



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Análisis de la propagación de una onda plana  
monocromática en un medio anisotrópico y ópticamente  
activo

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

José Eduardo León Leyva

Asesorado por

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez

Puebla Pue.  
19 de agosto de 2020





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Análisis de la propagación de una onda plana  
monocromática en un medio anisotrópico y ópticamente  
activo

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

José Eduardo León Leyva

Asesorado por

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez

Puebla Pue.  
19 de agosto de 2020



**Título:** Análisis de la propagación de una onda plana monocromática en un medio anisotrópico y ópticamente activo

**Estudiante:** JOSÉ EDUARDO LEÓN LEYVA

COMITÉ

---

Dr. Ignacio Robledo Sánchez  
Presidente

---

Dra. Rosibel Carrada Legaria  
Secretario

---

Dra. Areli Montes Perez  
Vocal

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Vocal

---

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez  
Asesor



*Existen dos formas de ver la vida: una es creyendo que nada es un milagro, la otra es creyendo que todo es un milagro.*  
- *Albert Einstein*





# Agradecimientos

Agradezco a mi mamá Isabel Leyva y a mi tía Isela por ser los pilares de la casa y permitirme con su apoyo a realizar mis estudios hasta estos momentos.

A mis tios el Ing. Juan Castellanos y M.Sc. Andrea Leyva por siempre creer en mi y ser mis guias y apoyo durante mucho tiempo así como impulsarme a concluir esta licenciatura con sus sabios consejos.

A mi abuela Lidia Devezé , C.P Efrain Leyva y Gabriela del Orbe asi como a mis primos Juanito,Luis Fer y Danny.

A una persona que lamentablemente se nos adelantó pero que sin duda fue uno de mis mejores amigos, quien siempre confió en mis aptitudes hasta los ultimos dias que estuvo con nosotros.

¡Gracias amigo Juan Carlos Castro Castro!

A la Directora de este trabajo de tesis a la Dra. Maria Del Rosario Pastrana Sánchez que sin su apoyo, dedicación y confianza este trabajo no hubiera sido posible. Y me gustaria finalizar agradeciendo al Dr. Gustavo Rodriguez Zurita quien me apoyó junto con mi asesora para poder obtener una beca para la realización del trabajo.

¡Muchas gracias a todos!



# Resumen

En el presente trabajo se estudia la propagación de una onda monocromática polarizada linealmente a través de un medio eléctricamente anisotrópico, obteniendo como resultado los vectores de desplazamiento eléctrico transversales a la dirección de propagación de la onda y que constituyen los modos normales que describen la propagación dentro del sistema y que forman el antecedente para entender y describir el fenómeno de actividad óptica que se presenta en medios ópticamente activos. Los cuales se caracterizan por tener moléculas quirales, podemos mencionar diversos ejemplos en donde podemos encontrar moléculas quirales, sin embargo, para este estudio se eligieron medios cristalinos, que presentan actividad óptica.

Debido a la importancia que tiene la actividad óptica en áreas de estudio como la química, biología y física, en este trabajo se realiza un estudio detallado de este fenómeno, basándonos en el modelo clásico que trata la actividad óptica como la interacción de dos osciladores armónicos acoplados que caen en planos separados dentro de la onda electromagnética.



# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Lista de figuras	VIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo general . . . . .	2
1.2. Objetivos específicos . . . . .	2
1.3. Contenido de la tesis . . . . .	2
<b>2. Teoría Electromagnética</b>	<b>1</b>
2.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	1
2.2. Ecuación de Onda . . . . .	3
2.2.1. Ondas Escalares . . . . .	4
2.3. Ondas Vectoriales . . . . .	7
2.3.1. Ondas Transversales . . . . .	7
2.3.2. Interdependencia de E y B . . . . .	7
2.4. Polarización . . . . .	10
2.4.1. Polarización lineal . . . . .	10
2.4.2. Polarización circular . . . . .	12
2.4.3. Polarización elíptica . . . . .	13
<b>3. Anisotropía</b>	<b>17</b>
3.1. Tensor Dieléctrico . . . . .	17
3.2. Propagación de una onda plana monocromática en un medio anisotrópico . . . . .	18
3.2.1. Consideraciones Geométricas . . . . .	18
3.2.2. Ecuación de onda: Eigenmodos . . . . .	19
3.2.3. Propagación a lo largo de direcciones arbitrarias. . . . .	22
3.3. Análisis de la polarización . . . . .	23
<b>4. Actividad Óptica</b>	<b>27</b>
4.1. Descripción teórica . . . . .	27
4.2. Materiales Ópticamente Activos . . . . .	31

4.2.1. Introducción al tensor $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ . . . . .	32
4.2.2. Dispersión temporal y espacial . . . . .	32
4.2.3. Tensor de impermeabilidad . . . . .	33
4.2.4. Tensor y Vector girotrópico . . . . .	34
4.3. Ondas planas monocromáticas en medios ópticamente activos . . . . .	36
<b>5. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>

# Índice de figuras

2.1.	Representación gráfica de una onda plana electromagnética. Tomemos en cuenta que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí e individualmente perpendiculares al vector de propagación $\vec{k}$ , están en fase y forman un sistema de coordenadas que siguen la regla de la mano derecha según las ecuaciones por (2.29) y (2.30). . . . .	9
2.2.	Superposición de ondas ortogonales, con desfases $\alpha_x/k$ y $\alpha_y/k$	11
2.3.	Campo linealmente polarizado y ángulo de inclinación de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ . . .	12
2.4.	Polarización circular. Giro izquierdo . . . . .	13
2.5.	Polarización circular. Giro derecho. . . . .	13
2.6.	Polarización elíptica: campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ . . . . .	14
3.1.	Orientación relativa de los vectores de campo, vectores de onda y vector de Poynting para un medio isotrópico (lado izquierdo) y medio anisotrópico (lado derecho) . . . . .	19
3.2.	Orientación relativa de $\vec{k}, \vec{D}$ y $\vec{E}$ al elegir $Z'$ a lo largo de la dirección de propagación $\vec{k}$ ( $D_{z'} = 0$ ). . . . .	24
3.3.	En esta figura, se ha dibujado la elipse resultante de la intersección del índice del elipsoide y el plano perpendicular al vector de onda $\vec{k}$ . Los ejes principales de la elipse determinan las direcciones de oscilación de los vectores $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$ , y las longitudes de sus semiejes determinan los valores $n_1$ y $n_2$ del índice de refracción correspondiente. . . . .	26
3.4.	Orientación relativa de los vectores $\vec{E}, \vec{D}, \vec{S}$ y $\vec{k}$ , para dos modos de propagación a lo largo de la dirección $\hat{k} = \vec{k}/k$ . Mientras que los vectores $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ son ortogonales, los vectores $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ no lo son. . . . .	26
4.1.	Vector de campo eléctrico de luz polarizada linealmente descompuesta en sus componentes polarizadas circularmente a la derecha e izquierda (izquierda), vector de campo eléctrico girado después de su paso a través de un medio ópticamente activo (centro) y polarización elíptica, especificada por el ángulo $\psi$ , descompuesta en componentes polarizados circularmente izquierda y derecha de diferente amplitud (Derecha). . . . .	30
4.2.	. . . . .	32





# Capítulo 1

## Introducción

La actividad óptica es tal vez una de las propiedades más conocidas pero menos comprendidas, aunque es tratada en muchos textos, rara vez, se explica más allá de que su comportamiento está relacionado con la birrefringencia circular y la falta de simetría tipo espejo [1]. El interés por los medios quirales se remonta a la antigüedad en campos de estudio como la química, biología y otros campos de investigación, como es la propagación de ondas electromagnéticas en medios cristalinos.

La actividad óptica puede explicarse comparando lo que le sucede a un haz de luz polarizada linealmente cuando pasa a través de una solución de moléculas aquirales, con lo que le ocurre cuando pasa por una solución de moléculas quirales. Casi todas las moléculas sean quirales o no quirales, son teóricamente capaces de producir una rotación al plano de la luz polarizada. La dirección y magnitud de la rotación producida por una molécula individual depende, en parte, de su orientación en el momento en que se encuentra el haz de luz.

Para cada encuentro con una determinada rotación habrá otro con una molécula que esté colocada en una orientación refleja (correspondiente a la imagen reflejada por un espejo), el resultado de todos estos encuentros será tal que las rotaciones producidas por las moléculas individuales se anulen (moléculas ópticamente inactivas).

Cuando un rayo de luz polarizada linealmente pasa a través de una solución ópticamente activa no hay ninguna molécula presente que pueda servir como orientación especular exacta de otra. Por lo tanto, no se presenta la anulación exacta de rotaciones y, se observa una rotación neta del plano de polarización.

La quiralidad en moléculas lleva a un gran número de interesantes estructuras, algunas muy simples y regulares (cristales) y otras de gran complejidad (sistemas biológicos).

En el campo óptico se ha desarrollado la propagación de una onda en cristales, sin embargo, existen muchos problemas en la óptica de cristales quirales, que aún no han sido resueltos, ya que las propiedades ópticas de tales medios están ligados dentro del marco de modelos homogéneos.

Los principales problemas se derivan de la asimetría intrínseca de estos medios y de la naturaleza no local de la actividad óptica, que están reflejadas en la gran cantidad de ecuaciones constitutivas usadas para describir medios ópticamente activos. Cual-

quier conjunto de ecuaciones constitutivas define un posible modelo macroscópico para estructuras periódicas reales. La relación entre los diferentes modelos ha sido discutida largamente en la literatura especializada, pero solamente en los últimos años ha sido más o menos bien esclarecida. [2]

## 1.1. Objetivo general

Estudiar y analizar el comportamiento del campo electromagnético en medios anisotrópicos e isotrópico, para comprender los fenómenos que se presentan en una sustancia ópticamente activa.

## 1.2. Objetivos específicos

- Realizar el desarrollo analítico de la propagación de la luz polarizada linealmente a través de un medio anisotrópico.
- Estudiar y explicar teóricamente la importancia que tiene el tensor dieléctrico en medios anisotrópicos y su relación con medios ópticamente activos.

## 1.3. Contenido de la tesis

El desarrollo del presente trabajo se estructura en 5 capítulos, en los cuales explican desde los conceptos fundamentales de la teoría electromagnética, hasta los desarrollos matemáticos para poder entender de manera mas clara el fenómeno de actividad óptica. Se muestra un índice general, índice de figuras, y las referencias bibliográficas que nos permitieron llegar a nuestros objetivos. Al final de este trabajo se muestran tres apéndices que nos van a permitir tener mayor claridad en las herramientas físico-matemáticas utilizadas en nuestros desarrollos.

**Capítulo 2:** Repasamos los conceptos básicos de la teoría electromagnética abordando inicialmente con las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas, las cuales son la base de este trabajo. Además se realiza una revisión de ondas y polarización de la luz.

**Capítulo 3:** En este capítulo estudiamos el tensor dieléctrico para describir la propagación de una onda plana monocromática dentro de un medio anisotrópico.

**Capítulo 4:** Se describe el fenómeno de actividad óptica, el cuál está relacionado con la derivadas espaciales del campo eléctrico, dando como resultado un término adicional en el tensor dieléctrico, de tal manera que la propagación una onda plana monocromática en un medio ópticamente activo puede ser descrito empleando los resultados del capítulo tres que están relacionados con los modos normales del sistema. **Conclusiones:** Se presentan las conclusiones de este trabajo.

## Capítulo 2

# Teoría Electromagnética

El electromagnetismo es una rama de la física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos. Ambos fenómenos se describen en una sola teoría, cuyos fundamentos fueron sentados, entre otros investigadores, por Michael Faraday y formulados por primera vez de modo completo por James Clerk Maxwell. La formulación consiste en cuatro ecuaciones diferenciales (o integrales) vectoriales que relacionan el campo eléctrico, el campo magnético y sus respectivas fuentes materiales (corriente eléctrica, polarización eléctrica y polarización magnética), conocidas como las ecuaciones de Maxwell.

### 2.1. Ecuaciones de Maxwell

Desde finales del siglo XVIII diversos científicos formularon leyes cuantitativas que relacionaban las interacciones entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y la inducción magnética  $\vec{B}$  y las corrientes sobre conductores. Entre estas leyes están la ley de Ampere, la ley de Faraday o la ley de Lenz, pero fue James Clerk Maxwell quien lograría unificar todas estas leyes en una descripción coherente del campo electromagnético. Para describir el efecto del campo  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  sobre objetos materiales fue necesario introducir el siguiente conjunto de vectores, densidad de corriente eléctrica ( $\vec{J}$ ) desplazamiento eléctrico ( $\vec{D}$ ) y vector de campo magnético ( $\vec{H}$ ).

	Forma Diferencial
Ley de Gauss para Campo Magnético	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Ley de Gauss para Campo Eléctrico	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$
Ley de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ley de Ampere-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Tabla 2.1: Ecuaciones de Maxwell

**CAPÍTULO 2. TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA**  
**2.1. ECUACIONES DE MAXWELL**

---

$\rho_{libre}$  : densidad volumétrica de carga libre,

$I_{conduc}$  : corriente de conducción.

La respuesta dinámica de los átomos y las moléculas en el medio de propagación es tomada en cuenta mediante las relaciones constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (2.1a)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.1b)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.1c)$$

donde las constantes  $\epsilon$  es la constante dieléctrica del material,  $\sigma$  es la conductividad,  $\mu$  me indica la permeabilidad, estas tres constantes contienen la descripción del material.

Frecuentemente se escribe  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  como ;

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (2.2)$$

donde  $\vec{P}$  es la polarización y  $\vec{M}$  la magnetización. Su formulación enfatiza que el campo interno de un material se debe no solo al campo aplicado, sino también a un campo creado por los átomos y moléculas que forman el material. Al manipular las ecuaciones de Maxwell, podemos obtener varias propiedades del campo electromagnético: como su naturaleza ondulatoria, el hecho de que es una onda transversal y la relación entre los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ .

Si la luz se está propagando en un medio que tiene las siguientes propiedades:

1. Uniforme:  $\epsilon$  y  $\mu$  tienen el mismo valor en cualquier punto.
2. Isotrópico:  $\epsilon$  y  $\mu$  no dependen de la dirección de propagación.
3.  $\sigma=0$ , entonces  $J=0$ .
4. Libre de cargas:  $\rho=0$
5. No dispersivo:  $\epsilon$  y  $\mu$  no están en función de la frecuencia o amplitud.

dicho medio se le llamará espacio libre. Por tanto, las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas se simplifican de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.3a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.3d)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.3e)$$

$$\epsilon \vec{E} = \vec{D}. \quad (2.3f)$$

## 2.2. Ecuación de Onda

Para encontrar cómo la onda electromagnética descrita por las relaciones anteriores (2.3) se propaga en el espacio libre, las ecuaciones de Maxwell deberán reorganizarse para mostrar explícitamente la dependencia temporal y espacial.

Iniciamos tomando el rotacional de la ecuación (2.3c) y eliminamos la dependencia del campo magnético para reescribir la ecuación de la siguiente manera

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}),$$

Utilizando las relaciones constitutivas (2.3e) y (2.3f), podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu (\nabla \times \vec{H}), \quad (2.4)$$

La suposición de que  $\mu$  es independientes del tiempo y tomando la relación (2.3f) permite que la ecuación sea reescrita de la siguiente manera;

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

usando la siguiente identidad vectorial;

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$$

la ecuación se reescribe como;

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

Como en el espacio está libre de carga entonces  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  por tanto;

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Realizando el mismo procedimiento lo obtenemos para el campo magnético;

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Estas son las ecuaciones del movimiento ondulatorio y sugieren la existencia de las ondas electromagnéticas propagándose con una velocidad:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (2.7)$$

Como en un material la velocidad de la luz es menor que  $c$ , entonces podemos caracterizar un material definiendo el índice de refracción, la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y su velocidad en un medio.

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (2.8)$$

### 2.2.1. Ondas Escalares

En un medio homogéneo libre de cargas y corrientes, cada componente rectangular  $V(r,t)$  de los vectores del campo satisfacen de acuerdo a las ecuaciones (2.3) y (2.4), la ecuación de onda homogénea. [3]

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Ahora examinaremos brevemente la solución más simple de esta ecuación.

#### Ondas Planas

Una onda de luz se puede describir en un momento dado en un punto en el espacio por su frecuencia, amplitud, dirección de propagación, etc., pero eso no nos dice mucho acerca de la perturbación óptica existente en un área extendida del espacio. [5]

La onda plana es quizás el ejemplo más simple de una onda tridimensional. Existe en un momento dado, cuando todas las superficies en las que una perturbación tiene una fase constante forman un conjunto de planos, cada uno generalmente perpendicular a la dirección de propagación. Sea  $\vec{r} = (x,y,z)$  un vector de posición en el punto  $P$  en el espacio y  $\hat{s}$  un vector unitario fijo, cualquier solución de la ecuación (2.6) puede tomar la forma

$$V = V(\vec{r} \cdot \hat{s}, t). \quad (2.10)$$

Se dice que representa una onda plana debido a que en cada instante de tiempo,  $V$  es constante en cada uno de los planos, descritos por la ecuación

$$\vec{r} \cdot \hat{s} = \text{constante},$$

y, a la vez dichos planos son perpendiculares al vector unitario  $\hat{s}$ .

### Ondas Armónicas

En un punto  $r_0$  en el espacio, la perturbación de la onda solo estará en función del tiempo

$$V(r_0, t) = F(t) \tag{2.11}$$

El caso cuando  $F$  es periódico es de particular interés, por lo tanto consideramos el caso cuando  $F$  tiene la forma

$$F(t) = a \cos(\omega t + \delta) \tag{2.12}$$

donde  $a$  es conocida como la amplitud y el argumento  $(\omega t + \delta)$  de la función coseno se le conoce como la fase. La frecuencia representa el número de vibraciones por segundo y se puede expresar de la siguiente manera;

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \tag{2.13}$$

$\omega$  es conocida como la frecuencia angular que es el ángulo recorrido durante el giro por unidad de tiempo. Dado que  $F$  permanece sin cambios cuando  $t$  es reemplazada por  $(t+T)$  donde  $T$  es el período de las vibraciones. Las funciones de onda (es decir, las soluciones de la ecuación de onda) de la forma (2.11) se dice que son armónicas respecto del tiempo.

Primero vamos a considerar una función de onda la cual representa una onda armónica plana propagándose en una dirección específica de vector unitario  $\hat{s}$ . Reemplazando  $t$  por  $t - \vec{r} \cdot \hat{s}/v$  en (2.11):

$$V(\vec{r}, t) = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{s}}{v} \right) + \delta \right] \tag{2.14}$$

La ecuación (2.13) permanece sin cambios cuando  $\vec{r} \cdot \hat{s}$  es reemplazada por  $\vec{r} \cdot \hat{s} + \lambda$  donde

$$\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = vT. \tag{2.15}$$

El término  $\lambda$  es conocido como longitud de onda. También es útil definir una longitud de onda reducida  $\lambda_0$  como

$$\lambda_0 = cT = n\lambda \tag{2.16}$$

Esta es la longitud de onda que corresponde a una onda armónica con una misma frecuencia propagándose en el vacío. Es de suma importancia introducir el concepto de número de onda, el cual está definido como el número de longitudes onda en el vacío por unidad de longitud:

$$\kappa = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{v}{c}. \quad (2.17)$$

Por tanto también es conveniente definir los vectores  $\vec{k}_0$  y  $\vec{k}$  en la dirección de propagación  $\hat{s}$ , cuyas longitudes respectivamente son

$$k_0 = 2\pi\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}, \quad (2.18)$$

y

$$k = nk_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}. \quad (2.19)$$

El vector  $\vec{k}=k\hat{s}$  es conocido como el vector de onda o vector de propagación en el medio,  $\vec{k}_0=k_0\hat{s}$  siendo el vector correspondiente en el vacío.

El concepto de longitud de trayectoria  $l$ , el cuál está definido por

$$l = \frac{v}{\omega}\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n}\delta. \quad (2.20)$$

Consideremos ondas armónicas de forma más complicada. Una onda escalar general, real, armónica de frecuencia  $\omega$  se puede definir como una solución real de la ecuación de onda, de la forma

$$V(\vec{r}, t) = a(\vec{r})\cos[\omega t - g(\vec{r})], \quad (2.21)$$

$a(> 0)$  y siendo  $g$  funciones escalares de posición. Las superficies

$$g(\vec{r}) = \text{constante}$$

son llamadas superficies de onda. En contraste con el caso anterior, cuando las superficies de onda con amplitud constante no coinciden, en general, con las superficies de fase constante. Se dice que tal onda es inhomogénea. Los cálculos con ondas armónicas se simplifican mediante el uso de funciones exponenciales en lugar de trigonométricas, la ecuación (2.22) se puede escribir como

$$V(\vec{r}, t) = \Re[U(\vec{r})e^{-i\omega t}] \quad (2.22)$$

dónde

$$U(\vec{r}) = a(\vec{r})e^{ig(\vec{r})} \quad (2.23)$$

y  $\Re$  indica la parte real.

Sustituyendo (2.21) en la ecuación de onda se encuentra de que  $U$  debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0 \quad (2.24)$$

$U$  se le conoce como Amplitud compleja de la onda.

En particular, si la onda es plana, uno tiene que

$$g(\vec{r}) = \omega \left( \frac{\vec{r} \cdot \hat{s}}{v} \right) - \delta = k(\vec{r} \cdot \hat{s}) - \delta = \vec{k} \cdot \vec{r} - \delta$$



Si las operaciones en  $V$  son lineales, uno puede omitir el símbolo  $\Re$  y operar directamente con la función compleja, la parte real de la expresión final será la que represente la cantidad física en cuestión.

## 2.3. Ondas Vectoriales

### 2.3.1. Ondas Transversales

Robert Hooke en el siglo XVII, postuló que las ondas de luz podrían ser transversales pero esta idea fue olvidada posteriormente. Young y Fresnel tuvieron la misma idea en el siglo XIX y acompañaron su postulación con una descripción teórica de la luz basada en ondas transversales. Cuarenta años más tarde, Maxwell logró demostrar que la luz se comporta como una onda transversal. En este apartado se demostrará que la luz es una onda electromagnética transversal sustituyendo la solución de una onda plana en la ecuación de onda utilizando la ley de Gauss.

Sabemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (2.25)$$

Ahora se debe considerar la divergencia de la componente eléctrica de la onda plana por lo que examinaremos a detalle la divergencia en la componente  $x$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [E_{0x} e^{i(\omega t - k \cdot r + \phi)}] = i E_{0x} e^{i(\omega t - k \cdot r + \phi)} \frac{\partial}{\partial x} (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi).$$

Para la obtención de cada componente se desarrolla el mismo procedimiento y obtenemos resultados idénticos lo cual nos permite que la divergencia de  $\vec{E}$  pueda ser reescrita como un producto punto entre  $\vec{k}$  y  $\vec{E}$ . La ley de Gauss para el campo eléctrico establece que la divergencia de  $\vec{E}$  es cero, lo que para una onda plana puede ser escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.26)$$

si el producto punto entre dos vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{k}$  es cero, entonces los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{k}$  deben ser perpendiculares entre sí. De la misma forma este procedimiento se aplica para el campo magnético, introduciendo la solución de la ecuación de onda como una onda plana dentro de  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  esto produce que  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ , por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell requieren que la luz sea una onda transversal, es decir, que los desplazamientos vectoriales de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  sean perpendiculares a la dirección de propagación  $\vec{k}$ .

### 2.3.2. Interdependencia de $\vec{E}$ y $\vec{B}$

Si observamos detenidamente, los campos eléctrico y magnético no son independientes, como podemos ver en las soluciones de ondas planas de las ecuaciones de

Maxwell.

Primero, calculemos las derivadas parciales del campo  $\vec{B}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} = i\vec{B} \frac{\partial}{\partial t} (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) = i\omega \vec{B}, \quad (2.27)$$

de la misma forma lo aplicamos para  $\vec{E}$  por tanto

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}. \quad (2.28)$$

La expresión del rotacional de  $\vec{E}$  está compuesto de la siguiente forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Los términos que componen la componente x del rotacional son

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = E_{0z} \frac{\partial}{\partial y} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} = -ik_y E_z,$$

por tanto

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -ik_z E_y.$$

Por la evaluación en cada componente, encontramos que el rotacional de  $\vec{E}$  para una onda plana es

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E}, \quad (2.29)$$

similarmente se aplica para el campo  $\vec{B}$  por lo que tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\vec{k} \times \vec{B}. \quad (2.30)$$

Con estas operaciones vectoriales en una onda plana definida, podemos evaluar (2.2c). El lado izquierdo de

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

es remplazado por (2.27) y el lado derecho por (2.25) resultando en una ecuación que conecta el campo eléctrico y magnético

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B},$$

utilizando la relación entre  $k = \frac{\omega}{v}$  y la relación de la velocidad de onda en términos de las propiedades electromagnéticas del material (2.5), podemos escribir

$$\frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{k} \vec{k} \times \vec{E} = \vec{B}, \quad (2.31)$$

y la segunda relación entre los campos magnéticos y eléctricos puede generarse utilizando el mismo procedimiento, para escribirlo de la siguiente manera

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Para una onda plana

$$-i\vec{k} \times \vec{B} = i\epsilon\mu\omega \vec{E},$$

$$\frac{1}{k\sqrt{\mu\epsilon}} \vec{k} \times \vec{B} = -\vec{E}. \quad (2.32)$$

Por la definición del producto cruz vemos que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí, se encuentran en fase y forman un sistema de coordenadas siguiendo la regla de la mano derecha con la dirección de propagación de  $\vec{k}$ . ver la figura (2.2)

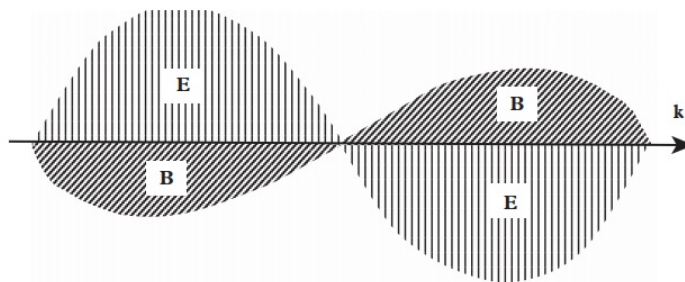


Figura 2.1: Representación gráfica de una onda plana electromagnética. Tomemos en cuenta que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí e individualmente perpendiculares al vector de propagación  $\vec{k}$ , están en fase y forman un sistema de coordenadas que siguen la regla de la mano derecha según las ecuaciones por (2.29) y (2.30).

Ahora, si solo nos interesan las magnitudes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  podemos escribir

$$n |\vec{E}| = c |\vec{B}|, \quad (2.33)$$

en el vacío se toma  $n=1$  de la relación (2.31), por tanto

$$|\vec{E}| = c |\vec{B}|, \quad (2.34)$$

para nuestra onda plana, la relación de las magnitudes entre los campos es

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (2.35)$$

## 2.4. Polarización

En los capítulos previos se ha visto que la luz puede ser considerada como una onda electromagnética transversal.

El desplazamiento de una onda transversal es una cantidad vectorial. Por lo tanto, debemos especificar no solo la frecuencia, la fase y la dirección de propagación de la onda, sino también la magnitud y la dirección del desplazamiento. La dirección del vector de desplazamiento es conocido como dirección de polarización y el plano que contiene la dirección de polarización y el vector de propagación es conocido como plano de polarización.

Por nuestro estudio de las ecuaciones de Maxwell, sabemos que  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , para una onda plana en el espacio libre, son mutuamente perpendiculares y se encuentran en un plano normal a la dirección de propagación,  $\vec{k}$ . También sabemos que, dado uno de los dos vectores, podemos usar (2.29) para obtener el otro. La convención requiere que usemos el vector eléctrico para etiquetar la dirección de la polarización de la onda electromagnética.

### 2.4.1. Polarización lineal

Considérese una vibración cosenoidal eléctrica propagándose en dirección  $\hat{k}$  con componentes transversales  $\vec{E}_x(z, t)$  y  $\vec{E}_y(z, t)$  que pueden representarse como [6]

$$\vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \alpha_x) \hat{i}, \quad (2.36)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \alpha_y) \hat{j}. \quad (2.37)$$

Teniendo que:  $\frac{\omega}{k} = v = \frac{c}{n}$ ,  $k = nk_0$ , con  $c = \frac{\omega}{k_0}$ . Siendo  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$  desfases.

En notación compleja

$$\vec{E}_x(z, t) = E_{0x} e^{-i(kz - \omega t + \alpha_x)} \hat{i}, \quad (2.38)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = E_{0y} e^{-i(kz - \omega t + \alpha_y)} \hat{j}, \quad (2.39)$$

Factorizando la dependencia espacial se obtiene,

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i} E_x e^{i\omega t}, \quad E_x(z) = E_{0x} e^{-i(kz + \alpha_x)}. \quad (2.40)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = \hat{j} E_y e^{i\omega t}, \quad E_y(z) = E_{0y} e^{-i(kz + \alpha_y)}. \quad (2.41)$$

Los correspondientes campos magnéticos pueden hallarse con la ley de inducción de Faraday  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , o su simplificación de onda plana  $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ .

El campo eléctrico

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t), \quad (2.42)$$

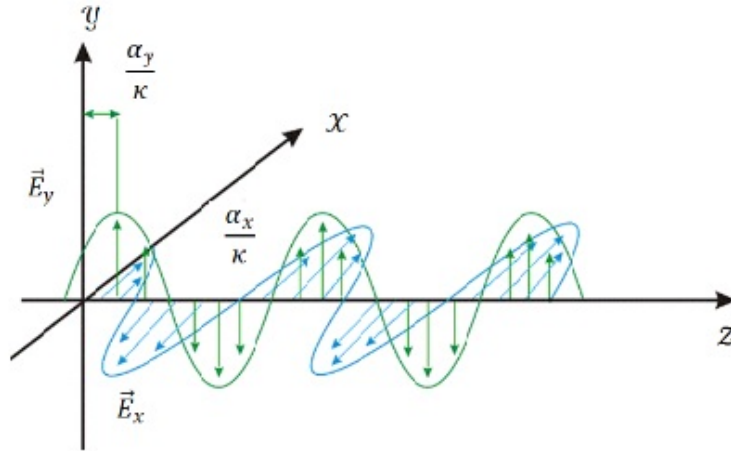


Figura 2.2: Superposición de ondas ortogonales, con desfases  $\alpha_x/k$  y  $\alpha_y/k$

Es una superposición de ondas colineales ( $\vec{k}_x = \vec{k}_y = k\hat{k}$ ) y ortogonales. En notación real se observa que,

$$\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} = \cos(kz - \omega t + \alpha_x) = \frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \quad (2.43)$$

cuando  $\alpha_x = \alpha_y$ ,

De modo que

$$\frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \tan\alpha_a = cte. \quad (2.44)$$

siendo  $\alpha_a$  el ángulo de inclinación del vector resultante, que tiene la característica de ser independiente de la posición y del tiempo. Esto significa que el campo total permanece en un sólo plano, inclinado ahora respecto al eje x por el ángulo  $\alpha_a$ . Cuando esto sucede, se dice que el campo está linealmente polarizado y resulta de la superposición de dos campos también linealmente polarizados, ortogonales colineales y en fase. El campo  $\vec{B}$  formaría un ángulo  $\alpha_a + \frac{\pi}{2}$  respecto al eje x, como se muestra en la siguiente figura.

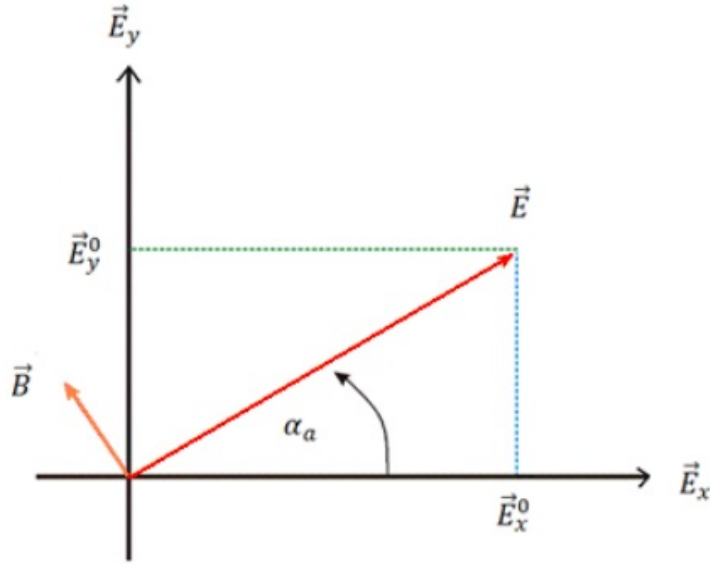


Figura 2.3: Campo linealmente polarizado y ángulo de inclinación de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$

### 2.4.2. Polarización circular

Otros casos importantes ocurren cuando  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  y  $\alpha_y = \alpha_x \pm \frac{\pi}{2}$ . Considerando las ecuaciones (2.40) y (2.41), puede escribirse para este caso

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \alpha_x) \hat{i} \quad (2.45)$$

y

$$E_y(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \alpha_x \pm \frac{\pi}{2}) \hat{j} = \mp E_0 \text{sen}(kz - \omega t + \alpha_x) \hat{j}, \quad (2.46)$$

siendo (-) para  $+\pi/2$  y (+) para  $-\pi/2$ . Los cocientes análogos al caso anterior son

$$\frac{E_x}{E_0} = \cos(kz - \omega t + \alpha_x), \quad (2.47a)$$

$$\frac{E_y}{E_0} = \text{sen}(kz - \omega t + \alpha_x), \quad (2.47b)$$

cocientes que difieren entre sí, revelando que el campo resultante  $\vec{E}$  no es linealmente polarizado. Pero atendiendo a las ecuaciones (2.47),

$$1 = \cos^2(kz - \omega t + \alpha_x) + \text{sen}^2(kz - \omega t + \alpha_x)$$

$$1 = \left(\frac{E_x}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2,$$

por lo cual, los campos cumplen con la ecuación de una circunferencia de radio  $E_0$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \quad (2.48)$$

las dos ecuaciones anteriores se identifican como las ecuaciones paramétricas de una circunferencia y el campo resultante traza un círculo. Si  $\alpha_y = \alpha_x + \pi/2$ , el giro es contrario a las manecillas del reloj, cuando el observador recibe a  $\vec{k}$ , mientras que si  $\alpha_y = \alpha_x - \pi/2$ , gira en sentido de las manecillas. El primer caso se conoce como giro izquierdo o levógiro y el segundo caso como giro derecho o dextrógiro. Si  $\alpha_x = 0$  y  $\alpha_y = +\pi/2$  se obtiene polarización circular izquierda, en otro caso, cuando  $\alpha_y = -\pi/2$  el estado de polarización resultante circular es derecha.

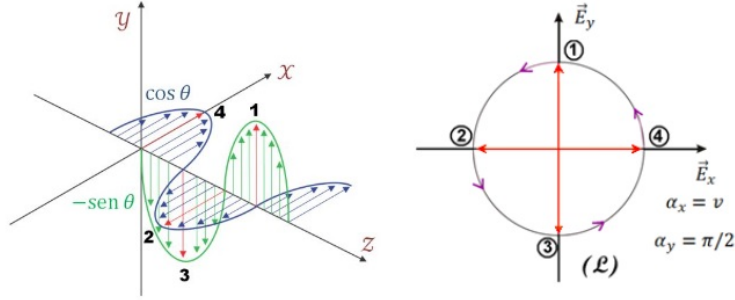


Figura 2.4: Polarización circular. Giro izquierdo

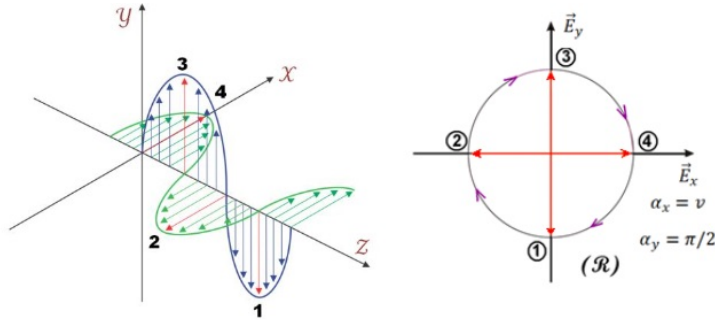


Figura 2.5: Polarización circular. Giro derecho.

### 2.4.3. Polarización elíptica

Considerando el caso general de superposición en notación real, de las ecuaciones (2.36) y (2.37)

$$\vec{E}_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \alpha_x) \hat{i} \quad (2.49)$$

$$\vec{E}_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \alpha_y) \hat{j} \quad (2.50)$$

si  $\Delta\alpha = \alpha_y - \alpha_x$ , entonces

$$\vec{E}_y = E_{0y} \hat{j} (\cos(kz - \omega t + \alpha_x) \cos\Delta\alpha - \text{sen}(kz - \omega t + \alpha_x) \text{sen}\Delta\alpha)$$

$$\vec{E}_y = E_{0y} \hat{j} (\cos(kz - \omega t + \alpha_x) \cos\Delta\alpha - [1 - \cos^2(kz - \omega t + \alpha_x)]^{1/2} \text{sen}\Delta\alpha)$$

$$\vec{E}_y = \hat{j} E_{0y} \left( \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \Delta\alpha - \left[ 1 - \left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 \right]^{1/2} \text{sen} \Delta\alpha \right). \quad (2.51)$$

Obteniendo,

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \Delta\alpha = - \left( 1 - \left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 \right)^{1/2} \text{sen} \Delta\alpha$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y tras reducir términos semejantes, resulta

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \Delta\alpha = \text{sen}^2 \Delta\alpha \quad (2.52)$$

ecuación que representa a una elipse centrada en el origen y rotada. Algunos casos particulares son los siguientes.

1.  $\Delta\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ , la ecuación (2.52) se reduce a

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 1 \quad (2.53)$$

que representa una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados, con caso particular al círculo, si  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ . La ecuación (2.53) corresponde a la polarización elíptica.

Tanto  $\vec{B}$  como  $\vec{E}$  trazan elipses en sentidos levógiro o dextrógiro.

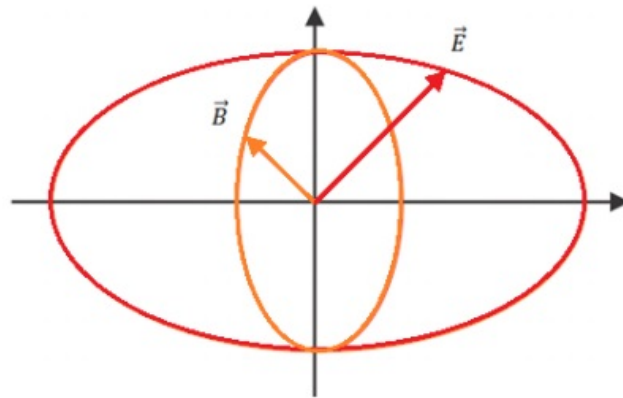


Figura 2.6: Polarización elíptica: campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$

2.  $\Delta\alpha = 0$ , la ecuación (2.52) se reduce a la igualdad ( $\text{sen} \Delta\alpha = 0, \cos \Delta\alpha = 1$ )

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} = \left( \frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0 \quad (2.54)$$



de donde

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \frac{E_y}{E_{0y}} = \tan\alpha_a \quad (2.55)$$

que es la ecuación correspondiente a la polarización lineal.

3.  $\Delta\alpha = \pi$ , la ecuación (2.52) se reduce a la igualdad ( $\text{sen}\Delta\alpha = 0, \text{cos}\Delta\alpha = -1$ )

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} + \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0 \quad (2.56)$$

de donde

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = -\tan\alpha_a$$

que también es un caso de polarización lineal.



## Capítulo 3

# Anisotropía

En el tratamiento con cristales se deberá generalizar las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones constitutivas para tomar en cuenta la anisotropía, la cuál es la capacidad de tener propiedades con diferentes valores cuando se mide a lo largo de los ejes en diferentes direcciones.

### 3.1. Tensor Dieléctrico

En un medio isotrópico las ecuaciones de Maxwell están descritas en el cuadro 2.1 y las ecuaciones materiales como:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H},\end{aligned}$$

En la mayor parte del capítulo se considerará que el medio es homogéneo, no conductor ( $\sigma=0$ ) y magneticamente isotrópico, pero permitiremos la anisotropía eléctrica, es decir, consideraremos sustancias cuyas excitaciones eléctricas dependen de la dirección del campo eléctrico. [3]

En general, el vector  $\vec{D}$  no estará en la dirección del vector  $\vec{E}$ .

En lugar de la relación  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , consideramos que la relación entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  tienen la forma más simple la cual toma en cuenta el comportamiento anisotrópico, de manera que cada componente de  $\vec{D}$  está linealmente relacionada con las componentes de  $\vec{E}$ ,

$$D_x = \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z, \quad (3.1a)$$

$$D_y = \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z, \quad (3.1b)$$

$$D_z = \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z. \quad (3.1c)$$

Las nueve cantidades  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy} \dots$  son constantes del medio, y constituyen el tensor dieléctrico; el vector  $\vec{D}$  es el producto de este tensor con  $\vec{E}$ .

$$D_k = \sum \epsilon_{kl}E_l \implies D_k = \epsilon_{kl}E_l, \quad \text{donde } k = x, y, z; \quad l = x, y, z$$

El signo de sumatoria será omitido en la notación tensorial formal. La ocurrencia del índice  $l$  en dos lugares en el producto será entendido como una instrucción para sumar sobre todas las  $l$ 's.

Sin embargo, se retendrá el signo de sumatoria y esto ayudará a evitar ambigüedades.

### 3.2. Propagación de una onda plana monocromática en un medio anisotrópico

La variación temporal y espacial de un campo monocromático con frecuencia angular  $\omega$ ,

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega(r)e^{-i\omega t},$$

está descrita por la ecuación de onda.

Aplicando  $\nabla \times$  en (2.3c) y tomando en cuenta (2.3d) y (2.8).

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}_\omega) - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}_\omega = 0 \quad (3.2)$$

El principio de superposición lineal es válido para las componentes monocromáticas de campos arbitrarios. Un caso particular es el de un medio isotrópico que satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{E}_\omega + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}_\omega = 0 \quad (3.3)$$

#### 3.2.1. Consideraciones Geométricas

En esta sección consideraremos una onda plana monocromática en un material anisotrópico.

Primero analizaremos las orientaciones relativas de los vectores de onda. Podemos representar el campo eléctrico y el campo magnético en notación compleja de la siguiente manera

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.4a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.4b)$$

después de sustituir las ecuaciones (3.4) dentro de las ecuaciones de Maxwell (2.3c) y (2.3d), obtenemos

$$\mu_0 \omega \vec{H} = \vec{k} \times \vec{E}, \quad (3.5a)$$

$$\omega \vec{D} = -\vec{k} \times \vec{H} \quad (3.5b)$$

Las relaciones de ortogonalidad (3.5) junto con la expresión del vector de Poynting que caracteriza el flujo de energía

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (3.6)$$

determina las direcciones relativas de todos los vectores involucrados. En el caso de un medio isotrópico forman una triada trirectangular  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ , debido a que  $\vec{E}$  es paralelo a  $\vec{D}$ , y  $\vec{S}$  es paralelo a  $\vec{k}$ . Sin embargo, en medios anisotrópicos, no hay vectores paralelos generales y forman dos triadas trirectangulares diferentes  $(\vec{H}, \vec{D}, \vec{k})$  y  $(\vec{H}, \vec{E}, \vec{S})$ . Además, como  $\vec{H}$  es perpendicular a todos los demás vectores, estos son vectores coplanares. El hecho de que  $\vec{S}$  y  $\vec{k}$  ya no sean paralelos implica que el frente de onda  $\vec{k}$  y la energía  $\vec{s}$  progresan en diferentes direcciones dentro del cristal. Estas direcciones forman el mismo ángulo que el formado por  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ . Además, solo los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$ , pero no  $\vec{E}$ , vibran en las superficies de fase (perpendicular a  $\vec{k}$ ). [7]

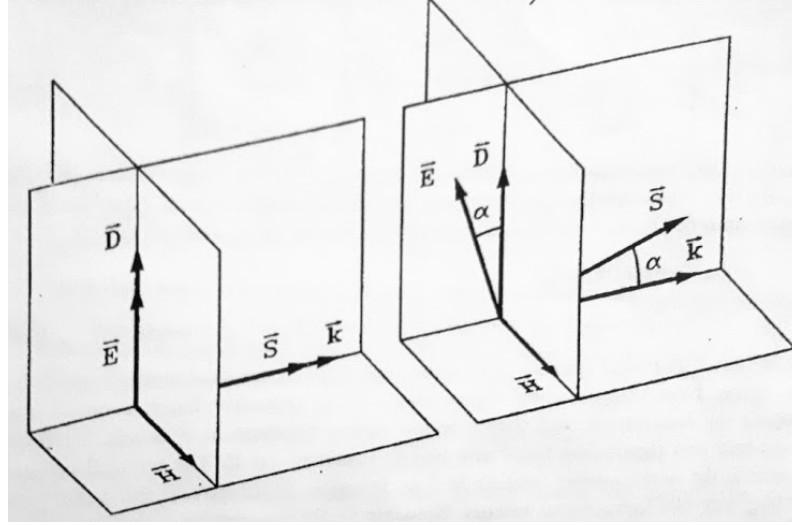


Figura 3.1: Orientación relativa de los vectores de campo, vectores de onda y vector de Poynting para un medio isotrópico (lado izquierdo) y medio anisotrópico (lado derecho)

### 3.2.2. Ecuación de onda: Eigenmodos

Ahora, para obtener la ecuación de onda para ondas planas monocromáticas, tomaremos de referencia nuestra expresión (3.5a) y procederemos a despejar  $\vec{H}$  para obtener la siguiente expresión

$$\vec{k} \times \vec{E} \left( \frac{1}{\omega\mu_0} \right) = \vec{H}, \quad (3.7)$$

reemplazando  $\vec{H}$  en (3.5b) y multiplicando ambos lados por (-1)

$$\vec{k} \times \left( \vec{k} \times \vec{E} \left( \frac{1}{\omega\mu_0} \right) \right) = -\omega\vec{D}, \quad (3.8)$$

multiplicando ambos lados de nuestra ecuación por  $\omega\mu$  nuestra expresión se reduce a

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2\mu_0\vec{D}, \quad (3.9)$$

lo cuál si colocamos en funci desarrollando nuestra expresión de lado izquierdo y utilizando la propiedad del doble producto cruz

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{k}) = -\omega^2 \mu_0 \vec{D}, \quad (3.10)$$

por lo tanto nuestra expresión (3.10) queda de la siguiente manera

$$-\vec{E}k^2 + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \vec{D}, \quad (3.11)$$

si dividimos (3.11) entre  $k^2$  y utilizando nuestra relación constitutiva para  $\vec{D}$  nuestra ecuación queda de la siguiente manera

$$\frac{\vec{k}}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = \vec{E} - \frac{\omega^2}{k^2} \mu_0 \epsilon \vec{E}. \quad (3.12)$$

Cabe mencionar que nuestra relación constitutiva utilizada anteriormente  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  podemos generalizarla a lo largo de nuestras direcciones principales o nuestras constantes dieléctricas principales a lo que la expresión para la  $j$ -ésima dirección podria expresarse como [9]

$$D_j = \epsilon_j E_j. \quad (3.13)$$

Para realizar una interpretación física, se evaluarán las componentes de la ecuación vectorial a lo largo de las tres constantes dieléctricas principales, por lo tanto, la expresión (3.12) para la  $j$ -ésima componente se reduce de la siguiente manera

$$\frac{k_j}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = E_j - \frac{\omega^2}{k^2} \mu_0 \epsilon_j E_j, \quad (3.14)$$

tomando en cuenta que  $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} n^2$  y factorizando para  $E_j$  obtenemos

$$\frac{k_j}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = \left(1 - \frac{c^2 \mu_0 \epsilon_j}{n^2}\right) E_j, \quad (3.15)$$

multiplicando ambos lados por la  $j$ -ésima componente de  $\vec{k}$

$$\frac{k_j^2}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = \left(1 - \frac{c^2 \mu_0 \epsilon_j}{n^2}\right) E_j k_j, \quad (3.16)$$

despejando  $E_j k_j$  nuestra expresión se reduce a

$$E_j k_j = \frac{k_j^2}{k^2 \left(1 - \frac{c^2 \mu_0 \epsilon_j}{n^2}\right)} (\vec{k} \cdot \vec{E}), \quad (3.17)$$

si realizamos la suma sobre las 3 componentes a lo largo de los ejes principales

$$\left[ \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{k^2 \left(1 - \frac{c^2 \mu_0 \epsilon_j}{n^2}\right)} \right] (\vec{k} \cdot \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E}), \quad (3.18)$$

por lo tanto, considerando  $(\vec{k} \cdot \vec{E}) \neq 0$  y haciendo que  $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$  nuestra sumatoria se reduce a

$$\left[ \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{k^2 \left(1 - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0 n^2}\right)} \right] = 1. \quad (3.19)$$

Ahora, si multiplicando ambos lados de nuestra expresión (3.19) por  $1/n^2$  obtenemos

$$\left[ \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{k^2 \left(n^2 - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}\right)} \right] = \frac{1}{n^2}. \quad (3.20)$$

Procederemos a definir los índices de refracción principales mediante la siguiente expresión

$$n_j^2 = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0},$$

reescribiendo la ecuación (3.20) y aplicando la definición anterior podemos reescribir nuestra expresión como

$$\left[ \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{k^2(n^2 - n_j^2)} = \frac{1}{n^2} \right]. \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es conocida como la **La ecuación de Fresnel** y nos permite el cálculo para los índices de refracción en una dirección arbitraria.

Desarrollando la sumatoria de la expresión (3.21) obtenemos

$$\frac{k_1^2}{(n^2 - n_1^2)} + \frac{k_2^2}{(n^2 - n_2^2)} + \frac{k_3^2}{(n^2 - n_3^2)} = \frac{k^2}{n^2}. \quad (3.22)$$

Después de desarrollar la expresión (3.22), la ecuación característica proporciona los valores propios  $(n^2)$ , los cual se escribe de la siguiente forma;

$$\begin{aligned} & n^4[n_1^2 k_1^2 + n_2^2 k_2^2 + n_3^2 k_3^2] \\ & -n^2[k_1^2 n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) + k_2^2 n_2^2 (n_1^2 + n_3^2) + k_3^2 n_3^2 (n_1^2 + n_2^2)] \\ & + k^2 n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Hay que tener cuenta que los términos de sexto grado en el índice de refracción  $n$  desaparecen al desarrollar la expresión (3.22), y solo queda la ecuación de segundo grado en  $(n^2)$ , por lo tanto, solo hay dos valores propios para  $(n^2)$  y dos vectores propios para  $\vec{E}$ .

El origen físico de este resultado es la relación de ortogonalidad  $\vec{D} \perp \hat{n}$ . Hace que  $\vec{D}$  oscile en el plano de fase, permitiendo solo dos vectores independientes. La ecuación de Fresnel (3.22) predice la ocurrencia de dos ondas de luz que viajan a diferentes velocidades  $(v_{f1}, v_{f2})$  con diferentes polarizaciones  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$ . (La indeterminación en el signo de los valores  $n$  y  $v_f$  asociados a un valor propio dado  $n^2$ , se elimina por la dirección  $\hat{k}$  impuesta por la onda incidente)

---

### 3.2.3. Propagación a lo largo de direcciones arbitrarias.

Para obtener los valores propios explícitamente para cualquier dirección de propagación arbitraria, escribamos la ecuación de Fresnel (3.22) en la forma abreviada

$$An^4 - Bn^2 + c = 0, \quad (3.23)$$

donde los coeficientes A, B y C se deducen fácilmente de la ecuación de Fresnel. Entonces, los dos valores propios asociados a una dirección dada son

$$n_{1,2}^2 = \frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (3.24)$$

Esta expresión también proporciona la dispersión material  $n = n(\omega)$  a través de las constantes dieléctricas  $\epsilon_i(\omega)$  ( $i = x, y, z$ ).

Ahora, si deseamos obtener los dos eigenvectores correspondientes, entonces, tomando la ecuación 3.12 y multiplicando ambos lados por  $\frac{k^2}{\mu_0\omega^2}$  obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{k^2}{\mu_0\omega^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = \frac{k^2 \vec{E}}{\mu_0\omega^2} - \tilde{\epsilon} \vec{E}, \quad (3.25)$$

tomando nuestras direcciones principales podemos reescribir de la siguiente manera

$$\frac{k_i^2}{\mu_0\omega^2} cte = \frac{k^2 \vec{E}_i}{\mu_0\omega^2} - \epsilon_i \epsilon_0 E_i. \quad (3.26)$$

Ahora si factorizamos de lado derecho  $E_i$  y además dividimos ambos lados por  $\epsilon_0$  obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{k_i^2}{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2} cte = \left[ \frac{k^2}{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2} - \epsilon_i \right] E_i \quad (3.27)$$

Despejando  $E_i$

$$E_i = cte \left( \frac{\frac{c^2}{\omega^2} k_i}{\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \epsilon_i} \right), \quad (3.28)$$

por tanto, si reescribimos nuestras relaciones anteriores podemos obtener la siguiente expresión

$$E_i = cte \left[ \frac{k_i}{n^2 - \epsilon_i} \right], \quad (3.29)$$

por tanto nuestros eigenvectores para direcciones arbitrarias son:

$$E_1 = cte \begin{bmatrix} \frac{k_x}{n_1^2 - \epsilon_x} \\ \frac{k_y}{n_1^2 - \epsilon_y} \\ \frac{k_z}{n_1^2 - \epsilon_z} \end{bmatrix}, \quad (3.30a)$$

$$E_2 = cte \begin{bmatrix} \frac{k_x}{n_2^2 - \epsilon_x} \\ \frac{k_y}{n_2^2 - \epsilon_y} \\ \frac{k_z}{n_2^2 - \epsilon_z} \end{bmatrix}. \quad (3.30b)$$



Estos dos vectores (Ec. 3.30a y 3.30b) determinan las direcciones de oscilación o polarización asociadas con cada modo de propagación. Como son vectores reales, la polarización plana o lineal se encuentra en ambos modos y, en general, no son ortogonales entre sí.

La ecuación de Fresnel se puede representar mediante una superficie tridimensional en  $n$  espacio (espacio de momento, ya que  $n = k/k_0$ ). Esta superficie se conoce como la superficie normal y depende particularmente del material, es decir, de los valores principales  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ .

### 3.3. Análisis de la polarización

La polarización de las dos ondas propagándose en un medio anisotrópico es determinada por los vectores  $E_1$  y  $E_2$  de la expresión (3.30). Para un medio transparente ambos vectores son las dos ondas reales que están linealmente polarizadas, sin embargo, es conveniente trabajar con el vector de desplazamiento  $\vec{D}$  en lugar de  $\vec{E}$ , debido a que  $\vec{D}$  es perpendicular a  $\vec{k}$ .

Partiendo de la ecuación 3.11 podemos obtener  $\vec{D}$  despejándole de dicha expresión, por tanto obtenemos

$$\vec{D} = -\frac{1}{\omega^2 \mu_0} \left[ -\vec{E}k^2 + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) \right],$$

factorizando  $k^2$  en el segundo miembro de la igualdad, obtenemos

$$\vec{D} = \left( \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0} \right) \left( \vec{E} - \frac{\vec{k}}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) \right),$$

finalmente podemos obtener que

$$\vec{D} = (n^2 \epsilon_0) \left[ \vec{E} - \hat{k}(\hat{k} \cdot \vec{E}) \right], \quad (3.31)$$

donde se han utilizado las relaciones  $(k^2/\omega^2 \mu_0 = n^2 \epsilon_0)$  y  $\vec{k}/k = \hat{k}$ .

En un sistema de ejes  $(X', Y', Z')$  tal que  $\vec{Z}'$  sea paralelo a  $\vec{k}$ , la componente  $D_{z'}$  desaparece y el problema se simplifica a dos dimensiones,  $D_{x'}$  y  $D_{y'}$ . Entonces  $\hat{k} = \hat{k}_{z'} = (0, 0, 1)$  y la ecuación (3.31) puede ser escrita como,

$$D_{i'} = n^2 \epsilon_0 E_{i'}, \quad (3.32a)$$

$$\vec{D} = n^2 \epsilon_0 \vec{E}_\perp. \quad (3.32b)$$

donde  $\vec{E}_\perp$  es la proyección de  $\vec{E}$  en el plano  $X'Y'$ . Ahora se puede obtener la correspondiente ecuación para el plano  $X'Y'$ .

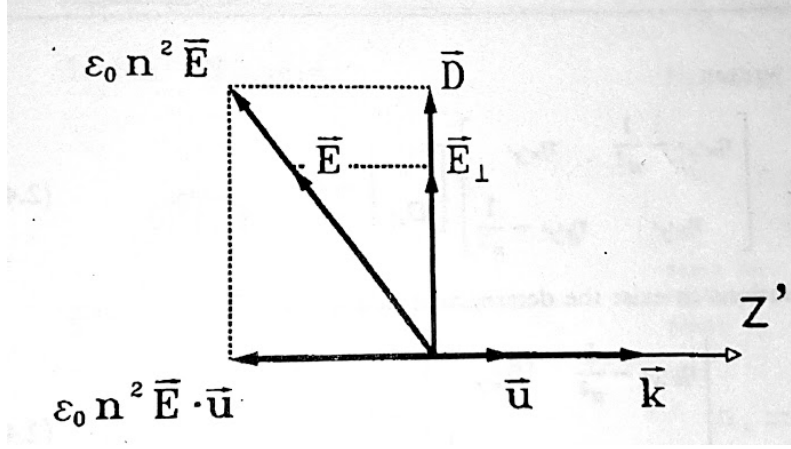


Figura 3.2: Orientación relativa de  $\vec{k}, \vec{D}$  y  $\vec{E}$  al elegir  $Z'$  a lo largo de la dirección de propagación  $\vec{k}$  ( $D_{z'} = 0$ ).

En medios anisotrópicos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  están relacionados por medio de la ecuación

$$\vec{E} = \left( \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon^{-1} \vec{D} \right), \quad (3.33)$$

donde  $\epsilon^{-1}$  es el inverso del tensor dieléctrico (Tensor de impermeabilidad) de manera que al sustituir esta expresión en la ecuación (3.32) y escribirla a lo largo de las direcciones  $X', Y'$ , se obtiene:

$$D_{i'} = n^2 \epsilon_0 E_{i'},$$

$$D_{i'} = n^2 \epsilon_0 \left[ \left( \frac{1}{\epsilon_0} \right) (\epsilon^{-1})_{i'j'} D_{j'} \right],$$

al multiplicar ambos lados por  $(1/n^2)$  y reacomodando términos, obtenemos

$$\left( \frac{1}{n^2} \right) D_{i'} = (\epsilon^{-1})_{i'j'} D_{j'}, \quad (3.34a)$$

$$\left[ (\epsilon^{-1})_{i'j'} - \left( \frac{1}{n^2} \right) \delta_{i'j'} \right] D_{j'} = 0. \quad (3.34b)$$

Introduciendo el tensor de impermeabilidad como

$$\eta_{i'j'} = \begin{bmatrix} (\epsilon^{-1})_{x'x'} & (\epsilon^{-1})_{x'y'} \\ (\epsilon^{-1})_{x'y'} & (\epsilon^{-1})_{y'y'} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

por tanto la ecuación (3.34) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \eta_{x'x'} - \frac{1}{n^2} & \eta_{x'y'} \\ \eta_{x'y'} & \eta_{y'y'} - \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{x'} \\ D_{y'} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.36)$$

Nuevamente para que existan soluciones no triviales el determinante de la matriz deberá desaparecer

$$\begin{bmatrix} \eta'_{x'x} - \frac{1}{n^2} & \eta_{x'y'} \\ \eta_{x'y'} & \eta_{y'y'} - \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.37)$$

resolviendo el determinante de la expresión (3.37)

$$\begin{aligned} \left( \eta'_{x'x} - \frac{1}{n^2} \right) \left( \eta_{y'y'} - \frac{1}{n^2} \right) - \eta_{x'y'}^2 &= 0, \\ \eta_{x'x'} \eta_{y'y'} - \frac{1}{n^2} (\eta_{x'x'} + \eta_{y'y'}) + \frac{1}{n^4} - \eta_{x'y'}^2 &= 0, \\ \frac{1}{n^4} - (\eta_{x'x'} + \eta_{y'y'}) \left( \frac{1}{n^2} \right) + (\eta_{x'x'} \eta_{y'y'} - \eta_{x'y'}^2) &= 0, \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variables para simplificar la expresión anterior con  $A = 1$ ,  $B = -(\eta_{x'x'} + \eta_{y'y'})$  y  $C = (\eta_{x'x'} \eta_{y'y'} - \eta_{x'y'}^2)$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$A \left( \frac{1}{n^2} \right)^2 + B \left( \frac{1}{n^2} \right) + C = 0. \quad (3.38)$$

De la ec. (3.38) obtenemos dos eigenvalores que son  $\left( \frac{1}{n_1^2} \right)$  y  $\left( \frac{1}{n_2^2} \right)$ , correspondiendo a los dos modos propagándose a lo largo de  $z'$ . La ecuación (3.36) proporciona dos eigenvectores asociados  $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$  y estos dos eigenvectores deberán ser ortogonales,  $\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0$ , debido a que el tensor  $n_{i'j'}$  es simétrico. El resultado descrito sólo permite usar la elipsoide de índices para encontrar gráficamente los dos índices de refracción y las dos direcciones correspondientes de  $\vec{D}$  asociadas a una dirección arbitraria  $\vec{k}$ , en el cristal.

Debido a que el tensor inverso  $(\epsilon^{-1})_{ij}$  está asociado con la elipsoide de índices, el tensor bidimensional  $n_{i'j'}$  en la ecuación (3.35) estará asociado con la elipse resultante de la intersección de la elipsoide de índices (Ver Apéndice A) y el plano perpendicular a  $\vec{k} \parallel z'$ . Una vez que el tensor es diagonalizado, los dos semiejes de la elipse son iguales en longitud a  $n_1$  y  $n_2$ , y las direcciones de los vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$  son paralelos a los ejes de la elipse.

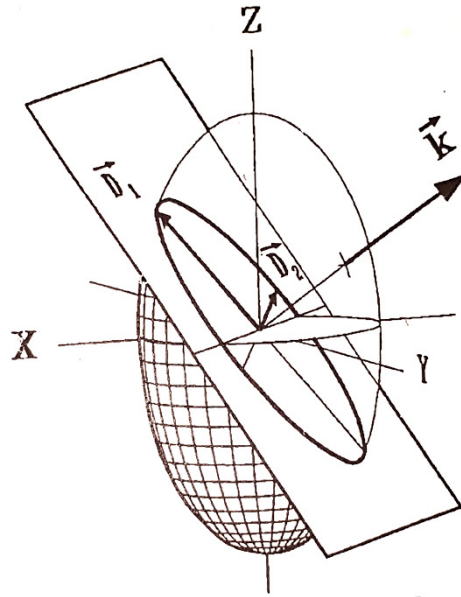


Figura 3.3: En esta figura, se ha dibujado la elipse resultante de la intersección del índice del elipsoide y el plano perpendicular al vector de onda  $\vec{k}$ . Los ejes principales de la elipse determinan las direcciones de oscilación de los vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$ , y las longitudes de sus semiejes determinan los valores  $n_1$  y  $n_2$  del índice de refracción correspondiente.

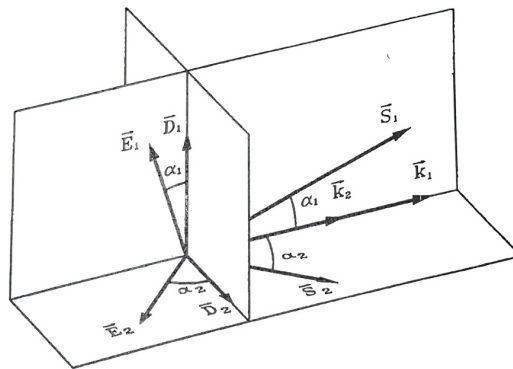


Figura 3.4: Orientación relativa de los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{S}$  y  $\vec{k}$ , para dos modos de propagación a lo largo de la dirección  $\hat{k} = \vec{k}/k$ . Mientras que los vectores  $\vec{D}_1$ ,  $\vec{D}_2$  son ortogonales, los vectores  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  no lo son.

## Capítulo 4

# Actividad Óptica

Alrededor de 1812, Jean-Baptiste Biot observó la rotación del plano de polarización de un haz de luz al atravesar un cristal de cuarzo cortado paralelamente a su eje óptico, también observó que ciertos compuestos orgánicos, ya sea en estado sólido, líquido, gaseoso o disueltos, rotaban el plano de polarización, independientemente de su estado de agregación. El azúcar es dextrógira tanto en forma cristalina como en disolución, sin embargo, el cuarzo fundido, no produce tal efecto. Biot llegó a la conclusión de que la rotación del plano de polarización de los compuestos orgánicos es una propiedad molecular, es decir son asimétricas, mientras que la rotación del cuarzo sería debido a ordenamientos asimétricos de moléculas simétricas. En lenguaje actual las moléculas asimétricas en el sentido de Biot se denominan quirales, y las asimétricas, aquirales.

Hoy sabemos que no existen moléculas ( $SiO_2$ ) ni en forma cristalina, ni en el cuarzo fundido, por lo que no puede ser quiral. Años después, John William Herschel describió la existencia de caras hemiédricas en los cristales de cuarzo, es decir, cristales en los que sólo aparecen la mitad de las caras para la máxima simetría que permite el sistema cristalino. Herschel descubrió que existen dos tipos de cristales hemiédricos, los que solo tienen caras hemiédricas izquierdas y los que solo tienen caras hemiédricas derechas, y que son imágenes especulares unos de otros. Herschel correlacionó la rotación óptica del plano de polarización con la hemiedría. Los cristales izquierdos eran levógiros y los derechos, dextrógiros. Esto supuso la primera confirmación independiente de la relación estructura molecular- actividad óptica propuesta por Biot.

Este capítulo ofrece una introducción a la actividad óptica con un enfoque especial en su descripción teórica, no se puede ofrecer una revisión completa del tema, pero se trata de ser lo suficientemente detallados como para lograr tener una comprensión básica de las características físicas de la actividad óptica.

### 4.1. Descripción teórica

La teoría de la actividad óptica desarrollada en esta sección se basa en una descripción de la interacción de la luz obteniendo los modos normales del sistema.

La actividad óptica se puede definir como la rotación de la polarización de una onda electromagnética polarizada linealmente a medida que pasa a través de una sustancia quiral. Este comportamiento se relaciona directamente con la birrefringencia circular, es decir, los diferentes índices de refracción para la radiación polarizada circularmente hacia la izquierda y hacia la derecha. Para una propagación en dirección  $z$ , los vectores de campo eléctrico pueden escribirse como

$$\vec{E}_{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\hat{i} \pm i\hat{j}) e^{-i\phi_{L,R}} \quad (4.1)$$

donde  $\phi_{L,R} = \omega t - k_{L,R}z$  y  $k = \frac{\omega}{c} n_{L,R}$ , donde igualmente  $n_{L,R}$  es el índice de refracción del medio para la polarización a izquierda y la polarización a derecha.[11]

Ahora, si superponemos dos ondas electromagnéticas polarizadas circularmente hacia la izquierda y hacia la derecha tendríamos un campo total de la siguiente forma

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} 2E_0 \hat{i} e^{-i\omega(t - \frac{nz}{c})}. \quad (4.2)$$

Dicho resultado nos representa luz polarizada linealmente del doble de la magnitud individual y que oscila en el plano a lo largo de la dirección del vector  $\hat{i}$ .

La quiralidad fué concepto introducido por Lord Kelvin para describir objetos geométricos que carecen de simetría de espejo, está presente en el mundo natural y da como resultado propiedades ópticas sensibles a la polarización (dicroísmo, birrefringencia) de los materiales.

Un medio quiral tiene diferentes índices de refracción para las componentes izquierda y derecha de la luz polarizada circularmente, por lo tanto, una de las componentes viaja más rápido que la otro causando una diferencia en sus fases. La superposición entre estas dos componentes dan como resultado

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ (\hat{i} + i\hat{j}) e^{-i\omega(t - \frac{n_L z}{c})} + (\hat{i} - i\hat{j}) e^{-i\omega(t - \frac{n_R z}{c})} \right], \quad (4.3)$$

donde podemos desarrollarlo de la siguiente manera:

Sea

$$\phi_L = t - \frac{n_L z}{c} \quad (4.4)$$

y

$$\phi_R = t - \frac{n_R z}{c}, \quad (4.5)$$

entonces

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\omega\phi_L} \\ ie^{-i\omega\phi_L} \end{bmatrix} + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\omega\phi_R} \\ -ie^{-i\omega\phi_R} \end{bmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\omega\phi_L} + e^{-i\omega\phi_R} \\ ie^{-i\omega\phi_L} - ie^{-i\omega\phi_R} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

factorizando

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{c} e^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}} \left( e^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}} + e^{-i\omega\phi_r+i\omega\frac{\phi_L}{2}} \right) \\ ie^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}} \left( e^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}} - e^{-i\omega\phi_R+i\omega\frac{\phi_L}{2}} \right) \end{array} \right] \quad (4.7)$$

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{c} e^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}-i\omega\frac{\phi_R}{2}} \left( e^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}+i\omega\frac{\phi_R}{2}} + e^{-i\omega\frac{\phi_R}{2}+i\omega\frac{\phi_L}{2}} \right) \\ ie^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}-i\omega\frac{\phi_R}{2}} \left( e^{-i\omega\frac{\phi_L}{2}+i\omega\frac{\phi_R}{2}} - e^{-i\omega\frac{\phi_R}{2}+i\omega\frac{\phi_L}{2}} \right) \end{array} \right] \quad (4.8)$$

Al llegar a este punto, podemos factorizar la parte exponencial de la siguiente manera  $\frac{-i\omega}{2}(\phi_L + \phi_R)$  y  $\frac{-i\omega}{2}(\phi_L - \phi_R)$ . Por tanto, utilizando las expresiones (4.4) y (4.5) además de las relaciones  $n = \frac{n_L+n_R}{2}$  y  $\Delta n = n_L - n_R$  obtenemos:

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-i\omega(t-\frac{z}{c}n)} \left[ \begin{array}{c} e^{\frac{i\omega}{2c}\Delta n z} + e^{\frac{-i\omega}{2c}\Delta n z} \\ ie^{\frac{i\omega}{2c}\Delta n z} - ie^{\frac{-i\omega}{2c}\Delta n z} \end{array} \right] \quad (4.9)$$

utilizando las relaciones de Euler para las funciones seno y coseno, obtenemos:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} 2E_0 \left[ \hat{i} \cos \left( \frac{z\omega\Delta n}{2c} \right) - \hat{j} \sen \left( \frac{z\omega\Delta n}{2c} \right) \right], \quad (4.10)$$

donde  $\Delta n$  es la diferencia entre los índices de refracción asociados a la rotación izquierda y derecha y  $n = \frac{n_L+n_R}{2}$  su promedio. Mientras pasa a través de un medio quiral, la radiación incidente permanece polarizada linealmente, pero su plano de polarización es girado por  $\alpha$  (ver figura 4.1 ). En resumen, se observa actividad óptica cuando el medio presenta birrefringencia circular.

$$\alpha = \frac{\omega}{2c} \Delta n. \quad (4.11)$$

El ángulo de rotación  $\alpha$  es proporcional a la diferencia de los índices de refracción. Para  $\alpha > 0$ , es decir,  $n_R < n_L$  la muestra es llamada Dextrógira y para  $\alpha < 0$ ,  $n_R > n_L$  Levógira.

Por tanto nuestra ecuación 4.10 se puede reescribir de la siguiente manera

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} (n_L - n_R), \quad (4.12)$$

la cuál es similar a la ecuación que Biot ajustó a su experimentos. Dado que la refracción y la absorción son fenómenos íntimamente relacionados, significa que un medio óptico activo no solo tiene que dispersar, sino que también absorbe la luz polarizada circular derecha e izquierda de manera diferente. La luz absorbida comienza

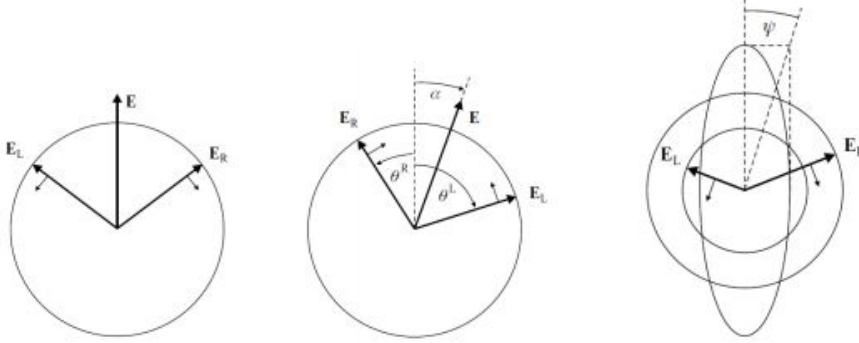


Figura 4.1: Vector de campo eléctrico de luz polarizada linealmente descompuesta en sus componentes polarizadas circularmente a la derecha e izquierda (izquierda), vector de campo eléctrico girado después de su paso a través de un medio ópticamente activo (centro) y polarización elíptica, especificada por el ángulo  $\psi$ , descompuesta en componentes polarizados circularmente izquierda y derecha de diferente amplitud (Derecha).

a tener una polarización de forma elíptica, la cuál está representada por luz polarizada circularmente hacia la izquierda y hacia la derecha con diferentes amplitudes, como se indica en la figura 4.1 (Derecha). Podemos introducir ahora el termino de elipticidad  $\psi$  el cual se puede obtener tomando la relación entre el eje mayor y el menor de la elipse, que son simplemente la diferencia y la suma de las amplitudes de las dos componentes circulares de la radiación incidente

$$\tan\psi = \frac{E_R - E_L}{E_R + E_L}, \quad (4.13)$$

si  $E_R$  es mayor que  $E_L$ , la elipticidad se define como positiva y el vector del campo eléctrico es atenuado por el medio. La atenuación se describe mediante el índice de absorción  $n'$ . La amplitud de un campo electromagnético polarizado linealmente que se propaga en dirección  $z$ , sobre una distancia  $l$  sigue la ley de Beer-Lambert

$$E_l = E_0 e^{-\frac{2\pi l}{\lambda} n'}, \quad (4.14)$$

entonces la elipticidad (Eq. 4.13) puede ser escrita como

$$\tan\psi = \frac{E_0 e^{-\frac{2\pi l}{\lambda} n'_R} - E_0 e^{-\frac{2\pi l}{\lambda} n'_L}}{E_0 e^{-\frac{2\pi l}{\lambda} n'_R} + E_0 e^{-\frac{2\pi l}{\lambda} n'_L}}, \quad (4.15)$$

$$= \tanh \left[ \frac{\pi l}{\lambda} (n'_R - n'_L) \right], \quad (4.16)$$

donde  $n'_R$  y  $n'_L$  son los índices de absorción para la luz polarizada circularmente izquierda y derecha respectivamente. Si utilizamos la aproximación para pequeñas elipticidades es posible reescribir como

$$\psi \approx \frac{\pi}{\lambda} (n'_R - n'_L). \quad (4.17)$$

Esta última expresión muestra que la elipticidad en función de la diferencia entre los índices de absorción ( $n'_R - n'_L$ ), en otras palabras, el dicroísmo circular del medio.



## 4.2. Materiales Ópticamente Activos

Los materiales ópticamente activos son materiales con simetría quiral, es decir carentes de simetría de algún plano espejo cristalino, de manera que al enviar un haz de luz con polarización lineal se observa una rotación en el plano de vibración del vector de campo eléctrico  $\vec{E}$  durante la propagación del haz de luz. La rotación  $\theta$  es proporcional a la longitud de trayectoria recorrida a través del material y la cantidad de rotación por unidad de longitud es conocida como potencia rotatoria específica, definiéndola como:

$$\rho = \frac{\theta}{l}, \quad (4.18)$$

la cual es dependiente de la longitud de onda (es decir tiene un comportamiento dispersivo). A la actividad óptica algunas veces se le conoce como rotación natural, para distinguirla de la rotación magnética (efecto Faraday).

De acuerdo al sentido de la rotación y con respecto al vector de propagación, uno puede distinguir materiales dextrógiros y levógiros la rotación de  $\vec{E}$  en el sentido de las manecillas del reloj para un observador que recibe la luz), siendo  $\rho$  positivo y negativo respectivamente.

Dentro de los medios quirales isotrópicos, los vectores de campo electromagnético describen una hélice, esto es una consecuencia del hecho de que los índices de refracción para las ondas polarizadas circularmente derecha e izquierda difieren ligeramente. Considerando estos hechos, Fresnel propuso que la forma química de los cristales quirales y en particular del cuarzo cristalino es esencialmente helicoidal. Respecto a esta suposición se debe mencionar que el cuarzo fundido es ópticamente isotrópico, mientras que el cuarzo cristalino es ópticamente activo, así también como birrefringente, aunque el cuarzo cristalino presenta dos estructuras cristalinas: una del tipo dextrógira y otra levógira.

Investigaciones posteriores confirmaron el postulado de Fresnel, encontrando actividad óptica en el cuarzo cristalino. La forma de mano derecha del cuarzo cristalino es mostrada en la figura 4.2

Si el paso de la hélice es más pequeño que la longitud de onda, el medio periódico puede ser tratado en óptica como macroscópicamente homogéneo. Muchos problemas en óptica de cristales quirales están todavía sin resolver, debido a que las propiedades de tales medios son difícilmente incorporadas en el sistema de referencia de los modelos homogéneos. Las dificultades principales vienen de la falta de simetría de estos medios y de la naturaleza no local de la actividad óptica.

Para un número de substancias y rangos de longitudes de onda, la dependencia de  $\rho(\lambda)$  puede ser aproximada mediante la relación de Cauchy:

$$\rho = A + \frac{B}{\lambda^2}. \quad (4.19)$$

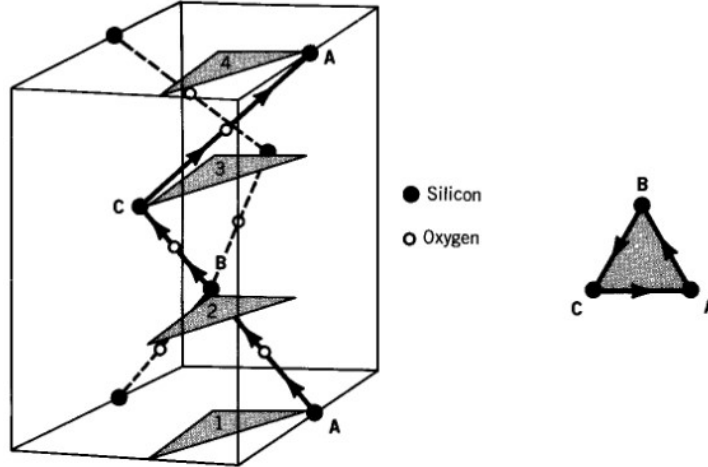


Figura 4.2:

#### 4.2.1. Introducción al tensor $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$

El tensor dieléctrico o de permitividad  $\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega)$ , toma en cuenta la dispersión espacial que se aplica a los cristales. Se muestra que la formulación del tensor  $\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega)$  y su uso dentro del marco de la electrodinámica macroscópica son posibles solo bajo la condición  $ka \ll 1$ , siendo  $a$  la constante de red (El parámetro de red hace referencia a la distancia constante de las celdas unitarias o "dimensión de cada celda" con respecto a su estructura cristalina). Por tanto, la dispersión espacial es débil en la óptica de cristales, y la función  $\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega)$  o  $\epsilon_{ijl}(\vec{k}, \omega)$  puede ser reemplazada por una expansión en serie en potencias  $ka$ . Se discute la forma del tensor  $\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega)$  para cristales gyrotropicos en las siguientes secciones.

#### 4.2.2. Dispersión temporal y espacial

Para describir la actividad óptica, no es suficiente apoyarse en la dispersión temporal, la cuál es la dependencia entre  $\epsilon$  y  $\omega$ . Hay una dependencia adicional de  $\epsilon$  respecto del vector de onda  $\vec{k}$  que se conoce como dispersión espacial, la cuál permite describir la birrefringencia circular. Al incluir la dependencia de  $\epsilon$  en función de  $\vec{k}$  y  $\omega$  se tiene:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega). \quad (4.20)$$

Puede mostrarse que las propiedades de  $\epsilon_{ij}$  son:

$$\text{Realeza} : \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \epsilon_{ji}^*(\vec{k}, -\omega) \quad (4.21a)$$

$$\text{Onsager} : \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \epsilon_{ji}(-\vec{k}, \omega) \quad (4.21b)$$

$$\text{Hermitianicidad} : \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \epsilon_{ji}^*(\vec{k}, \omega) \quad (4.21c)$$

### 4.2.3. Tensor de impermeabilidad

De la relación lineal

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad (4.22)$$

se puede obtener

$$E_j = [\epsilon^{-1}]_{ij} D_i. \quad (4.23)$$

Al tensor inverso del tensor de permitividad se le conoce como tensor de impermeabilidad, y se denota por

$$\eta_{ij} \equiv [\epsilon^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\epsilon_0} [(\epsilon^r)^{-1}]_{ij}. \quad (4.24)$$

Al incluir las dos dispersiones mencionadas, el tensor dieléctrico se escribe

$$\epsilon_{ij}^r(\vec{k}, \omega) = \epsilon_{ij}^r(\omega) + i\gamma_{ijl}^e(\omega)k_l, \quad (4.25)$$

donde el primer termino describe la dispersión temporal y el segundo, la dispersión espacial de primer orden.

Aplicando esta notación al tensor de impermeabilidad, se describe éste en forma compleja y considerando que no hay atenuación, entonces:

$$\eta_{ij}(\vec{k}, \omega) = \eta_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijl}(\omega)k_l. \quad (4.26)$$

El factor  $ik_l$  del segundo término equivale a la derivada parcial respecto a la coordenada  $x_l$ , es decir  $\partial_l$  para una onda armónica plana. Esto es:

$$\begin{aligned} E_i(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{\epsilon_0} \eta_{ij}(\vec{k}, \omega) D_j(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} [\eta_{ij}(\omega) + ik_l \gamma_{ijl}(\omega)] D_j \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \eta_{ij}(\omega) D_j + (ik_l) \frac{1}{\epsilon_0} \gamma_{ijl}(\omega) D_j \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \eta_{ij}(\omega) D_j + \frac{1}{\epsilon_0} \gamma_{ijl}(\omega) \partial_l D_j \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \eta_{ij}(\omega) D_j(\vec{k}, \omega) + \frac{1}{\epsilon_0} \gamma_{ijl}(\omega) \frac{\partial}{\partial x_l} D_j(\vec{k}, \omega). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Indicando una dependencia adicional con  $\partial_l D_j$  en la generalización al caso de la onda plana.

Las propiedades de simetría de  $\epsilon_{ij}$  corresponden a las propiedades de  $\eta_{ij}(\vec{k}, \omega)$ .

Por tanto la hermitianicidad para  $\eta$  es  $\eta_{ij}(\vec{k}, \omega) = \eta_{ji}^*(\vec{k}, \omega)$ , en consecuencia

$$\begin{aligned} \eta_{ji}^*(\vec{k}, \omega) &= \eta_{ji}(\omega) + ik_l \gamma'_{jl}(\omega) \\ &= \eta_{ij}(\omega) - ik_l \gamma'_{jl}(\omega). \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde:

$$-\gamma'_{ijl} = \gamma_{ijl}$$

entonces

$$-\gamma_{jil}(\omega) = \gamma_{ijl}(\omega)$$

y  $\gamma$  resulta antisimétrico respecto a  $i$  y  $j$ .

#### 4.2.4. Tensor y Vector girotrópico

El tensor girotrópico  $G_{sl}$  se define como

$$G_{sl}(k, \omega) = \frac{k}{2} \gamma_{ijl}(\omega) \epsilon_{sij}$$

$$k = \begin{bmatrix} \gamma_{231} & \gamma_{232} & \gamma_{233} \\ \gamma_{311} & \gamma_{312} & \gamma_{313} \\ \gamma_{121} & \gamma_{122} & \gamma_{123} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

donde  $\gamma_{ijl} \epsilon_{slj} = t_{ls}$  con solo 9 componentes distintas.

Vemos que se considera la secuencia 1,2,3 del siguiente modo: para 23 el siguiente índice es  $m=1$ , para 31  $m=2$  y para 12  $m=3$ . De esta manera podemos formar el tensor  $\gamma'_{ml}$ , que presenta una reducción de componentes.

La contracción puede hacerse porque de  $3^3$  elementos distintos, la simetría respecto a  $i, j$  los reduce en  $3^2$ , o sea  $3^3 - 3^2 = 18$ . De estos se deben excluir también a los 111, 112, 113, 221, 222, 223, 331, 332, 333, lo cual sólo deja 9 componentes.

El segundo término de  $\eta_{ij}(\vec{k}, \omega)$  se puede considerar como una perturbación  $\Delta\eta_{ij}$ , o sea,

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{ij} &= i\gamma_{ijl}k_l = \frac{i}{6}\gamma_{ijl}\epsilon_{ijs}\epsilon_{sij}k_l \\ &= \frac{i}{6}G_{sl}(k, \omega)\epsilon_{ijs}k_l \\ &= iG_{sl}\epsilon_{ijs}u_l \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde  $u_l = \frac{1}{6}k_l$ .

El vector girotrópico  $g(\vec{k}, \omega) = \hat{G}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{u}$  incluso se puede indicar como

$$g_s = a_{sl}u_l. \quad (4.31)$$

Así

$$\Delta\eta_{ij} = i\epsilon_{ijs}g_s \quad (4.32)$$

Puede tomarse el caso en que  $\vec{u} \parallel \hat{e}_3$ . Entonces  $l=3$  tomando a  $\vec{u}$  como unitario.

Sabemos que

$$g_s = G_{s3}u_3, \quad s = 1, 2, 3 \quad (4.33)$$

lo cuál si aplicamos cada subíndice  $s$  podemos obtener la siguiente expresión matricial

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{13} \\ G_{23} \\ G_{33} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Y en ese mismo caso se tiene que:

$$\Delta\eta_{ij} = i\epsilon_{ijs}g_s. \quad (4.35)$$

Donde obtenemos los siguientes valores de forma matricial

$$[\Delta\eta] = \begin{bmatrix} 0 & iG_{33} & -iG_{23} \\ -iG_{33} & 0 & iG_{13} \\ iG_{23} & -iG_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Si la simetría del medio impone que  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ,  $\eta_{ij} = \eta_{ji}$  pero  $\gamma_{ijl} = -\gamma_{jil}$ , por lo que  $\gamma_{ijl} = 0$  y  $G_{sl} = 0$  entonces esto nos llevaria a que no habria actividad óptica en el medio.

Si tomamos como ejemplo un material dieléctrico ideal o centrosímtrico tenemos la siguiente expresión

$$E_i(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0}\eta_{ij}(\omega)D_j(\vec{k}, \omega) + \frac{i}{\epsilon_0}k_l\gamma_{ijl}(\omega)D_j(\vec{k}, \omega), \quad (4.37)$$

de la ecuación

$$\Delta\eta_{ij} = \frac{i}{\epsilon_0}k_l\gamma_{ijl}(\omega). \quad (4.38)$$

Obtenemos la siguiente expresión

$$E_i(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0}\eta_{ij}(\omega)D_j(\vec{k}, \omega) + \frac{i}{\epsilon_0}\epsilon_{ijs}g_sD_j(\vec{k}, \omega), \quad (4.39)$$

o podemos reescribirla de forma vectorial

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{\epsilon_0} [\eta(\omega)] \vec{D}(\vec{k}, \omega) - \frac{i}{\epsilon_0} \vec{g} \times \vec{D}(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} [\eta(\omega)] \vec{D}(\vec{k}, \omega) + \frac{i}{\epsilon_0} \vec{D}(\vec{k}, \omega) \times \vec{g}.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Si el vector de propagación fuera paralelo al vector de propagación  $\vec{k}$  entonces

$$\vec{g} = [\Delta\eta] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33} \end{bmatrix} = G_{33} \vec{u} \quad (4.41)$$

como  $G_{13} = G_{23} = 0$ .  
Entonces tenemos

$$[\Delta\eta] = \begin{bmatrix} 0 & iG_{33} & 0 \\ -iG_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Cuya expresión corresponde a la estructura del tensor en el cual se mencionó como ejemplo un material dieléctrico isotrópico.

### 4.3. Ondas planas monocromáticas en medios ópticamente activos

Ahora vamos a considerar una onda plana monocromática con su vector de onda correspondiente  $\vec{k} = k\hat{k}$  propagándose por un medio isotrópico ópticamente activo. La ecuación bidimensional de los eigenvalores esta descrita de la siguiente manera

$$0 = D_j \left[ (\epsilon^{-1})_{ij} - \frac{1}{n^2} \delta_{ij} \right]. \quad (4.43)$$

Para un medio isotrópico y  $\vec{k}$  propagándose a lo largo de Z,

$$(\epsilon^{-1})_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} & iG_{33} & 0 \\ -iG_{33} & \frac{1}{\epsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_0} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

entonces la ecuación (4.43) puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{n^2} & iG_{33} \\ -iG_{33} & \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.45)$$

La ecuación de compatibilidad es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{n^2} & iG_{33} \\ -iG_{33} & \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.46)$$

cuyas soluciones son

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{\epsilon_0} - G_{33}, \quad (4.47a)$$

$$\frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{\epsilon_0} + G_{33}, \quad (4.47b)$$

tomando en cuenta que  $G_{33} \ll 1/\epsilon_0$ , por tanto la ecuación (4.47) se reescribe como

$$n_1 = n_0 + \frac{1}{2}n_0\epsilon_0 G_{33}, \quad (4.48a)$$

$$n_2 = n_0 - \frac{1}{2}n_0\epsilon_0 G_{33}, \quad (4.48b)$$

siendo  $n_0$  el índice de refracción en ausencia de actividad óptica.

Tomemos en cuenta que solo la componente  $G_{33}$  del tensor girotrópico, que pertenece a su parte simétrica, determina los valores del índice. Por lo tanto, a menudo se hace referencia a esa parte simétrica de  $G_{ij}$ , como el tensor girotrópico.

Los vectores propios correspondientes son los siguientes. Para  $n=n_1$ :

$$D_1 + iD_2 = 0, \quad (4.49)$$

representando un giro dextrógiro  $\vec{D}$  en el plano XY. Del mismo modo, para  $n=n_2$

$$D_1 - iD_2 = 0, \quad (4.50)$$

correspondiendo a un sentido levógiro de  $\vec{D}$ .

En resumen, los modos normales de polarización para una onda monocromática plana propagándose en un medio ópticamente activo son dos ondas polarizadas circularmente de signo opuesto, con diferencia de índices  $\Delta n = n_1 - n_2 = n_0\epsilon_0 G_{33}$ .

La diferencia de índices está relacionada con la birrefringencia circular que influye para lograr una rotación en el plano de polarización dado por la ecuación 4.11  $\alpha = \frac{\omega}{2c}\Delta n$ . De esta manera con los resultados anteriores se puede concluir que un medio que está descrito por el tensor de impermeabilidad descrito por la ecuación 4.39 producirá una rotación en el plano de polarización de la onda onda polarizada linealmente incidente.

Si el cristal es uniaxial y la luz se propaga a lo largo del eje óptico, se aplican los mismos resultados.





## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo de tesis se realizó un estudio teórico de los modos electromagnéticos que pueden existir en un medio anisotrópico, en el cuál se estudia la polarización de sus campos electromagnéticos, y así mismo esta teoría permitió describir la actividad óptica en función de estos modos normales realizando previamente una generalización del vector de desplazamiento en función de el campo eléctrico lo que condujo a obtener el tensor girotrópico el cual describe matematicamente dicho fenómeno.

Se describió la propagación de una onda monocromática plana en un cristal ópticamente activo de modo que la actividad óptica es el resultado de la interacción entre el medio y la superposición de dos ondas planas polarizadas circularmente a izquierda y derecha, las cuales se propagandose de manera independiente a diferentes velocidades, siendo absorbidas de manera diferente en algunas regiones de frecuencia. Se utilizaron las relaciones constitutivas que definen algunas propiedades ópticas de los cristales junto con las ecuaciones de Maxwell que explican el fenómeno de la birrefringencia por la interacción de los campos eléctricos y magnéticos con el medio a través de la anisotropía del tensor dieléctrico.

Se realizó un estudio sencillo de la propagación de ondas electromagnéticas en un medio uniaxial lineal, homogéneo y sin pérdidas que es ópticamente activo y se coloca en un campo magnético constante, en dicho medio la rotación de polarización lineal es una consecuencia de la birrefringencia circular la cuál es el resultado de la diferencia entre dos índices de refracción asociados a cada polarización circular izquierda o derecha, además cabe mencionar que el elipsoide índice o indicatriz óptica se puede considerar como una construcción geométrica para visualizar los parámetros de propagación de una onda.



# Bibliografía

- [1] C. OLDANO, M. BECCHI. *Natural Optical Activity and Liquid Crystals*, The Journal of Physics, Vol. 53, Julio 1999, 131-143.
- [2] MARIO ZAMORANO L.1 HÉCTOR TORRES S.1 *Quirosolitones RCP y LCP en óptica y microondas en regimen normal y de metamaterial*, Revista Facultad de Ingeniería, U.T.A. (Chile), Vol. 12 N<sup>o</sup>1, 2004, pp. 49-57.
- [3] BORN, MAX AND WOLF, EMIL, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Séptima edición, Cambridge University Press, 1999.
- [4] RUZ, LIBARDO J. RUZ, AND DARÍO A. CASTRO CASTRO *Teoría Electromagnética Para Estudiantes De Ingeniería Notas De Clase*, 1st ed., Editorial Universidad Del Norte, 2012. JSTOR, [www.jstor.org/stable/j.ctvvn8f6](http://www.jstor.org/stable/j.ctvvn8f6).
- [5] HECHT, EUGENE. *Optics*, 5th ed, Reading, Mass: Addison-Wesley.
- [6] GUSTAVO RODRIGUEZ ZURITA, ROSARIO PASTRANA, OSMART OCHOA *Polarización y celdas con cristales líquidos nemáticos*, Editorial Academica Española, 2014.
- [7] FERNANDO AGULLÓ-LÓPEZ, JOSÉ MANUEL CABRERA y FERNANDO AGULLÓ-RUEDA *Electrooptics: Phenomena, Materials and Applications*, Academic Press, 1994.
- [8] LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*, Oxford, Pergamon Press, 1906.
- [9] ROBERT D. GUENTHER *Modern Optics*, Wiley international edition, 1990.
- [10] L.D. BARRON, *Molecular light scattering and optical activity*, Cambridge University Press, 2 edition, 2004.
- [11] ESPINOSA LEAL ANDRÉS LEONARDO, *Ab initio Study of the Optical Activity in Chiral Systems*, University of the basque country, Master thesis, 2009.
- [12] THEO BURER AND LEONARD I. KAZIN *Optical Rotatory Dispersion Data and the Drude Equation*, The Journal of Physical Chemistry, Vol. 70, 8, 1966, 2663-2674.

- [13] V.M. AGRANOVICH, V. L. GINZBURG *Crystal Optics with Allowance For Spatial Dispersion; Exciton Theory* , Soviet Physics Uspekhi, Vol.5, 4, January-February 1963, 664-725.
- [14] J.J. HOPFIELD *Theoretical and Experimental Effects of Spatial Dispersion on the Optical Properties of Crystals* , Physical Review, Vol. 132, 2, october 1963.