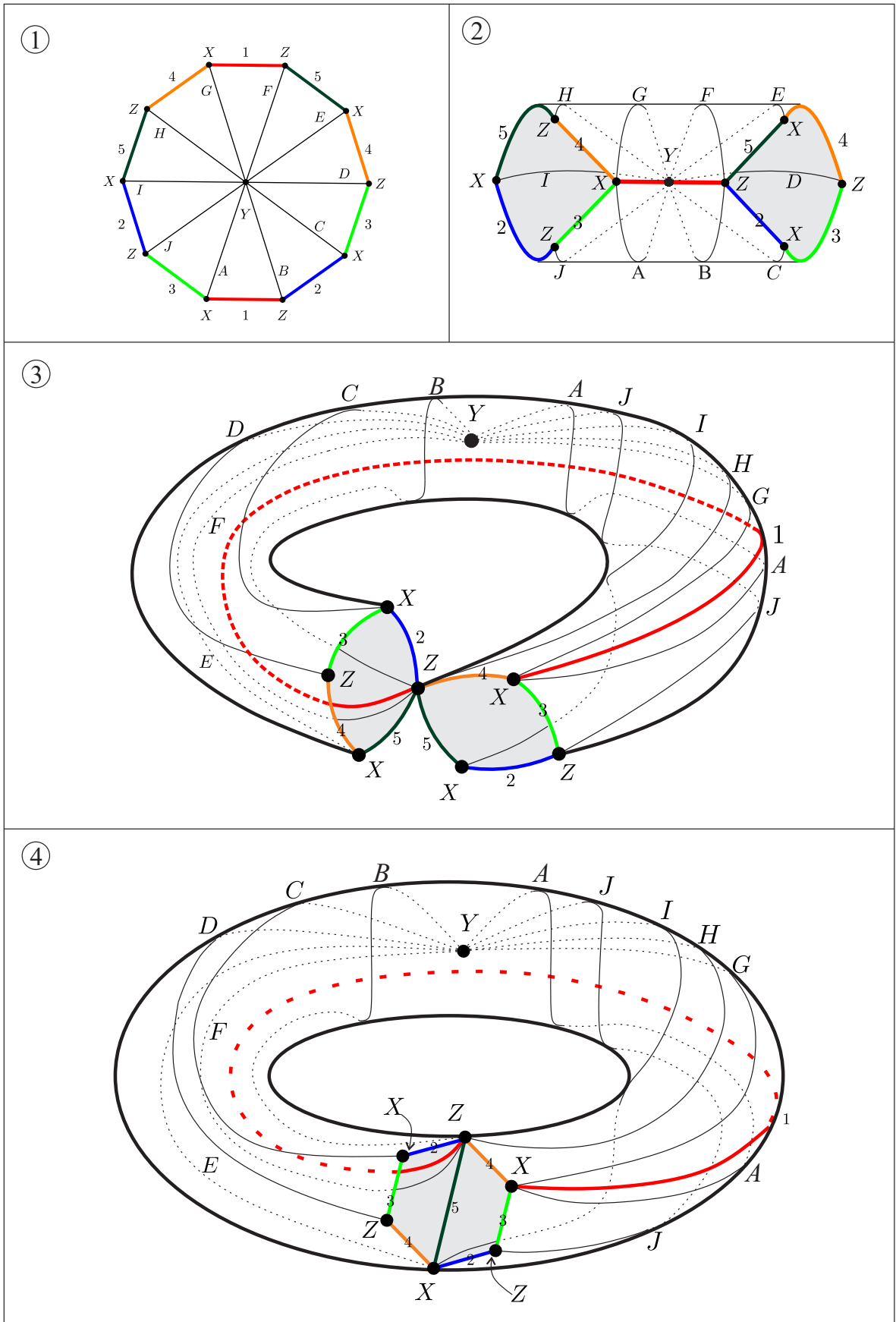
Formalizacija \mathcal{M} -sistema i njegovih svojstava u sistemu za dokazivanje teorema bio bi određen doprinos teoriji dokaza, a omogućila bi i pokazivanje korektnosti samog \mathcal{M} -sistema. Bilo bi interesantno ispitati da li je u okviru \mathcal{M} -sistema moguće dokazivati i još neka tvrđenja osim onih koje govore o incidenciji među objektima koje smo posmatrali u tezi (tačke i prave).

U tezi je razmatrana euklidska i projektivna interpretacija sistema, a jedan od mogućih zadataka za dalja istraživanja bilo bi i zadavanje interpretacije u konačnim geometrijama. Interesantno je pitanje proučiti teoreme incidencija u konačnim geometrijama koje se mogu dokazati u \mathcal{M} -sistemu kao i povezati ovo istraživanje za formalizacijama konačnih geometrija u *Isabelle*.

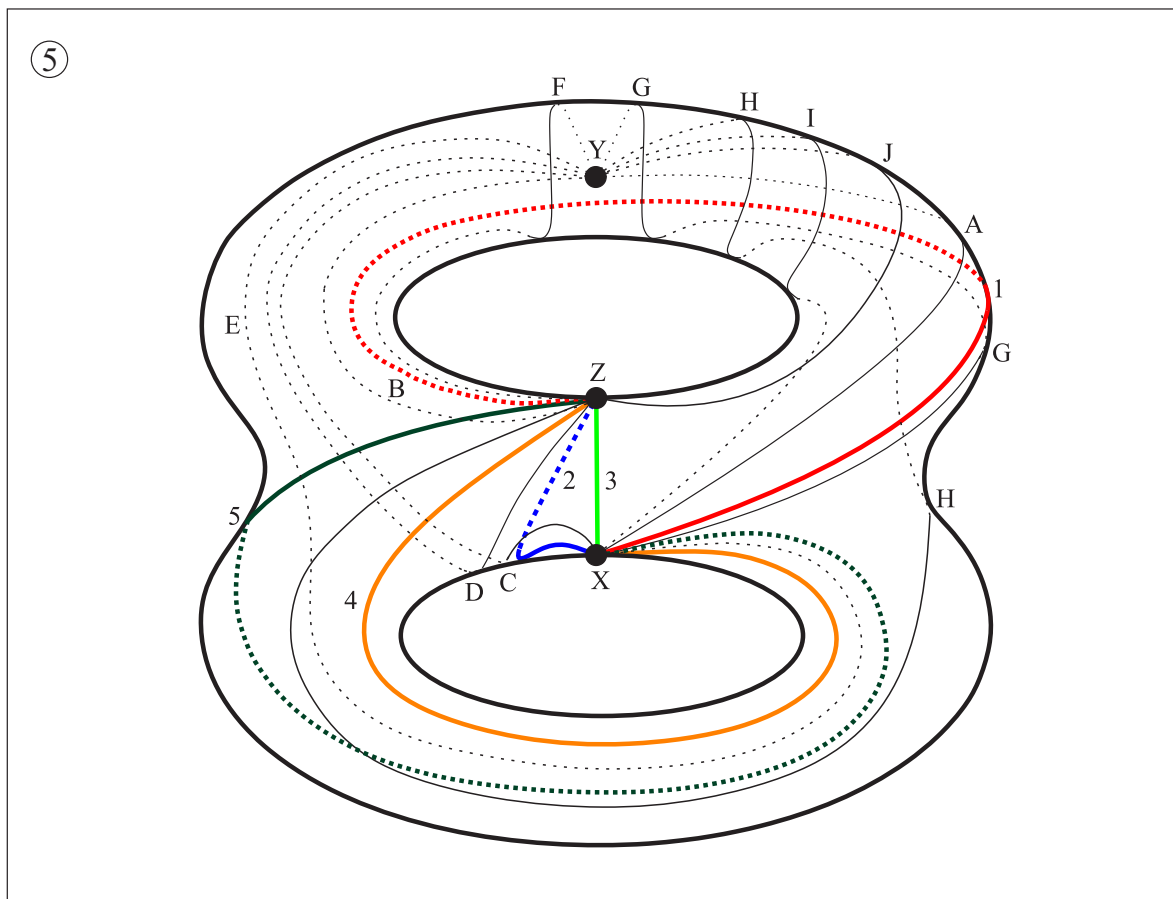
Prilozi

DODATAK A

Od desetougla do torusa sa dvije
rupe



Slika A.1: Od desetougla do torusa sa dvije rupe



Slika A.2: Nakon identifikacije stranica šestougla iz koraka 4 (stranice 2, 3 i 4) dolazimo do torusa sa dvije rupe

DODATAK B

MATLAB procedure

B.1 Formiranje Menelajevih konfiguracija na trouglu

Procedura kojim se za svaku ulaznu šestorku formiraju 4 različite Menelajeve konfiguracije na trouglu (vidjeti poglavlje 3.3).

```
syms v1 v2 v3 t1 t2 t3 A B C D E F G H I J K L M N ...
O P Q R S T U V W X Y Z q w e r t z u i o p a s d f g h j k l y x c v b n m real
load ulaz

[broj_vrsta, n]=size(UlazneSestorke);
UlazneSestorke(5,:)=UlazneSestorke(5,:)*-1;
indeksi=vec2mat([1:6*4],6);

for i=1:n
    br_sestorke=strcat('sestorka',num2str(i));
    sestorka.(br_sestorke)=UlazneSestorke(:,i);

    br_stringa=strcat('MeneKonf',num2str(i));

    nbr_stringa=strcat('MeneKonfiguracije',num2str(i));
    MeneKonfiguracije.(nbr_stringa)=[];

    sestorka.(br_sestorke)=[sestorka.(br_sestorke),[UlazneSestorke(2,i),UlazneSestorke(4,i),
    UlazneSestorke(6,i),UlazneSestorke(5,i), UlazneSestorke(1,i),UlazneSestorke(3,i)], ...
    [UlazneSestorke(1,i),UlazneSestorke(6,i), UlazneSestorke(5,i), ...
    UlazneSestorke(4,i),UlazneSestorke(3,i),UlazneSestorke(2,i)],[UlazneSestorke(3,i),
    UlazneSestorke(4,i),UlazneSestorke(5,i), ...
    UlazneSestorke(6,i),UlazneSestorke(1,i),UlazneSestorke(2,i)]];

    MeneKonf.(br_stringa)=char(sestorka.(br_sestorke));
    MeneKonf.(br_stringa)([1:8,end-1:end])=[];
    MeneKonf.(br_stringa)=[MeneKonf.(br_stringa)([2,16,30,44,58,72]),MeneKonf.(br_stringa)
    ([5,19,33,47,61,75]),MeneKonf.(br_stringa)([8,22,36,50,64,78]),MeneKonf.(br_stringa)
    ([11,25,39,53,67,81])];

    for j=1:4
        MeneKonfiguracije.(nbr_stringa)=[MeneKonfiguracije.(nbr_stringa), ...
        MeneKonf.(br_stringa)(indeksi(j,:),' '];
        MeneKonfiguracije.(nbr_stringa)=MeneKonfiguracije.(nbr_stringa)(1:end-1);
        MeneKonfiguracije.(nbr_stringa)=split(MeneKonfiguracije.(nbr_stringa));
    end
end
```

Kod B.1: Procedura MeneKonf

B.2 Formiranje 4^n ulaznih mogućnosti i provjera osobina (0)-(4) \mathcal{M} -kompleksa

```

% Pomocu komande ndgrid formirano je 4^n mogucih kombinacija za skup od n ulaznih sestorki.
% Komanda [X1,X2, ..., Xn]=ndgrid(x1,x2,...,xn) od vektora x1,x2,...,xn proizvodi n-dimenzionalne matrice ...
% X1,X2,...,Xn. Dimenzije ovih matrica su (d_1*d_2*...*d_(n-1)) x d_n, gdje ...
% su d_1,...,d_n duzine vektora x1, ..., xn

[kom1,kom2,kom3,kom4,kom5,kom6, kom7,kom8]=ndgrid(MeneKonfiguracije.MeneKonfiguracije1,
MeneKonfiguracije.MeneKonfiguracije2, MeneKonfiguracije.MeneKonfiguracije3,MeneKonfiguracije.
MeneKonfiguracije4,MeneKonfiguracije.MeneKonfiguracije5,MeneKonfiguracije.
MeneKonfiguracije6, MeneKonfiguracije.MeneKonfiguracije7, MeneKonfiguracije.
MeneKonfiguracije8);

kombinacije=[kom1(:),kom2(:),kom3(:),kom4(:),kom5(:),kom6(:),kom7(:),kom8(:)]

broj_sestorki=n;
fori=1:4^broj_sestorki
    V_stranice=[];V_tjemena=[];suma_str=0;
    for j=1:broj_sestorki
        V_stranice=[V_stranice,kombinacije{i,j}([4,5,6])];
        V_tjemena=[V_tjemena,kombinacije{i,j}([1,2,3])];
    end
    for ii = 1:length(V_stranice)
        for jj = ii+1:length(V_stranice)
            if isequal(V_stranice(ii),V_stranice(jj))==1
                suma_str=suma_str+1;
            end
        end
    end
    if (suma_str==3 n/2) && length(unique(V_stranice))==3 n/2 && numel(intersect(V_stranice,
V_tjemena))==0
        fprintf('Kombinacija %d ulazi u razmatranje!\n',i)
        kombinacije{i,:}
    end
end
end

```

Kod B.2: Nastavak procedure B.1 - formiranje 4^n mogućnosti za skup od n ulaznih šestorki i provjera da li tako formirane šestorke mogu predstavljati površ

B.3 Permutacija tačaka iz šestorki

Formiranje Menelajevih konfiguracija permutacijom tačaka iz šestorki i formiranje 6^n mogućnosti za skup od n ulaznih šestorki (vidjeti poglavlje 3.3).

```
syms v1 v2 v3 t1 t2 t3 vektor A B C D E F G H I J K L M N ...
O P Q R S T U V W X Y Z q w e r t z u i o p a s d f g h j k l y x c v b n m real
load ulaz

[broj_vrsta, n]=size(UlazneSestorke);
UlazneSestorke(5,:)=UlazneSestorke(5,:)*-1;
indeksi=vec2mat(1:6*6,6);

for i=1:n
    br_sestorke=strcat('sestorka',num2str(i));
    br_stringa=strcat('MenePerm',num2str(i));
    nbr_stringa=strcat('MenePermutacije',num2str(i));
    MenePermutacije.(nbr_stringa)=[];

    sestorka.(br_sestorke)=[perms([UlazneSestorke(1,i),UlazneSestorke(2,i),UlazneSestorke(3,i)]),perms
    ([UlazneSestorke(4,i),UlazneSestorke(5,i),UlazneSestorke(6,i)])];
    MenePerm.(br_stringa)=char(sestorka.(br_sestorke));
    MenePerm.(br_stringa)([1:8,end-1:end])=[];

    MenePerm.(br_stringa)=[MenePerm.(br_stringa)([2,5,8,11,14,17]),MenePerm.(br_stringa)
    ([22,25,28,31,34,37]),MenePerm.(br_stringa)([42,45,48,51,54,57]),MenePerm.(br_stringa)
    ([62,65,68,71,74,77]),MenePerm.(br_stringa)([82,85,88,91,94,97]),MenePerm.(br_stringa)
    ([102,105,108,111,114,117])];

    for j=1:6
        MenePermutacije.(nbr_stringa)=[MenePermutacije.(nbr_stringa), ...
        MenePerm.(br_stringa)(indeksi(j,:),' '];
        MenePermutacije.(nbr_stringa)=MenePermutacije.(nbr_stringa)(1:end-1);
        MenePermutacije.(nbr_stringa)=split(MenePermutacije.(nbr_stringa));
    end
end

[kom1,kom2,kom3,kom4,kom5,kom6, kom7,kom8]=ndgrid(MenePermutacije.MenePermutacije1, ...
MenePermutacije.MenePermutacije2, MenePermutacije.MenePermutacije3, ...
MenePermutacije.MenePermutacije4,MenePermutacije.MenePermutacije5, ...
MenePermutacije.MenePermutacije6,MenePermutacije.MenePermutacije7, ...
MenePermutacije.MenePermutacije8);

kombinacije=[kom1(:),kom2(:),kom3(:),kom4(:),kom5(:),kom6(:),kom7(:),kom8(:)]
```

Kod B.3: Procedura MenePerm

B.4 Procedura kojom se provjerava da li skup od n ulaznih šestorki može predstavljati \mathcal{M} -kompleks

```

syms v1 v2 v3 t1 t2 t3 vektor A B C D E F G H I J K L M N ...
O P R S T Q X Y Z V U q w e r t z u i o p a s d f g h j k l y x c v b n m real
load KombOsmoclani1500
[broj_vrsta, n]=size(UlazneSestorke);
if rem(n,2)~=0
    disp('Broj sestorki mora biti paran!')
else

disp('Osobina (0) je zadovoljena - imamo konacan i paran broj sestorka!')
t1=UlazneSestorke(1,:);
t2=UlazneSestorke(2,:);
t3=UlazneSestorke(3,:);

v1=UlazneSestorke(4,:);
v2=UlazneSestorke(5,:);
v3=UlazneSestorke(6,:);
%%% Provjera osobina (1) i (2)
brojac=0;
broj_sestorki=0;

for i=1:n
    if length([UlazneSestorke(1,i),UlazneSestorke(2,i),UlazneSestorke(3,i),UlazneSestorke(4,i),
UlazneSestorke(5,i),UlazneSestorke(6,i)])== ...
        length(unique([UlazneSestorke(1,i),UlazneSestorke(2,i),UlazneSestorke(3,i),UlazneSestorke(4,
i),UlazneSestorke(5,i),UlazneSestorke(6,i)]))
            broj_sestorki=broj_sestorki+1;
    end
end

Matrica_tjemena=UlazneSestorke((1:3),(1:n));
Matrica_cvorova=UlazneSestorke((4:6),(1:n));
if isempty(intersect(Matrica_tjemena(:),Matrica_cvorova(:)))==1 && broj_sestorki==n
    disp('Svaka sestorka sadrzi 6 razlicitih tacaka!')
    disp('Nijedna tacka koja predstavlja tjeme ne nalazi se na 4., 5., i 6. mjestu!')
    disp('Nijedna tacka koja predstavlja stranicu ne nalazi se na 1., 2., i 3. mjestu!')
    disp('Osobine (1) i (2) su ZADOVOLJENE!')
end
%%% Provjera osobine (3)
vektor = [v1,-v2,v3];suma=0; %ovdje je -v2 jer su elementi v2 sa negativnim predznakom
for i = 1:length(vektor)
    for j = i+1:length(vektor)
        if isequal(vektor(i),vektor(j))==1
            suma=suma+1;
        end
    end
end
if suma == 3*n/2
    disp('Osobina (3) je ZADOVOLJENA -- svaka stranica se pojavljuje tacno 2 puta u sestorkama!')
end
%%% Provjera osobine (4)
T1=[t1,t2,t3];
T2=unique(T1); %skup tjemena tj. 0-celija

```

Kod B.4: Procedura AksiomSekvent

```

for j=1:length(T2)
    moj_broj = strcat('mat', num2str(j));
    matrica(moj_broj)=[ ];

    m_broj = strcat('vek', num2str(j));
    Vektor(m_broj)=[ ];

    m_br = strcat('UniqVe', num2str(j));
    u_vek(m_br)=[ ];
for i=1:n
    if (t1(i)==T2(j)) || (t2(i)==T2(j)) || (t3(i)==T2(j))
        matrica(moj_broj)=[matrica(moj_broj),[t1(i);t2(i);t3(i);v1(i);-v2(i);v3(i)]];
    end
end
matrica(moj_broj); %za svako tjeme w \in T2 formiran je skup Lw

[vrste, kolone]=size(matrica(moj_broj));
for br_k=1:kolone
    p_niz_br = strcat('niz', num2str(br_k));
    podniz(p_niz_br)=[ ]
    for br_v = 1:3
        if matrica(moj_broj)(br_v,br_k)==T2(j)
            if br_v == 1
                Vektor(m_broj) = [Vektor(m_broj), matrica(moj_broj)(5,br_k),matrica(moj_broj)(6,br_k)];
            elseif br_v == 2
                Vektor(m_broj) = [Vektor(m_broj),matrica(moj_broj)(4,br_k),matrica(moj_broj)(6,br_k)];
            elseif br_v == 3
                Vektor(m_broj) = [Vektor(m_broj),matrica(moj_broj)(4,br_k),matrica(moj_broj)(5,br_k)];
            end
        end
    end
    indeksi_za_povezanost=vec2mat([1:length(Vektor(m_broj))],2);
    vektor_za_povezanost=Vektor(m_broj)([1,2]);
end

    Vektor(m_broj);
    br_povez=0;
    for jj=2:(length(Vektor(m_broj))/2)
        if isempty(intersect(vektor_za_povezanost,Vektor(m_broj)(indeksi_za_povezanost(jj,:))))==0
            vektor_za_povezanost=[vektor_za_povezanost, Vektor(m_broj)(indeksi_za_povezanost(jj,:))];
            br_povez=jj;
            for ii=2:jj-1
                if isempty(intersect(vektor_za_povezanost([end-1,end]),Vektor(m_broj)(indeksi_za_povezanost
(ii,:))))==0
                    vektor_za_povezanost=[vektor_za_povezanost, Vektor(m_broj)(indeksi_za_povezanost
(ii,:))];
                end
            end
        end
    end
    vektor_za_povezanost;
    u_vek(m_br)=unique(Vektor(m_broj));
    disp(u_vek(m_br));

```

Kod B.4: Procedura AksiomSekvent - nastavak


```

if length(Vektor.(m_broj))~=length(u_vek.(m_br))*2 || length(unique(vektor_za_povezanost))~=length(
(unique(Vektor.(m_broj)))
    fprintf('Oko cvora %s NIJE disk!\n',char(T2(j)))
else
    brojac=brojac+1;
    fprintf('Oko cvora %s JESTE disk!',char(T2(j)))
end
if length(T2)==brojac
    disp('Osobina (4) je zadovoljena -- kompleks dat ulaznim sestorkama je povrs!')
end
end

%%% Provjera orijentabilnosti - osobine (5)
a=ones(1,n); %vektor u koji smjestamo koeficijente uz 2-celije iz cikla
pr1_i=[];pr1_j=[];pr1=[];
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        if v1(i)==v1(j)
            a(j)=-1;
            pr1_j=[pr1_j,j];
            pr1_i=[pr1_i,i];
            pr1=[pr1_i,pr1_j];
        elseif v1(i)==-v1(j)
            pr1_j=[pr1_j,j];
            pr1_i=[pr1_i,i];
            pr1=[pr1_j,pr1_i];
        end
    end
end
v1=v1.*a; v2=v2.*a; v3=v3.*a;
for i=1:n-1
    for j=i+1:n
        if v2(i)==v2(j)
            if sum(j==pr1)==0
                a(j)=-1;
                v1(j)=v1(j)*(-1); v2(j)=v2(j)*(-1);v3(j)=v3(j)*(-1);
                pr1_j=[pr1_j,j];
                pr1_i=[pr1_i,i];
                pr1=[pr1_j,pr1_i];
            elseif sum(i==pr1)==0
                a(i)=-1;
                v1(i)=v1(i)*(-1); v2(i)=v2(i)*(-1);v3(i)=v3(i)*(-1);
                pr1_j=[pr1_j,j];
                pr1_i=[pr1_i,i];
                pr1=[pr1_j, pr1_i];
            end
        elseif v2(i)==-v2(j)
            pr1_j=[pr1_j,j];
            pr1_i=[pr1_i,i];
            pr1=[pr1_j,pr1_i];
        end
    end
end
end

```

Kod B.4: Procedura AksiomSekvent - nastavak

```

for i=1:n-1
  for j=i+1:n
    if v3(i)==v3(j)
      if sum(j==pr1)==0
        a(j)=-1;
        v1(j)=v1(j)*(-1); v2(j)=v2(j)*(-1);v3(j)=v3(j)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      elseif sum(i==pr1)==0
        a(i)=-1;
        v1(i)=v1(i)*(-1); v2(i)=v2(i)*(-1);v3(i)=v3(i)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      end
      elseif v3(i)==-v3(j)
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      end
    end
  end
end

```

```

for i=1:n
  for j=1:n
    if v1(i)==v2(j)
      if sum(pr1==j)==0
        a(j)=-1;

        v1(j)=v1(j)*(-1); v2(j)=v2(j)*(-1);v3(j)=v3(j)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      elseif sum(pr1==i)==0
        a(i)=-1;
        v1(i)=v1(i)*(-1); v2(i)=v2(i)*(-1);v3(i)=v3(i)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      end
      elseif v1(i)==-v2(j)
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      end
    end
  end
end

```

Kod B.4: Procedura AksiomSekvent - nastavak

```

for i=1:n
  for j=1:n
    if v1(i)==v3(j)
      if sum(pr1==j)==0
        a(j)=-1;
        v1(j)=v1(j)*(-1); v2(j)=v2(j)*(-1);v3(j)=v3(j)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      elseif sum(pr1==i)==0
        a(i)=-1;
        v1(i)=v1(i)*(-1); v2(i)=v2(i)*(-1);v3(i)=v3(i)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      end
    elseif v1(i)==-v3(j)
      pr1_j=[pr1_j,j];
      pr1_i=[pr1_i,i];
      pr1=[pr1_j,pr1_i];
    end
  end
end

```

```

for i=1:n
  for j=1:n
    if v2(i)==v3(j)
      if sum(pr1==j)==0
        a(j)=-1;
        v1(j)=v1(j)*(-1); v2(j)=v2(j)*(-1);v3(j)=v3(j)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      elseif sum(pr1==i)==0
        a(i)=-1;
        v1(i)=v1(i)*(-1); v2(i)=v2(i)*(-1);v3(i)=v3(i)*(-1);
        pr1_j=[pr1_j,j];
        pr1_i=[pr1_i,i];
        pr1=[pr1_j,pr1_i];
      end
    elseif v2(i)==-v3(j)
      pr1_j=[pr1_j,j];
      pr1_i=[pr1_i,i];
      pr1=[pr1_j,pr1_i];
    end
  end
end

```

```

Matrica=[v1;v2;v3]
Provjera = sum(sum(Matrica))
disp('Koeficijenti uz sestorke')
disp(a)
end

```

Kod B.4: Procedura AksiomSekvent - nastavak

Literatura

- [1] S. Apel. *The Geometry of Brackets and the Area Principle*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2014.
- [2] S. Apel and J. Richter-Gebert. Cancellation Patterns. In *Automated Deduction in Geometry*, pages 1–33, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [3] Đ. Baralić. A Short Proof of the Bradley Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 122(4):381–385, 2015.
- [4] Đ. Baralić, P.L. Curien, M. Milićević, J. Obradović, Z. Petrić, M. Zekić, and R. Živaljević. Proofs and surfaces. *Annals of Pure and Applied Logic*, (102845), 06 2020.
- [5] Đ. Baralić, D. Jokanović, and M. Milićević. Variations on Steiner’s Porism. *The Mathematical Intelligencer*, 39:, 02 2017.
- [6] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G.M. Ziegler. *Oriented Matroids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [7] J. Bokowski and J. Richter-Gebert. On the Finding of Final Polynomials. *Europ. J. Combinatorics*, 11:21–34, 1990.
- [8] P. Boutry. *On the Formalization of Foundations of Geometry*. PhD thesis, University of Strasbourg, 2018.
- [9] S. Chou, X. Gao, and J. Zhang. Automated production of traditional proofs for constructive geometry theorems. In *Proceedings of 8th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, Los Alamitos, CA, USA, jun 1993. IEEE Computer Society.
- [10] S. Chou, X. Gao, and J. Zhang. Machine Proofs in Geometry: Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems. 01 1994.
- [11] S. Chou, X. Gao, and J. Zhang. Automated Generation of Readable Proofs with Geometric Invariants. *J. Autom. Reasoning*, 17:349–370, 12 1996.
- [12] H. Coxeter. *Projective Geometry, 2nd Edition*. Springer Berlin Heidelberg, 1974.

- [13] H. Crapo and J. Richter-Gebert. Automatic Proving of Geometric Theorems. In *White N.L. (eds) Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry*, pages 167–196. Springer, Dordrecht, 1995.
- [14] S. Eilenberg and J.A. Zilber. Semi-Simplicial Complexes and Singular Homology. *Annals of Mathematics*, 51:499–513, 1950.
- [15] G. Friedman. Survey article: An elementary illustrated introduction to simplicial sets. *Rocky Mountain J. Math.*, 42(2):353–423, 04 2012.
- [16] L. Fuchs and L. Thery. A Formalization of Grassmann-Cayley Algebra in COQ and Its Application to Theorem Proving in Projective Geometry. In *Automated Deduction in Geometry, ADG 2010*, volume 6877 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 51–62, Munich, Germany, 2010. Springer.
- [17] J.D. G enevaux, J. Narboux, and P. Schreck. Formalization of Wu’s simple method in Coq. In Jean-Pierre Jouannaud and Zhong Shao, editors, *CPP 2011 First International Conference on Certified Programs and Proofs*, volume 7086 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 71–86, Kenting, Taiwan, December 2011. Springer-Verlag.
- [18] G. Gentzen. Untersuchungen  uber das logische Schlie en I. *Mathematische Zeitschrift*, 39:176–210, 1935.
- [19] G. Gentzen. The Collected Papers of Gerhard Gentzen. *M. E. Szabo (ed.), North-Holland, Amsterdam*, 1969.
- [20] A. Gilat. *MATLAB: An Introduction with Applications*. John Wiley & Sons, Inc. USA, 2007.
- [21] J.Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987.
- [22] B. Gr unbaum and G.C. Shephard. Ceva, Menelaus, and the Area Principle. *Mathematics Magazine*, 68(4):254–268, 1995.
- [23] B. Gr unbaum and G.C. Shephard. A new Ceva-type theorem. *The Mathematical Gazette*, 80(489):492–500, 1996.
- [24] B. Gr unbaum and G.C. Shephard. Ceva, Menelaus, and Selftransversality. *Geometriae Dedicata*, 65:179–192, 04 1997.
- [25] B. Gr unbaum and G.C. Shephard. Some new Transversality Properties. *Geometriae Dedicata*, 71:179–208, 1998.
- [26] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

- [27] P. Janičić, J. Narboux, and P. Quaresma. The Area Method: a Recapitulation. *Journal of Automated Reasoning*, 48(4):489–532, 2012.
- [28] D. Jokanović, M. Milićević, and Đ. Baralić. Software *Cinderella* and its Application in Visualization of Physic and Mathematics. *Mathematica Montisnigri*, XXXIV(0354 2238):86, 2015.
- [29] U. Kortenkamp. Web stranica softvera Cinderella. <https://www.cinderella.de/tiki-index.php>.
- [30] H. Li and Y. Wu. Automated Theorem Proving in Projective Geometry with Bracket Algebra. 01 2000.
- [31] H. Li and Y. Wu. Automated short proof generation for projective geometric theorems with Cayley and bracket algebras: I. Incidence geometry. *Journal of Symbolic Computation*, 36, doi =:717–762, 11 2003.
- [32] N. Magaud, J. Narboux, and P. Schreck. A Case Study in Formalizing Projective Geometry in Coq: Desargues Theorem. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 45, 10 2012.
- [33] S.B. Maurer. Matroid Basis Graphs. I. *Journal of Combinatorial Theory*, 14:216–240, 1973.
- [34] M. Milićević. Teoreme incidencije na površima. In *Zbornik radova sa konferencije Savremeni matematički problemi*. Filozofski fakultet Pale, 2020.
- [35] J.R. Munkers. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [36] J. Narboux. A Decision Procedure for Geometry in Coq. In Slind, Konrad; Bunker, Annette; Gopalakrishnan, and Ganesh C., editors, *Theorem Proving in Higher Order Logics 2004*, volume 3223, pages 225–240, Park City, USA, United States, July 2004. Springer.
- [37] R. Rashed and A. Papadopoulos. On Menelaus’ Spherics III.5 in Arabic mathematics. I: Ibn ‘Irāq. *Arabic Sciences and Philosophy*, 24, 2014.
- [38] J. Richter-Gebert. Mechanical Theorem Proving in Projective Geometry. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 13:139–172, 1995.
- [39] J. Richter-Gebert. Meditations on Ceva’s Theorem - In The Coxeter Legacy: Reflections and Projections. *American Mathematical Society, Fields Institute*, pages 227–254, 2006.
- [40] J. Richter-Gebert. *Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour Through Real and Complex Geometry*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

- [41] G.C. Shephard. Cyclic Product Theorems for Polygons (I) Constructions using Cycles. *Discrete & Computational Geometry*, 24:551–571, 2000.
- [42] G.J. Toomer. *Ptolemy's Almagest*. Gerald Duckworth & Co. Ltd., London, 1984.
- [43] D. Vincent and R. Laurent. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 28:181–203, 10 1989.
- [44] W. Wu. On the decision problem and the mechanization of theorem proving in elementary geometry. *Scientia Sinica*, 22(2):159–172, 1978.
- [45] A.J. Zomorodian. *Topology for Computing*. Cambridge University Press, 2005.