Vojtěch David

Geometrická řešení algebraických úloh MO

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 4, 12–15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148561`

kde e je Eulerovo číslo, i je roční úroková sazba a t je čas vyjádřený v letech. Obdobným způsobem jako u pravidla 72 odvoďte konstantu 69 pro spojité úročení. Jaký má na výsledek dopad roční úroková sazba i a proč?

Literatura

[1] Bláha, M.: *Úročení ve finanční matematice.* Práce SOČ, Biskupské gymnázium, církevní základní škola, mateřská škola a základní umělecká škola, Hradec Králové, 2020, [online]. Dostupné z: https://www.academia.edu/43976982/SOC_Marek_Blaha_Uroceni_ve_financni_matematice.

Geometrická řešení algebraických úloh MO

Vojtěch David, Wichterlovo gymnázium

Abstrakt. Algebraické úlohy zadávané v Matematické olympiádě bývají samy o sobě často na první pohled neintuitivní a jejich autorská řešení matematicky příliš deduktivně dokonalá. Některé z nich ale mají i svou geometrickou interpretaci, u které je poté možné najít řešení pouhým vhledem. V tomto článku jsou uvedena dvě takováto řešení k úlohám, které se objevily v krajských kolech 68. a 64. ročníku Matematické olympiády kategorie A.

V krajském kole 68. ročníku byla zadána následující úloha:

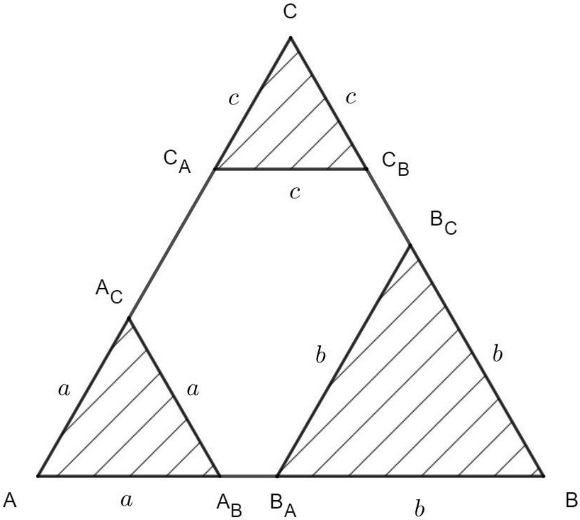
Najděte maximální hodnotu výrazu

$$a^2 + b^2 + c^2$$

pro reálná čísla a, b, c taková, že všechna tři čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$ *jsou z intervalu* $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení. Autorské řešení najdete na webu matematické olympiády: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433615/a68ii.pdf`

Zajímavý vhled do úlohy nám může poskytnout následující geometrická interpretace:



Obr. 1: Geometrická interpretace úlohy – vyšrafovaná část zachycuje obsah, o jehož maximalizaci usilujeme

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1. Zvolme na jeho straně AB bod A_B a následně na jeho straně AC uvažme bod A_C tak, aby AA_BA_C byl rovnostranný trojúhelník o straně délky a. Analogicky definujeme trojúhelníky BB_CB_A a CC_AC_B (viz obr. 1).

Všimněme si, že když jsou tyto tři trojúhelníky disjunktní, platí podmínka ze zadání, tj. součty $a+b$, $b+c$, $c+a$ jsou z intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Nyní se podívejme na jejich obsahy. Součet obsahů těchto tří trojúhelníků S je roven

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Je tedy zřejmé, že výraz $a^2+b^2+c^2$ bude maximální, když bude maximální obsah trojúhelníků AA_BA_C, BB_CB_A a CC_AC_B. Vzhledem k podmínce, že trojúhelníky musí být disjunktní, je zřejmé, že nemohou mít dohromady větší obsah než trojúhelník ABC o straně 1. To nastane, bude-li jedna z proměnných rovna 1 a zbylé dvě 0. Z tohoto důvodu je

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)\le S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Tedy $a^2+b^2+c^2\le 1$.

Zbývá pouze vyřešit případ, kdy je jedno z čísel a, b, c záporné (dvě čísla záporná zřejmě být nemohou, nebyla by splněna podmínka ze zadání).

Nechť $a = -n$, kde n je kladné číslo. Hledaný součet druhých mocnin bude mít potom stejnou hodnotu jako v případě $a = n$. Proto stačí pro naši analogii s obsahy dokázat, že se trojúhelník se stranou délky n „vejde" do trojúhelníku ABC spolu s trojúhelníky o stranách délek b a c. Na toto ale už stačí jenom jednoduchý heuristický pohled, pokud si uvědomíme, že pro splnění podmínky ze zadání musí být n rovno nejvýše menšímu z čísel b, c a trojúhelník se stranou této délky se do ABC již vešel.

V krajském kole 64. ročníku byla zadána následující úloha:

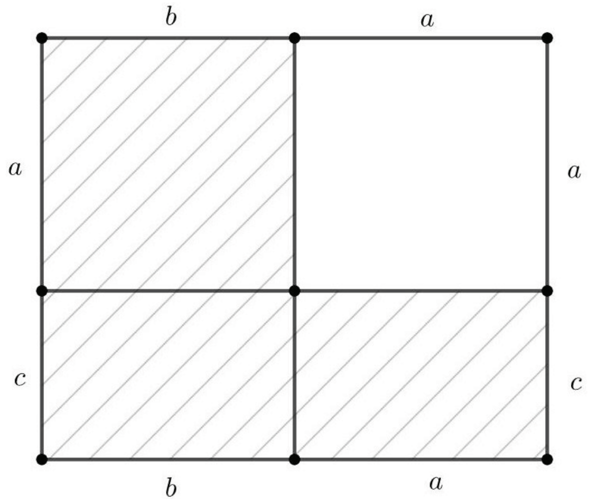
Pro kladná reálná čísla a, b, c platí:

$$ab + bc + ac = 16, \quad a \geq 3.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $2a + b + c$.

Řešení. Autorské řešení najdete na webu matematické olympiády: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/1681650/a64ii.pdf`

Stejně jako u předchozí úlohy interpretujme zadání geometricky:



Obr. 2: Geometrická interpretace úlohy – vyšrafovaná část má podle zadání konstantní obsah 16

Uvažme obdélník o stranách délky $a+b$ a $a+c$ (viz obr. 2). Jeho obsah S bude

$$S = ab + bc + ac + a^2 = 16 + a^2.$$

Podle podmínky $a \geq 3$ dostáváme $S \geq 25$.

Nyní se podívejme na jeho obvod o:

$$o = 4a + 2b + 2c = 2(2a + b + c).$$

Zjišťujeme, že zkoumaný výraz $2a + b + c$ je roven polovině obvodu útvaru, stačí tedy minimalizovat obvod tohoto obdélníku. Zredukovali jsme tedy úlohu na problém nalezení minimálního obvodu obdélníku o daném obsahu.

Jak je známo, řešením této úlohy je čtverec. Toto tvrzení lze dokázat s využitím AG nerovnosti

$$\frac{1}{2}(a + b + a + c) \geq \sqrt{(a+b)(a+c)},$$

přičemž rovnost nastává právě pro $a + b = a + c$, tj. pro $b = c$.

Platí $o \geq 4\sqrt{S} \geq 20$, a tedy $2a + b + c \geq 10$.

Výše popsaná úvaha nám také opět prezentuje existenci takovéto trojice a, b, c. Nejmenší možná hodnota výrazu $2a + b + c$ nastane pro $2a + b + c = 10$, $a = 3$ a $b = c$. Proto $a = 3$ a $b = c = 2$.

Geometrický význam Eulerova čísla e

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova, Praha

Abstrakt. V článku se budeme věnovat geometrickému významu čísla e. Hlavním cílem bude ukázat konstrukci úseček, jejichž délka se blíží hodnotě e.

Eulerovo číslo e patří mezi nejvýznamnější matematické konstanty. Je pojmenováno po švýcarském matematikovi Leonhardu Eulerovi. O historii tohoto čísla či výpočtu jeho číslic si můžete přečíst například v [1]. Je známo, že číslo e je iracionální a je dokonce transcendentní, což znamená, že není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty. Další neméně důležitou konstantou v matematice je Ludolfovo číslo π,