

Математика и математическое моделирование.
2020. № 5. С. 33–44.

DOI: [10.24108/mathm.0520.0000224](https://doi.org/10.24108/mathm.0520.0000224)



© Горяинов В. Б., Кайнг В. М., 2020.

Математика Математическое МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сетевое научное издание

<http://mathmelpub.ru>

ISSN 2412-5911

УДК 519.234.3

Сравнительный анализ методов нахождения М-оценок параметров экспоненциальной авторегрессии

Горяинов В. Б.^{1*}, Кайнг В. М.¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*vb-goryainov@bmstu.ru

Рассматривается задача оценивания параметров экспоненциальной авторегрессии при помощи метода М-оценивания, обобщающего методы наименьших квадратов и наименьших модулей. Посредством компьютерного моделирования изучаются и сравниваются между собой численные методы построения М-оценок. Для экономии вычислительных ресурсов исследовалась экспоненциальная авторегрессия первого порядка. Показано, что наиболее точными и быстрыми являются методы штрафных функций и последовательного квадратичного программирования. Обнаружено, что все алгоритмы чувствительны к начальным условиям. Результаты работы можно использовать при идентификации экспоненциальной авторегрессионной модели.

Ключевые слова: экспоненциальная авторегрессия; М-оценка; методы оптимизации

Представлена в редакцию: 14.07.2020.

Введение

В последние годы в различных областях науки и техники при описании случайных процессов с дискретным временем большое распространение получила экспоненциальная авторегрессионная модель, впервые упомянутая в [1], и затем подробно изложенная в [2] и [3]. Она является дискретным стохастическим аналогом нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа осцилляторов Дуффинга и ван дер Поля и позволяет описывать стохастические негауссовские процессы с возмущенными предельными циклами и колебаниями с амплитудно-зависимой частотой. Примерами таких стохастических процессов являются электрические сигналы в коре головного мозга, вибрации автомобиля и качка корабля (см., например, [3] и [4]).

Важнейшей задачей, возникающей при исследовании авторегрессионной модели, является оценивание ее параметров — коэффициентов соответствующего экспоненциального уравнения. В [5] для оценивания параметров были предложены М-оценки, которые требуют

для своего получения минимизации целевой функции нескольких переменных. В настоящей работе проводится сравнительный анализ численных методов поиска минимума функции при вычислении М-оценок. Для экономии вычислительных ресурсов рассматривается наиболее простой вариант модели экспоненциальной авторегрессии — экспоненциальной авторегрессии первого порядка.

1. Метод М-оценивания

Модель экспоненциальной авторегрессии первого порядка определяется как

$$X_t = (a + be^{-cX_{t-1}^2})X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где ε_t , $t = 1, 2, \dots$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием $E \varepsilon_t = 0$ и единичной дисперсией $D \varepsilon_t = 1$, действительные числа a , b и c — неизвестные параметры модели, подлежащие оцениванию.

Обозначим через X_1, X_2, \dots, X_n наблюдения процесса X_t , т.е. одну из реализаций X_t в моменты времени $t = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим задачу оценивания параметров a , b , c по наблюдениям X_1, X_2, \dots, X_n . Предположим, что ε_t , $t = 2, 3, \dots$, не зависят от X_1 .

Определим М-оценку $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ коэффициентов a , b , c как точку минимума функции (будем в дальнейшем называть ее целевой функцией)

$$g(a, b, c) = \sum_{t=2}^n \rho(X_t - (a + be^{-cX_{t-1}^2})X_{t-1})^2, \quad (2)$$

где ρ — весовая функция, которую принято называть ρ -функцией. Обычно предполагается, что ρ — чётная, выпуклая вниз функция. Оптимальный выбор ρ -функции зависит от плотности f распределения вероятностей обновляющего процесса ε_t . Вероятностные свойства М-оценок параметров уравнения (1) полностью определяются функциями f и ρ .

Наиболее распространённой ρ -функцией является ρ -функция Хьюбера [6]

$$\rho_H(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq k; \\ 2k|x| - k^2, & |x| > k. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $k \in (0, \infty)$ — тюнинговый параметр, изменение которого позволяет достичь максимальной эффективности М-оценки в зависимости от конкретного вида плотности f .

Оценки наименьших квадратов и наименьших модулей являются частными случаями М-оценок с ρ -функциями соответственно x^2 и $|x|$. Оценка наименьших модулей по сравнению с оценкой наименьших квадратов менее чувствительна к влиянию выбросов — резко выделяющихся наблюдений, обусловленных, например, сбоям измерительной аппаратуры. С другой стороны, оценка наименьших квадратов эффективнее оценки наименьших модулей

в отсутствие таких выбросов. М-оценка с ρ -функцией (2) является компромиссом между оценкой наименьших квадратов и оценкой наименьших модулей, поскольку $\rho_H(x)$ совпадает с x^2 в окрестности $(-k, k)$ начала координат и ведет себя линейно вне этой окрестности подобно $|x|$. Это приводит к тому, что, с одной стороны, линейное как в методе наименьших модулей, а не квадратичное как в методе наименьших квадратов поведение на бесконечности ρ -функции Хьюбера позволяет уменьшить по сравнению с оценкой наименьших квадратов влияние на точность М-оценки резко выделяющихся наблюдений. С другой стороны, квадратичный вид ρ -функции в окрестности начала координат повышает качество М-оценки по сравнению с оценкой наименьших модулей в отсутствие выбросов.

Отметим, что метод максимального правдоподобия, широко используемый в статистических моделях с независимыми наблюдениями, в моделях нелинейных временных рядов использовать практически невозможно из-за сложного вида функции правдоподобия. Вместо этого обычно используется метод квази-максимального правдоподобия, который заключается в применении метода максимального правдоподобия в предположении, что наблюдения X_t являются гауссовскими. В этом случае оценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой наименьших квадратов [7].

2. Описание алгоритмов минимизации целевой функции

Симплексные методы. Симплексные методы применяются для многомерной нелинейной оптимизации без ограничений. Эти методы не используют производные минимизируемой функции, что делает их удобными, особенно в случае негладких или разрывных функций. Они относятся к семейству методов прямого поиска, находя экстремум с помощью симплексов посредством итерационной процедуры. В данной работе используется метод Нелдера — Мида [8, 9, 10], также известный как метод деформируемого многогранника. Суть метода заключается в сравнении значений минимизируемой функции в вершинах симплекса, содержащего точку экстремума, и затем в последовательном перемещении и деформировании симплекса вокруг точки экстремума.

Квазиньютоновские методы. Идея квазиньютоновских методов [9, 11, 12] основана на методе Ньютона безусловной минимизации, который аппроксимирует целевую функцию в окрестности минимума квадратичной формой, требующей от функции существования производных первых двух порядков. В отличие от метода Ньютона квазиньютоновские методы применимы к любой непрерывной функции, поскольку не вычисляют, а лишь аппроксимируют ее вторые производные. В данной работе используется метод Бройдена — Флетчера — Шенно [13, с.94].

Методы последовательного квадратичного программирования. Методы последовательного квадратичного программирования предназначены для условной минимизации функций на допустимом множестве, которое описывается системой, вообще говоря, нелинейных равенств и неравенств. Этот метод заключается в последовательном решении подза-

дач квадратичного программирования, аппроксимирующих исходную задачу оптимизации. В каждой подзадаче целевой функцией является квадратичная форма, представляющая собой аппроксимацию функции Лагранжа исходной задачи.

В данной работе использован алгоритм из [9, § 6.5.3]. В нем применяется стратегия активного набора, которая разделяет ограничения оптимизационной задачи на активные или неактивные. Функции, описывающие активные ограничения, аппроксимируются своими линейными тейлоровскими разложениям в окрестности промежуточного решения. Описание функции выигрыша алгоритма см. в [14].

Методы штрафных функций. Еще один из подходов к решению общей задачи нелинейного программирования состоит в преобразовании ее в последовательность задач безусловной минимизации для сконструированных специальным образом вспомогательных функций, представляющих собой сумму исходной целевой функции и так называемой штрафной функции [12, 13]. Штрафные функции описывают допустимое множество решений, не позволяя решению вспомогательной задачи выйти из допустимого множества.

В данной работе использовалась разновидность метода, называемая методом внутренних штрафных функций или методом барьерных функций. В качестве внутренней штрафной функции была взята логарифмическая внутренняя штрафная функция [13, с. 214].

Генетические методы. Генетические методы применяются для решения задач оптимизации с ограничениями или без ограничений и могут использоваться даже в тех случаях, когда целевая функция или ограничения не являются непрерывными. На каждой итерации эти методы дают совокупность решений, из которых случайным образом выбирается одно, используемое затем для нахождения решения на следующей итерации.

В работе рассмотрен простой генетический алгоритм Голдберга [15, 16], который характеризуется управлением популяцией методом турнирного отбора, селекцией особей для скрещивания методом панмиксии, использованием одноточечных кроссовера и мутатора, бинарным кодированием особей, фиксированной разрядностью генов, постоянным размером популяции и отсутствием промежуточной популяции.

3. Описание компьютерного эксперимента

Целью компьютерного эксперимента было исследование точности оценок параметров уравнения экспоненциальной авторегрессии в зависимости от выбора численного метода минимизации целевой функции (2).

Точность оценивания каждого алгоритма характеризовалась средним отклонением и средним разбросом M -оценок $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ от истинных значений a, b, c параметров уравнения (1) по достаточно большому количеству N реализаций вектора наблюдений X_1, X_2, \dots, X_n .

Вектор наблюдений $X_1, X_2, \dots, X_n, n = 100$, моделировался $N = 1000$ раз, его каждая реализация $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, i = 1, 2, \dots, N$, была получена при помощи рекуррентного

соотношения (1) с начальным условием $X_0 = 1$, параметры в (1) для определённости полагались $a = 1/2$, $b = -2$, $c = 1$. Случайные величины ε_t , $t = 1, \dots, N$, моделировались при помощи датчика нормальных псевдослучайных чисел. Начальное приближение (a_0, b_0, c_0) в методе оптимизации полагалось равным $(0, 0, 2)$, которое можно считать достаточно произвольным.

В отличие от алгоритма Нелдера — Мида и квазиньютоновского алгоритма, которые являются алгоритмами без ограничений, алгоритмы последовательного квадратичного программирования, штрафных функций и генетического алгоритма использовали ограничения, обусловленные стационарностью временного ряда X_t . А именно, предполагались выполненными условия стационарности $|a| < 1$ и $c > 0$.

Так как оценка $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ векторная, то ее точность рассчитывалась по координатам. Рассмотрим для определённости оценку \hat{b} параметра b (точность \hat{a} и \hat{c} вычислялась аналогично). Для каждой i -й реализации $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$, $i = 1, 2, \dots, N$, путём минимизации функции $g(a, b, c)$ вида (2) строились оценки \hat{b}_i , $i = 1, \dots, N$.

Первоначально точность оценивания характеризовалась величинами

$$\text{mean}(\hat{b}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{b}_i, \quad \Delta(\hat{b}) = \left| \frac{\text{mean}(\hat{b}) - b}{b} \right|, \quad \text{std}(\hat{b}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{b}_i - b)^2},$$

которые будем для определённости называть выборочным средним, выборочным средним относительным отклонением и выборочным среднеквадратическим отклонением М-оценки. Согласно закону больших чисел, при $n \rightarrow \infty$

$$\text{mean}(\hat{b}) \rightarrow E \hat{b}, \quad \text{std}(\hat{b}) \rightarrow \sqrt{D \hat{b}},$$

т.е. $\text{mean}(\hat{b})$ и $\text{std}(\hat{b})$ являются состоятельными оценками соответственно математического ожидания $E \hat{b}$ и среднеквадратического отклонения $\sqrt{D \hat{b}}$ оценки \hat{b} параметра b . Поэтому разумно считать, что чем меньше величины $\Delta(\hat{b})$ и $\text{std}(\hat{b})$, тем оценка лучше.

Наиболее быстрыми были алгоритмы последовательного квадратичного программирования и штрафных функций, которые были приблизительно равны между собой по длительности. Алгоритм Нелдера — Мида был примерно в полтора раза медленнее этих алгоритмов, а генетический алгоритм — в 14 раз медленнее.

В табл. 1 приводятся значения выборочного среднего относительного отклонения Δ и выборочного среднеквадратического отклонения std М-оценок $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ параметров a, b, c в зависимости от алгоритма оценивания: алгоритма Нелдера — Мида (NM), квазиньютоновского алгоритма (KN), алгоритма последовательного квадратичного программирования (SQP), метода штрафных функций (PF), генетического алгоритма (GA).

Из табл. 1 видно, что в целом наиболее точными являются алгоритмы последовательного квадратичного программирования и штрафных функций. Квазиньютоновский алгоритм уступает им немного при оценивании коэффициента a и чуть больше при оценивании коэффициента b . Менее точны (в особенности при оценивании коэффициента c) алгоритм Нелдера — Мида и генетический алгоритм.

Таблица 1

Параметр	NM		QN		SQP		PF		GA	
	Δ	std	Δ	std	Δ	std	Δ	std	Δ	std
a	0.578	6.62	0.370	2.75	0.0222	0.154	0.0248	0.150	0.0934	0.184
b	0.300	7.57	0.161	2.75	0.0746	0.663	0.0759	0.655	0.0258	3.371
c	2.837	59.52	0.138	1.04	0.1392	0.954	0.1399	0.953	11.80	28.3

Оказалось, что все алгоритмы иногда делают грубые ошибки в оценивании, и это небольшое количество грубых ошибок сильно искажает выборочное среднее, выборочное среднее относительное отклонение и выборочное среднеквадратическое отклонение М-оценок авторегрессионных параметров. Детальный анализ показал, что это связано с нахождением алгоритмами локальных минимумов целевой функции (2), далеко расположенных как от ее глобального минимума так и от истинного значения оцениваемого параметра. Для того чтобы оценить долю такого рода сбоя и сравнить точность алгоритмов в отсутствие этих сбоя, некоторая доля α наибольших и наименьших значений среди N реализаций М-оценок отбрасывались и точностные характеристики М-оценок вычислялись по оставшимся реализациям.

А именно, взяв для определенности оценивание параметра b , обозначим для любого $\alpha < \frac{1}{2}$ через $\text{mean}_\alpha(\hat{b})$, $\Delta_\alpha(\hat{b})$ и $\text{std}_\alpha(\hat{b})$ аналоги $\text{mean}(\hat{b})$, $\Delta(\hat{b})$ и $\text{std}(\hat{b})$, построенные по усеченной выборке $\hat{b}_{(k)}, \dots, \hat{b}_{(N-k)}$, где $k = \lfloor N\alpha/2 \rfloor$ есть наибольшее целое, не превосходящее $N\alpha/2$, а $\hat{b}_{(1)}, \dots, \hat{b}_{(N)}$ — расположенные в порядке возрастания числа $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_N$. Тогда

$$\text{mean}_\alpha(\hat{b}) = \frac{1}{N-2k} \sum_{i=k}^{N-k} \hat{b}_{(i)}, \quad \Delta_\alpha(\hat{b}) = \left| \frac{\text{mean}_\alpha(\hat{b}) - b}{b} \right|, \quad \text{std}_\alpha(\hat{b}) = \sqrt{\frac{1}{N-2k} \sum_{i=k}^{N-k} (\hat{b}_{(i)} - b)^2}.$$

В табл. 2 приводятся усеченные характеристики точности построенных М-оценок \hat{b} параметра b в зависимости от величины усечения для исследуемых алгоритмов. Из этой таблицы видно, что в 99% случаях точность первых четырех алгоритмов практически одинакова, а генетический алгоритм им немного уступает.

Таблица 2

α	NM		QN		SQP		PF		GA	
	Δ_α	std_α								
0	0.3000	7.575	0.1615	2.751	0.0746	0.663	0.0759	0.655	0.02585	3.371
0.005	0.1322	1.965	0.0789	0.600	0.0682	0.551	0.0686	0.550	0.01601	3.229
0.01	0.0782	0.561	0.0740	0.541	0.0665	0.530	0.0668	0.529	0.00597	3.078
0.05	0.0673	0.444	0.0655	0.439	0.0595	0.436	0.0597	0.435	0.06735	1.448
0.1	0.0611	0.362	0.0596	0.359	0.0540	0.358	0.0541	0.358	0.10224	0.480

Для того чтобы проверить насколько сильно зависят характеристики точности построенных М-оценок от начальных условий было проведено моделирование, в котором начальные условия всех алгоритмов минимизации целевой функции выбирались более близкими к истинным значениям параметров, а именно случайным равномерно распределенным образом

соответственно из интервалов $(a, b, c) \pm \delta$, где $\delta = \left(\frac{|a|}{2}, \frac{|b|}{2}, \frac{|c|}{2}\right)$. Результаты моделирования приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Параметр	NM		QN		SQP		PF		GA	
	Δ	std	Δ	std	Δ	std	Δ	std	Δ	std
a	0.362	2.91	0.0935	1.0288	0.0207	0.156	0.0193	0.155	0.1419	0.187
b	0.151	3.13	0.1082	1.1475	0.0814	0.660	0.0811	0.658	0.0234	3.338
c	0.925	13.00	0.2102	0.9081	0.2190	0.920	0.2147	0.913	11.8780	28.14

Видно, что работа алгоритмов достаточно сильно зависит от начальных условий. При начальных условиях, расположенных достаточно далеко от истинных значений параметров, алгоритмы чаще находят не глобальный, а локальный минимум, причем расположенный достаточно далеко от глобального минимума целевой функции.

В табл. 4 показана зависимость точности оценивания b от изменения величины δ . Здесь $\delta = \left(\frac{|a|}{k}, \frac{|b|}{k}, \frac{|c|}{k}\right)$, где $k = 1, 2, 3, 10$. Верхняя строка таблицы, обозначенная $k = \emptyset$, соответствует начальным условиям $(0, 0, 2)$. Видно, что при приближении начальных условий к истинным значениям точность всех алгоритмов растет и выравнивается между собой.

Т а б л и ц а 4

k	NM		QN		SQP		PF		GA	
	Δ	std								
\emptyset	0.300	7.57	0.161	2.75	0.0746	0.663	0.0759	0.655	0.0258	3.371
1	0.137	3.508	0.1397	1.565	0.0871	0.618	0.0843	0.611	0.114	3.4225
2	0.151	3.137	0.1082	1.147	0.0814	0.660	0.0811	0.658	0.0234	3.338
3	0.0660	7.050	0.0911	0.671	0.0915	0.662	0.0887	0.652	0.0102	3.331
10	0.331	6.875	0.1519	1.563	0.1104	0.683	0.1103	0.665	0.0516	3.340

Заключение

Наилучшую и приблизительно одинаковую δ точность и быстроту показали алгоритмы последовательного квадратичного программирования и штрафных функций. Не уступая им по времени немного уступает им по точности (в том числе из-за аномальных сбоев) квазиньютоновский алгоритм. Эти алгоритмы оказались и самыми быстрыми. Они были в полтора раза быстрее алгоритма Нелдера — Мида и в 14 раз быстрее генетического алгоритма. Наименее точными оказались алгоритм Нелдера — Мида и генетический алгоритм.

Было обнаружено, что все алгоритмы чувствительны к начальным условиям.

Параметры a и b , от которых правая часть в (1) зависит линейно, оцениваются всеми методами гораздо точнее (можно сказать, на порядок) параметра c .

Список литературы

1. Ozaki T., Oda H. Non-linear time series model identification by Akaike's information criterion // IFAC Proc. Volumes. 1977. Vol. 10, no. 12. Pp. 83–91. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)66563-7](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)66563-7)
2. Ozaki T. Non-linear time series models for non-linear random vibrations // J. of Applied Probability. 1980. Vol. 17, no. 1. Pp. 84–93. DOI: [10.2307/3212926](https://doi.org/10.2307/3212926)
3. Haggan V., Ozaki T. Modelling nonlinear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model // Biometrika. 1981. Vol. 68, no. 1. Pp. 189–196. DOI: [10.1093/biomet/68.1.189](https://doi.org/10.1093/biomet/68.1.189)
4. Ozaki T. The statistical analysis of perturbed limit cycle processes using nonlinear time series models // J. of Time Series Analysis. 1982. Vol. 3, no. 1. Pp. 29–41. DOI: [10.1111/j.1467-9892.1982.tb00328.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1982.tb00328.x)
5. Goryainov A.V., Goryainov V.B., Khing W.M. Robust identification of an exponential autoregressive model // Herald of the Bauman Moscow State Technical Univ. Ser. Natural Sciences. 2020. No. 4. Pp. 42–57. DOI: [10.18698/1812-3368-2020-4-42-57](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-4-42-57)
6. Maronna R.A., Martin R.D., Yohai V.J., Salibián-Barrera M. Robust Statistics: Theory and Methods (with R). Hoboken: Wiley, 2019. 430 p.
7. Shi Z., Tamura Y., Ozaki T. Monitoring the stability of BWR oscillation by nonlinear time series modeling // Annals of Nuclear Energy. 2001. Vol. 28, no. 10. Pp. 953–966. DOI: [10.1016/S0306-4549\(00\)00099-2](https://doi.org/10.1016/S0306-4549(00)00099-2)
8. Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization // The Computer J. 1965. Vol. 7, no. 4. Pp. 308–313. DOI: [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308)
9. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с. [Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical optimization. L.; N.Y.: Academic Press, 1981. 401 p.]
10. Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions // SIAM J. of Optimisation. 1998. Vol. 9, no. 1. Pp. 112–147. DOI: [10.1137/S1052623496303470](https://doi.org/10.1137/S1052623496303470)
11. Дэннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: пер. с англ. М.: Мир, 1998. 440 с. [Dennis J.E. jr., Schnabel R.B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Englewood Cliffs, N.Y.: Prentice-Hall, 1983. 395 p.]
12. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 829 с.
13. Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н. Введение в методы оптимизации. М.: Финансы и статистика, 2011. 272 с.

14. Powell M.J.D. A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations // Watson G.A., ed. Numerical analysis. Springer, 1978. 203 p.. Pp. 144–157. DOI: [10.1007/BFb0067703](https://doi.org/10.1007/BFb0067703)
15. Goldberg D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning. N.-Y.: Addison-Wesley, 1989. 372 p.
16. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 446 с.



Comparison of Classical and Robust Estimates of Threshold Auto-regression Parameters

Goryainov V. B.^{1,*}, Khing W. M.¹

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*vb-goryainov@bmstu.ru

Keywords: exponential autoregression, M-estimate, optimization methods

Received: 14.07.2020.

The exponential auto-regression model is a discrete analog of the second-order nonlinear differential equations of the type of Duffing and van der Pol oscillators. It is used to describe nonlinear stochastic processes with discrete time, such as vehicle vibrations, ship roll, electrical signals in the cerebral cortex. When applying the model in practice, one of the important tasks is its identification, in particular, an estimate of the model parameters from observations of the stochastic process it described. A traditional technique to estimate autoregressive parameters is the nonlinear least squares method. Its disadvantage is high sensitivity to the measurement errors of the process observed. The M-estimate method largely has no such a drawback. The M-estimates are based on the minimization procedure of a non-convex function of several variables. The paper studies the effectiveness of several well-known minimization methods to find the M-estimates of the parameters of an exponential autoregressive model. The paper demonstrates that the sequential quadratic programming algorithm, the active set algorithm, and the interior-point algorithm have shown the best and approximately the same accuracy. The quasi-Newton algorithm is inferior to them in accuracy a little bit, but is not inferior in time. These algorithms had approximately the same speed and were one and a half times faster than the Nelder-Mead algorithm and 14 times faster than the genetic algorithm. The Nelder-Mead algorithm and the genetic algorithm have shown the worst accuracy. It was found that all the algorithms are sensitive to initial conditions. The estimate of parameters, on which the autoregressive equation linearly depends, is by an order of magnitude more accurate than that of the parameter on which the auto-regression equation depends in a nonlinear way.

References

1. Ozaki T., Oda H. Non-linear time series model identification by Akaike's information criterion. *IFAC Proc. Volumes*, 1977, vol. 10, no. 12, pp. 83–91. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)66563-7](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)66563-7)
2. Ozaki T. Non-linear time series models for non-linear random vibrations. *J. of Applied Probability*, 1980, vol. 17, no. 1, pp. 84–93. DOI: [10.2307/3212926](https://doi.org/10.2307/3212926)
3. Haggan V., Ozaki T. Modelling nonlinear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model. *Biometrika*, 1981, vol. 68, no. 1, pp. 189–196. DOI: [10.1093/biomet/68.1.189](https://doi.org/10.1093/biomet/68.1.189)
4. Ozaki T. The statistical analysis of perturbed limit cycle processes using nonlinear time series models. *J. of Time Series Analysis*, 1982, vol. 3, no. 1, pp. 29–41. DOI: [10.1111/j.1467-9892.1982.tb00328.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1982.tb00328.x)
5. Goryainov A.V., Goryainov V.B., Khing W.M. Robust identification of an exponential autoregressive model. *Herald of the Bauman Moscow State Technical Univ. Ser. Natural Sciences*, 2020, no. 4, pp. 42–57. DOI: [10.18698/1812-3368-2020-4-42-57](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-4-42-57)
6. Maronna R.A., Martin R.D., Yohai V.J., Salibián-Barrera M. *Robust Statistics: Theory and Methods (with R)*. Hoboken: Wiley, 2019. 430 p.
7. Shi Z., Tamura Y., Ozaki T. Monitoring the stability of BWR oscillation by nonlinear time series modeling. *Annals of Nuclear Energy*, 2001, vol. 28, no. 10, pp. 953–966. DOI: [10.1016/S0306-4549\(00\)00099-2](https://doi.org/10.1016/S0306-4549(00)00099-2)
8. Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization. *The Computer J.*, 1965, vol. 7, no. 4, pp. 308–313. DOI: [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308)
9. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. *Practical optimization*. L.; N.Y.: Academic Press, 1981. 401 p. (Russ. ed.: Gill P., Murray W., Wright M. *Prakticheskaja optimizatsija*. M.: Mir publ., 1985. 509 p.)
10. Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM J. of Optimisation*, 1998, vol. 9, no. 1, pp. 112–147. DOI: [10.1137/S1052623496303470](https://doi.org/10.1137/S1052623496303470)
11. Dennis J.E. jr., Schnabel R.B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Englewood Cliffs, N.Y.: Prentice-Hall, 1983. 395 p. (Russ. ed.: Dennis J. jr., Schnabel R. *Chislennyye metody bezuslovnoj optimizatsii i reshenija nelinejnyh uravnenij*. M.: Mir publ., 1998. 440 p.)
12. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Methods of optimization]. M.: Factorial Press publ., 2002. 829 p. (in Russian)
13. Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. *Vvedenie v metody optimizatsii* [Introduction in optimization methods]. M.: Finansy i statistika publ., 2011. 272 p. (in Russian)

14. Powell M.J.D. A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations. Watson G.A., ed. *Numerical analysis*. Springer, 1978. 203 p.. Pp. 144–157. DOI: [10.1007/BFb0067703](https://doi.org/10.1007/BFb0067703)
15. Goldberg D.E. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. N.-Y.: Addison-Wesley, 1989. 372 p.
16. Karpenko A.P. *Sovremennye algoritmy poiskovoj optimizatsii. Algoritmy, vdohnovlennye prirodoj* [Modern algorithms for search engine optimization. Algorithms inspired by nature]. M.: Bauman Moscow State Univ. publ., 2017. 446 p. (in Russian)