Atlanterhavsbølger- breddeopgave 67 med didaktisk kommentar

Jensen, Jens Højgaard

Published in:
Kvant

Publication date:
2015

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Jensen, J. H. (2015). Atlanterhavsbølger- breddeopgave 67 med didaktisk kommentar. *Kvant*, *2015*(4), 29-30.
http://kvant.dk/upload/kv-2015-4/kv-2015-4-JHJ-breddeopgave67.pdf

Atlanterhavsbølger
– breddeopgave 67 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 67 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 67. Atlanterhavsbølger

Hvordan er sammenhængen mellem bølgehastighed og bølgelængde for bølgerne på Atlanterhavet? Begrund svaret ud fra en dimensionsanalyse.

Løsning

I atlanterhavsbølger bevæger vandmasserne sig i tyngdefeltet. Tyngdefeltstyrken g må derfor være bestemmende for bølgernes hastighed. Hvis der var vand på Månen, ville tilsvarende tyngdebølger dér bevæge sig med en anden hastighed end på Jorden. Vi må også antage, at bølgehastigheden varierer med bølgelængden λ. Det kan også tænkes, at bølgehastigheden afhænger af bølgehøjden a. Men den eventuelle afhængighed kan vi se bort fra, når a er lille i forhold til λ, da vi ved, at bølgehastigheden ikke går mod nul for a/λ gående imod nul. Derfor kan vi se bort fra a som bestemmende størrelse, når vi begrænser os til at udtale os om ikke for skrappe bølger. Havdybden ser vi bort fra som noget, der har indflydelse på bølgerne, i betragtning af den store afstand til bunden af Atlanterhavet sammenlignet med størrelsesordenen af de bølgelængder, vi vil finde bølgehastigheder for. Endelig kunne vi måske også umiddelbart tænke os, at vandets massefylde ϱ har indflydelse på vandbevægelserne. Altså, at bølgehastigheden for bølger i et kviksølvhav ville have andre bølgehastigheder end tilsvarende bølger i Atlanterhavet.

Med disse udgangspunkter er bølgehastigheden af bølgerne på Atlanterhavet, v, en funktion alene af g, λ og ϱ, $v(g, \lambda, \varrho)$. Da g, λ og ϱ ikke kan kombineres til en dimensionsløs størrelse og kun kombinationen $\sqrt{g\lambda}$ af g, λ og ϱ, har dimensionen hastighed har vi følgelig med nødvendighed:

$$v(g, \lambda, \varrho) = b\sqrt{g\lambda}, \tag{1}$$

hvor b er et dimensionsløst tal. Hastigheden af bølgerne på Atlanterhavet er derfor proportional med kvadratroden af deres bølgelængder, og den er uafhængig af ϱ i overensstemmelse med, at alle legemer falder lige hurtigt.

Kommentar

Dimensionsanalyse med det formål at udtrykke en fysisk størrelse Q_1 som funktion af en række andre bestemmende fysiske størrelser, $Q_2, Q_3, Q_4, ...$, altså at finde en formel for $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$, består i almindelighed af to skridt.

Fysiske størrelser med forskellig dimension, f.eks. en længde og en masse, kan ikke meningsfuldt lægges sammen. Derimod kan de ganges sammen og divideres med hinanden til en ny størrelse med en ny dimension, f.eks. massefylde med dimensionen masse divideret med længde i tredje potens. Derfor skal de dimensionsmæssigt mulige formler søges blandt:

$$Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...) = p\, Q_2^{\alpha}\, Q_3^{\beta}\, Q_4^{\gamma} ..., \tag{2}$$

hvor p er et dimensionsløst tal eller en dimensionsløs funktion af dimensionsløse bestemmende fysiske størrelser eller dimensionsløse kombinationer af bestemmende fysiske størrelser.

Det andet skridt i dimensionsanalyse består derfor i, dels at finde ud af hvilke værdier af α, β, γ..., der giver ligning (2) samme dimension på begge sider af lighedstegnet, dels at finde ud af om der findes dimensionsløse kombinationer af Q_2, Q_3, Q_4, ..., og i givet fald hvilke, som p da kan afhænge af. I den næste artikel i rækken vil jeg uddybe dette. Her vil jeg kommentere det første skridt.

Det første skridt i dimensionsanalyse er valget af de bestemmende fysiske størrelser, Q_2, Q_3, Q_4, ..., for den størrelse Q_1, der ønskes udviklet en formel for. Oftest er det dette skridt, der volder mine studerende størst vanskeligheder. Til en start vil de typisk mene, at man kun kan vælge de bestemmende fysiske størrelser, hvis man ad anden vej kender det resultat, man vil udlede. Så hvilke fysiske størrelser kan en utrænet, uden at kende svaret på forhånd, tænke, at bølgehastigheden af bølgerne i Atlanterhavet afhænger af?

Alt inkluderet, har jeg oplevet følgende anførte forslag til bestemmende fysiske størrelser for bølgehastigheden:

$$v = v(g, \lambda, \varrho, \eta, \gamma, a, h, f, x, y, t) \tag{3}$$

Her står g for tyngdefeltstyrke, λ for bølgelængde, ϱ for massefylde, η for viskositet, γ for overfladespænding, a for bølgeamplitude, h for havdybde, f for bølgefrekvens, x og y for rumkoordinater, t for tid. Hvilke er da argumenterne for blandt disse fysiske størrelser at nøjes med g, λ og ϱ, som gjort ved løsningen af opgaven?

Argument 1. Resultatet af en modelberegning afhænger af modellens parametre, ikke af dens variable. Dimensionsanalyse er en metaanalyse af, hvilken art resultater forestillede modelberegninger er begrænset til at kunne føre til, uden at foretage beregningerne, afhængig af de antagelser, som modellerne er baserede på. De fysiske størrelser x, y og t indgår i modelberegning af bølger. Men de indgår ikke i det resultat vi efterspørger. Det er givet ved modellens parametre og ikke dens variable x, y, og t. På samme måde som, hvis vi skulle modellere en bygningskonstruktion ved hjælp af en ret linje, $y = ax$, og en cirkel, $x^2 + y^2 = r^2$, for at finde højden h af deres skæringspunkt. Her har a og r rolle af parameter, x og y rolle af variable i modellen. Resultatet, $h = ar/\sqrt{a^2+1}$, afhænger af parametrene a og r, ikke af variablene x og y. Tilsvarende er det misforstået (og meningsløst) at medtage x, y og t som bestemmende for v.

Argument 2. De bestemmende fysiske størrelser skal repræsentere indbyrdes uafhængige fysiske forhold. For frekvensen f gælder det, at den matematisk er bundet sammen med v og λ, idet $v = f\lambda$. Vi kan derfor ikke vælge f og λ uafhængigt af hinanden som bestemmende for v. Indsættes $\lambda = v/f$ i ligning (1), fås

$$v(g, f, \varrho) = b^2 g/f \tag{4}$$

Ligningerne (1) og (4) er begge fysiske ligninger. De viser en sammenhæng i naturen. Derimod er $v = f\lambda$ en matematisk ligning. Den viser en logisk konsekvens af, at vi taler om periodiske bølger. Fysisk set fortæller ligningerne (1) og (4) det samme. Forskellen imellem dem har alene med en matematisk reformulering at gøre. Ved dimensionsanalysen kan vi vælge at regne f for bestemmende input parameter. I så fald vil vi nå frem til ligning (4), hvis vi undlader at regne med λ som bestemmende input parameter samtidigt. Vi kan ikke regne både f og λ for bestemmende uafhængigt af hinanden.

Argument 3. Valget af bestemmende fysiske størrelser afhænger af rækkevidden af den ønskede formel. Vi kan nøjes med at interessere os for bølger med bølgelængder, der er små i forhold til havdybden. Så afhænger v ikke af h. Tilsvarende afhænger v ikke af bølgehøjden a, hvis vi nøjes med at interessere os for bølger, hvor bølgehøjden er lille i forhold til bølgelængden. Endelig kan vi se bort fra overfladespændingen γ som bestemmende, ved at forudsætte bølgelængden stor nok til, at tyngdekræfter dominerer over overfladespændingskræfter.

Argument 4. Kun relevante fysiske størrelser skal tages i betragtning. Vandets viskositet η er en egenskab ved vandet, der fysisk set er uafhængig af f.eks. vandets massefylde ϱ. Men den er umiddelbart irrelevant for bestemmelsen af v. Viskositeten har først og fremmest betydning for dæmpningen af bølgerne ved, at deres mekaniske energi i det lange løb bliver til termisk energi, ikke for bølgernes hastighed. Derimod er der forskelligt indhold af mekanisk energi i ens bølger i væsker med forskellig massefylde. Derfor er det også umiddelbart relevant at antage, at v afhænger af ϱ. Det er da også tilfældet for kappilarbølger. For Atlanterhavets tyngdebølger – som er det, vi har udviklet formler for – udgik derimod ifølge dimensionsanalysen også ϱ som bestemmende for v. For mange mekaniske fænomener drevet af netop tyngdekræfter udgår størrelsen af involverede masser af beregningerne, da de optræder ens på begge sider af lighedstegnet i Newtons II lov.

Af de to skridt, som dimensionsanalyse består af, er det valget af inputstørrelser gennem overvejelser som de her antydede, der er det svære skridt. Det kræver forståelse af den begrebslige forskel imellem modellers parametre og variable, forståelse af forskellen imellem matematiske lighedstegn (udsagn om logisk sammenhæng) og fysiske lighedstegn (udsagn om empirisk sammenhæng), sans for modellering ved hjælp af idealiseringer, og overblik over, hvilke fysiske størrelser, der er relevante for givne fænomener. Når først Q_2, Q_3, Q_4, ... er valgt, er det i forhold hertil en ret formel og overkommelig sag at gennemføre analysen ved hjælp af ligning (2).

Når den (fejlagtige) opfattelse findes, at dimensionsanalyse kun kan benyttes til at finde resultater, som er fundet på anden måde i forvejen, hænger det sammen med vanskelighederne ved valget af inputstørrelser. Det er måske disse vanskeligheder, der er grunden til, at dimensionsanalyse ikke er ret hyppigt forekommende i indledende universitetsundervisning i fysik? Det antages måske, at man, for at dimensionsanalysen skal give mening, først må forberedes fysikmæssigt ad anden vej.

Imidlertid er det en overvejelse værd, om vanskelighederne ved valg af inputstørrelser ved en dimensionsanalyse ikke modsvarer nogle af de afgørende vanskeligheder på vejen til at lære at tænke, som fysikere gør, i det hele taget. I så fald er dimensionsanalysen måske den oplagte indgang til at lære fysik, forud for, at der udbygges med matematik.

Forståelsen af forskellen imellem parametre og variable i en model, forståelsen af forskellen imellem matematiske og fysiske lighedstegn, og forståelsen af forskellen imellem at overse og at se bort fra, er alle afgørende ved modellering og fysisk problemløsning. I stedet for at forudsætte disse forståelser for at give sig i kast med dimensionsanalyse, kan man spørge om sagen ikke kan vendes på hovedet: Måske er arbejde med dimensionsanalyse en af de mere direkte veje til at træne disse forståelser? Samtidig kan dimensionsanalysen undervisningsmæssigt bruges til at introducere mange dele af fysikken forud for, at der senere udbygges med den matematik, der for tidligt indført kan komme til at overskygge fysikindholdet.

Breddeopgave 68. Bohrs atommodel

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt træne dimensionsanalyse ved løsningen af denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2009, nummer 68 i rækken her i KVANT):

Niels Bohr blev i 1913 ført på sporet af sin model for brintatomet ved at bemærke, at det ikke er muligt at danne en karakteristisk længde svarende til atomets størrelse fra naturkonstanterne m_e, elektronens masse, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$, konstanten i Coulombs lov, der er de naturkonstanter, der kan indgå i resultatet af en klassisk beregning. Hvis derimod h, Plancks konstant, inddrages, fremgår der herved en karakteristisk længde af den rigtige størrelsesorden. Hvordan er Bohrradius givet ved m_e, h, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.