Roskilde University

Hybrid-logik

fra filosofi til datalogi

Braüner, Torben

Published in:
Aktuel Naturvidenskab

Publication date:
2010

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Braüner, T. (2010). Hybrid-logik: fra filosofi til datalogi. *Aktuel Naturvidenskab*, *2010*(2), 40-43.

Hybrid-logik

- fra filosofi til datalogi

Tid kan være et svært begreb at forholde sig til rent filosofisk. Men det kan også være svært rent praktisk, når det skal implementeres i et computersystem. Torben Braüner fortæller her om, hvordan tid håndteres i logikken.

Af Torben Braüner

Der findes groft set to forskellige filosofiske opfattelser af tid. På den ene side er der menneskers oplevede tid, altså nuet afgrænset af fortid og fremtid. Menneskers erindring om hvad der er sket, oplevelse af hvad der sker nu, og forventning til hvad der vil ske. Dette kaldes den dynamiske opfattelse af tid. På den anden side er der den objektive tid der udefra beskriver hvad der sker på givne tidspunkter. Dette kaldes den statiske opfattelse af tid.

Dette er en ældgammel konflikt. Faktisk tænkte man allerede i oldtiden over, hvad tid mon er for noget. Blandt andet beskæftigede Aristoteles (384 - 322 f.Kr.) sig indgående med forholdet mellem tid og nødvendighed – specielt med henblik på spørgsmålet om, hvorvidt mennesket kan siges at have en fri vilje. Konflikten mellem dynamisk og statisk tid blev i 1960erne givet en klar logisk formulering af filosoffen Arthur Prior (1914-1969). Efter 1960erne har konflikten givet sig udtryk i forskellige logikker til at repræsentere tid på i moderne informationsteknologi. I kølvandet på denne konflikt mellem dynamisk og statisk tid opstod hybrid-logikken.

Statisk tid

Før vi kaster os over hybrid-logikken, er det nødvendigt at se lidt nærmere på dynamisk og statisk tid. I det følgende vil vi derfor se på hvilke formelle, logiske sprog disse to syn på tid giver anledning til. Det er lettest at starte med statisk tid. Den statiske tid formaliseres med det, man kalder førsteordens-logik (se faktaboks). Byggestenene er her atomare formler som:

$\mathbf{1520 < 2009}$ Betyder "Året 1520 er tidligere end 2009"
$\mathbf{S(1520)}$ Kan betyde "Der finder et slag sted i år 1520"

At sige at et årstal er før et andet, som den første atomare formel gør, lyder måske trivielt, men når noget skal formaliseres, som i dette tilfælde tid, skal alle detaljerne med. Ud over logiske operatorer $\wedge$, $\vee$, $\neg$ og b $\Rightarrow$ der står for "og", "eller", "ikke" og "medfører", kan man i førsteordens-logikken sætte atomare formler sammen med kvantorer, der tillader at opbygge formler som:

$\exists \mathbf{x} \mathbf{S(x)}$ Betyder "Der eksisterer et år hvor der finder et slag sted"

I formlen står **x** for et tidspunkt, mere præcist et årstal. Matematisk set er **x** en variabel, der står for et heltal, fuldstændig som i et matematisk udsagn. Den statiske tid optræder i naturlige sprog, for eksempel i sætningen "Der finder et slag sted i år 1520" og de

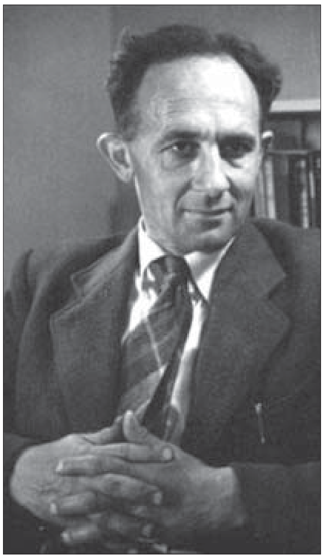
Foto: Colourbox

Arthur Prior (1914-1969).

andre sætninger ovenfor. Man møder statisk tid mange steder, eksempelvis i historiebøger og tidstavler.

Dynamisk tid

Lad os kigge på dynamisk tid. Den dynamiske tid formaliseres med en slags tidslogik, man nogle gange kalder tempus-logik. Byggestene er her atomare formler som:

q Kan betyde "Flyet afgår"

Som i førsteordens-logikken kan atomare formler sættes sammen med logiske operatorer $\wedge$, $\vee$, $\neg$ og $\Rightarrow$. I den dynamiske tidslogik har man ikke kvantorer, men derimod tempusoperatorer:

Pq Betyder "Det var tilfældet at flyet afgik"

Fq Betyder "Det vil være tilfældet at flyet afgår"

Her kaldes **P** for fortidsoperatoren og **F** kaldes fremtidsoperatoren. Bemærk, at der ingen variable er, altså ingen eksplicitte referencer til tidspunkter. De atomare formler handler om, hvad der er tilfældet lige nu, og ved hjælp af tempusoperatorer kan man sige noget om, hvad der var tilfældet og hvad der vil blive tilfældet. Det svarer til den måde, mennesker umiddelbart oplever tid på, altså i termer af fortid, nutid og fremtid.

Et oversættelsesproblem

Ovenfor har vi set på to meget forskellige sprog til at tale om tid – førsteordens-logik og tempus-logik. Hvordan er de relaterede? Ifølge et simpelt matematisk resultat kan tempus-logik oversættes til førsteordens-logik. Altså kan enhver formel i tempus-logik oversættes til en førsteordens-formel, der siger det samme, i hvert fald matematisk set. For eksempel siger tempus-formlen $\mathbf{FFq \Rightarrow Fq}$ det samme som førsteordens-formlen $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{z}((\mathbf{x<y} \wedge \mathbf{y<z}) \Rightarrow (\mathbf{x<z}))$. Variablerne **x**, **y**, **z** står her for

vilkårlige tidspunkter, ikke nødvendigvis årstal, og formlen siger, at "hvis x er tidligere end y, og y er tidligere end z, så er x tidligere end z".

Det er klart, at som vi normalt forstår tid, altså modelleret med de hele tal eller de reelle tal, er formlen ovenfor sand. Det forholder sig imidlertid sådan, at der findes formler i førsteordens-logik, der ikke kan oversættes til tempus-logik. For eksempel kan førsteordens-formlen **¬∃x (x<x)** ikke oversættes til en formel i tempus-logik. Denne formel siger, at "der eksisterer ikke noget tidspunkt, der er tidligere end sig selv".

Hvis tid modelleres med de hele tal eller de reelle tal, er formlen sand, men hvis tiden nu var cyklisk, kunne formlen godt være falsk. Men uanset om formlen er sand eller ej som vi normalt forstår tid, vil vi gerne kunne udtrykke det, formlen siger, men det kan tempus-logikken altså ikke. Matematisk set er tempus-logikken således strengt svagere end førsteordens-logikken.

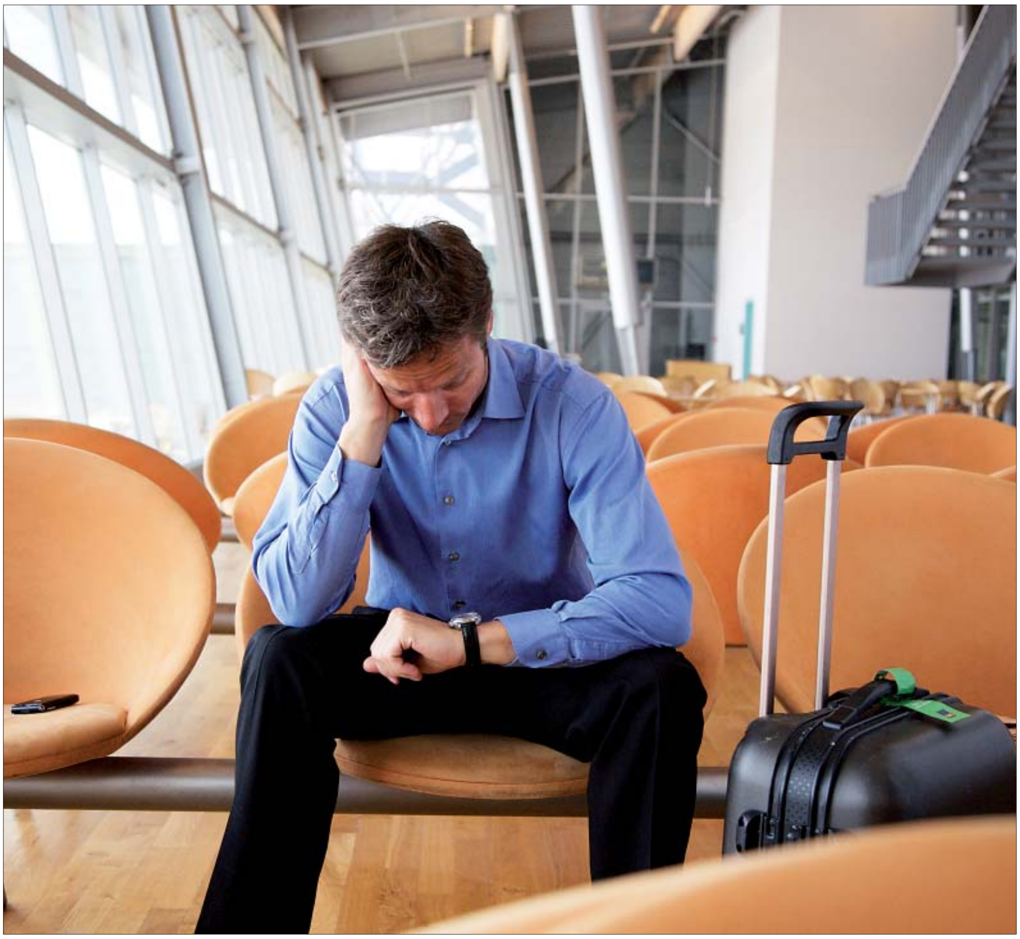
Foto: Colourbox

Dynamisk tid svarer til den måde, vi umiddelbart opfatter tid på. Når manden i lufthavnen ser på sit ur er det klart, at han oplever sig som til stede i nuet med opmærksomheden rettet mod flyets forestående afgang.

Hybrid-logik

Arthur Prior var af filosofiske årsager tilhænger af dynamisk tid – og meget kritisk overfor statisk tid. Blandt andet fandt han tidspunkter alt for abstrakte og ukonkrete til, at man burde referere til dem ved hjælp af førsteordens-logikkens variable. Det var i orden at referere til konkrete ting som mennesker, borde, stole og lignende, men altså ikke tidspunkter. Prior ville derfor, at den dynamiske tid omfattede den statiske tid, altså at man kunne oversætte tempus-formler til førsteordens-formler. Da man som ovenfor anført ikke kan dette, forstærkede Prior tempus-logikken med henblik på at kunne omfatte førsteordens-logikken. Resultatet heraf er en meget stærk version af hybrid-logik.

Vi skal her ikke gå ind i alle detaljer, men nøjes med at udpege to af de centrale ingredienser i Priors stærke hybrid-logik. Det drejer sig i begge tilfælde om maskineri til at

Førsteordens-logik

Førsteordens-logikken er en særlig vigtig slags logik, der bruges meget inden for datalogi, matematik og filosofi. Førsteordens-logikken befinder sig midt på et spektrum af logikker med stigende udtrykskraft og faldende beregnelighed: Udsagnslogik, førsteordens-logik og andenordens-logik.

Den simpleste af disse er udsagnslogikken, hvor udsagnssymboler som **p** og **q** sættes sammen med logiske operatorer ∧, ∨, ¬ og ⇒, der står for "og", "eller", "ikke" og "medfører". En formel er en såkaldt tautologi, hvis den er sand, uanset hvilke sandhedsværdier udsagnssymbolerne har. Formlen **p∨¬p** ("p eller ikke p") er oplagt en tautologi, da den er sand uanset om **p** er sand eller falsk. Derimod er **p∨q** ("p eller q") ikke en tautologi, idet den er falsk, hvis både **p** og **q** er falske. Der findes algoritmer, der kan afgøre om en vilkårlig udsagnslogisk formel er en tautologi eller ej. En sådan algoritme tager en formel som input, og standser før eller siden med et ja/nej svar på om inputformlen er en tautologi.

Førsteordens-logikken er en udvidelse af udsagnslogikken. De grundlæggende byggesten er her formler som **P(x)** hvor **P** er et prædikatsymbol og **x** er en variabel. Prædikatsymbol står for egenskaber og variabler refererer til ting inden for et fastlagt domæne. Hvis **P** står for egenskaben "**x** løber" og **x** referer til personen Torben, så siger **P(x)** at "Torben løber". Førsteordens-logikken har kvantorer ∀**xP(x)** og ∃**xP(x)**. Disse to formler siger, at "alle personer løber" og "der eksisterer personer, der løber". En førsteordens-formel er gyldig, hvis den er sand, uanset hvilket domæne variablerne har, og hvordan prædikatsymbolerne fortolkes. Ved hjælp af førsteordens-logikken kan man formulere og analysere komplekse udsagn og argumenter, man finder i matematik, samt mange af de argumenter, der bruges i dagligdagen. Der er matematiske grunde til, at ingen algoritme kan afgøre om en vilkårlig førsteordens-formel er gyldig (det drejer sig ikke bare om, at man endnu ikke har fundet en sådan algoritme).

Selvom førsteordens-logikken ikke er afgørlig, er den faktisk det der kaldes semiafgørlig, da der findes en algoritme, der tager en vilkårlig formel som input, og som standser netop hvis inputformlen er gyldig (hvis inputformlen ikke er gyldig går algoritmen i uendelig løkke). Semiafgørlighed er en meget svagere matematisk egenskab end afgørlighed. Der findes endnu stærkere logikker, der ikke engang er semiafgørlige. Dette gælder andenordens-logik, der er en udvidelse af førsteordens-logikken, og som er stærk nok til at definere og regne med de naturlige tal.

Dette er relateret til Kurt Gödels (1906-1978) berømte ufuldstændighedssætninger.

Illustration: Tidsskriftet Skalk

Den statiske tid optræder ofte i historiebøger og tidstavler – her fra det danske historiske tidsskrift Skalk. Bemærk, at ifølge tidstavlen finder der omtrent år 1520 et slag sted – det drejer sig formodentligt om, da den danske konge Christian den 2. indtog Stockholm.

håndtere tidspunkter – forskelligt fra førsteordens-logikkens variable. Den første ingrediens er såkaldte *nominaler*, også kaldet øjebliksudsagn, der er en ny slags atomare formler, som hver især er sande på præcist eet tidspunkt, for eksempel:

a Kan betyde "Klokken er nu 5 den 10. maj 2007"

Formlen **a** er altså sand den 10. maj 2007 klokken 5, men falsk på alle andre tidspunkter, eksempelvis samme dag klokken 6. Disse tidspunkter er naturligvis vilkårlige – det afgørende er, at et øjebliksudsagn som **a** er sandt på præcist eet tidspunkt. Den anden ingrediens er såkaldte tilfredsstilleligsoperatorer:

a:q Betyder "Den 10. maj 2007 klokken 5 afgår flyet"

Ved hjælp af nominaler og tilfredsstillelighedsoperatorer kan man således formulere en serie udsagn om, hvad der sker på bestemte tidspunkter, noget som er umuligt i standard tidslogik. Priors stærke hybrid-logik har fuld førsteordens-udtrykskraft som han ønskede, omend det er diskuterbart om hybridlogik løser hans filosofiske problem.

Et spørgsmål om udtrykskraft og afgørlighed

Sikkert er det imidlertid, at hybrid-logisk maskineri løser mange problemer ved standard tidslogik, og mere generelt ved såkaldt modal-logik. Modallogik er ligesom tidslogik, blot med tempus-operatorerne erstattede af andre operatorer, for eksempel operatorer for mulige verdener, steder, epistemiske tilstande eller tilstande i en computer. Af afgørende grundvidenskabelig betydning er det, at hybrid-logisk maskineri løser et antal problemer ved standard modal-logik, særligt inden for bevisteori, som er den gren af logik, der handler om beviser og formelle systemer til at repræsentere beviser. Mere specifikt, så gør hybrid-logisk maskineri det muligt meget mere systematisk at definere formelle bevissystemer til at repræsentere og ræsonnere om tidsmæssig information. Dette er også af anvendelsesmæssig interesse, idet tidslogikker i løbet af de sidste 30 år er blevet af stor vigtighed for datalogien og informationsteknologien. Hybrid-logikkens ekstra udtrykskraft kan simpelthen løse mange problemer, som standard tidslogik ikke kan klare.

Ydermere har mange hybridlogikker den store fordel, at selvom de har stærk udtrykskraft, er de stadig afgørlige (se faktaboks). Det vil sige, at der til sådanne hybridlogikker findes afgørlighedsprocedurer, altså computerberegnelige metoder til at undersøge, om formler er logisk gyldige eller ej. Man kan således være sikker på, at en computerimplementering altid stopper med et svar. Dette er i modsætning til førsteordens-logik, der ganske vist har endnu mere udtrykskraft, men som er uafgørlig, hvilket gør den uegnet til mange datalogiske formål. Disse hybridlogikker befinder sig således i området mellem udsagnslogik og førsteordens-logik. Hybrid-logikker er faktisk en del af en mere generel tendens i logikforskning, der går ud på at udforske og kortlægge grænseområdet mellem afgørlige og uafgørlige logikker, hvilket blandt andet er begrundet i, at afgørlighed er vigtig for datalogiske formål. Med andre ord er man interesserede i logikker, der er stærke, men ikke så stærke, at de er uafgørlige.

Gennembrud åbner for anvendelse

I 2005 lykkedes det forfatteren sammen med Thomas Bolander, der er lektor på Danmarks Tekniske Universitet, at definere en såkaldt tableau-baseret afgørlighedsprocedure for hybrid-logik, hvilket er en slags afgørlighedsprocedure, der er velegnet til computerimplementering. Dette matematiske problem havde været uløst siden adskillige forskere begyndte at arbejde på det sidst i 1990erne. En sådan afgørlighedsprocedure åbner for muligheden af at bruge hybrid-logik i praktiske computer-systemer, for eksempel i forbindelse med søgning på internettet, hvor websider ikke bare tjekkes for forekomster af bestemte søgeord, men undersøges på en sprogligt mere dybtgående måde. Dette har at gøre med, at hybridlogik er nært beslægtet med såkaldt beskrivelseslogik, der kan bruges til at udbygge websider med semantisk (indholdsmæssig) information.

Afslutningsvis kan man sige, at hybrid-logikkens historie viser, at der er sammenhæng i tingene. Filosofiske diskussioner i oldtiden er baggrund for vor tids matematiske logik, der spiller en vigtig rolle i moderne informationsteknologi. Det er fristende her at citere Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832): »Den, som ikke kan føre sig regnskab over tre tusind år, sidder uerfaren tilbage i mørket og lever fra dag til dag.« ■

Om forfatteren

Torben Braüner er lektor i datalogi ved Roskilde Universitet og tilknyttet forskningsgruppen: Programmering, Logik og Intelligente Systemer
E-mail: torben@ruc.dk
Tlf.: 46743840

Videre læsning:
Mere information om emnet kan findes i Torben Braüners dr.scient. afhandling: Hybrid Logic and its Proof-Theory, der er under udgivelse af Springer. Eksemplarer kan rekvireres hos forfatteren. Doktorforsvaret findes på video: http://rudar.ruc.dk/handle/1800/4637

Torben Braüner: Logikkens Muligheder og Grænser, Aktuel Naturvidenskab nr. 6/2006 .