学生の評価を上げる努力と安定マッチング

松 八 重　泰 輔

1．はじめに

マッチング理論は，Gale 教授と Shapley 教授が *American Mathematical Monthly* において1962年に発表した“College Admissions and the Stability of Marriage”が最初の研究といわれている[1)]．彼らが提案したマッチングの解概念として「安定性」という解概念がある．もし与えられたマッチングに対して，そのマッチングよりも誰ともマッチしない方がより選好する主体が存在しない，かつもとのマッチングよりも選好するマッチングを形成するペアが存在しないならば，そのマッチングは**安定マッチング**であるといわれる．

彼らは，この安定マッチングが必ず存在し，それを発見するアルゴリズム，いわゆる DA アルゴリズムを示した．その後，彼らの提示した理論はマッチング理論とよばれ，そのマッチング理論を応用し，さまざまな現実の問題を解決した[2)]．

マッチング理論を応用した一つの問題に，学生配置問題がある．トルコの大学において，学生にとってどのような入学制度がよりよいものか，また現状はどのような性質をもった制度なのかに対する回答を試みようとした研究が，この問題の端緒といわれている．この問題に対する研究は，Balinski and Sonmez（1999）が最初といわれている．彼らは，標準化されたテストを用いた中央集権的な大学入学市場を考え，新たなマッチング・モデルのクラスを考察した．彼らは，トルコの大学で用いられているメカニズムの欠点を指摘し，それを改善するメカニズムを提案した．

そのモデルの中で一つの重要な性質として提案された，**改善を尊重する**という性質がある．こ

1） Gale and Shapley（1962）
2） Roth, Alvin. E.（2013）を参照.

の概念の拡張について本稿において考察を行う．この概念を簡単にいうと，大学入学試験などで学生の点数がよくなったときに，そのよくなった学生はより望む大学に入学することができるようなメカニズムであるならば，そのメカニズムは改善を尊重するメカニズムといわれる．つまり，その性質を満たすメカニズムのもとで学生の大学への入学問題を考えるならば，点数があがった学生は必ずいままでよりも，より選好する大学に入学できるということである．学生最適安定メカニズムはこの性質を満たすことを彼らは示した．

本稿において，この概念をグループ全体が改善した場合に尊重されるかどうかを検討する．つまり，あるグループの評価があがったならば，そのグループに属する主体全員が以前よりもよい結果をえることができるメカニズムが存在するかどうかを考察する．

Balinski and Sonmez（1999）と類似の研究として，Hatfield, Kojima, and Narita（2016）がある．彼らは，学校がある改善，たとえば，校内にエアー・コンディショナーを設置する，野球場を作る等をした場合，よりよい学生を獲得できる安定なメカニズムが存在するかどうかを考察している．それに対しては否定的な回答がえられている

また，効率性を満たすメカニズムがあるかどうかに関しても否定的な回答がえられている．その否定的な回答に対する解決方法として，市場を大きくすることでその問題が解決可能であることを示した．具体的にいうと，市場を大きくすることで，学生最適 DA メカニズムは安定性とその性質が両立可能であることを示した．

本稿は次のように構成されている．２節において本稿で扱うモデルを構築する．３節は学生の努力を尊重するメカニズムを考察する．４節において３節で導入した概念の一般化である学生の提携に対する努力を尊重するメカニズムを考察する．５節で本稿の結論を述べる．

2．モ　デ　ル

この節では本稿で扱うモデルを定式化する．

われわれの分析の対象を**学校選択市場**または単純に**市場**とよぶことにする．その市場は次のような構成要素たちから成り立っている．

１）有限な学生の集合 $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $n\in$（$\mathbb{N}$（自然数の集合）$\setminus\{0\}$），代表的な学生を s_i で表す；

２）有限な学校の集合 $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, $m\in$（$\mathbb{N}\setminus\{0\}$），代表的な学校を c_k で表す；

３）学生の選好プロファイル，$\succcurlyeq_S=(\succcurlyeq_{s_1}, \succcurlyeq_{s_2}, \ldots, \succcurlyeq_{s_n})$ ここで，$\succcurlyeq_{s_i}$は学校の集合 C とアウトサイド・オプション $\{\phi\}$ 上の選好関係とする．もし学生 s_i がどの学校にも割り当てられないならば，そのとき，ϕ が割り当てられているとする．すべての学生達は厳密な選好関係をもつと仮定する．ここで，厳密な選好関係は $c'\succ_{s_i}c$ と表現し，厳密な選好関係は $c'\succcurlyeq_{s_i}c$ であるが $c\succcurlyeq_{s_i}c'$ が成

り立たないと定義される．もし学校 c が学生 s_i にとって $c \succ_{s_i} \phi$ が成り立つならば，そのとき学校 c は，学生 s_i にとって**受入可能**とよぶ．

4）学校の優先順位プロファイル $R_C=(R_{c_1}, R_{c_2}, \ldots, R_{c_m})$, ここで R_{c_k} は学校 c_k の学生の集合 S とアウトサイド・オプション $\{\phi\}$ 上の優先順位を表している．学校は厳密な優先順位をもっていると仮定する．厳密な優先順位を $s' \, P_c \, s$ と表し，厳密な優先順位は $s' \, R_{ck} \, s$ であるが $s \, R_{ck} \, s'$ ではない場合と定義される；

5）各学校 $c_k \in C$ に対して，$q_{c_k} \in N \setminus \{0\}$は学校 c の**定員**を表す．

つまり，市場 G は次のような組で規定される：

$$G=(S, C, (\succcurlyeq_s)_{s \in S}, (R_c)_{c \in C}, (q_c)_{c \in C}).$$

学生や学校の集合かつ定員は本稿では固定して考えるので，市場 G を混乱がない限り $G=((\succcurlyeq_s)_{s \in S}, (R_c)_{c \in C})$と省略して表現する．

割り当てまたは**マッチング**を次のように定義する．

割り当てμ は以下の条件たちを満たす，$S \cup C$ から $S \cup C$ への写像である：

1）すべての学生 $s \in S$ に対して，$|\mu(s)| = 1$ かつすべての学校 $c \in C$ に対して $s \notin \mu(c)$であるならば$\mu(s) = \phi$；[3)]

2）すべての学生 $s \in S$ かつすべての学校 $c \in C$ に対して，$\mu(s) = c$ であるならばそのときに限り $s \in \mu(c)$；

3）すべての学校 $c \in C$ に対して，$|\mu(c)| \leq q_c$ かつ$\mu(c) \subseteq S$.

われわれは市場 G が与えられたとき，割り当ての集合を $M(G)$ で表す．

混乱がない限り市場 G の記号を省略して M で表す．この割り当ての定義はマッチング理論において標準的なものである．

次に本稿で中心的な役割を担う**安定性**を定義する．

割り当て$\mu \in M$ が**安定**であるとは，次の条件たちを満たす割り当てである：

1）すべての学生 $s \in S$ に対して，$\mu(s) \succcurlyeq_s \phi$かつ

2）もし $c \, P_s \, \mu(s)$ならば，そのとき次のどちらかが成り立つ，

① $|\mu(c)| = q_c$ かつすべての学生 $s' \in \mu(c)$に対して $s' \, P_c \, s$ または

3）　各学生は高々ひとつの学校に割り当てられるかまたはどの学校にも割り当てされないかだから，われわれは集合の記号である中括弧を省略し，$\mu(s) = \{c\}$ の代わりに$\mu(s) = c$ と記し，$\mu(s) = \{\phi\}$ の代わりに$\mu(s) = \phi$と記す．

② $|\mu(c)| < q_c$ かつ $\phi\, P_c\ s$ が成り立っている．

安定な割り当ての集合を記号 S で表す．当然のことながら，$S \subset M$ である．

任意の市場 G に対して，割り当てμを与える対応を**メカニズム** φ とよぶ．つまり，

$$\varphi: G \rightarrow M.$$

便宜上，メカニズム φ によって各学生 s に対する割り当てを $\varphi(G)(s)$と表記する．

メカニズム φ が安定メカニズムとは，任意の市場 G に対して $\varphi(G)$の割り当てが安定性を満たすことをいう．

定義 2.1　メカニズム φ が**耐戦略性**を満たすとは次の条件が成り立つことである．

任意のマッチング市場 G に対して，任意の学生 $s \in S$ が任意の選好 $\succcurlyeq_s'$ を表明したときに，

$$\varphi(G)(s) \succcurlyeq_s \varphi(G')(s)$$

が成り立つことである．ここで市場 G は$G = ((\succcurlyeq_s, \{\succcurlyeq_{s'}\}_{s' \in S \setminus \{s\}}), R_C)$で，市場 G'は，$G' = ((\succcurlyeq_s', \{\succcurlyeq_{s'}\}_{s' \in S \setminus \{s\}}), R_C)$である．

この概念のより一般的な概念に拡張したのが次の提携に対する耐戦略性である．

われわれは学生の集合 S の空集合を除いた任意の部分集合を**提携**とよぶ．

定義 2.2　メカニズム φ が**提携に対する耐戦略性**を満たすとは次の条件が成り立つことである．

任意の市場 G に対して，ある学生の提携 $S' \subseteq S$ に対して，その提携のメンバーがある選好プロファイル $\{\succcurlyeq_s'\}_{s \in S'}$ を表明したときに，その提携の任意の学生 $s \in S'$ に対して

$$\varphi(G')(s) \succcurlyeq_s \varphi(G)(s)$$

かつ，少なくともその提携の一人の学生 $s' \in S'$に対して

$$\varphi(G')(s') \succ_{s'} \varphi(G)(s')$$

が成り立たない場合である．

ここで市場 G は

$$G = ((\{\succcurlyeq_s\}_{s \in S'}, \{\succcurlyeq_t\}_{t \in S \setminus S'}), R_C)$$

で，市場 G'は

$$G' = (\{\succcurlyeq_s'\}_{s \in S'}, \{\succcurlyeq_t\}_{t \in S \setminus S'}), R_C)$$

である.

メカニズムが提携に対する耐戦略性を満たすとは，直観的にいうと，そのメカニズムを用いると，提携のメンバー間でどんな選好を表明したとしても，その提携のメンバーは少なくとも誰か一人を犠牲にすること無しに，より選好する割り当てをえることはできないことを保証する概念である.

提携に対する耐戦略性という概念は，個々の学生がどんな選好を表明したとしてもより選好する割り当てをえることができないという耐戦略性の概念より強い概念である，なぜならば学生の集合の任意の部分集合には一人の場合も含まれているからである.

定義 2.3　市場 G が与えられたとき，割り当てμが**学生最適な安定な割り当て**とは，ある安定な割り当て$\mu' \in S$ に対し，任意の学生 $s \in S$ に対して，

$$\mu'(s) \succcurlyeq_s \mu(s)$$

かつ少なくとも一人の学生 $s' \in S$ に対して

$$\mu'(s') \succ_{s'} \mu(s')$$

が成り立つことがない場合をいう.

メカニズム φ が**学生最適な安定な割り当てメカニズム**であるとは，任意の市場 G に対して学生最適な安定な割り当てを導くメカニズムのことをいう.

次に，マッチング理論において最も有名な安定な割り当てを導出する受入留保方式を紹介する．この方式は Gale and Shapley（1962）で示された方式である.

受入留保方式：

ステップ 1：各学生は自身の選好の中で最も選好する学校に出願する．それを受けた各学校は優先順位にしたがって，その学校の定員まで学生を仮に受け入れる．もしその学校の定員よりも多くの学生が出願したならば，出願した学生達の優先順位順に定員まで仮に受入れ，それ以外の学生は拒否する．拒否された学生は次のステップに進む.

ステップ $k \geq 2$：以前のステップで拒否された学生は，以前のステップで出願した学校のつぎに選好する学校に出願する．各学校は，以前のステップで仮に受け入れた学生とこのステップで出願した学生のすべての中から優先順位にしたがってその学校の定員まで仮に受け入れる．定員を超えた学生達を拒否する．拒否された学生達は次のステップに進む.

終了条件：このステップはどの学生に対しても学校が拒否しなかったら終了し，その時点で仮に

受け入れられていた学生達はその学校に割り当てられる．この方式は拒否された学校に学生が再び出願することはないので，この方式は学校が有限である限り，有限のステップで終了する．

この方式は，一意な学生最適な安定な割り当てを導くことが知られている．われわれは，この方式のメカニズムを特に**受入留保方式メカニズム**とよぶ．つまり，受入留保方式メカニズムとは，学生最適な安定な割り当てを行うメカニズムである．

3．学生の努力の尊重

この節で学生の努力を尊重するメカニズムについて考察する．最初に，Balinski and Sonmez (1999) によって導入された学生 s に対する努力を定義する．正確には彼らは学校の学生に対する改善と定義した．本稿ではそれを学生の努力として解釈する．

定義 3.1 (Balinski and Sonmez (1999)) 市場 $G' = (\succcurlyeq_S, \bar{R}_C)$ が市場 $G = (\succcurlyeq_S, R_C)$ における学生 s_j に対する努力とは，すべての学校 $c \in C$ に対して，

- すべての学生 $s_i \in S \setminus \{s_j\}$ に対して，$s_j \ P_c \ s_i$ ならば，$s_j \ \bar{P}_c \ s_i$ が成り立ち，かつ
- 学生 s_j 以外の任意の 2 人の学生 s_i, s_k に対して，$s_i \ P_c \ s_k$ ならば $s_i \ \bar{P}_c \ s_k$ が成り立つことをいう．

つまり，努力をしない学生の間の優先順位は同じで，努力をした学生は一つ以上の学校において優先順位が上昇する可能性があることを意味している．

定義 3.2 (Balinski and Sonmez (1999)) メカニズム φ が**努力を尊重する**とは，任意の学生 $s \in S$ に対して，市場 G' が市場 G における学生 s の改善であるならば，

$$\varphi(G')(s) \succcurlyeq_s \varphi(G)(s)$$

が成り立つことをいう．

後で述べるように Balinski and Sonmez (1999) は，受入留保方式メカニズムは改善を尊重することを示している．われわれの関心は，学校側が学生の改善を尊重することでより優先順位の高い学生を獲得できる安定なメカニズムがあるかである．しかしながら以下の定理が示すように，そのような安定なメカニズムは存在しない．

われわれはこの主張を示すために学校の順位和という概念をつぎのように導入する．

定義 3.3 市場 $G = (\succcurlyeq_S, R_C)$ が与えられたとき，任意の学校 $c \in C$ に割り当てられた学生の**順位和**

を

$$\sum_{s\in\mu_G(c)} Rank_{R_C}(s|c)$$

で定義する．ここで$Rank_{R_C}(s|c)$とは，学校 c に割り当てられた学生 s からその学校の優先順位の数字への写像である．

われわれは学生が努力をしたもとで，努力する前と比べてすべての学校の順位和が小さくなるならば，学校がより望ましい学生を獲得できたと定義する．

定理 3.1　任意の市場において，学生が努力することにより学校がより望ましい学生を獲得できる安定なメカニズムは存在しない．

証明

この定理を示すために，ある市場をひとつとってくる．そのとってきた市場としてつぎのような市場を考える：$G=(S, C, (\succcurlyeq_s)_{s\in S}, (R_c)_{c\in C}, (q_c)_{c\in C})$．市場 G を具体的に述べるとつぎのような市場である．学生の集合 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$，学校の集合 $C=\{c_1, c_2, c_3\}$ かつ$q=(q_{c_1}=2, q_{c_2}=2, q_{c3}=1)$とする．学生の選好を次のように与える：

$\succcurlyeq_{s_1}$: c_1, c_2, c_3,

$\succcurlyeq_{s_2}$: c_1, c_2, c_3,

$\succcurlyeq_{s_3}$: c_1, c_3, c_2,

$\succcurlyeq_{s_4}$: c_2, c_1, c_3,

$\succcurlyeq_{s_5}$: c_2, c_1, c_3.

ここで記号の便宜上，選好順に学校を記述し，すべての学校が受入可能であるとする．
学校の優先順位を次のように与える：

R_{c_1}: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5,

R_{c_2}: s_1, s_4, s_5, s_3, s_2,

R_{c_3}: s_3, s_1, s_4, s_5, s_2.

ここで，学生の選好と同様に学校の優先順位に関しても，優先順に記述しすべての学生が受入可能とする．

例えば，学校 c_1は学生 s_1が最も優先順位が高く，学生 s_2が 2 番目に高く，学生 s_3が 3 番目に高く，学生 s_4が 4 番目で，そして学生 s_5が最も低い優先順位となる．

このマッチング市場は一意で安定な割り当て$\mu(G)$が存在し，次のように与えられる：

$$\mu(G)=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1, s_2 & s_4, s_5 & s_3 \end{pmatrix}$$

この割り当て $\mu(G)$は，市場 G において，学校 c_1に学生 s_1と s_2を割り当て，学校 c_2に学生 s_4と学生 s_5を割り当て，そして学校 c_3に学生 s_3を割り当てることを意味する．

ここで，学生 s_3が各学校に評価をあげるような改善をした場合の市場を考える．つまり，

$R'_{c1}: s_1, s_3, s_2, s_4, s_5,$

$R'_{c2}: s_1, s_4, s_3, s_5, s_2,$

$R'_{c3}: s_3, s_1, s_4, s_5, s_2,$

のように，各学校の優先順位が変わった市場 $G'=(S, C, (\geqslant_s)_{s\in S}, (R'_c)_{c\in C}, (q_c)_{c\in C})$ となる．

その市場 G'において，つぎのような一意の安定な割り当て$\mu(G')$が存在する：

$$\mu(G')=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1, s_3 & s_4, s_5 & s_2 \end{pmatrix}$$

学生 s_3が自身の評価をあげるような改善をした結果，その努力をする前の優先順位 R を基準の順位和とその改善に基づいた優先順位 R' を基準として順位和を計算すると，$\sum_{c\in C}\sum_{s\in\mu_c(G)} Rank_R(s|c)=9>16=\sum_{c\in C}\sum_{s\in\mu_c(G')} Rank_{R'}(s|c)$となり，学校全体においての順序和として，より望まない学生が割り当てられている．特に，学校 c_2と学校 c_3はより下位の学生が割り当てられていることがわかる．

証明終了

この定理は，学生の改善が必ずしも学校側にとって望ましい割り当てを生み出さないことを示している．つまり，学生の改善を促すインセンティブが学校側にないことを示している．

しかしながら，以下の例が示すようにある市場において，学生が改善をすることにより，学校全体がより望ましい学生を割り当てられることもある．

例

つぎのようなある市場を考える：$G=(S, C, (\geqslant_s)_{s\in S}, (R_c)_{c\in C}, (q_c)_{c\in C})$．市場 G は具体的につぎのような市場である．学生の集合 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$，学校の集合 $C=\{c_1, c_2, c_3\}$ かつ $q=(q_{c_1}=2, q_{c_2}=2, q_{c3}=1)$とする．学生の選好は次のように与える：

$\geqslant_{s1}: c_1, c_2, c_3,$

$\geqslant_{s2}: c_1, c_2, c_3,$

$\geqslant_{s3}: c_1, c_3, c_2,$

$\succcurlyeq_{s_4}$: $c_2, c_1, c_3,$

$\succcurlyeq_{s_5}$: $c_2, c_1, c_3.$

ここで記号の便宜上，選好順に学校を記述し，すべての学校が受入可能であるとする．学校の優先順位はつぎのように与える：

R_{c_1}: $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5,$

R_{c_2}: $s_4, s_5, s_2, s_3, s_1,$

R_{c_3}: $s_2, s_1, s_3, s_5, s_4.$

ここで，学生と同様に学校優先順位に関しても優先順に記述し，すべての学生が受入可能とする：

例えば，学校 c_1は学生 s_1が最も優先順位が高く , 学生 s_2が 2 番目に高く，学生 s_3が 3 番目に高く，学生 s_4が 4 番目で，そして学生 s_5が最も低い優先順位となる．

この市場は一意な安定な割り当て$\mu(G)$が存在し , 次のように与えられる :

$$\mu(G)=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1, s_2 & s_4, s_5 & s_3 \end{pmatrix}$$

この割り当て$\mu(G)$は , 市場 G において，学校 c_1に学生 s_1と s_2を割り当て , 学校 c_2に学生 s_4と学生 s_5を割り当て , そして学校 c_3に学生 s_3を割り当てることを意味する．

ここで，学生 s_3が各学校に評価をあげるような改善をした場合の市場を考える．つまり，

R'_{c1} : $s_1, s_3, s_2, s_4, s_5,$

R'_{c2} : $s_4, s_5, s_3, s_2, s_1,$

R'_{c3} : $s_2, s_3, s_1, s_5, s_4,$

のように，各学校の優先順位が変わった市場 $G'=(S, C, (\succcurlyeq_s)_{s\in S}, (R'_c)_{c\in C}, (q_c)_{c\in C})$となる．
その市場 G', つぎのような一意の安定な割り当て$\mu(G')$が存在する：

$$\mu(G')=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1, s_3 & s_4, s_5 & s_2 \end{pmatrix}$$

学生 s_3が自身の評価をあげるような努力をした結果，その努力をする前の優先順位 R を基準とした順位和とその努力に基づいた優先順位 R'を基準とした順位和を計算すると，$\sum_{c\in C}\sum_{s\in\mu(G)} Rank_R(s|c)=9>8=\sum_{c\in C}\sum_{s\in\mu(G')} Rank_{R'}(s|c)$となり，学校全体においてより望ましい学生が割り当てられている．特に，学校 c_3はより上位の学生 s_2が割り当てられていることがわかる．

つぎに，Balinski and Sonmez（1999）の定理 5「学生が努力をすることにより望ましい学校に

割り当てられる」という主張とその別証明を紹介する.

定理 3.2 （Bakinski and Sonmez (1999) 定理５）DA メカニズムは学生の努力を尊重する唯一の安定性を満たすメカニズムである.

証明

最初に示すべきことは，DA メカニズムが学生の努力を尊重することを示す．そこで，学校選択市場 $G=(S, C, (\geqslant_s)_{s\in S}, (R_c)_{c\in C}, (q_c)_{c\in C})$ において，学生 s が努力した学校選択市場 $G'=(S, C, (\geqslant_s)_{s\in S}, (R'_c)_{c\in C}, (q_c)_{c\in C})$とする．$\mu^S(G)(s)$と$\mu^S(G')(s)$をそれぞれの市場における DA によって導かれたマッチング結果をする．つまり，それらはそれぞれの市場における安定な学生最適なマッチング結果である．主張を示すためには，次のような関係が成り立たなければならない：

$$\mu^S(G')(s) \geqslant_s \mu^S(G)(s).$$

この主張を示すために背理法で証明を行う：

$$\mu^S(G)(s) >_s \mu^S(G')(s)$$

であると背理法の仮定をおく．ここで注意が必要なのは，$\mu^S(G) \in S(G')$の関係が成り立つ，なぜならば，$\mu^S(G)$が $S(G')$の要素であるならば，$\mu^S(G')$がマッチング市場 G'の学生最適な安定マッチングであることに反するからである.

いま，$\mu^S(G)(s)$が割り当てられた学校を c とする，もし学生 s がどの学校にも割り当てられていないならば，$\mu^S(G')(s)$の個人合理性に反するからである：

$$\mu^S(G)(s)=c.$$

そこで，学生 s が$\mu^S(G)(s)$のもとで，選好を個人合理的な単調変換を考える：

$$c >_s^* \emptyset >_s^* c^*,\ \forall c^* \in C \quad s.t. \quad c^* \neq c.$$

つまり，学校 c 以外が受入不可能であるとする個人合理的な単調変換をする.

そこで，つぎのような別の学校選択市場 $G''=(S, C, \geqslant_s^*, (\geqslant_{s'})_{s'\in S\setminus\{s\}}, (R'_c)_{c\in C}, (q_c)_{c\in C})$ を考える．Kojima and Manea (2010) よりつぎの関係が成り立つ：

$$\mu^S(G'')(s) \geqslant_s^* \mu^S(G')(s).$$

この市場において$\mu^S(G)$が安定マッチングであることを示す．$\mu^S(G)$は G において個人合理的であり，学生 s は $\geqslant_s^*$のもとでも$\mu^S(s)$は個人合理的であるので，G''でも μ^S は個人合理的である．つぎ

に，このマッチングμ^Sがマッチング市場G''においてブロッキング・ペアが存在すると仮定する．ブロッキング・ペアとなりうるのは学生sを含む場合しかない，なぜならば，もしs以外がブロッキング・ペアとなりうるならば，Gにおいてもブロッキング・ペアとなっているはずである．この事実は，μ^Sの安定性に反する．学生sは選好の構成の仕方からブロッキング・ペアとなり得ない．つまり，G''において個人合理的かつブロッキング・ペアの非存在より，マッチングμ^SはG''において安定なマッチングとなることがわかる．さらに，学生sにとってG''において学生最適な安定マッチングは，

$$\mu^S(G'')(s)=c$$

が成り立つ．なぜならば，G''における安定マッチングの中でμ^S (s)より選好する学校は存在しないからである．
背理法の仮定より

$$\mu^S(G'')(s)=\mu^S(G)(s)>_s \mu^S(G')(s)$$

である．これは，マッチング市場 G' において学生 s が偽の選好を表明することにより，マッチング結果が改善することを示している．しかしながら，DA は耐戦略性を満たすので矛盾である．したがって，最初の主張である，学生の努力により，学生は望ましい学校に割り当てられることがわかった．

つぎに一意性を示す．そこでφを安定かつ学生の努力を尊重するメカニズムであるとする．$\varphi\neq\varphi^{DS}$とする．φ^{DS}は，学生最適なDSメカニズムとする．そこで，

$$\varphi(G)\neq\varphi^{DS}(G)$$

このようなマッチング市場Gを考える．概念の単純化のため，ϕを$\varphi(G)$のマッチング結果で，μ^Sをφ^{DS} (G)のマッチング結果とする．特に，上式は

$$\phi(s)\neq\mu^S(s)=c$$

となるような学生$s\in S$が存在することを意味する．

ここで$G'=(S, C, (\succcurlyeq_s)_{s\in S}, R_c, \widehat{R}_{-c}, (q_c)_{c\in C})$となるマッチング市場を考える．$c\neq\hat{c}$となるようなすべての$\hat{c}\in C$に対して，$s$が最も優先順位が低い受入可能な学生である以外は$R_{-c}$と$\widehat{R}_{-c}$は同じであるとする．つまり，$c\neq\hat{c}$となるようなすべての$\hat{c}\in C$に対して，

$$\begin{cases}\tilde{s}\,\widehat{P}_{\hat{c}}\,s^*\Leftrightarrow\ \tilde{s}\,P_{\hat{c}}\,s^* & \forall\ \tilde{s}, s^*\in S\ \ s.t.\ \ \tilde{s}\neq s, s^*\neq s\\ \qquad\quad \tilde{s}\,\widehat{P}_{\hat{c}}\,s\,\widehat{P}_{\hat{c}}\,c & \forall\ \tilde{s}\in S\ \ s.t.\ \ \tilde{s}\neq s.\end{cases}$$

最初に，マッチング市場 G'においてμ^Sが安定なマッチングになることを示す．Gにおいてμ^Sは安定なので，G'でブロッキング・ペアが存在するならば，Gでも優先順位の構成の仕方からブロッキング・ペアとなる．つまり，G'においてμ^Sも安定なマッチングとなる．

つぎに，学生 s は G'における安定なマッチングを学校 c よりも弱く選好することを示す．背理法で証明を行う．つまり，$c\ P_s\ \mu(s)$であると仮定する．$\hat{\mu}^C$を G'において学生にとって最悪な安定マッチングとする．これは，

$$c \succ_s \hat{\mu}^C(s)$$

であることを意味する．また，僻地病院定理により，安定マッチングで学校が割り当てられている学生は，他の安定マッチングでも学校が割り当てられているので，c とは異なる他の学校 c^*があることがわかる．さらに，c 以外の学校に対する優先順位の構成の仕方より，c^*は学生 s にとって他の学生より $\hat{R}_c^*$のもとで優先順位が低いことがわかる．つまり，上記の議論を要約すると次のようになる：

$$\mu^S,\ \hat{\mu}^C \in S(G'') \wedge \mu^S(s) = c,\ \hat{\mu}^C(s) = c^*,\ c \neq c^*.$$

僻地病院定理により，任意の安定マッチングにおいて学校は常に同じ数の学生が割り当てられているので，$\mu^S(\hat{s}) = c^*$かつ$\hat{\mu}^C(\hat{s}) \neq c^*$となるような学生 $\hat{s}$ が存在する．$\hat{s}\ \hat{P}_c{}^* s$ であるので，$\hat{\mu}^C(\hat{s}) \succ_{\hat{s}} c^*$でなければならない．なぜならば，そうでないならば$\hat{\mu}^C$において$(\hat{s}, c^*)$がブロッキング・ペアとなってしまうからである．また，$\hat{\mu}^C(\hat{s}) \succ_{\hat{s}} \mu^S(\hat{s})$でなければならない．しかしながら，これは$\hat{\mu}^C$が学生にとって G'において最悪な安定マッチングという仮定に反する．つまり，G'において安定マッチングは優先順位が上がる前に割り当てられた学校 c よりも弱い意味で選好する学校に割り当てられることがわかる．

φ が安定であるので，$\hat{\phi} = \varphi(G') \in S(G')$となる．上記で証明した事実より$\hat{\phi}(s) \succcurlyeq_s \mu^S(s)$となる．さらに，$\varphi(G) = \phi \in S(G)$かつ$\phi(s) \neq \mu^S(s)$であるので，$\mu^S(s) \succ_s \phi(s)$ が成り立つ．それゆえ，$\hat{\phi}(s) \succ_s \phi(s)$となる．これは φ が学生の努力を尊重することに矛盾する．

証明終了

4．学生の提携に対する努力の尊重

この節で Balinski and Sonmez（1999）の定理 5 の一般化を試みる．直観的にいうと，学生のグループが努力するような場合，そのグループはより望ましい学校に割り当てられるかどうかを検討する．最初にグループによる改善を尊重することの定義を行う．

マッチング市場 $G' = (\{\succcurlyeq_s\}_{s\in S}, \{R'_c\}_{c\in C}, q)$ が $G = (\{\succcurlyeq_s\}_{s\in S}, \{R_c\}_{c\in C}, q)$ に対する**提携 $S' \subseteq S$ の改善と**

は，任意の $s, s' \in S'$，$\tilde{s}$，$s^* \notin S'$かつ任意の大学 $c \in C$ に対して，

・$s\, P_c\ s' \Leftrightarrow s\, P'_c\ s'$,

・$s^*\ P_c\ \tilde{s} \Leftrightarrow s^*\ P'_c\ \tilde{s}$,

・$s\, P_c\ s^* \Rightarrow s\, P'_c\ s^*$

のすべてが満たされる場合である．

定義 4.1　マッチング市場 $G=(\{\succcurlyeq_s\}_{s\in S}, \{R_c\}_{c\in C}, q)$ のもとで，メカニズムϕが**提携の改善を尊重**するとは，学生の任意の提携 $S' \subseteq S$ とすべての学生 $s' \in S'$に対し，$G'=(\{\succcurlyeq_s\}_{s\in S}, \{R_c\}_{c\in C}, q)$ が学生の提携 S'の改善であるとき，

$$\varphi(G')(s')R_{s'}\,\varphi(G)(s')$$

となることである．

以下の定理が示すように，Balinski and Sonmez（1999）の定理 5 の一般化である，学生最適安定マッチングメカニズムが必ずしも学生の提携の改善を尊重しない．

定理 4.1　任意のマッチング市場に対して，提携の改善を尊重する安定メカニズムは存在しない．

証明

そこで次のようなあるマッチング市場を考える：$G=(\{\succcurlyeq_s\}_{s\in S}, \{R_c\}_{c\in C}, q)$．市場 G は具体的につぎのような市場をひとつとってくる．学生の集合 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$，学校の集合$C=\{c_1, c_2, c_3\}$かつ $q=(q_{c_1}=2, q_{c_2}=2, q_{c_3}=1)$とする．学生の選好はつぎのように与える：

$\succcurlyeq_{s_1}: c_1, c_2, c_3,$

$\succcurlyeq_{s_2}: c_1, c_3, c_2,$

$\succcurlyeq_{s_3}: c_1, c_3, c_2,$

$\succcurlyeq_{s_4}: c_3, c_2, c_1,$

$\succcurlyeq_{s_5}: c_2, c_1, c_3.$

ここで記号の便宜上，選好順に学校を記述し，すべての学校が受入可能であるとする．学校の優先順位はつぎのように与える：

$R_{c_1}: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5,$

$R_{c_2}: s_5, s_4, s_3, s_2, s_1,$

$R_{c_3}: s_2, s_4, s_1, s_3, s_5.$

ここで，学生と同様に学校優先順位に関しても，優先順に記述しすべての学生が受入可能とする：たとえば，学校 c_1は学生 s_1が最も優先順位が高く，学生 s_2が 2 番目に高く，学生 s_3が 3 番目に高く，学生 s_4が 4 番目で，そして学生 s_5が最も低い優先順位となる．

このマッチング市場は一意な安定マッチング$\mu(G)$が存在し，つぎのように与えられる：

$$\mu(G)=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1, s_2 & s_3, s_5 & s_4 \end{pmatrix}$$

このマッチング$\mu(G)$は，マッチング市場 G において，学校 c_1に学生 s_1と s_2とを割り当て，学校 c_2に学生 s_3と学生 s_5を割り当て，そして学校 c_3に学生 s_4を割り当てることを意味する．

ここで，学生の提携 $\{s_3, s_4\}$ が各学校に評価を上げるような努力をした場合のマッチング市場を考える．つまり，

$$R'_{c_1}: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5,$$
$$R'_{c_2}: s_5, s_4, s_3, s_2, s_1,$$
$$R'_{c_3}: s_2, s_4, s_1, s_3, s_5.$$

のように，各学校の優先順位が変わったマッチング市場 $G'=(\{\geqslant_s\}_{s\in S}, \{R'_c\}_{c\in C}, q)$ となる．そのマッチング市場 G', つぎのような一意の安定マッチング$\mu(G')$が存在する：

$$\mu(G')=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1, s_3 & s_4, s_5 & s_2 \end{pmatrix}$$

学生 s_3が自身の評価をあげるような努力をした結果，より望ましい学校 c_1に割り当てられているが，学生 s_4は改善する前の学校よりも選好しない学校 c_2に割り当てられている．つまり提携の学生がより望ましい学校に割り当てられないことがわかる．

証明終了

そこで，どのような場合に提携の改善を尊重するのか，その条件を考察する．そのための重要な概念が nonbossy という概念である．この概念は，Satterthwaite and Sonnenschein（1981）において定義された概念である．

定義 4.2 （Nonbossiness）メカニズム φ が nonbossy の性質を満たすとは，任意のマッチング市場 $G=(\geqslant=(\geqslant_s, \geqslant_{-s}), \{R_c\}_{c\in C}, q)$, $G'=(\geqslant'=(\geqslant'_s, \geqslant_{-s}), \{R_c\}_{c\in C}, q)$ と任意の学生 s に対して，$\varphi(G')(s)=\varphi(G)(s)$ のときに $\varphi(G')=\varphi(G)$となることである．

この概念は耐戦略性の文脈でよく用いられる．直観的にいうと，ある学生 s が異なる選好を表明することで，自分自身の割り当てを変更すること無しに他の学生の割り当てを変更することはできないということを保証する概念である．Pápai（2000）は，耐戦略性と nonbossy が提携に対す

る耐戦略性であることが同値であることを示した．この主張は以下の証明で重要となるので，ここで原文より詳細の証明をしておく．その主張のための概念をまず説明する．

あるメカニズム φ と任意の学生 $s\in S$ かつそれ以外の学生の選好プロファイル $\succcurlyeq_{-s}$ に対して，

$$o_s(\succcurlyeq_{-s}) := \{c\in C\,;\ \exists \succcurlyeq s.t.\ \varphi(\succcurlyeq)=c\}$$

を他の学生の選好プロファイル $\succcurlyeq_{-s}$ のもとでの学生 s のオプション集合とする．つまり，o_s $(\succcurlyeq_{-s})$ は，他の学生が $\succcurlyeq_{-s}$ という選好を表明したときに自身が選好を変更することで割り当てられる可能性のある学校の集合である．$\tilde{\succcurlyeq}_s$ が学校 c における $\succcurlyeq_s$ の**押し上げ**であるとは，

$$\forall\ c'\in\ C, c'\ \tilde{\succ}_s\ c \Rightarrow c'\ \succ_s\ c$$

が成り立つことである．メカニズムϕが耐戦略性を満たすならば，任意の学生 $s\in S$ とマッチング市場において，$\varphi(\succcurlyeq)(s)\ =\ top(\succcurlyeq_s, o_s(\succcurlyeq_{-s}))$が成り立つことを意味する．そうでないならば，学生 s はマッチング市場 G のもとで偽の選好を表明することでより望ましい割り当てを得ることができるからである．つまり，メカニズムϕが耐戦略性を満たすならば，$\varphi(\succcurlyeq)(s)$に対する押し上げを $\tilde{\succcurlyeq}_s$ とすると，$\phi(\succcurlyeq)(s)\ =\phi(\tilde{\succcurlyeq}_s, \succcurlyeq_{-s})(s)$となり，nonbossy をそのメカニズムが満たすならば，$\varphi(\tilde{\succcurlyeq}_s, \succcurlyeq_{-s})\ =\varphi(\succcurlyeq)$も成り立つ．

定理 4.2　（Pápai（2000），補題 1）あるメカニズムϕが学生の提携に対して耐戦略性をもつことと，そのメカニズムが耐戦略性かつ nonbossines の性質を満たすことは同値である．

証明

必要条件から示していく．学生の提携に対して耐戦略性があるので耐戦略性を満たすことは明らかである．学生の提携に対して耐戦略性があるときに nonbossines が成り立つことを示す．背理法を用いて証明を行う．背理法の仮定より，ある学生 s が自身の割り当てを変えない別の選好 $\succcurlyeq_s'$を表明したときに，別の学生 s'の割り当てられた学校が変化したとする：

$$\phi(\succcurlyeq)(s')\neq\phi(\succcurlyeq_s', \succcurlyeq_{-s})(s')$$

そのとき，二つの場合が考えられる．

ケース 1：$\phi(\succcurlyeq_s', \succcurlyeq_{-s})(s')\succ_{s'}\phi(\succcurlyeq)(s')$.

このケースは，学生 s と s'の提携を考えると，学生の提携に対する耐戦略性を満たすことに矛盾する．

ケース 2: $\phi(\succcurlyeq)(s') \succ_{s'} \phi(\succcurlyeq'_s, \succcurlyeq_{-s})(s')$.

このケースは，もとの選好プロファイルを$(\succcurlyeq_s', \succcurlyeq_{-s})$であると考えると，ケース 1 の場合と同様に，学生の提携に対する耐戦略性に矛盾する．

したがって，必要条件は示されたことになる．

つぎに，十分条件を示す．つまり，あるメカニズムϕが耐戦略性かつ nonbossines を満たす場合に学生の提携に対する耐戦略性を満たすことを示す．そこで，

$$\phi(\succcurlyeq'_s, \succcurlyeq_{-s})(s) \succcurlyeq_s \phi(\succcurlyeq_s, \succcurlyeq_{-s})(s)$$

となるようなある提携$S' \subset S$と選好プロファイル$\succcurlyeq_S'$が存在し，その提携のすべての学生sに対して成り立っているとする．また，すべての学生$s \in S'$に対して，$\hat{\succcurlyeq}_s$を次のように構成する．$\phi(\succcurlyeq'_S, \succcurlyeq_{-S})(s)$を最も選好する学校としてそれ以外は，$\succcurlyeq_i$と同じ順番とする．耐戦略性より，$\phi(\hat{\succcurlyeq}_s, \succcurlyeq_{-s})(s) = \phi(\succcurlyeq)(s)$となる．なぜならば，$\phi(\succcurlyeq_S', \succcurlyeq_{-s})(s) \succ_s \phi(\succcurlyeq)(s)$であるならば，それは耐戦略性より自身の真の選好以外で割り当てられることはないからである．それ以外では，$\phi(\succcurlyeq_S', \succcurlyeq_{-s})(s) = \phi(\succcurlyeq)(s)$となる．Nonbossines によって，$\phi(\hat{\succcurlyeq}_s, \succcurlyeq_{-s}) = \phi(\succcurlyeq)$となる．この議論をすべての提携のメンバーに対して繰りかえすと，$\phi(\hat{\succcurlyeq}_S, \succcurlyeq_{-S}) = \phi(\succcurlyeq)$となる．$\hat{\succcurlyeq}_S$は$\succcurlyeq_S'$の押し上げであるので，$\phi(\hat{\succcurlyeq}_s, \succcurlyeq_{-s}) = \phi(\succcurlyeq_S', \succcurlyeq_{-S})$となる．すなわち，$\phi(\succcurlyeq_s', \succcurlyeq_{-s}) = \phi(\succcurlyeq)$を意味する．これは提携に対する耐戦略性を意味する．

証明終了

定理 4.3　もし DA メカニズムが nonbossines を満たすならば，DA メカニズムは学生の提携の改善を尊重する唯一の安定メカニズムである．

証明

最初に示すべきことは，nonbossines の性質を満たす DA メカニズムが学生の提携の努力を尊重することを示す．そこで，学校選択市場$G = (S, C, (\succcurlyeq_s)_{s\in S}, (R_c)_{c\in C}, q)$において，任意の学生の提携$S' \subset S$が努力した学校選択市場を$G' = (S, C, (\succcurlyeq_s)_{s\in S}, (R'_c)_{c\in C}, q)$とする．その提携$S'$の任意の学生$s$に対するそれぞれの市場における DA によって導かれたマッチング結果を$\mu^S(G)(s)$と$\mu^S(G')(s)$とする．つまり，それらはそれぞれの市場における安定な学生最適なマッチング結果である．主張を示すためには，次のような関係が成り立たなければならない：

$$\mu^S(G')(s), \succcurlyeq_{-s} \mu^S(G)(s), \ \forall\ s \in S'.$$

この主張を示すために背理法で証明を行う：

$$\exists\ s \in S'\ s.t.\ \mu^S(G)(s), \succ_{-s} \mu^S(G')(s)$$

であると背理法の仮定をおく．ここで注意が必要なのは，$\mu^S(G) \notin S(G')$の関係が成り立つ，なぜならば，$\mu^S(G)$が$S(G')$の要素であるならば，$\mu^S(G')$がマッチング市場G'の学生最適な安定マッチングであることに反するからである．

いま，提携S'に属する任意の学生sに対して，$\mu^S(G)(s)$が割り当てられた学校をcとする，もし学生sがどの学校にも割り当てられていないならば，$\mu^S(G')(s)$の個人合理性に反するからである：

$$\mu^S(G)(s) = c.$$

そこで，任意の学生sが次の偽の選好$\succcurlyeq_s^*$を表明し，提携に属さない学生達は真の選好を表明したとする：

$$c \succ_s^* \emptyset \succ_s^* c^*,\ \forall\ c^* \in C\ \ s.t.\ c^* \neq c.$$

つまり，提携に属する学生達は，$\mu^S(G)$で割り当てられた学校以外は受入不可能であるという選好を表明したとする．

そこで，次のような別の学校選択市場$G'' = (S, C, \{\succcurlyeq_s^*\}_{s \in S'}, (\succcurlyeq'_s)_{s'' \in S \setminus S'}, (\bar{R}_c)_{c \in C}, q)$を考える．この市場$G''$において$\mu^S(G)$が安定マッチングであることを示す．$\mu^S(G)$は$G$において個人合理的であるし，学生$s$は$\succcurlyeq_s^*$のもとでも$\mu^S(G)(s)$は個人合理的であるので，$G''$でも$\mu^S$は個人合理的である．

つぎに，このマッチングμ^Sがマッチング市場G''においてブロッキング・ペアが存在すると仮定する．ブロッキング・ペアとなりうるのは提携に属する学生を含む場合しかない，なぜならば，もしそれらの学生達以外がブロッキング・ペアとなりうるならば，Gにおいてもブロッキング・ペアとなっているはずである．この事実は，μ^Sの安定性に反する．任意の学生sは選好の構成の仕方からブロッキング・ペアとなりえない．つまり，G''において個人合理的かつブロッキング・ペアの非存在より，マッチングμ^SはG''において安定なマッチングとなることがわかる．さらに，任意の学生sにとってG''において学生最適な安定マッチングは，

$$\mu^S(G'')(s) = c$$

が成り立つ．なぜならば，G''における安定マッチングの中で$\mu^S(s)$より選好する学校は存在しないからである．背理法の仮定より，

$$\mu^S(G'')(s) = \mu^S(G)(s) \succ_s \mu^S(G')(s)$$

である．これは，マッチング市場G'において学生の提携S'が偽の選好を表明することにより，学

生 s にとってマッチング結果が改善することを示している．しかしながら，DA は耐戦略性を満たし，仮定である nonbossines を満たす場合，上記で示した Pápai（2000）の補題 1 により提携に対する耐戦略性が成り立つ．この事実によりこれは矛盾である．したがって，最初の主張である，学生の努力により，学生は望ましい学校に割り当てられることがわかった．

つぎに一意性を示す．そこで φ を安定，nonbossines かつ学生の提携の努力を尊重するメカニズムであるとする．$\varphi \neq \varphi^{DS}$ とする．φ^{DS} は，学生最適な DS メカニズムとする．そこで，

$$\varphi(G) \neq \varphi^{DS}(G)$$

のようなマッチング市場 G を考える．概念の単純化のため，ϕを $\varphi(G)$のマッチング結果で，μ^S を $\varphi^{DS}(G)$のマッチング結果とする．特に，上式は

$$\phi(s) \neq \mu^S(s) = c$$

となるような学生 $s \in S$ が存在することを意味する．ここで $G' = (S, C, (\succcurlyeq_s)_{s \in S}), R_c, \widehat{R}_{-c}, q)$ となるマッチング市場を考える．$c \neq \hat{c}$ となるようなすべての $\hat{c} \in C$ に対して，s が最も優先順位が低い受入可能な学生である以外は R_{-c} と $\widehat{R}_{-c}$ は同じであるとする．つまり，$c \neq \hat{c}$ となるようなすべての $\hat{c} \in C$ に対して，

$$\begin{cases} \tilde{s}\ \widehat{P}_{\hat{c}}\ s^* \ \Leftrightarrow\ \tilde{s}\ P_{\hat{c}}\ s^* \ \ \forall\ \tilde{s}, s^* \in S \ \ s.t.\ \ \tilde{s} \neq s, s^* \neq s \\ \qquad \tilde{s}\ \widehat{P}_{\hat{c}}\ \ s\ \widehat{P}_{\hat{c}}\ c \ \ \forall\ \tilde{s} \in S \ \ s.t.\ \ \tilde{s} \neq s. \end{cases}$$

最初に，マッチング市場 G'においてμ^S が安定なマッチングになることを示す．G においてμ^S は安定なので，G'でブロッキング・ペアが存在するならば，G でも G'の優先順位の構成の仕方からブロッキング・ペアとなる．つまり，G'においてμ^S も安定なマッチングとなる．

次に，学生 s は G'における安定なマッチングを学校 c よりも弱く選好することを示す．背理法を用いて証明を行う．つまり，$c\ P_s\ \ \mu(s)$であると仮定する．$\hat{\mu}^C$ を G'において学生にとって最悪な安定マッチングとする．これは，

$$c \succ_s \hat{\mu}^C(s)$$

であることを意味する．また，僻地病院定理により，安定マッチングで学校が割り当てられている学生は，他の安定マッチングでも学校が割り当てられているので，c とは異なる他の学校 c^*があることがわかる．さらに，c 以外の学校に対する優先順位の構成の仕方より，c^*は学生 s にとって他の学生より$\widehat{R}_{c^*}$ のもとで優先順位が低いことがわかる．つまり，上記の議論を要約すると次のようになる：

$\mu^S, \hat{\mu}^C \in S(G') \wedge \mu^S(s) = c, \hat{\mu}^C(s) = c^*, c \neq c^*.$

僻地病院定理により，任意の安定マッチングにおいて学校は常に同じ数の学生が割り当てられているので，$\mu^S(\hat{s}) = c^*$かつ$\hat{\mu}^C(\hat{s}) \neq c^*$となるような学生$\hat{s}$が存在する．$\hat{s}\ \hat{P}_{c^*} s$であるので，$\hat{\mu}^C(\hat{s}) \succ_{\hat{s}} c^*$でなければならない．なぜならば，そうでないならば$\hat{\mu}^C$において$(\hat{s}, c^*)$がブロッキング・ペアとなってしまうからである．また，$\hat{\mu}^C(\hat{s}) \succ_s \mu^S(\hat{s})$でなければならない．しかしながら，これは$\hat{\mu}^C$が学生にとって$G'$において最悪な安定マッチングという仮定に反する．つまり，G'において安定マッチングは優先順位が上がる前に割り当てられた学校cよりも弱い意味で選好する学校に割り当てられることがわかる．

φが安定であるので，$\hat{\phi} = \phi(G') \in S(G')$となる．上記で証明した事実より$\hat{\phi}(s) \succcurlyeq_s \mu^S(s)$となる．さらに，$\varphi(G) = \phi \in S(G)$かつ$\phi(s) \neq \mu^S(s)$とあるので，$\mu^S(s) \succ_s \phi(s)$が成り立つ．それゆえ，$\hat{\phi}(s) \succ_s \phi(s)$となる．これは$\varphi$が学生の提携の努力を尊重することに矛盾する．

証明終了

5．おわりに

学生最適安定メカニズムがさまざまな現実的な問題に対して用いられている利点に，新たな視点を与えた．この研究は，Balinski and Sonmez（1999）の拡張となっている．彼らは各学生個人に焦点を当てたが，ここでの研究は学生のグループに焦点を当てた．数学的な意味でも一般化になっている．

しかしながら，学校側に関しては，最後の例も示しているように，学生が学校の評価を変更した場合，そのことにより学校が受ける結果を尊重しない．このような研究は，Hatfield, Kojima, and Narita（2016）によってなされている．彼らは，学校が何らかの投資活動，たとえば学生にとってよりよい施設を設けるインセンティブと，安定性を導くメカニズムが存在するかの研究を行ったが，通常のマッチング理論においては否定的な回答がえられている．しかしながら，市場を大きくすることにより，この問題は解消できるという結論も彼らは示している．

参考文献

Balinski, M. and T. Sonmez（1999）“A Tale of Two Mechanisms: Student Placement,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 84, pp. 73–94.

Gale, D. and L. Shapley（1962）“College Admissions and the Stability of Marriage,” *American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 9, pp. 9–15.

Hatfield, J. W., F. Kojima, and Y. Narita（2016）“Promoting School Competition through School Choice: Promoting School Competition through School Choice: A Market Design Approach,” *Journal of*

Economic Theory, Vol. 166, pp. 186–211.

Kojima, F. and M. Manea (2010) "Axioms for Deferred Acceptance," *Econometrica*, 78, pp. 633–653.

Pápai, S. (2000) "Strategyproof Assignment by Hierarchical Exchange," *Econometrica*, 68, pp. 1403–1433.

Roth, E. (2013) "What Have We Learned From Market Design?" Chapter 1 in Nir Vulkan, Zvika Neeman, and Alvin E. Roth (editors), *The Handbook of Market Design*. Oxford: Oxford University Press, pp. 7–50.

Satterthwaite, M. A., and H. Sonnenschein (1981) "Strategy-Proof Allocation Mechanisms at Differentiable Points," *The Review of Economic Studies*, 48, pp. 587–597.

（中央大学経済学部助教　博士（経済学））