ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.925 Поступила в редакцию 20.10.2020
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-391-397 Received 20.10.2020

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИАГОНАЛЬНЫМ УСРЕДНЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ МАТРИЦЫ

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с почти периодической матрицей коэффициентов и управлением в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным. Предполагается, что коэффициент обратной связи является почти периодическим и модуль его частот, т. е. наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, включающая все показатели Фурье этого коэффициента, содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов. Ставится следующая задача: выбрать такое управление из допустимого множества, чтобы у замкнутой управлением системы появились почти периодические решения, спектр частот (множество показателей Фурье) которых содержит наперед заданное подмножество, а пересечение модулей частот решения и матрицы коэффициентов тривиально. Поставленная задача названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот. К настоящему времени она изучена только в весьма частном случае, когда среднее значение почти периодической матрицы коэффициентов системы является нулевым. В случае же ненулевого усреднения вопрос остается открытым. В работе получено достаточное условие, при выполнении которого задача управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с диагональным усреднением матрицы коэффициентов не имеет решения.

Ключевые слова: почти периодические линейные системы управления, диагональное среднее значение, показатели Фурье, сильно нерегулярные колебания, асинхронный спектр

Для цитирования. Деменчук А. К. Достаточное условие неразрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с диагональным усреднением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-391-397

Aleksandr K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE UNSOLVABILITY OF THE CONTROL PROBLEM OF THE ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR ALMOST PERIODIC SYSTEMS WITH THE DIAGONAL AVERAGING OF THE COEFFICIENT MATRIX

Abstract. We consider a linear control system with an almost periodic matrix of the coefficients. The control has the form of feedback that is linear on the phase variables. It is assumed that the feedback coefficient is almost periodic and its frequency modulus, i. e. the smallest additive group of real numbers, including all the Fourier exponents of this coefficient, is contained in the frequency modulus of the coefficient matrix. The following problem is formulated: choose a control from an admissible set for which the system closed by this control has almost periodic solutions with the frequency spectrum (a set of Fourier exponents) containing a predetermined subset, and the intersection of the frequency modules of solution and the coefficient matrix is trivial. The problem is called as the control problem of the spectrum of irregular oscillations (asynchronous spectrum) with the target set of frequencies. At present, this problem has been studied only in a very special case, when the average value of the almost periodic coefficients matrix of the system is zero. In the case of nontrivial averaging, the question remains open. In the paper, a sufficient condition is obtained under which the control problem of the asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with diagonal averaging of the coefficient matrix has no solution.

Keywords: almost periodic linear control systems, diagonal averaging, Fourier exponents, strongly irregular oscillations, asynchronous spectrum

For citation. Demenchuk A. K. A sufficient condition for the unsolvability of the control problem of the asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with the diagonal averaging of the coefficient matrix. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-391-397

Введение. Изучению различных вопросов теории управления для обыкновенных периодических дифференциальных систем посвящено достаточно большое число работ (см., напр., [1–3] и др.). Для почти периодических систем управления подобные исследования существенно усложняются. В этом направлении можно отметить результаты исследований [4–8], характерной особенностью которых является рассмотрение так называемого регулярного случая, когда априори предполагается совпадение частот самой системы и ее решений.

Вместе с тем, как показали Я. Курцвейль и О. Вейвода [9], система обыкновенных дифференциальных почти периодических уравнений может допускать такие решения, что пересечение частотных модулей решения и системы является тривиальным, т. е. никакая ненулевая частота решения не будет линейной комбинацией с рациональными коэффициентами частот системы. Этот результат позволяет предположить, что при наличии определенных воздействий у системы могут быть почти периодические решения с самым разнообразным спектром частот, в том числе и асинхронным.

В работе [10] впервые была сформулирована задача управления асинхронным спектром для периодических систем. Серия условий ее разрешимости приведена в монографии [11, гл. III]. Частично подобные вопросы для квазипериодических систем изучены в [12]. Задача управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем сформулирована в [13] и дан критерий ее разрешимости для случая, когда среднее значение матрицы коэффициентов является нулевым.

В настоящей статье исследуются вопросы разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем, у которых усреднение коэффициентной матрицы является ненулевым диагональным.

Предварительные сведения. Приведем необходимые для дальнейшего изложения понятия и факты из теории почти периодических (по Бору) функций [12, гл. 1, 2]. Пусть $f(t)$ – непрерывная на всей числовой оси вещественная функция.

Функция $f(t)$ называется почти периодической (по Бору), если для произвольного положительного ε множество ее ε-почти периодов является относительно плотным, т. е. существует такое положительное число l, зависящее от ε, что любой отрезок длины l вещественной оси содержит по меньшей мере один ε-почти период.

Среднее значение почти периодической функции $f(t)$ определяется равенством

$$\hat{f} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Модуль (частотный модуль) Mod (f) почти периодической функции $f(t)$ – это наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, содержащая все показатели Фурье (частоты) этой функции.

Пусть $g(t,x)$ – вектор-функция, почти периодическая по t равномерно относительно x из некоторого компактного множества. Как отмечено во введении, Я. Курцвейль и О. Вейвода доказали, что система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(t,x)$$

может иметь почти периодическое решение $x(t)$ такое, что пересечение частотных модулей решения и правой части тривиально, т. е.

$$\mathrm{Mod}\,(x)\cap\mathrm{Mod}\,(g)=\{0\}.$$

В дальнейшем такие почти периодические решения будем называть сильно нерегулярными.

Матрица $P(t)$ считается почти периодической, если все ее элементы скалярные почти периодические функции. Будем говорить, что некоторые столбцы матрицы $P(t)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, если их линейные комбинации с вещественными коэффициентами тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты нулевые. Через $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} P$ обозначим столбцовый ранг матрицы $P(t)$, т. е. наибольшее число ее линейно независимых над $\mathbb{R}$ столбцов. Аналогично вводится понятие $\operatorname{rank}_{\mathrm{row}} P$ строчного ранга. Если столбцовый ранг матрицы $P(t)$ меньше числа ее столбцов, то матрицу $P(t)$ будем называть матрицей неполного столбцового ранга. Отметим, что в общем случае, как показывает следующий пример, столбцовый и строчный ранги для нестационарных матриц могут не совпадать. Действительно, возьмем (2×2)-матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \sin t \\ \sqrt{2}\cos t & \sqrt{2}\cos t \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы имеем $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} Q = 1$, в то время как $\operatorname{rank}_{\mathrm{row}} Q = 2$. В дальнейшем нам понадобится следующая, вытекающая из [11, п. 2.3]

Л е м м а. *Пусть $P(t)$ – почти периодическая $(k \times m)$-матрица. Линейная функциональная система*

$$P(t)z = 0$$

имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение $z = z(t)$ тогда и только тогда, когда $P(t)$ – матрица неполного столбцового ранга, т. е. $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} P < m$.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную нестационарную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$ – вход, B – матрица при управлении – постоянная и имеет размерность n, $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $(n \times n)$-матрица с модулем частот $\operatorname{Mod}(A)$. Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной почти периодической $(n \times n)$-матрицей $U(t)$ (коэффициентом обратной связи), модуль частот которой содержится в модуле частот матрицы коэффициентов, т. е. $\operatorname{Mod}(U) \subseteq \operatorname{Mod}(A)$.

Требуется получить условия на правую часть системы (1) такие, чтобы при любом выборе коэффициента обратной связи из указанного допустимого множества замкнутая система

$$\dot{x} = \big(A(t) + BU(t)\big)x \tag{3}$$

не имела сильно нерегулярного почти периодического решения $x(t)$, спектр частот которого содержит заданное подмножество L (целевое множество). Иначе говоря, для системы (1) необходимо найти условия неразрешимости задачи управления асинхронным спектром.

Предположим, что матрица коэффициентов имеет диагональное среднее значение, т. е.

$$\hat{A} = \operatorname{diag}(\hat{a}_{11}, \ldots, \hat{a}_{nn}), \quad \hat{a}_{11}^2 + \ldots \hat{a}_{nn}^2 \neq 0. \tag{4}$$

Отметим, что в отличие от работы [13], в таком случае усреднение матрицы $A(t)$ не является тривиальным.

Основной результат. Предварительно заметим, что если матрица при управлении невырожденная, то решение поставленной задачи не вызывает серьезных затруднений. Справедлива

Т е о р е м а 1. *В случае* $\operatorname{rank} B = n$ *задача управления асинхронным спектром не имеет решений, если выполняется условие*

$$|L| > [n/2]. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом от противного. Пусть задача управления асинхронным спектром системы (1) разрешима. Тогда из [11, п. 2.2] вытекает, что существуют постоянная вещественная квадратная матрица H размерности n и почти периодическая функция $x(t)$, $\mathrm{Mod}\,(x) \cap \mathrm{Mod}\,(A) = \{0\}$, удовлетворяющие тождеству

$$\dot{x}(t) - Hx(t) \equiv 0,$$

при этом неосциллирующая составляющая коэффициента обратной связи в силу невырожденности матрицы при управлении определяется равенством

$$\hat{U} = B^{-1}\left(H - \mathrm{diag}\,(\hat{a}_{11}, ..., \hat{a}_{nn})\right).$$

В итоге получаем противоречие с исходным предположением, заключающееся в том, что почти периодическая функция $x(t)$, имеющая согласно оценке (5) больше чем $[n\ /\ 2]$ частот, является решением линейной n-мерной стационарной системы. Теорема доказана.

Далее рассмотрим случай, когда матрица при управлении является вырожденной, т. е.

$$\mathrm{rank}\, B = r \quad (1 \le r < n), \tag{6}$$

при этом первые ее $n - r = d$ строк нулевые. Обозначим $(r \times n)$-матрицу, составленную из остальных строк матрицы B, через $B_{r,n}$. Ранг матрицы $B_{r,n}$ также равен r.

С учетом представления (6) матрицы B, матрицу коэффициентов разобьем на четыре блока соответствующих размерностей, указанных нижними индексами:

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{d,d}^{(11)}(t) & A_{d,r}^{(12)}(t) \\ A_{r,d}^{(21)}(t) & A_{r,r}^{(22)}(t) \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание условие (4), среднее значение матрицы коэффициентов запишем в виде

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{d,d}^{(11)}(t) & 0 \\ 0 & \hat{A}_{r,r}^{(22)} \end{pmatrix},$$

при этом $\hat{A}_{d,d}^{(11)} = \mathrm{diag}\,(\hat{a}_{11}, ..., \hat{a}_{dd})$, $\quad \hat{A}_{r,r}^{(22)} = \mathrm{diag}\,(\hat{a}_{d+1d+1}, ..., \hat{a}_{nn})$. Тогда осциллирующая часть матрицы коэффициентов также представляется в следующей блочной форме:

$$\tilde{A}(t) = A(t) - \hat{A} = \begin{pmatrix} A_{d,d}^{(11)}(t) - \hat{A}_{d,d}^{(11)} & A_{d,r}^{(12)}(t) \\ A_{r,d}^{(21)}(t) & A_{r,r}^{(22)}(t) - \hat{A}_{r,r}^{(22)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t) & A_{d,r}^{(12)}(t) \\ A_{r,d}^{(21)}(t) & \tilde{A}_{r,r}^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в случае диагонального среднего значения (4) матрицы коэффициентов $A(t)$ левый нижний и правый верхний блоки ее осциллирующей части $\tilde{A}(t)$ являются соответствующими блоками самой матрицы, однако $\tilde{A}(t) \ne A(t)$. Обозначим через q столбцовый ранг прямоугольной $(d \times n)$-матрицы, составленной из блоков $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)$ и $A_{d,r}^{(12)}(t)$, т. е. $\mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}} \left(\tilde{A}_{d,d}^{(11)} \ A_{d,r}^{(12)}\right) = q$.

Имеет место

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия* (4)*,* (6) *и равенство*

$$q = n. \tag{7}$$

Тогда задача управления асинхронным спектром системы (1) *не имеет решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что задача управления асинхронным спектром системы (1) разрешима, т. е. найдется почти периодический коэффициент обратной связи $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U) \subseteq \mathrm{Mod}\,(A)$ такой, что замкнутая управлением (2) система (3) имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр которого содержит целевое множество ненулевых частот $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots\}$, $s \ge 1$.

Запишем коэффициент обратной связи, его среднее значение и осциллирующую часть соответственно в следующей блочной форме:

$$U(t) = \left(U_{n,d}(t) \quad U_{n,d}(t)\right), \ \ \hat{U} = \left(\hat{U}_{n,d} \quad \hat{U}_{n,d}\right), \ \ \tilde{U}(t) = \left(\tilde{U}_{n,d}(t) \quad \tilde{U}_{n,d}(t)\right).$$

Тогда в силу условия (6) система (3) примет вид

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_{d,d}^{(11)}(t) & A_{d,r}^{(12)}(t) \\ A_{r,d}^{(21)}(t) & A_{r,r}^{(22)} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n,d}(t) & U_{n,d}(t) \end{pmatrix} x$$

или

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_{d,d}^{(11)}(t) & A_{d,r}^{(12)}(t) \\ A_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n}U_{n,d}(t) & A_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}U_{n,d}(t) \end{pmatrix} x.$$

Для вектора x выполним разбиение

$$x = \mathrm{col}\left(x^{[d]}, x_{[r]}\right), \quad x^{[d]} = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_d), \quad x_{[r]} = \mathrm{col}(x_{d+1}, \ldots, x_n),$$

что позволит записать последнюю систему более подробно:

$$\begin{aligned} &\dot{x}^{[d]} = A_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]} + A_{d,r}^{(12)}(t)x_{[r]}, \\ &\dot{x}_{[r]} = \left(A_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n}U_{n,d}(t)\right)x^{[d]} + \left(A_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}U_{n,d}(t)\right)x_{[r]}. \end{aligned}$$

Согласно сделанному предположению, эта система имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение

$$x(t) = \mathrm{col}\left(x^{[d]}(t), x_{[r]}(t)\right).$$

Вследствие [11, теорема 2.2] векторы $x^{[d]}(t)$, $x_{[r]}(t)$ удовлетворяют также системе, состоящей из четырех подсистем:

$$\begin{aligned} &\dot{x}^{[d]} = \hat{A}_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]} + \hat{A}_{d,r}^{(12)}(t)x_{[r]}, \\ &\dot{x}_{[r]} = \left(\hat{A}_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n}\hat{U}_{n,d}(t)\right)x^{[d]} + \left(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}\hat{U}_{n,d}(t)\right)x_{[r]}, \\ &\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]} + \tilde{A}_{d,r}^{(12)}(t)x_{[r]} = 0, \\ &\left(\tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,d}(t)\right)x^{[d]} + \left(\tilde{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}\tilde{U}_{n,d}(t)\right)x_{[r]} = 0. \end{aligned}$$

В силу условия (4), наложенного на среднее значение матрицы коэффициентов, полученная система примет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}^{[d]} = \hat{A}_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]}, \\ &\dot{x}_{[r]} = B_{r,n}\hat{U}_{n,d}(t)x^{[d]} + \left(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}\hat{U}_{n,d}(t)\right)x_{[r]}, \\ &\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]} + A_{d,r}^{(12)}(t)x_{[r]} = 0, \\ &\left(A_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,d}(t)\right)x^{[d]} + \left(\tilde{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}\tilde{U}_{n,d}(t)\right)x_{[r]} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Из третьей подсистемы системы (8) следует, что имеет место тождество

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t) & A_{d,r}^{(12)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{[d]}(t) \\ x_{[r]}(t) \end{pmatrix} \equiv 0. \tag{9}$$

Так как имеет место включение модулей

$$\mathrm{Mod}\left(\tilde{A}_{d,d}^{(11)}\right) \subseteq \mathrm{Mod}\,(\mathrm{A}), \quad \mathrm{Mod}\left(A_{d,r}^{(12)}\right) \subseteq \mathrm{Mod}\,(\mathrm{A}),$$

то частотный модуль матрицы коэффициентов тождества (9) также содержится в модуле частот матрицы коэффициентов системы (1), т. е.

$$\mathrm{Mod}\left(\tilde{A}_{d,d}^{(11)}\ A_{d,r}^{(12)}\right) \subseteq \mathrm{Mod}\,(\mathrm{A}).$$

Тогда, поскольку выполняется условие $\mathrm{Mod}\,(x) \cap \mathrm{Mod}\,(A) = \{0\}$, то частотные модули матрицы коэффициентов тождества (9) и почти периодического вектора $\mathrm{col}\left(x^{[d]}(t), x_{[r]}(t)\right)$ также допускают только тривиальное пересечение, т. е.

$$\mathrm{Mod}\left(\tilde{A}_{d,d}^{(11)}\ A_{d,r}^{(12)}\right) \cap \mathrm{Mod}\,(x) = \{0\}.$$

Это значит, что почти периодический вектор $\mathrm{col}\left(x^{[d]}(t), x_{[r]}(t)\right)$ является сильно нерегулярным решением третьей подсистемы из (8). Поэтому, согласно лемме, матрица коэффициентов этой подсистемы должна иметь неполный столбцовый ранг, что вступает в противоречие с условием (7) теоремы.

Следовательно, исходное допущение неверно и задача управления асинхронным спектром системы (1) не имеет решений. Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условия* (4) *для* $n = 2$ *и* $r = 1$ *задача управления асинхронным спектром системы* (1) *неразрешима.*

Доказательство. Действительно, в таком случае усреднение матрицы коэффициентов замкнутой управлением (2) системы (3) будет вещественным нижнетреугольным, вследствие чего эта система согласно [14, с. 37] не может иметь сильно нерегулярных почти периодических решений, отличных от стационарных.

Выводы. Необходимым условием разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с диагональным средним значением матрицы коэффициентов является неполнота столбцового ранга прямоугольной матрицы, построенной из блоков осцилирующей части матрицы коэффициентов.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных иследований, проект № Ф20Р-005 «Задачи управления по первому приближению для нестационарных систем в условиях неопределенности».

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of grant no. Ф20Р-005 “Control problems on the first approximation for non-stationary systems under uncertainty” of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research.

Список использованных источников

1. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

2. Зубов, В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

3. Тонков, Е. Л. Линейная задача оптимального управления периодическими решениями / Е. Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 6. – С. 1007–1011.

4. Иванов, А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями / А. Г. Иванов // Приклад. математика и механика. – 1992. – Т. 56, вып. 5. – С. 837–846.

5. Гайшун, И. В. Введение в теорию нестационарных линейных систем / И. В. Гайшун. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1999. – 408 с.

6. Иванов, А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I / А. Г. Иванов // Изв. Ин-та математики и информатики Удм. гос. ун-та. – 2002. – Вып. 1. – С. 3–100.

7. Попова, С. Н. Управление асимптотическими инвариантами систем с почти периодическими коэффициентами / С. Н. Попова // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 1–2.

8. Макаров, Е. К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.

9. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. мат. журн. – 1955. – Т. 5, № 3.– С. 362–370.

10. Папалекси, Н. Д. Об одном случае параметрически связанных систем / Н. Д. Папалекси // Изв. Акад. наук СССР. Сер. физ. – 1939. – Т. 1. – С. 373–379.

11. Деменчук, А. К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.

12. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных квазипериодических систем с тривиальным усреднением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2.– С. 281–283.

13. Левитан, Б. М. Почти периодические функции / Б. М. Левитан. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

14. Деменчук, А. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление / А. Деменчук. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012. – 186 с.

15. Деменчук, А. К. Необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с нулевым средним матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Вес. Нац. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 176–181. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-176-181

References

1. Krasovskii N. N. *The Theory of Control of Motion*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p. (in Russian).

2. Zubov V. I. *Lectures on control theory*. Moscow, Nauka Publ., 1975. 495 p. (in Russian).

3. Tonkov E. L. The linear problem on the optimal control of periodic solutions. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1976, vol. 12, no. 6, pp. 1007–1011 (in Russian).

4. Ivanov A. G. Optimal control of almost periodic motions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, vol. 56, no. 5, pp. 737–746. https://doi.org/10.1016/0021-8928(92)90059-h

5. Gaishun I. V. *Introduction to the theory of nonstationary linear systems*. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 1999. 408 p. (in Russian).

6. Ivanov A. G. Elements of the mathematical apparatus of problems of almost periodic optimization. I. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta = Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University,* 2002, iss. 1, pp. 3–100 (in Russian).

7. Popova S. N. Control of asymptotic invariants of systems with almost periodic coefficients. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki = The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2008, iss. 2, pp. 1–2 (in Russian).

8. Makarov E. K, Popova S. N. *Controllability of asymptotic invariants of nonstationary linear systems*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2012. 407 p. (in Russian).

9. Kurzweil J., Veivoda O. On periodic and almost periodic solutions of the ordinary differential systems. *Chekhoslovatskii matematicheskii zhurnal = Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian).

10. Papaleksi N. D. On one case of parametrically coupled systems. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical series*, 1939, vol. 1, pp. 373–379 (in Russian).

11. Demenchuk A. K. The control problem of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).

12. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear quasiperiodic systems with trivial averaging of the coefficient matrix. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 281–283 (in Russian).

13. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions.* Moscow, Gostekhizdat Publ., 1953. 396 p. (in Russian).

14. Demenchuk A. *Asynchronous Oscillations in Differential Systems. Conditions of Existence and Control*. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012. 186 p. (in Russian).

15. Demenchuk A. K. Necessary condition for solvability of the control problem of an asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with trivial averaging of the coefficient matrix. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 176–181 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-176-181

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Information about the author

Aleksandr K. Demenchuk – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Chief Researcher of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganova Str., Minsk, 220072, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by