

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA TEÓRICA

A concentração de riqueza em sistemas de trocas binárias não enviesadas

Ben-Hur Francisco Cardoso

Porto Alegre - RS
Novembro de 2020

Ben-Hur Francisco Cardoso

A concentração de riqueza em sistemas de trocas
binárias não enviesadas

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física Teórica.

Linha de pesquisa:
Econofísica

Orientador

Dr. Sebastián Gonçalves

Coorientador

Dr. José Roberto Iglesias

PPFFIS – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
IF – INSTITUTO DE FÍSICA
UFRGS – UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Porto Alegre - RS

Novembro de 2020

*No me asusta la amenaza,
patrones de la miseria,
la estrella de la esperanza
continuará siendo nuestra.*

Vientos del Pueblo, Víctor Jara.

A concentração de riqueza em sistemas de trocas binárias não enviesadas

Autor: Ben-Hur Francisco Cardoso
Orientador(a): Dr. Sebastián Gonçalves
Corientador(a): Dr. José Roberto Iglesias

RESUMO

Buscando explicar a crescente concentração de riqueza no mundo, diversos modelos supõem a existência de um viés favorecendo os mais ricos que provoca tal efeito. Modelos inspirados na física estatística dos gases, onde agentes econômicos são selecionados sequencial e aleatoriamente para efetuarem uma troca binária de riqueza, porém, mostram que dinâmicas não-viesadas, que não privilegiam nem pobres nem ricos, podem elas mesmas produzir um viés, aumentando a desigualdade indefinidamente até chegar a uma situação onde um indivíduo concentra toda a riqueza disponível. Além disso, o sistema está sempre fora de equilíbrio até que a desigualdade perfeita do estado final seja atingida, com o fim do fluxo de riqueza. Esses resultados indicam que um mercado imparcial, dentro da hipótese de um mercado eficiente sem arbitragem, pode ser responsável por uma concentração extrema de riqueza. Ainda não existe, porém, uma prova geral de que qualquer dinâmica de trocas binárias não-viesadas leva inevitavelmente ao aumento de desigualdade e a diminuição de mobilidade. Buscando cobrir essa lacuna na teoria da econofísica, será apresentada uma demonstração analítica simples, mas rigorosa, de que qualquer regra não-viesada está condenada a conduzir o sistema à desigualdade perfeita.

Palavras-chave: econofísica, trocas binárias não-viesadas, condensação

Wealth concentration in systems with unbiased binary exchanges

Author: Ben-Hur Francisco Cardoso

Supervisor: Dr. Sebastián Gonçalves

Co-supervisor: Dr. José Roberto Iglesias

ABSTRACT

Seeking to explain the growing concentration of wealth in the world, several models postulate the existence of a bias favoring the richest causing this effect. Models inspired by the statistical physics of gases, where economic agents are selected sequentially and randomly to effect a binary exchange of wealth, however, show that non-biased dynamics, which favor neither the poor nor the rich, can themselves produce a bias, increasing inequality indefinitely until reaching a situation where one individual concentrates all the available wealth. In addition, the system is always out of balance until the perfect inequality of the final state is reached, with the flow of wealth. These results indicate that a balanced market, within the assumption of efficient market and without arbitrage, may be responsible for an extreme concentration of wealth. However, there is still no general proof that any dynamic of biased binary exchanges inevitably leads to an increase in inequality and decreased mobility. Seeking to fill this gap in the theory of econophysics, we show here a simple but rigorous analytical demonstration that any unbiased rule is doomed to lead the system to perfect inequality.

Keywords: Econophysics, unbiased exchanges, Condensation.

Lista de figuras

1	Evolução histórica da fração que o 1% mais rico dos Estados Unidos concentra de sua riqueza nacional, entre 1980 e 2015. Dado retirado do <i>World Inequality Database</i> wid.world, base de dados do artigo de <i>Piketty et.al</i> (PIKETTY; SAEZ; ZUCMAN, 2018).	p. 8
2	Evolução temporal do índice Gini (esquerda) e da Liquidez (direita) para a regra do <i>perdedor</i> (Eq. 2.4) com $\lambda = 0.5$	p. 15
3	Distribuição acumulada de riqueza para a regra do <i>perdedor</i> (Eq. 2.4), em diferentes tempos, com $\lambda = 0.5$	p. 15
4	Evolução temporal do índice Gini (esquerda) e da Liquidez (direita) para a regra de <i>Ispolatov</i> (Eq. 2.5) com $\lambda = 0.5$	p. 16
5	Distribuição acumulada de riqueza para a regra de <i>Ispolatov</i> (Eq. 2.5), em diferentes tempos, com $\lambda = 0.5$	p. 16
6	Evolução temporal do índice Gini (esquerda) e da Liquidez (direita) para a regra do mínimo (Eq. 2.6) com $\lambda = 0.5$	p. 18
7	Distribuição acumulada de riqueza para a regra do <i>mínimo</i> (Eq. 2.6), em diferentes tempos, com $\lambda = 0.5$	p. 18
8	Exemplo de Curva de Lorenz.	p. 24

Sumário

1	Introdução	p. 8
1.1	Estrutura da Dissertação	p. 10
2	Modelos de Troca Cinética	p. 11
2.1	Descrição do Modelo	p. 12
2.2	Indicadores Econômicos	p. 13
2.3	Regras de troca	p. 14
2.3.1	Modelos não enviesados	p. 16
2.4	Conjectura	p. 17
3	Resultados	p. 19
3.1	Exemplos	p. 20
3.1.1	Regra do perdedor	p. 20
3.1.2	Regra de Ispolatov	p. 21
3.1.3	Regra do mínimo	p. 22
3.1.4	Regra do perdedor não enviesada	p. 22
3.1.5	Regra de Iglesias e Almeida	p. 23
3.2	Indicadores Econômicos	p. 24
3.2.1	Desigualdade	p. 24
3.2.2	Mobilidade	p. 27
3.3	Proposições	p. 27
3.4	Prova das proposições	p. 28

3.4.1	Proposição 1	p. 29
3.4.2	Proposição 2	p. 30
3.4.3	Proposição 3	p. 32
3.5	Estados absorventes	p. 33
3.5.1	Regra do mínimo	p. 33
3.5.2	Regra do perdedor não enviesada	p. 34
3.5.3	Regra de Iglesias e Almeida	p. 34
4	Considerações finais	p. 36
4.1	Principais contribuições	p. 36
4.2	Limitações	p. 36
4.3	Trabalhos futuros	p. 37
	Referências	p. 38

1 Introdução

O impressionante crescimento da concentração de riqueza ¹ no mundo nos primeiros vinte anos do século XXI tornou a desigualdade um tema recorrente na literatura econômica (CHANCEL, 2019). Como exemplo dessa realidade, a Fig. 1 mostra a evolução histórica da fração que o 1% mais rico dos Estados Unidos concentra de sua riqueza nacional, passando de 22% em 1980 para 37% em 2015 (PIKETTY; SAEZ; ZUCMAN, 2018).

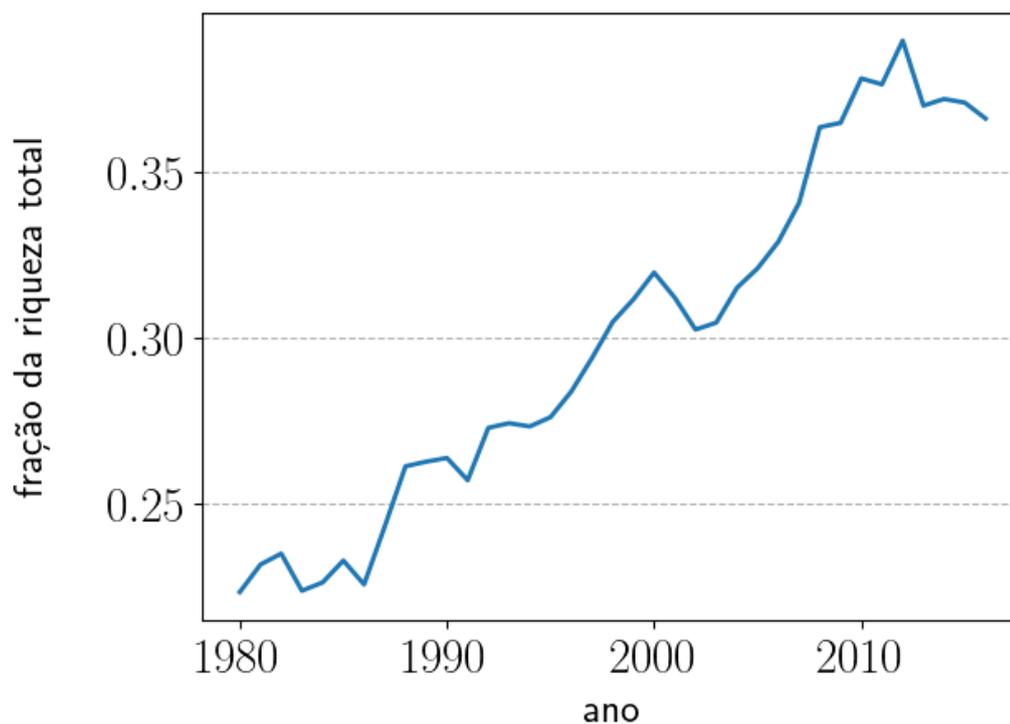


Figura 1: Evolução histórica da fração que o 1% mais rico dos Estados Unidos concentra de sua riqueza nacional, entre 1980 e 2015. Dado retirado do *World Inequality Database* wid.world, base de dados do artigo de *Piketty et.al* (PIKETTY; SAEZ; ZUCMAN, 2018).

Buscando explicar esse fenômeno, a física estatística, em particular a teoria cinética dos gases, fornece uma estrutura útil para descrever a complexidade das interações de

¹ Segundo o *Dicionário de Economia de Oxford* (BLACK; HASHIMZADE; MYLES, 2012), riqueza é soma do preço de todos os bens com registro, isto é, ativos legalmente reconhecidos como patrimônio (imóveis, terras, automóveis, entre outros) subtraída das dívidas acumuladas.

mercado (SLANINA, 2013). Como um sistema físico composto de muitas partículas trocando sua energia com espalhamento binário, os *modelos de troca cinética* (ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998; BOGHOSIAN et al., 2017; PATRIARCA; HEINSALU; CHAKRABORTI, 2010) consideram um conjunto de agentes econômicos interagentes onde dois deles são sequencial e aleatoriamente escolhidos para efetuarem uma troca de riqueza.

A explicação dos determinantes dessa extrema concentração, e como evitá-la, ainda promove importantes debates entre políticos e acadêmicos (PIKETTY, 2014). De modo geral, se recorre à existência de um viés no sistema que privilegia os mais ricos durante essas trocas (DIPRETE; EIRICH, 2006), produzindo assim um efeito bola de neve (MOUKARZEL, 2011). É claro que esse tipo de mecanismo promove o aumento da desigualdade (DIPRETE; EIRICH, 2006; ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998; BOGHOSIAN et al., 2017), mas essa análise pode induzir a pensar que essa é a única origem possível da crescente concentração de riqueza.

Modelos de troca cinética recentes mostram que, além das dinâmicas enviesadas favorecendo os mais ricos (ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998; BOGHOSIAN et al., 2017), dinâmicas não enviesadas, que não privilegiam nem pobres nem ricos, podem elas mesmas produzir o caso mais desigual (HAYES, 2002; MOUKARZEL et al., 2007; CARDOSO; GONÇALVES; IGLESIAS, 2020; BOULEAU; CHORRO, 2017; BOGHOSIAN; JOHNSON; MARCQ, 2015; IGLESIAS; ALMEIDA, 2012), onde um indivíduo concentra toda a riqueza disponível, parando assim a circulação de riqueza.

Esses resultados indicam que um mercado imparcial, sem arbitragem, pode ser responsável por uma concentração extrema de riqueza. Ainda não existe, porém, uma prova geral de que qualquer dinâmica de trocas binárias não enviesadas leva inevitavelmente ao aumento de desigualdade e à diminuição de mobilidade. Essa dissertação tem por objetivo cobrir essa lacuna na teoria dos modelos de troca cinética.

Esse resultado é particularmente importante porque mostra que um mercado imparcial, com iguais oportunidades e sem regulação que vise a redistribuição de riqueza, sempre promove a concentração de riqueza. Consequentemente, o seu controle só pode ser feito mediante algum tipo de viés favorecendo os mais pobres, seja aumentando o poder de barganha dos agentes mais pobres durante as trocas (MOUKARZEL et al., 2007; CARDOSO; GONÇALVES; IGLESIAS, 2020; IGLESIAS; ALMEIDA, 2012), seja por meio de uma taxa redistributiva (LIMA; VIEIRA; ANTENEODO, 2020; IGLESIAS; CARDOSO; GONÇALVES, 2020; BOGHOSIAN et al., 2017; BOULEAU; CHORRO, 2017; LI; BOGHOSIAN; LI, 2019).

1.1 Estrutura da Dissertação

No capítulo 2 serão revisados os modelos de troca cinética, em especial os modelos cuja dinâmica é não enviesada. Por meio de simulações, serão mostrados os principais resultados para cada um desses modelos: a evolução temporal da desigualdade e da mobilidade.

No capítulo 3 será introduzido, pela primeira vez, um sistema no limite termodinâmico (número de agentes tendendo ao infinito) que generaliza os modelos de troca cinética não enviesados. A partir de definições para esses sistemas, será provado que todo sistema com trocas binárias não enviesadas inevitavelmente levam à máxima desigualdade e à mínima mobilidade. Assim, os exemplos desse fenômeno trazidos no Capítulo 2 são casos particulares de um fenômeno mais geral.

2 Modelos de Troca Cinética

A primeira premissa de toda a história humana é, evidentemente, a existência de indivíduos vivos (MARX; ENGELS, 1972); para isso, no entanto, são necessárias condições materiais de existência, como comida, vestimenta e moradia. Esses indivíduos quando nascem, porém, entram em um contexto específico, com regras e direitos de propriedade já consumados e independentes de suas escolhas. Para sobreviver, portanto, eles precisam ou seguir essas regras ou, em momentos de ruptura histórica, promover coletivamente a transformação das mesmas (BHASKAR, 2014).

Isso não é diferente no mundo contemporâneo. Ao nascer, todos se deparam com a realidade de que as condições materiais de subsistência têm um preço; para consegui-las, portanto, é preciso comprá-las: é necessário ter dinheiro. Para isso, é preciso vender algo antes, criando uma cadeia contínua de trocas. Como fica evidente, a própria alimentação depende da troca; toda renda e transferência de riqueza só é feita mediante uma troca; até mesmo a produção de mercadorias só existe porque elas têm a finalidade da troca. O modo de produção capitalista é, em suma, um sistema onde é compulsório comprar e vender (WOOD, 2002), ou seja, onde a troca é necessária para a sobrevivência. Um estudo criterioso desse sistema requer, então, um estudo sobre a troca.

O que sabemos até então, no entanto, é apenas que a troca é uma necessidade. Mas de que maneira ela se efetua? Entre quais pessoas ela se opera? Todas as respostas a essas perguntas necessariamente se reduzem às condições materiais e às motivações subjetivas de cada indivíduo. Em sendo praticamente impossível entender todas essas possíveis determinações e influências que pesam sobre cada pessoa, o que restaria para milhões ou bilhões? A única saída que existe é admitir nossa ignorância frente a esses fenômenos e seguir o *Princípio da Razão Insuficiente* (SINN, 1980), assumindo um comportamento uniformemente aleatório (equiprovável) ao que não conseguimos determinar.

Um caso clássico desse princípio é o lançamento de uma moeda. De fato, com a força e a direção determinada (com precisão quase absoluta), um lado específico cairá voltado

para cima; devido ao desconhecimento dessas informações, contudo, a predição do resultado não pode ir além das iguais probabilidades do resultado ser *cara* ou *coroa*. No caso de um fluido complexo, representado por um sistema clássico de muitas partículas, o mesmo caráter teórico se revela. O movimento dessas partículas é completamente determinado pela suas posições, velocidades e forças de interação; em virtude da nossa imprecisão na medida dessas grandezas, porém, é necessário assumir que as interações ocorrem aleatoriamente entre as partículas que ocupam uma mesma região do espaço (MALEVNETS; KAPRAL, 1999). Esses exemplos nos revelam, portanto, que a aleatoriedade está na *predição*, e não na *natureza*, de fenômenos cujas informações são insuficientes para sua determinação. O tratamento probabilístico, portanto, apresenta-se puramente com um caráter metodológico.

De maneira análoga, surge a questão: como uma primeira aproximação, poderia o mercado ser entendido como um sistema de vários agentes econômicos executando trocas aleatórias de frações de suas riquezas? Essa é a pergunta que encorajou, e ainda encoraja, físicos a tentar descrever de maneira estatística o sistema econômico em que todos vivemos. Inaugurou-se, assim, os *Modelos de Troca Cinética*.

2.1 Descrição do Modelo

Dada um economia artificial com N agentes econômicos ¹, o estado do i -ésimo agente é caracterizado por sua riqueza $x_i \geq 0$. Conforme foi definido, o que se sabe sobre cada agente não nos diz nada sobre suas preferências individuais, proximidade geográfica, ou mesmo suas ocupações. Dado isso, a abstração que foi feita não leva em conta diversos determinantes que regulam a rede de trocas entre as pessoas. É justificada, portanto, a seleção aleatória das duplas de troca, já que a informação sabida é insuficiente para qualquer especulação de sua determinação.

Assim, supondo uma troca de riqueza entre agentes selecionados aleatoriamente i e j , temos que

$$x_i^* = x_i + \Delta_i \quad \text{e} \quad x_j^* = x_j + \Delta_j, \quad (2.1)$$

onde $x_{i(j)}^*$ é a riqueza após a troca e $\Delta_{i(j)}$ é o ganho estocástico do agente $i(j)$. Nos modelos de troca cinética é restrito que $\Delta_i + \Delta_j = 0$, ou seja, esses modelos são um jogo de soma zero. Isso, por sua vez, resulta que $X = \sum_{i=1}^N x_i$ é constante ao longo do tempo.

¹Em geral, um agente econômico é qualquer unidade capaz de realizar compra e venda, seja ela um indivíduo ou uma empresa. No contexto do presente trabalho, entende-se por agentes econômicos exclusivamente indivíduos economicamente ativos.

Com o modelo posto, é notável que o mesmo pressupõe que a riqueza não pode ser produzida ou mesmo consumida, isto é, que ela é conservada. Esse comportamento pode ser visto em duas escalas diferentes: por um lado, é verdade que $x_j^* + x_j^* = x_i + x_j$ e, portanto, está implícita a conservação local da riqueza; por outro lado, é verdade que $\sum_i^N x_i^* = \sum_i^N x_i = X = cte$ e, portanto, está implícita a conservação global da riqueza (PATRIARCA et al., 2005). Por vezes esses dois pressupostos são elencados como desqualificadores do modelo para descrever a dinâmica da riqueza (YAKOVENKO, 2016); o presente trabalho, por sua vez, pretende se posicionar em favor da abordagem como uma primeira aproximação.

De maneira alguma está se argumentando que a produção e o consumo de riqueza não têm influência em sua dinâmica e, conseqüentemente, nos padrões de desigualdade. Um fato, contudo, não pode ser negligenciado: mesmo diante de sua não conservação numa economia real, o crescimento da desigualdade ocorre em vários períodos e países com diferentes padrões na dinâmica da riqueza total. Isso revela que, muito provavelmente, essa universalidade decorre do que é comum em todas as situações: o mecanismo de troca, e não a quantidade total de riqueza (CHAKRABORTI et al., 2011). Nesse sentido, a conservação se mostra como uma boa aproximação para o entendimento do mecanismo de troca em si, isto é, do momento de circulação de riqueza.

2.2 Indicadores Econômicos

Devido ao imenso número de agentes de um sistema econômico, se torna impraticável estudar individualmente o comportamento de cada um deles. Como acontece em um gás, por exemplo, grandezas globais devem ser definidas e acompanhadas. Em economia, tais grandezas recebem o nome de indicadores econômicos, que são o objeto de estudo da macroeconomia.

É o objetivo desse capítulo acompanhar a evolução temporal de grandezas associadas à distribuição da riqueza. Para isso, a escala de tempo usada é o passo de Monte Carlo (*MCS*, sigla do inglês *Monte Carlo Step*), definido como o mínimo número necessário para que todos os agentes tenham a possibilidade de serem selecionados (ou seja, $N/2$). Além disso, buscando médias dessas grandezas com acurácia estatística, são paralelizadas K amostras que executam o modelo com condições iniciais aleatórias distintas (LANDAU; BINDER, 2014).

Como configuração inicial, todos os sistema contém $N = 10^4$ agentes e a riqueza inicial

de cada agente é escolhida a partir de uma distribuição uniforme entre 0 e 1. Todas as medidas são estimadas com médias sobre $K = 10^3$ amostras.

No que segue, apresentamos os indicadores utilizados nesse capítulo:

- **Índice Gini:** é uma medida da desigualdade de uma distribuição, que pode variar entre 0 (igualdade plena) e 1 (máxima desigualdade), dada operacionalmente por:

$$G(t) = \frac{1}{2NX} \sum_{i,j=1}^N |x_i(t) - x_j(t)| \quad , \quad X = \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (2.2)$$

Na seção 3.2.1 será formalmente deduzida a expressão operacional do índice Gini.

- **Liquidez:** é uma medida de mobilidade econômica. Dado que a riqueza é conservada, todo enriquecimento e empobrecimento de um agente é decorrente da troca. Assim, a Liquidez é medida pela taxa de transferência de riqueza, sendo a razão entre tudo que é trocado em certo intervalo de tempo de referência (1 *MCS*) e a riqueza total disponível (IGLESIAS; ALMEIDA, 2012). Matematicamente, é dada por:

$$L(t) = \frac{1}{2X} \sum_{i=1}^N |x_i(t) - x_i(t-1)| \quad , \quad X = \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (2.3)$$

2.3 Regras de troca

O primeiro modelo de troca cinética é a regra do *perdedor* (HAYES, 2002; ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998; ANGLE, 1986), afirmando que

$$\Delta_i = \epsilon \lambda x_j - (1 - \epsilon) \lambda x_i, \quad \epsilon \in \{0, 1\}, \quad \mathbb{E}[\epsilon] = \frac{1}{2}, \quad (2.4)$$

onde $0 \leq \lambda \leq 1$ pode ser uma constante ou um número aleatório. Esse modelo sempre se equilibra num estado estacionário onde o índice Gini é menor que 1 e Liquidez é maior que 0, isto é, ele converge para um estado estável, como exemplificado na Figura 2. A distribuição acumulada de riqueza (Fig. 3) rapidamente converge para um estado estacionário. Em geral, a distribuição estacionária para qualquer valor de λ é muito próximo a uma distribuição Gamma (YAKOVENKO; ROSSER JR, 2009).

Apesar do modelo se equilibrar em valores de Gini menor que 1 e Liquidez maior que 0, o que é socialmente desejável, esse modelo foi criticado por *Lux* (LUX, 2005), observando que este mecanismo $\mathbb{E}[\Delta_i] \propto (x_j - x_i)$ favorece, em média, os agentes mais pobres. Assim, é difícil explicar por que um agente racional, mais rico que o outro trocador, participaria

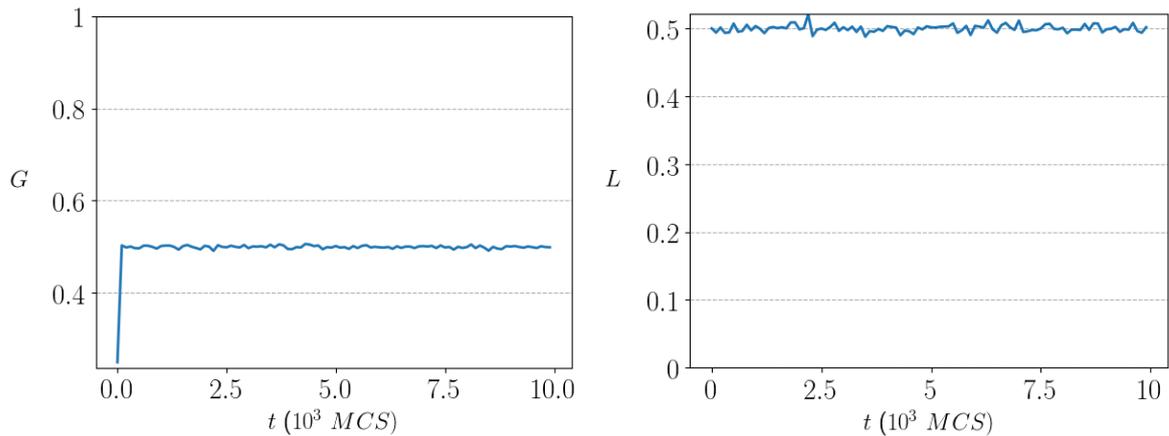


Figura 2: Evolução temporal do índice Gini (esquerda) e da Liquidez (direita) para a regra do *perdedor* (Eq. 2.4) com $\lambda = 0.5$.

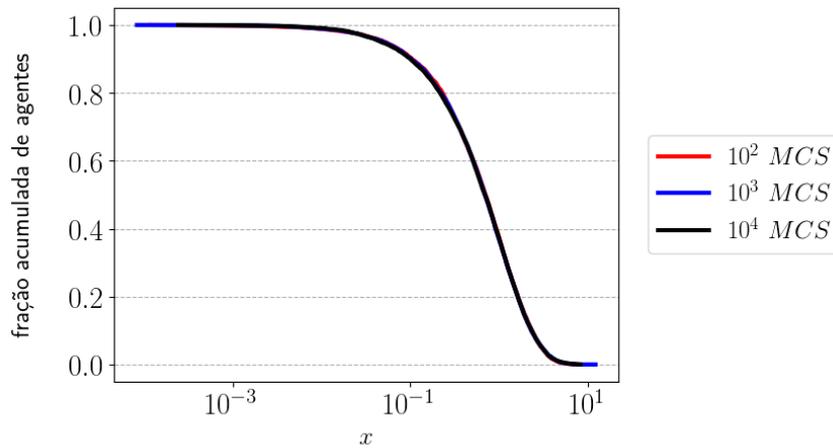


Figura 3: Distribuição acumulada de riqueza para a regra do *perdedor* (Eq. 2.4), em diferentes tempos, com $\lambda = 0.5$.

desse tipo de transação. É importante notar que esta crítica não é sobre a existência de uma dinâmica de riqueza com viés aos mais pobres, mas a suposição de que esse mecanismo emerge das trocas livres no mercado.

Trabalhando no outro extremo, a regra de *Ispolatov* (ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998) modifica a regra do perdedor de modo que, selecionados dois agentes, o agente mais rico da dupla sempre sairá na vantagem. Em termos matemáticos, é afirmado que

$$\Delta_i = \epsilon \lambda x_j - (1 - \epsilon) \lambda x_i, \quad \epsilon \in \{0, 1\}, \quad \mathbb{E}[\epsilon] = \theta(x_i - x_j), \quad (2.5)$$

onde $0 \leq \lambda \leq 1$ pode ser uma constante ou um número aleatório e $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representa a função degrau. Como é esperado, esse modelo leva assintoticamente o sistema ao estado *condensado* (ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998): um agente concentra todos

os recursos (máxima desigualdade) e não há mais riqueza circulando (mobilidade nula), como exemplificado na Figura 4. Visto de outra maneira, a Fig. 5 mostra que o número de agentes com riqueza positiva diminui monotonicamente com o tempo. É importante notar que a crítica de *Lux* também é válida para esse tipo de regra, porém de maneira invertida: é difícil explicar por que um agente racional, agora mais pobre que o outro trocador, participaria desse tipo de transação.

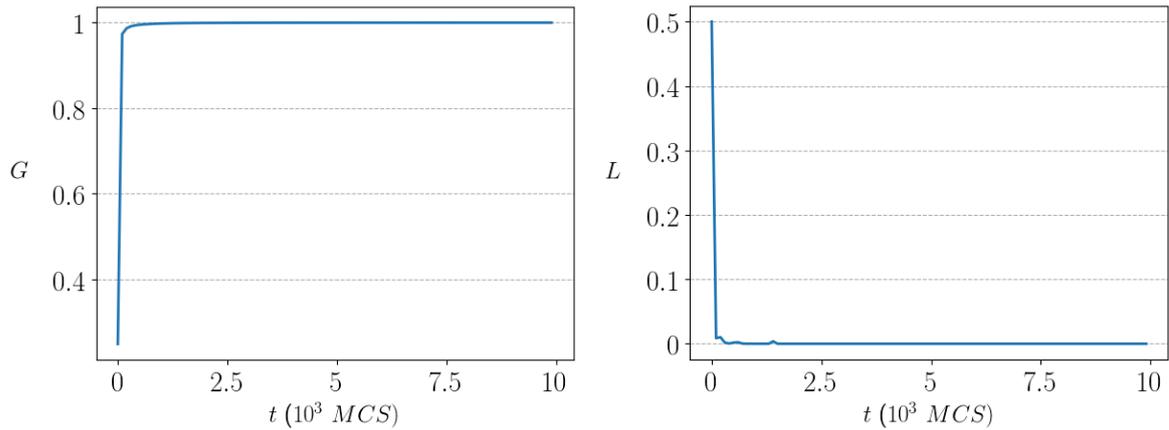


Figura 4: Evolução temporal do índice Gini (esquerda) e da Liquidez (direita) para a regra de *Ispolatov* (Eq. 2.5) com $\lambda = 0.5$.

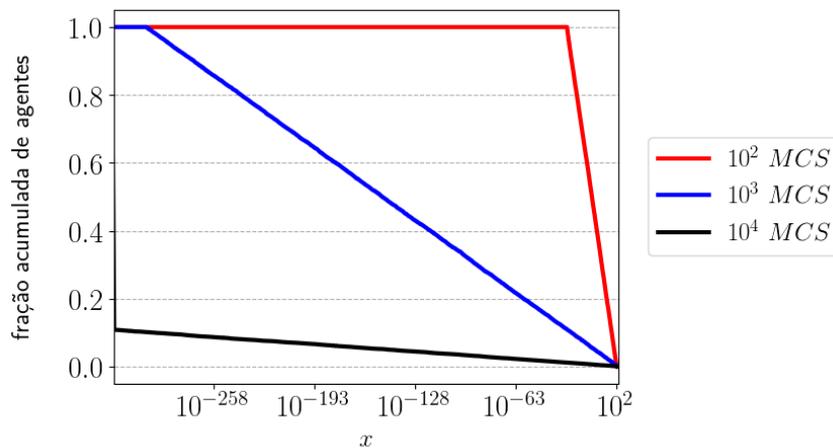


Figura 5: Distribuição acumulada de riqueza para a regra de *Ispolatov* (Eq. 2.5), em diferentes tempos, com $\lambda = 0.5$.

2.3.1 Modelos não viesados

Em contrapartida, outros modelos superam a crítica de *Lux* propondo regras onde o ganho de riqueza é um jogo não enviesado, independentemente do agente ser rico ou pobre. Em termos matemáticos, um processo de troca de soma zero é não enviesado se

$\mathbb{E}[\Delta_i] = \mathbb{E}[\Delta_j] = 0$ (BOULEAU; CHORRO, 2017). O modelo não enviesado mais conhecido é a regra do *mínimo* (HAYES, 2002)

$$\Delta_i = \eta\lambda \min(x_i, x_j), \quad \eta \in \{-1, 1\}, \quad \mathbb{E}[\eta] = 0, \quad (2.6)$$

onde $0 \leq \lambda \leq 1$ pode ser uma constante ou um número aleatório.

Além disso, recentemente foi proposta uma versão não enviesada da regra do *perdedor* (BOULEAU; CHORRO, 2017), afirmando que

$$\Delta_i = \epsilon\lambda x_j - (1 - \epsilon)\lambda x_i, \quad \epsilon \in \{0, 1\}, \quad \mathbb{E}[\epsilon] = \frac{x_i}{x_i + x_j}, \quad (2.7)$$

onde $0 \leq \lambda \leq 1$ pode ser um número aleatório ou constante. Finalmente, o modelo de *Iglesias e Almeida* (IGLESIAS; ALMEIDA, 2012) propõe que

$$\Delta_i = \eta \frac{x_i x_j}{x_i + x_j}, \quad \eta \in \{-1, 1\}, \quad \mathbb{E}[\eta] = 0. \quad (2.8)$$

Apesar de superarem as críticas de *Lux*, com todos esses jogos não enviesados o sistema converge para o estado *condensado* (MOUKARZEL et al., 2007; IGLESIAS; ALMEIDA, 2012; CARDOSO; GONÇALVES; IGLESIAS, 2020; BOGHOSIAN et al., 2017; BOULEAU; CHORRO, 2017; LI; BOGHOSIAN; LI, 2019). Como exemplo dessa situação, na Fig. 6 é mostrado a evolução temporal do Índice Gini e da Liquidez para um caso particular da regra do mínimo, onde percebemos que a desigualdade cresce quase que monotonicamente, chegando ao valor máximo ($G = 1$). De maneira similar, a mobilidade decresce quase que monotonicamente, chegando ao seu valor mínimo ($L = 0$). Visto de outra maneira, a Fig. 7 mostra que o número de agentes com riqueza positiva diminui monotonicamente com o tempo. Evoluções quase idênticas são observadas nas outras regras não enviesadas.

Um ponto interessante é que no processo de condensação, tanto da regra de *Isipolatov* quanto nas regras não enviesadas, a calda da distribuição acumulada tem a forma $\sim \log(1/x)$ ao longo do tempo. Esse é um caso particular da distribuição de Pareto (BOGHOSIAN, 2014), que se apresenta em praticamente todas as distribuições empíricas de riqueza (CHAKRABORTI et al., 2011).

2.4 Conjectura

Como exemplificado anteriormente, é intuitivo que sistemas que favorecem os mais pobres sejam estáveis, isto, não condensem; além disso, é também intuitivo que um sistema

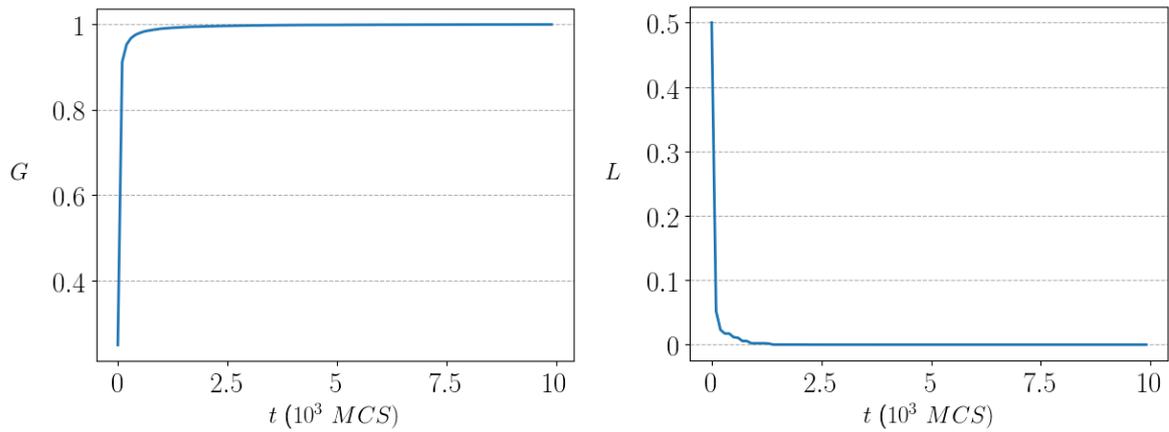


Figura 6: Evolução temporal do índice Gini (esquerda) e da Liquidez (direita) para a regra do mínimo (Eq. 2.6) com $\lambda = 0.5$.

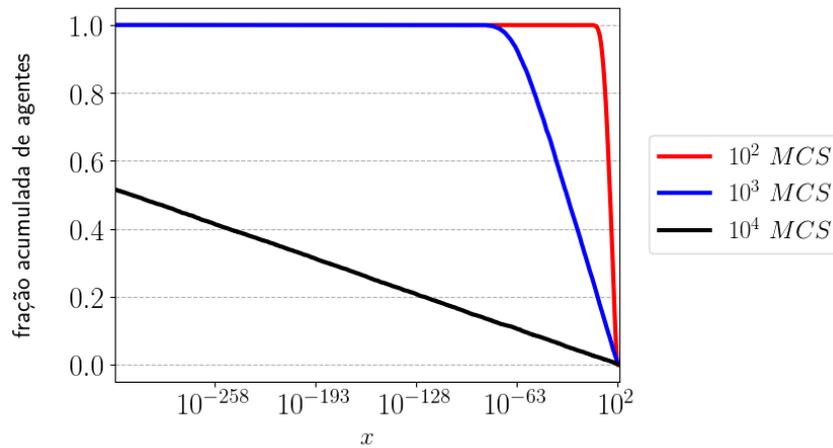


Figura 7: Distribuição acumulada de riqueza para a regra do *mínimo* (Eq. 2.6), em diferentes tempos, com $\lambda = 0.5$.

que favoreça sistematicamente os mais ricos levem à condensação. A incógnita se reserva no caso que tenta representar trocas livres de mercado: o caso não enviesado. Os exemplos anteriores mostram que mesmo não favorecendo nenhum agente, as regras não enviesadas estudadas levam o sistemas à condensação. O próximo capítulo tem como objetivo provar analiticamente que isso ocorre para qualquer regra não enviesada, não apenas as três estudadas no presente capítulo.

3 Resultados

Nesse capítulo, será introduzida a formalização dos modelos de troca cinética no limite termodinâmico, isto é, supondo $N \rightarrow \infty$. Dentre as contribuições do presente trabalho, está a generalização dos modelos de troca cinética não enviesados nesse limite. Para isso, são necessárias algumas definições, antes de propriamente enunciar os resultados principais dessa dissertação (seção 3.2).

Definição 1. *Seja um sistema representado pela função densidade de probabilidade $f(x, t)$, definida de modo que a fração da população com riqueza entre x e $x + dx$ no tempo t é $f(x, t)dx$. Essa função densidade de probabilidade apresenta as seguintes propriedades:*

1. *O sistema apenas permite riqueza não negativa, isto é, para todo t temos que*

$$x < 0 \Rightarrow f(x, t) = 0. \quad (3.1)$$

2. *Para todo t , precisa ser normalizada*

$$\int_0^{\infty} dx f(x, t) = 1. \quad (3.2)$$

3. *A riqueza é conservada. Assim, para todo t , o primeiro momento da função densidade de probabilidade precisa ser constante*

$$\int_0^{\infty} dx x f(x, t) = \langle x \rangle. \quad (3.3)$$

Definição 2. *A dinâmica de $f(x, t)$ pode ser representada pela Equação Mestra (ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998; BOGHOSIAN et al., 2017; BUSTOS-GUAJARDO; MOKARZEL, 2016; YAKOVENKO; ROSSER JR, 2009; BASSETTI; TOSCANI, 2010)*

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int_0^{\infty} dx' \int_{-x}^{x'} d\Delta \left\{ \omega_{[x+\Delta, x'-\Delta] \rightarrow [x, x']} f_2(x + \Delta, x' - \Delta, t) - \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} f_2(x, x', t) \right\}, \quad (3.4)$$

onde definimos

$$\omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} f_2(x, x', t) dx dx' d\Delta \quad (3.5)$$

como a taxa de transferência da riqueza no intervalo $[\Delta, \Delta+d\Delta]$ de um agente com riqueza no intervalo $[x', x'+dx']$ para um agente com riqueza no intervalo $[x, x+dx]$ (YAKOVENKO; ROSSER JR, 2009). Todos os valores possíveis de Δ devem estar no intervalo $-x \leq \Delta \leq x'$ para manter a riqueza não negativa, então é restrita a normalização

$$\int_{-x}^{x'} d\Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = 1. \quad (3.6)$$

A função de densidade de probabilidade de dois agentes $f_2(x, x', t) = f_2(x', x, t)$ é definida de modo que a fração das duplas de agentes com riquezas entre x e $x+dx$ e x' e $x'+dx'$ no tempo t é $f_2(x, x', t)dx dx'$. Essa função densidade de probabilidade é tal que

$$\int_0^\infty dx' f_2(x, x', t) = f(x, t). \quad (3.7)$$

Nesse trabalho será assumido que as duplas de agentes são não correlacionadas, isto é, $f_2(x, x', t) = f(x, t)f(x', t)$.

Definição 3. *Sejam dois agentes com riqueza x e x' selecionados para efetuarem uma troca. Essa troca binária é dita não enviesada se o valor esperado do ganho estocástico dos dois agentes envolvidos é zero (BOULEAU; CHORRO, 2017), isto é, se nenhum agente é sistematicamente favorecido. Assim, temos que*

$$\int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = 0. \quad (3.8)$$

3.1 Exemplos

Para um melhor entendimento do significado da taxa de transferência, nessa seção serão representadas as regras revisadas no capítulo 2 na notação introduzida nesse capítulo.

3.1.1 Regra do perdedor

A regra do *perdedor* (ISPOLATOV; KRPIVSKY; REDNER, 1998) é representada por

$$\omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} \delta(\Delta - \lambda x') + \frac{1}{2} \delta(\Delta + \lambda x) \right], \quad (3.9)$$

onde $p(\lambda)$ é a função densidade de probabilidade dos valores de λ , sendo degenerada no caso em que λ é constante.

Podemos ver que nessa regra o valor esperado do ganho estocástico de um agente com riqueza x numa troca com outro agente com riqueza x' é

$$\begin{aligned}
& \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \\
& = \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} \delta(\Delta - \lambda x') + \frac{1}{2} \delta(\Delta + \lambda x) \right] = \\
& = \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} (\lambda x') + \frac{1}{2} (-\lambda x) \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 d\lambda \lambda p(\lambda) \right) (x' - x). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Com isso, fica evidente que essa regra favorece o agente mais pobre durante a troca, como enunciado no capítulo 2.

3.1.2 Regra de Ispolatov

No outro extremo, se encontra a regra de *Ispolatov* (ISPOLATOV; KRAPIVSKY; REDNER, 1998), afirmando que

$$\omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\theta(x - x') \delta(\Delta - \lambda x') + \theta(x' - x) \delta(\Delta + \lambda x) \right], \tag{3.11}$$

onde $p(\lambda)$ é a função densidade de probabilidade dos valores de λ , sendo degenerada no caso em que λ é constante.

Nessa regra, o valor esperado do ganho estocástico de um agente com riqueza x numa troca com outro agente com riqueza x' é

$$\begin{aligned}
& \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \\
& = \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\theta(x - x') \delta(\Delta - \lambda x') + \theta(x' - x) \delta(\Delta + \lambda x) \right] = \\
& = \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\theta(x - x') (\lambda x') + \theta(x' - x) (-\lambda x) \right] = \\
& = \left(\int_0^1 d\lambda \lambda p(\lambda) \right) \left[\theta(x - x') x' - \theta(x' - x) x \right]. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Ao contrário da regra do perdedor, nesse caso percebemos a regra de Ispolatov favorece o

agente mais rico durante a troca.

3.1.3 Regra do mínimo

A regra do *mínimo* (HAYES, 2002) é representada por

$$\omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} \delta(\Delta - \lambda \min(x', x)) + \frac{1}{2} \delta(\Delta + \lambda \min(x', x)) \right], \quad (3.13)$$

onde $p(\lambda)$ é a função densidade de probabilidade dos valores de λ , sendo degenerada no caso em que λ é constante.

Nessa regra, o valor esperado do ganho estocástico de um agente com riqueza x numa troca com outro agente com riqueza x' tal que $x + x' > 0$ é

$$\begin{aligned} & \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \\ &= \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} \delta(\Delta - \lambda \min(x', x)) + \frac{1}{2} \delta(\Delta + \lambda \min(x', x)) \right] = \\ &= \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} (\lambda \min(x', x)) + \frac{1}{2} (-\lambda \min(x', x)) \right] = \\ &= 0. \quad (3.14) \end{aligned}$$

O valor esperado do ganho estocástico no caso $x = x' = 0$ é trivialmente nulo, já que o domínio de integração é o conjunto nulo. Com isso, mostramos explicitamente que a regra do mínimo é uma regra não enviesada.

3.1.4 Regra do perdedor não enviesada

Nessa versão não enviesada da regra do *perdedor* (BOULEAU; CHORRO, 2017), temos que

$$\omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{x}{x+x'} \delta(\Delta - \lambda x') + \frac{x'}{x+x'} \delta(\Delta + \lambda x) \right], \quad (3.15)$$

onde $p(\lambda)$ é a função densidade de probabilidade dos valores de λ , sendo degenerada no caso em que λ é constante.

Nessa regra, o valor esperado do ganho estocástico de um agente com riqueza x numa

troca com outro agente com riqueza x' tal que $x + x' > 0$ é

$$\begin{aligned}
& \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \\
&= \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{x}{x+x'} \delta(\Delta - \lambda x') + \frac{x'}{x+x'} \delta(\Delta + \lambda x) \right] = \\
&= \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{x}{x+x'} (\lambda x') + \frac{x'}{x+x'} (-\lambda x) \right] = \\
&= 0. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

O valor esperado do ganho estocástico no caso $x = x' = 0$ é trivialmente nulo, já que o domínio de integração é o conjunto nulo. Com isso, mostramos explicitamente que essa regra é de fato não enviesada, como seu nome diz.

3.1.5 Regra de Iglesias e Almeida

Finalmente, no modelo de *Iglesias e Almeida* (IGLESIAS; ALMEIDA, 2012), temos que

$$\omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \frac{1}{2} \delta\left(\Delta - \frac{xx'}{x+x'}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\Delta + \frac{xx'}{x+x'}\right). \tag{3.17}$$

Nessa regra, o valor esperado do ganho estocástico de um agente com riqueza x numa troca com outro agente com riqueza x' tal que $x + x' > 0$ é

$$\begin{aligned}
& \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \\
&= \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \left[\frac{1}{2} \delta\left(\Delta - \frac{xx'}{x+x'}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\Delta + \frac{xx'}{x+x'}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{xx'}{x+x'} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{xx'}{x+x'} \right) = \\
&= 0. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

O valor esperado do ganho estocástico no caso $x = x' = 0$ é trivialmente nulo, já que o domínio de integração é o conjunto nulo. Com isso, mostramos explicitamente que a regra de Iglesias e Almeida é uma regra não enviesada.

3.2 Indicadores Econômicos

3.2.1 Desigualdade

Dada uma função densidade de probabilidade $f(x, t)$, define-se a função distribuição acumulada $F(x, t)$ de modo que (SEN et al., 1997)

$$F(x, t) = \int_0^x dx_1 f(x_1, t) = \int_0^\infty dx_1 f(x_1, t) \theta(x - x_1), \quad (3.19)$$

isto é, $F(x, t)$ é a fração de agentes com riqueza igual ou maior que x no tempo t . Além disso, defini-se a função de riqueza acumulada $Q(x, t)$ de modo que (SEN et al., 1997)

$$Q(x, t) = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^x dx_1 x_1 f(x_1, t) = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx_1 x_1 f(x_1, t) \theta(x - x_1), \quad (3.20)$$

isto é, $Q(x, t)$ é a fração da riqueza total acumulada entre agentes com riqueza igual ou maior que x no tempo t . A *curva de Lorenz* é definida por $Q(F, t)$, ou seja, a fração da riqueza total acumulada pela fração F dos agentes mais pobres no tempo t (LORENZ, 1905). O caso de máxima igualdade é tal que $Q = F$. Na Fig. 8 se encontra um exemplo de *curva de Lorenz*.

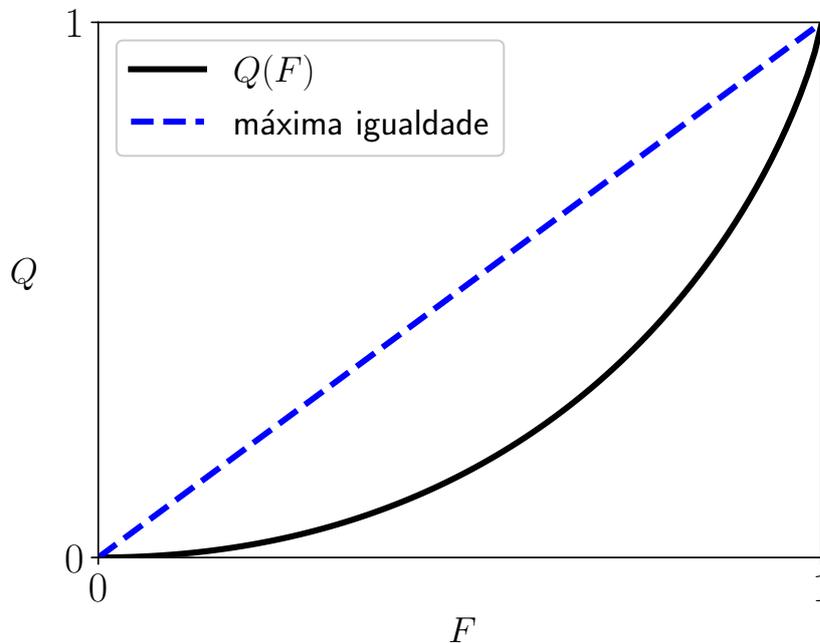


Figura 8: Exemplo de Curva de Lorenz.

O índice Gini no tempo t é definido como a razão entre a área delimitada entre *curva de Lorenz* da distribuição em questão $Q(F, t)$ e da distribuição de máxima igualdade, i.e. $\int_0^1 dF (F - Q(F, t))$, e a área abaixo da *curva de Lorenz* da distribuição de máxima

igualdade, i.e $\int_0^1 dF F$ (GINI, 1921). Assim, temos que

$$G(t) = \frac{\int_0^1 dF (F - Q(F, t))}{\int_0^1 dF F} = 1 - 2 \int_0^1 dF Q(F, t). \quad (3.21)$$

Pela Eq. 3.19, temos que $dF = f(x, t)dx$. Assim,

$$G(t) = 1 - 2 \int_0^\infty dx f(x, t) Q(x, t). \quad (3.22)$$

Além disso, usando a Eq 3.20, concluímos que

$$G(t) = 1 - \frac{2}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 f(x, t) f(x_1, t) x_1 \theta(x - x_1). \quad (3.23)$$

Agora, notando que $2\theta(x - x_1) = 1 + \text{sgn}(x - x_1)$, onde sgn é a função sinal, temos

$$G(t) = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 f(x, t) f(x_1, t) x_1 \text{sgn}(x_1 - x). \quad (3.24)$$

Por simetria, é verdade que

$$G(t) = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 f(x, t) f(x_1, t) (-x) \text{sgn}(x_1 - x). \quad (3.25)$$

Assim, pela média das duas expressões, temos que

$$G(t) = \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 f(x, t) f(x_1, t) (x_1 - x) \text{sgn}(x_1 - x). \quad (3.26)$$

Com isso, temos a definição operacional do Índice Gini:

Definição 4. Para uma função densidade de probabilidade $f(x, t)$, o índice Gini é dado por (SEN et al., 1997):

$$G(t) = \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 |x - x_1| f(x, t) f(x_1, t). \quad (3.27)$$

O índice Gini pode variar entre 0 (igualdade plena) e 1 (máxima desigualdade).

É importante notar que é difícil traduzir a noção de desigualdade máxima de um sistema com número finito de agentes (uma pessoa tem toda a riqueza, enquanto todos os outros têm riqueza nula) para uma função de densidade de probabilidade no limite termodinâmico, uma vez que existem “infinitos” agentes. Para um número finito de N

agentes, essa função densidade de probabilidade pode ser facilmente representada por

$$f_N(x) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\delta(x) + \frac{1}{N}\delta(x - \langle x \rangle Nig). \quad (3.28)$$

No limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, se apresenta a problemática da representação do segundo termo. Esse problema foi estudado por *Boghosian et. al.* (BOGHOSIAN, 2014; BOGHOSIAN; JOHNSON; MARCQ, 2015; BOGHOSIAN et al., 2017), mostrando que essa representação só pode ser feita por meio do limite explícito. Assim, defini-se a função densidade de probabilidade de máxima desigualdade no limite termodinâmico:

Definição 5. *A função densidade de probabilidade de máxima desigualdade ($G = 1$) é*

$$f_c(x) = \delta(x) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta(x - \langle x \rangle N)}{N},$$

isto é, toda riqueza do sistema se concentra em uma parte infinitesimal da população. Além disso, ela é a única função densidade de probabilidade que satisfaz as seguintes propriedades (BOGHOSIAN, 2014; BOGHOSIAN; JOHNSON; MARCQ, 2015)

1. $f_c(x) > 0 \iff x = 0$
2. $\int_0^\infty dx f_c(x) = 1$
3. $\int_0^\infty dx x f_c(x) = \langle x \rangle$
4. *para todo $k > 1$, $\int_0^\infty dx x^k f_c(x)$ diverge.*

De fato, propriedade 1 da definição anterior diz que, com a função densidade de probabilidade de máxima desigualdade, a probabilidade de existir agentes com riqueza positiva é zero, isto é,

$$\mathbb{P}(x > 0) = 0. \quad (3.29)$$

Isso não significa, porém, que não existam agentes com $x > 0$. Essa aparente contradição decorre da natureza de medidas de probabilidades em conjuntos infinitos, como é o caso do limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$). Para que a probabilidade seja zero, é suficiente que haja um número finito (SCHILLING, 2017), e não necessariamente nulo, de agentes com riqueza positiva. No exemplo da máxima desigualdade, o número de agentes que concentra toda riqueza é 1, independente do número total de agentes N . No limite termodinâmico, o conjunto total de agentes se torna infinito. Assim, como o conjunto de agentes com riqueza positiva é finito (1 agente), a probabilidade desse conjunto existir é zero.

3.2.2 Mobilidade

Mantendo a restrição de conservação de riqueza, a mobilidade econômica só é possível por meio de trocas. Assim, definimos:

Definição 6. *A mobilidade dos agentes com riqueza x no tempo t é dada por*

$$l(x, t) = \int_0^\infty dx' \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} f(x', t). \quad (3.30)$$

Definição 7. *Uma riqueza x é um estado absorvente se $l(x, t) = 0$ para qualquer t , isto, uma vez que o agente se encontra com essa riqueza, ele não pode mais sair dessa situação.*

Definição 8. *A mobilidade do sistema é definida pelo indicador econômico de Liquidez (IGLESIAS; ALMEIDA, 2012; CARDOSO; GONÇALVES; IGLESIAS, 2020), definida pela fração da riqueza que é trocada por unidade de tempo:*

$$L(t) = \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx l(x, t) f(x, t), \quad (3.31)$$

onde o fator $1/2$ anula a dupla contagem. A liquidez varia entre 0, que corresponde a uma economia sem trocas, e 1, que corresponde à economia de troca plena (ou seja, toda a riqueza é trocada por unidade de tempo).

3.3 Proposições

Proposição 1. *Um sistema de trocas binárias não enviesadas tem $x = 0$ como estado absorvente.*

A Proposição 1 já foi observada, considerando sistemas de tamanho finito, em todos os modelos não enviesados introduzidos no Capítulo 2 (MOUKARZEL et al., 2007; IGLESIAS; ALMEIDA, 2012; CARDOSO; GONÇALVES; IGLESIAS, 2020; BOGHOSIAN et al., 2017; BOULEAU; CHORRO, 2017).

Proposição 2. *Em um sistema de trocas binárias não enviesadas, o índice Gini é monotonicamente crescente:*

$$\frac{dG(t)}{dt} \geq 0. \quad (3.32)$$

A Proposição 2 já foi observada, considerando sistemas de tamanho finito, em todos os modelos não enviesados introduzidos no Capítulo 2 (MOUKARZEL et al., 2007; IGLESIAS; ALMEIDA, 2012; CARDOSO; GONÇALVES; IGLESIAS, 2020; BOGHOSIAN et al., 2017;

BOULEAU; CHORRO, 2017). No limite termodinâmico, com metodologia similar à introduzida nesse capítulo, o caso particular da regra do mínimo foi provado por *Boghosian et al.* (BOGHOSIAN; JOHNSON; MARCQ, 2015).

Como consequência da Proposição 2, o índice Gini pode ser considerado um funcional de Lyapunov de sistemas de trocas binárias não enviesadas (BOGHOSIAN; JOHNSON; MARCQ, 2015).

Proposição 3. *Em um sistema de trocas binárias não enviesadas, se $x = 0$ é o único estado absorvente do sistema, então*

1. *A função densidade de probabilidade estacionária é da máxima desigualdade:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = \delta(x) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta(x - \langle x \rangle N)}{N} \quad (3.33)$$

2. *A desigualdade, por tanto, é máxima:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 1 \quad (3.34)$$

3. *A mobilidade é nula:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0 \quad (3.35)$$

A Proposição 3 já foi observada, considerando sistemas de tamanho finito, em todos os modelos não enviesados introduzidos no Capítulo 2 (MOUKARZEL et al., 2007; IGLESIAS; ALMEIDA, 2012; CARDOSO; GONÇALVES; IGLESIAS, 2020; BOGHOSIAN et al., 2017; BOULEAU; CHORRO, 2017). Na seção 3.5 desse capítulo, será demonstrado que essas três regras não enviesadas tem, de fato, apenas $x = 0$ como estado absorvente.

3.4 Prova das proposições

Nessa seção serão provadas as proposições. Antes, porém, um corolário de um Lema será útil no decorrer das demonstrações.

Lema 1. *Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\int_a^b dz g(z) = 1$. Então (ZABANDAN; KILIÇMAN, 2013)*

$$\int_a^b dz |z| g(z) \leq \frac{b|a| - a|b|}{b - a} + \frac{|b| - |a|}{b - a} \int_a^b dz z g(z). \quad (3.36)$$

Corolário 1. *Em um sistema de trocas binárias não enviesadas, para todo t e $x > 0$, temos que*

$$l(x, t) \leq 2\langle x \rangle. \quad (3.37)$$

Demonstração. Dada a definição de mobilidade, o Lema 1 implica que

$$\begin{aligned} l(x, t) &= \int_0^\infty dx' \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} f(x', t) \leq \\ &\leq \int_0^\infty dx' f(x', t) \left[\frac{2xx'}{x+x'} + \frac{x-x'}{x+x'} \int_{-x}^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pela condição de trocas não enviesadas (Eq. 3.8), a integral no segundo termo é nulo. Assim, temos que

$$l(x, t) \leq 2 \int_0^\infty dx' f(x', t) \frac{xx'}{x+x'}. \quad (3.39)$$

Agora, como $x \leq x + x'$, finalmente provamos o corolário

$$l(x, t) \leq 2 \int_0^\infty dx' f(x', t) x' = 2\langle x \rangle. \quad (3.40)$$

□

3.4.1 Proposição 1

Demonstração. Suponhamos que $x = 0$ e $x' > 0$. Assim, a Eq. 3.8 implica que

$$\int_0^{x'} d\Delta \Delta \omega_{[0, x'] \rightarrow [\Delta, x'-\Delta]} = 0. \quad (3.41)$$

Como, nesse caso particular, o integrando sempre será não-negativo, a integral só será nula se

$$\Delta \omega_{[0, x'] \rightarrow [\Delta, x'-\Delta]} = 0 \quad , \quad \forall \Delta \in [0, x']. \quad (3.42)$$

Assim, dado que $\omega_{[0, x'] \rightarrow [\Delta, x'-\Delta]}$ é normalizada (Eq.3.6), essa condição só é satisfeita se

$$\omega_{[0, x'] \rightarrow [\Delta, x'-\Delta]} = \delta(\Delta). \quad (3.43)$$

Com isso, usando a definição da mobilidade $l(x, t)$ (Eq. 3.30), finalmente temos que

$$l(0, t) = \int_0^\infty dx' \int_0^{x'} d\Delta |\Delta| \delta(\Delta) f(x', t) = 0, \quad (3.44)$$

isto é, $x = 0$ é um estado absorvente. □

3.4.2 Proposição 2

Demonstração. Como visto anteriormente, o índice Gini no tempo t é dado por

$$G(t) = \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 |x - x_1| f(x, t) f(x_1, t). \quad (3.45)$$

Assim, sua evolução temporal é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \frac{d}{dt} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 |x - x_1| f(x, t) f(x_1, t) = \\ &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 |x - x_1| \frac{\partial}{\partial t} ig[f(x, t) f(x_1, t) ig] = \\ &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 |x - x_1| \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} f(x_1, t) + \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} f(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Como a integral é sobre as duas variáveis x e x_1 , podemos fazer a substituição de x por x_1 no segundo termo da soma do integrando, simplificando essa expressão em

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_1 |x - x_1| f(x_1, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}. \quad (3.47)$$

Por simplicidade de notação, definimos

$$\phi(x, t) \equiv \int_0^\infty dx_1 |x - x_1| f(x_1, t). \quad (3.48)$$

Agora, partir da Equação Mestra $\partial f/\partial t$ (Eq. 3.4), temos que

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \int_{-x}^{x'} d\Delta \phi(x, t) \omega_{[x+\Delta, x'-\Delta] \rightarrow [x, x']} f(x + \Delta, t) f(x' - \Delta, t) - \\ &\quad - \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \int_{-x}^{x'} d\Delta \phi(x, t) \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} f(x, t) f(x', t). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Podemos representar a primeira integral por

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx' \int_{-x}^{x'} d\Delta \phi(x, t) \omega_{[x+\Delta, x'-\Delta] \rightarrow [x, x']} f(x + \Delta, t) f(x' - \Delta, t) = \\ &= \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dx' \int_{-\infty}^\infty d\Delta \phi(x, t) \omega_{[x+\Delta, x'-\Delta] \rightarrow [x, x']} f(x + \Delta, t) f(x' - \Delta, t) \times \\ &\quad \times \theta(x) \theta(x') \theta(\Delta + x) \theta(x' - \Delta). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Definindo $y = x + \Delta$ e $y' = x' - \Delta$, temos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \phi(y - \Delta, t) \omega_{[y,y'] \rightarrow [y-\Delta, y'+\Delta]} f(y, t) f(y', t) \times \\ \times \theta(y - \Delta) \theta(y' + \Delta) \theta(y) \theta(y'). \quad (3.51)$$

Fazendo uma nova substituição de variável, $\Delta' = -\Delta$, a integral fica

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta' \phi(y + \Delta', t) \omega_{[y,y'] \rightarrow [y+\Delta', y'-\Delta']} f(y, t) f(y', t) \times \\ \times \theta(y + \Delta') \theta(y' - \Delta') \theta(y) \theta(y') = \\ \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dy' \int_{-y}^{y'} d\Delta' \phi(y + \Delta', t) \omega_{[y,y'] \rightarrow [y+\Delta', y'-\Delta']} f(y, t) f(y', t), \quad (3.52)$$

na qual foi compensada a mudança de sinal do diferencial com a permutação dos limites na integral sobre Δ' .

Comparando a integral 3.52 com a segunda integral da Eq.3.49, vemos que a única diferença no integrando, além dos nomes das variáveis, é um sinal e o termo com a função ϕ . Assim, a expressão para a derivada temporal do Gini, Eq. 3.49, fica

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' f(x, t) f(x', t) \times \\ \times igg \left[\int_{-x}^{x'} d\Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} \phi(x + \Delta, t) - \phi(x, t) igg \right]. \quad (3.53)$$

Agora, retomando a definição de ϕ (Eq. 3.48), finalmente temos que

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dx_1 f(x, t) f(x', t) f(x_1, t) \times \\ \times igg \left[\int_{-x}^{x'} d\Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} |x + \Delta - x_1| - |x - x_1| igg \right]. \quad (3.54)$$

Como a integral do valor absoluto é sempre maior ou igual que valor absoluto da integral (HANSEN; PEDERSEN, 2003), a Eq. 3.8 implica que

$$\int_{-x}^{x'} d\Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} |x + \Delta - x_1| \geq \\ \geq igg \left| \int_{-x}^{x'} d\Delta \omega_{[x,x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} (x + \Delta - x_1) igg \right| = |x - x_1|, \quad (3.55)$$

podendo finalmente concluir, pela Eq. 3.54, que

$$\frac{dG(t)}{dt} \geq 0. \quad (3.56)$$

□

3.4.3 Proposição 3

Demonstração. Como o índice Gini é limitado por $G(t) \leq 1$, ele vai crescer até chegar ao seu valor estacionário G_s associado à função densidade de probabilidade estacionária $f_s(x)$, definidos por:

$$G_s = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) \quad \text{e} \quad f_s(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t). \quad (3.57)$$

Também, para cada valor de x , definimos sua mobilidade estacionária como

$$l_s(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} l(x, t). \quad (3.58)$$

Como o integrando da Eq. 3.54 é sempre não negativo, o estado estacionário só é atingido quando

$$\int_0^\infty dx' igg \left[\int_{-x}^{x'} d\Delta \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} |x+\Delta-x_1| - |x-x_1| igg \right] f_s(x) f_s(x_1) f_s(x') = 0 \quad (3.59)$$

para todo $x, x_1 \in [0, \infty)$. Para isso, não pode existir $x > 0$ tal que $f_s(x) > 0$, já que o integrando no caso particular $x_1 = x$ é

$$\int_0^\infty dx' \int_{-x}^{x'} d\Delta \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} |\Delta| f_s(x) f_s(x) f_s(x') = f_s(x)^2 l_s(x), \quad (3.60)$$

sendo estritamente positivo caso $l_s(x) > 0$ (isto é, supondo a não existência de outro estado absorvente além do $x = 0$). Assim, o integrando é apenas nulo se $f_s(x) = 0$ para todo $x > 0$. A única função densidade de probabilidade que satisfaz essa condição é a função densidade de probabilidade de máxima desigualdade:

$$f_s(x) = \delta(x) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta(x - \langle x \rangle N)}{N}, \quad (3.61)$$

associada ao valor de índice Gini $G_s = 1$.

Finalizando, o valor estacionário da liquidez do sistema (Eq. 3.31) é dado por

$$L_s \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx l_s(x) f_s(x) = \frac{l_s(0)}{2\langle x \rangle} + \frac{1}{2\langle x \rangle} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} l_s ig(N\langle x \rangle).$$

O primeiro termo é nulo pela Proposição 1. Além disso, pelo Corolário 1, temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2\langle x \rangle} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} l_s(N\langle x \rangle) &\leq \frac{1}{2\langle x \rangle} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\langle x \rangle}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\langle x \rangle} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} l_s(N\langle x \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Isso prova que $L_s = 0$. □

Assim, concluímos as provas das três proposições.

3.5 Estados absorventes

A partir das representações da regras não enviesadas pela função taxa de transferência ω feitas na seção 3.1, será mostrado que nos três casos $x = 0$ é o único estado absorvente.

3.5.1 Regra do mínimo

A mobilidade de uma riqueza x na regra do *mínimo* é dada por

$$\begin{aligned} l(x, t) &= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \omega_{[x, x'] \rightarrow [x + \Delta, x' - \Delta]} = \\ &= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} \delta(\Delta - \lambda \min(x', x)) + \frac{1}{2} \delta(\Delta + \lambda \min(x', x)) \right] = \\ &= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} (\lambda \min(x', x)) + \frac{1}{2} (\lambda \min(x', x)) \right] = \\ &= \int_0^1 d\lambda \lambda p(\lambda) \int_0^\infty dx' f(x', t) \min(x', x). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Assim, como o integrando é não-negativo, $l(x, t)$ só pode ser nulo se

$$f(x', t) \min(x', x) = 0 \quad , \quad \forall x' \geq 0. \quad (3.64)$$

Fica evidente que o caso $x = 0$ é um estado absorvente. Agora, assumindo que $x > 0$, sempre haverá $x' > 0$ tal que $f(x', t) > 0$ (fora da situação de condensação, que acontece assintoticamente). Assim, não pode existir um $x > 0$ que seja estado absorvente.

3.5.2 Regra do perdedor não enviesada

A mobilidade de uma riqueza x nessa versão não-viesada da regra do *perdedor* é dada por

$$\begin{aligned}
l(x, t) &= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \\
&= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{x}{x+x'} \delta(\Delta - \lambda x') + \frac{x'}{x+x'} \delta(\Delta + \lambda x) \right] = \\
&= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_0^1 d\lambda p(\lambda) \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda x x'}{x+x'} + \frac{1}{2} \frac{\lambda x x'}{x+x'} \right] = \\
&= \int_0^1 d\lambda \lambda p(\lambda) \int_0^\infty dx' f(x', t) \frac{x x'}{x+x'}. \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Assim, como o integrando é não-negativo, $l(x, t)$ só pode ser nulo se

$$f(x', t) \frac{x x'}{x+x'} = 0 \quad , \quad \forall x' \geq 0. \quad (3.66)$$

Fica evidente que o caso $x = 0$ é um estado absorvente. Agora, assumindo que $x > 0$, sempre haverá $x' > 0$ tal que $f(x', t) > 0$ (fora da situação de condensação, que acontece assintoticamente). Assim, não pode existir um $x > 0$ que seja estado absorvente.

3.5.3 Regra de Iglesias e Almeida

A mobilidade de uma riqueza x no modelo de *Iglesias e Almeida* (IGLESIAS; ALMEIDA, 2012) é dada por

$$\begin{aligned}
l(x, t) &= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \omega_{[x, x'] \rightarrow [x+\Delta, x'-\Delta]} = \\
&= \int_0^\infty dx' f(x', t) \int_{-x}^{x'} d\Delta |\Delta| \left[\frac{1}{2} \delta\left(\Delta - \frac{x x'}{x+x'}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\Delta + \frac{x x'}{x+x'}\right) \right] = \\
&= \int_0^\infty dx' f(x', t) \left[\frac{1}{2} \frac{x x'}{x+x'} + \frac{1}{2} \frac{x x'}{x+x'} \right] = \\
&= \int_0^\infty dx' f(x', t) \frac{x x'}{x+x'}. \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Assim, como o integrando é não-negativo, $l(x, t)$ só pode ser nulo se

$$f(x', t) \frac{x x'}{x+x'} = 0 \quad , \quad \forall x' \geq 0. \quad (3.68)$$

Fica evidente que o caso $x = 0$ é um estado absorvente. Agora, assumindo que $x > 0$,

sempre haverá $x' > 0$ tal que $f(x', t) > 0$ (fora da situação de condensação, que acontece assintoticamente). Assim, não pode existir um $x > 0$ que seja estado absorvente.

4 Considerações finais

A concentração de riqueza no mundo está aumentando. Tradicionalmente esse processo é entendido como derivado unicamente de um favorecimento aos agentes mais ricos. Esse pensamento, porém, induz erroneamente que dinâmicas não viesadas, que concedam as mesmas chances a ricos e pobres, levem a estabilização da desigualdade.

4.1 Principais contribuições

A presente dissertação mostra que um sistema de trocas binárias não enviesadas, dentro das limitações trazidas na próxima seção, inevitavelmente condensa, isto é, seu estado estacionário é de máxima desigualdade e mobilidade nula. Isso foi feito no limite termodinâmico, onde o número de agentes tende ao infinito. Isso não quer dizer que a desigualdade numa economia real inevitavelmente vá crescer no decorrer do tempo, mas que dinâmicas não enviesadas podem explicar seu eventual aumento, como acontece no caso particular exemplificado nos Estados Unidos (Fig. 1).

4.2 Limitações

As limitações do presente trabalho são de duas ordens: a primeira diz respeito ao se provar apenas no limite termodinâmico, e não para um número finito de agentes; a segunda diz respeito aos próprios modelos de troca cinética, que não consideram trocas entre mais de dois agentes, a dupla de troca é não-correlacionada, não prevem crescimento de riqueza e desconsideram outras variáveis que caracterizariam os agentes além de sua riqueza.

4.3 Trabalhos futuros

No futuro, pretende-se estender os resultados superando as limitações elencadas.

Referências

- ANGLE, J. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces*, The University of North Carolina Press, v. 65, n. 2, p. 293–326, 1986.
- BASSETTI, F.; TOSCANI, G. Explicit equilibria in a kinetic model of gambling. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 6, p. 066115, 2010.
- BLACK, J.; HASHIMZADE, N.; MYLES, G. A dictionary of economics. OUP Oxford, 2012.
- BOGHOSIAN, B. M. Kinetics of wealth and the pareto law. *Physical Review E*, APS, v. 89, n. 4, p. 042804, 2014.
- BOGHOSIAN, B. M. et al. Oligarchy as a phase transition: The effect of wealth-attained advantage in a fokker–planck description of asset exchange. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 476, p. 15–37, 2017.
- BOGHOSIAN, B. M.; JOHNSON, M.; MARCQ, J. A. An h theorem for boltzmann’s equation for the yard-sale model of asset exchange. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 161, n. 6, p. 1339–1350, 2015.
- BOULEAU, N.; CHORRO, C. The impact of randomness on the distribution of wealth: Some economic aspects of the wright–fisher diffusion process. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 479, p. 379–395, 2017.
- BUSTOS-GUAJARDO, R.; MOUKARZEL, C. F. Wealth distribution under yard–sale exchange with proportional taxes. *International Journal of Modern Physics C*, World Scientific, v. 27, n. 08, p. 1650094, 2016.
- CARDOSO, B.-H. F.; GONÇALVES, S.; IGLESIAS, J. R. Wealth distribution models with regulations: Dynamics and equilibria. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, p. 124201, 2020.
- CHANCEL, L. Ten facts about inequality in advanced economies. *WID. World Working Paper*, n. 2019/15, 2019.
- CHATTERJEE, A.; CHAKRABARTI, B. K.; MANNA, S. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 335, n. 1-2, p. 155–163, 2004.
- DIPRETE, T. A.; EIRICH, G. M. Cumulative advantage as a mechanism for inequality: A review of theoretical and empirical developments. *Annu. Rev. Sociol.*, Annual Reviews, v. 32, p. 271–297, 2006.

- DRĂGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the united kingdom and the united states. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 299, n. 1-2, p. 213–221, 2001.
- GINI, C. Measurement of inequality of incomes. *The Economic Journal*, JSTOR, v. 31, n. 121, p. 124–126, 1921.
- HANSEN, F.; PEDERSEN, G. K. Jensen's operator inequality. *Bulletin of the London Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 35, n. 4, p. 553–564, 2003.
- HAYES, B. Computing science: Follow the money. *American Scientist*, v. 90, n. 5, p. 400–405, 2002.
- IGLESIAS, J. R.; ALMEIDA, R. M. C. D. Entropy and equilibrium state of free market models. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 85, n. 3, p. 85, 2012.
- IGLESIAS, J. R.; CARDOSO, B.-H. F.; GONÇALVES, S. Inequality, a scourge of the xxi century. *arXiv preprint arXiv:2005.06106*, 2020.
- ISPOLATOV, S.; KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S. Wealth distributions in asset exchange models. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 2, n. 2, p. 267–276, 1998.
- LI, J.; BOGHOSIAN, B. M.; LI, C. The affine wealth model: An agent-based model of asset exchange that allows for negative-wealth agents and its empirical validation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 516, p. 423–442, 2019.
- LIMA, H.; VIEIRA, A. R.; ANTENEODO, C. Nonlinear redistribution of wealth from a fokker-planck description. *arXiv preprint arXiv:2007.11680*, 2020.
- LORENZ, M. O. Methods of measuring the concentration of wealth. *Publications of the American statistical association*, Taylor & Francis Group, v. 9, n. 70, p. 209–219, 1905.
- LUX, T. Emergent statistical wealth distributions in simple monetary exchange models: a critical review. In: *Econophysics of wealth distributions*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 51–60.
- MOUKARZEL, C. F. Multiplicative asset exchange with arbitrary return distributions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2011, n. 08, p. P08023, 2011.
- MOUKARZEL, C. F. et al. Wealth condensation in a multiplicative random asset exchange model. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 143, n. 1, p. 75–79, 2007.
- PATRIARCA, M. et al. Kinetic theory models for the distribution of wealth: Power law from overlap of exponentials. Springer, p. 93–110, 2005.
- PATRIARCA, M.; HEINSALU, E.; CHAKRABORTI, A. Basic kinetic wealth-exchange models: common features and open problems. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 73, n. 1, p. 145–153, 2010.
- PIKETTY, T. *Capital in the 21st Century*. [S.l.]: Harvard University Press Cambridge, MA, 2014.

- PIKETTY, T.; SAEZ, E.; ZUCMAN, G. Distributional national accounts: methods and estimates for the united states. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford University Press, v. 133, n. 2, p. 553–609, 2018.
- SCHILLING, R. L. *Measures, integrals and martingales*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.
- SEN, A. et al. *On economic inequality*. [S.l.]: Oxford University Press, 1997.
- SLANINA, F. *Essentials of econophysics modelling*. [S.l.]: OUP Oxford, 2013.
- YAKOVENKO, V. M.; ROSSER JR, J. B. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 81, n. 4, p. 1703, 2009.
- ZABANDAN; KILIÇMAN Several integral inequalities and an upper bound for the bidimensional Hermite-Hadamard inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, Springer, v. 2013, n. 1, p. 27, 2013.
- BHASKAR, R. *The possibility of naturalism: A philosophical critique of the contemporary human sciences*. Routledge, 2014.
- CHAKRABARTI, B. K. et al. *Econophysics of income and wealth distributions*. Cambridge University Press, 2013.
- CHAKRABORTI, A. et al. Econophysics review: Ii. agent-based models. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 11, n. 7, p. 1013–1041, 2011.
- LANDAU, D. P.; BINDER, K. *A guide to monte carlo simulations in statistical physics*. Cambridge university press, 2014.
- MALEVANETS, A.; KAPRAL, R. Mesoscopic model for solvent dynamics. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 110, n. 17, p. 8605–8613, 1999.
- MARX, K.; ENGELS, F. *The german ideology*. International Publishers Co, v. 1, 1972.
- MÜLLER-KRUMBHAAR, H.; BINDER, K. Dynamic properties of the monte carlo method in statistical mechanics. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 8, n. 1, p. 1–24, 1973.
- WOOD, E. M. *The origin of capitalism: a longer view*. Verso, 2002.
- SINN, H.-W. A rehabilitation of the principle of insufficient reason. *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, v. 94, n. 3, p. 493–506, 1980.
- YAKOVENKO, V. M. Monetary economics from econophysics perspective. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 225, n. 17-18, p. 3313–3335, 2016.