

## Розроблення математичної моделі коливань вагону метрополітену з електромеханічними амортизаторами

Б. Г. Любарський, Н. П. Лукашова, О. М. Петренко, Д. І. Якунін,  
О. Я. Ніконов, О. Б. Маций

*Розроблено математичну модель вагону метрополітену на двох двовісних візках з осьовою характеристикою  $2_0-2_0$ , в центральному ступені ресорного підвішування якого використані пружини і електромеханічні гасителі. Особливістю моделі є те, що вона містить наступні складові. 17 диференціальних рівнянь другого порядку, які описують роботу механічної частини екіпаж-рейкова колія. 8 диференціальних рівнянь першого порядку, які описують роботу 4-х електромеханічних амортизаторів. Модель доповнено трьома поліномами 32 та 63 порядків, які описують стан магнітного поля електромеханічних амортизаторів та їх електромагнітну силу, а також 4 алгебраїчними рівняннями зв'язку.*

*У математичній моделі системи екіпаж-рейкова колія з електромеханічними амортизаторами враховано наступні складові:*

- повздовжні та поперечні коливання колісних пар візків та кузову вагону;
- параметри рейкової колії;
- електромагнітні особливості електроамортизаторів;
- збудження, що виникають завдяки нерівності колії;
- параметри шляху, властивості інших елементів ресорного підвішування.

*Проведено дослідження роботи ресорного підвішування вагону метрополітену при проходженні шляху з синусоїдальною нерівністю. За цим дослідженням визначено, що електромеханічні процеси в електроамортизаторах можливо поділити на три частини. Вільні механічні складові коливань, вільні, а також вимушені електромагнітні складові. Визначено тривалість дії, амплітуди та характер складових коливань. Амплітуда коливань значно змінюється з ростом швидкості руху: з 0,01 А та 2 В при 40 км/год. до 0,9 А та 115 В при 100 км/год. Коливання носять гармонійний характер. Частота коливань відповідає частоті нерівності шляху. Електрична потужність електроамортизатора збільшується з 0,018 Вт при 40 км/год до 98 Вт при 100 км/год.*

*Ключові слова: електромеханічний амортизатор, метровагон, ресорне підвішування, ходова частина, просторова кінематична схема.*

### 1. Вступ

Наявність та ефективність систем гасіння коливань обумовлює плавність руху транспортного засобу на ділянці шляху. Одним з основних елементів ходової частини метровагону є система гасіння коливань, яка зазвичай має дві, різні за параметрами ступені ресорного підвішування. Зменшення впливу нерівностей шляху і коливань з боку ходової частини на екіпажну частину електро-рухомого складу забезпечується наявністю амортизаторів (гасників коливань).

Найважливішим елементом, що обумовлює безпеку руху та швидкість електрорухомого складу, є динамічні показники амортизаторів. Це ствердження слушне як для міського, так і магістрального рейкового транспорту. Показники амортизаторів визначаються типом та конструкцією амортизатора. За плавністю руху найкращі показники властиві пневматичним амортизаторам [1], проте їх використання потребує додаткової системи пневматичного живлення – компресорів, що знижують загальну енергоефективність електрорухомого складу. [2] Іншим підходом для підвищення динамічних якостей електрорухомого складу є застосування електромеханічних амортизаторів [3]. Амортизатори такого типу не споживають додаткової енергії, натомість вони спроможні частково рекуперувати енергію коливань. Такі можливості електромеханічних амортизаторів дають змогу підвищити енергоефективність рухомого складу в цілому та метро зокрема [3].

## **2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

Як зазначається в [4], у світовій практиці найбільш поширеним є ресорне підвішування візків, що складається з буксової та центральної частини. Таку ж систему застосовують і на вагонах метро в Україні. Ресорне підвішування має за мету зменшення впливу ударів, що виникають під час роботи рухомого складу від нерівностей колії та при вписуванні в криві. Гасіння коливань, що при цьому виникають в центральному підвішуванні візків, здійснюється завдяки гідравлічним амортизаторам [4].

Аналіз систем гасіння коливань на міському рейковому транспорті, проведений в роботі [5] визначив, що найбільш поширеним технічним рішенням є фрикційні гасителі коливань, що доповнені гідравлічними демпферами. Такі комбіновані системи встановлено у другому ступені ресорного підвішування.

Як зазначається в [6], вигони серії Е-КМ на ПАТ «Крюківський вагонобудівний завод» (м. Кременчук, Україна) мають нові візки моделі 68-7054 з центральним пневматичним ресорним підвішуванням, яке доповнено гідроамортизаторами. Застосування пневматичних ресор дає можливість регулювання параметрів демпфування в залежності від завантаження вагону та величини зовнішніх впливів, проте пневматичне підвішування потребує додаткових втрат енергії та потужностей пневматичної системи [2].

Аналіз різних типів електромеханічних амортизаторів [2] доводить, що серед відомих на сьогодні типів – асинхронного, синхронного, електромагнітного [7] та постійного струму [8] – найбільш прийнятним варіантом є останній. Такий тип електромеханічного перетворювача енергії забезпечує для електромеханічного амортизатора потрібну постійну тягову [9] (механічну) характеристику, що змінюється лише від швидкості руху якоря.

Електромеханічні амортизатори досить швидко розповсюджуються в автомобільному транспорті, інтегруючись у підвіску типа McPherson [10] спільно з пружиною. Включенню електроамортизатора до єдиної бортової мережі транспортного засобу присвячена робота [11], в якій розглядається можливість рекуперації енергії коливань, що перетворено на електричну енергію, з метою підвищення енергоефективності системи.

В роботі [12] проведено оцінку енергетичної ефективності систем рекуперації енергії механічних коливань автомобілів КРАЗ-65055 (Росія), КАМАЗ-45143 (Росія), Газель-3302 (Росія), ВАЗ 2101 (Росія), Reno Megane (Франція), Toyota Camry (Японія) на основі попередньо проведених результатів математичного моделювання таких систем.

Аналізу складних процесів коливань в механічній системі ходової частини транспортних засобів присвячена робота [13]. Автори роботи [13] розробили основні підходи до моделювання механічних коливань на основі створення узагальненої математичної моделі.

Для моделювання складних електромеханічних систем в роботі [14] запропоновано створення єдиної математичної моделі електромеханічної системи, однак враховується вплив електромеханічної складової лише в якості функції, що збуджує додаткові коливання в системі. Такий підхід не дає можливості враховувати вплив механічної системи на електромагнітні процеси.

Моделювання ресорного підвішування вагонів метро розглянуто у роботі [1]. Зазначається що застосування пневморесор в центральному ступені підвішування за динамічними показниками є кращім, ніж найбільш поширене пружинне підвішування.

В роботі [15] приділено увагу вибору конструкції та параметрів буксового ступеня ресорного підвішування. Створено математичну модель взаємодії колеса і рейки. Задля цього було розроблено багатомасову просторову кінематичну схему рейкової колії тунелю метрополітену, що містить наступні елементи: «тунель – рейкова колія – навколишній ґрунт». Враховано навіть жорсткість в контакті колеса та рейки. Конструкція верхньої будови колії була прийнята такою: рейки Р65 з металевими підкладками, залізобетонні шпали. Між ними й металевими підкладками під рейками, задля шумоізоляції прокладено спеціальні полімерні прокладки.

В роботі [5] запропоновано конструкцію електромеханічного амортизатору для вагону метро та наведено його основні характеристики. Базові підходи до створення математичної моделі електромеханічного амортизатору такого типу наведено у роботі [5], шляхом вирішення рівняння Лагранжу для електромеханічної системи створено методику моделювання електромеханічного амортизатору на підставі математичної моделі. Особливості моделі полягають в наступному. Модель має вигляд задачі Коши, яка є прийнятною до використання при моделюванні процесів роботи амортизатору. Обрані дві узагальнені координати (заряд та переміщення якорю). Ідентифіковані складові частини рівняння Лагранжу.

Як впливає з проведеного аналізу [1–15] сучасного стану проблематики, проблема вирішується частково, адже отримано лише наступні результати: час та ефективність гасіння коливань; можливість створення узагальненої математичної моделі ресорного підвішування вагону метро та електромеханічного амортизатору. Втім, розроблені моделі не дозволяють провести дослідження роботи електромеханічних амортизаторів у складі ходової частини транспортного засобу – метровагону. Також не вирішено задачу визначення кількості енергії коливань, що здатні рекуперувати електромеханічні амортизатори в залежності від швидкості руху на ділянці колії.

### 3. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження є створення математичної моделі процесів коливання кузову вагону метрополітену з системами електромеханічного гасіння коливань. Це дозволить провести моделювання процесів руху метровагону при проходженні колії з різними типами нерівностей шляху.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- створити кінематичну схему і рівняння коливань моделі вагону метрополітену та рейкової колії тунелю;
- виконати ідентифікацію параметрів математичної моделі метровагону;
- провести моделювання роботи ресорного підвішування метровагону при проходженні синусоїдальної нерівності.

### 4. Моделювання динамічних процесів електромеханічної системи метровагону з електроамортизаторами

#### 4.1. Кінематична схема і рівняння коливань моделі вагону метрополітену та рейкової колії тунелю

Для вирішення поставленого в роботі завдання потрібна розробка просторової кінематичної схеми динамічної системи екіпаж – колія для метровагону з осью формулою  $2_0-2_0$ . Подібна узагальнена схема, коли в центральному ступені ресорного підвішування можна використати пружини і паралельно їм встановлені гідравлічні гасителі, а також пневматичні ресори, була розроблена у [1, 15], її можливо використати і для електромеханічного підвішування. До схеми з цієї роботи внесено зміни, оскільки в моделі вагону метрополітену на відміну від моделі рейкового автобуса маси першого і другого візків, їх моменти інерції відносно осей  $y$  та  $x$  – однакові. Це стосується і колісних пар візків.

Узагальнену кінематичну схему наведено на рис. 1, 2. На цій схемі показана узагальнена механічна модель центрального ступеня ресорного підвішування. Тут пружні елементи,  $k_{21}$ ,  $\lambda_{k21}$  і дисипативний елемент  $\beta_{21}$  відносяться до схеми з електромеханічним підвішуванням, а  $k_2$  і  $\beta_2$  – до схеми з пружинним центральним підвішуванням. При встановленні електромеханічного амортизатору, функції дисипативного елементу  $\beta_{21}$  виконують електроамортизатори, а  $k_2$  є штатною пружиною.

Складено кінематичну схему і рівняння коливань моделі вагону метрополітену і рейкової колії тунелю. На підставі рис. 1, 2, кузов спирається на два двовісні візки через центральний ступінь ресорного підвішування, а кожен з візків через буксовий ступінь – на дві колісні пари.

При розробці просторової кінематичної схеми динамічної системи екіпаж – колія були прийняті наступні допущення:

- кузов, рами візків і колісні пари розглядаються як абсолютно тверді тіла, оскільки їх жорсткості значно вищі за жорсткості пружних елементів, що їх сполучають;
- центри тяжіння цих твердих тіл співпадають з їх геометричними центрами;
- розглядаються тільки коливання підстрибування, галопування і бічної хитавиці, при цьому коливання сіпання, віднесення і виляння вважаються умовно незв'язаними з ними і не враховуються;

- усі переміщення вважаються малими (в порівнянні з лінійними розмірами тіл);
- величини жорсткості та коефіцієнтів загасання прийняті однаковими для відповідних елементів ресорного підвищення різних візків і колісних пар;
- пружні та дисипативні сили вважаються такими, що діють по осі відповідного пружного і дисипативного елемента;
- пружина і паралельний їй гідравлічний гаситель вважаються закріпленими в одній точці;
- не враховується жорсткість в контактні колеса і рейки;
- рух екіпажу уздовж шляху розглядається як прямолінійний і рівномірний;
- колісна пара і приведені до неї маси шляху рухаються безвідривно
- в якості збурення при дослідженні вимушених вертикальних коливань прийняті еквівалентні геометричні нерівності лівої та правої рейок.

Для створення єдиної математичної моделі метровагону розглянуто частину кінематичної схеми із включенням до неї електроамортизатором. Система рівнянь описує коливання моделі екіпажу, що складається з трьох мас, кінематична схема якої приведена на рис. 3, б. Механіко-математична модель електроамортизаторів приведена на рис. 3, а. Ця кінематична схема враховує коливання кузова  $z_k$ , візка  $z_t$ , і колісної пари  $z_w$ . Як видно з рис. 3, б, між кузовом і візком встановлений електроамортизатор.

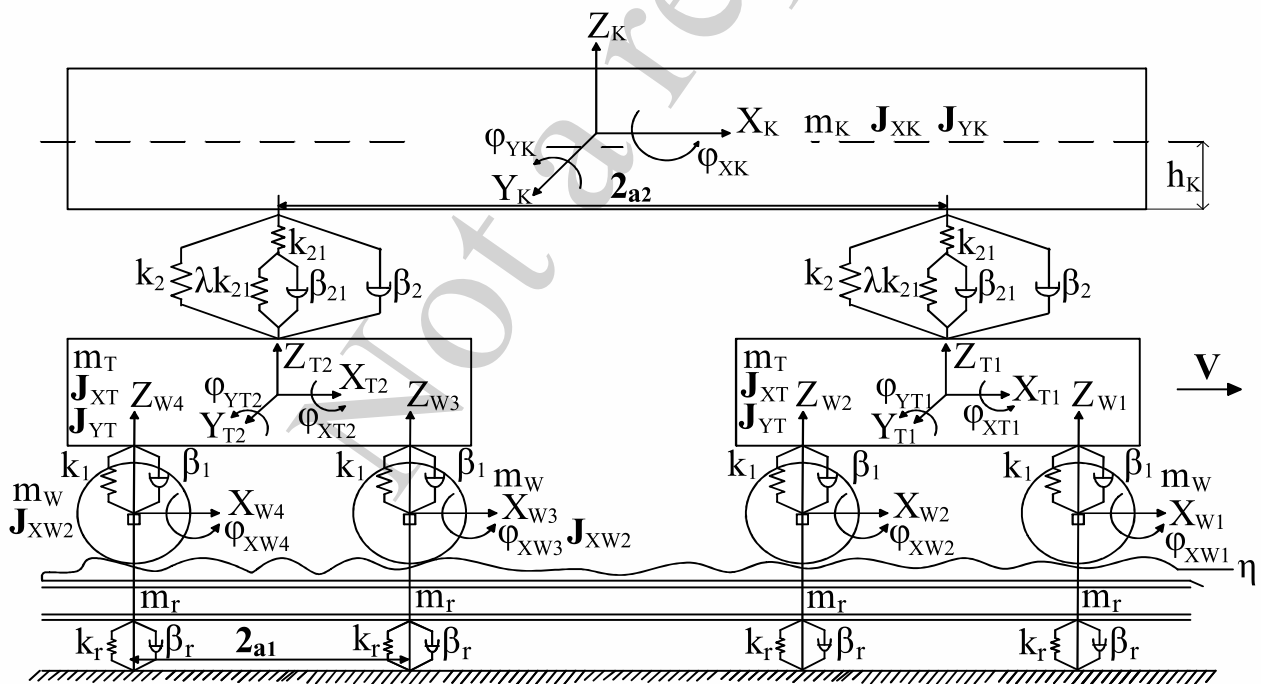


Рис. 1. Просторова кінематична схема моделі вагону метрополітену (вигляд збоку)

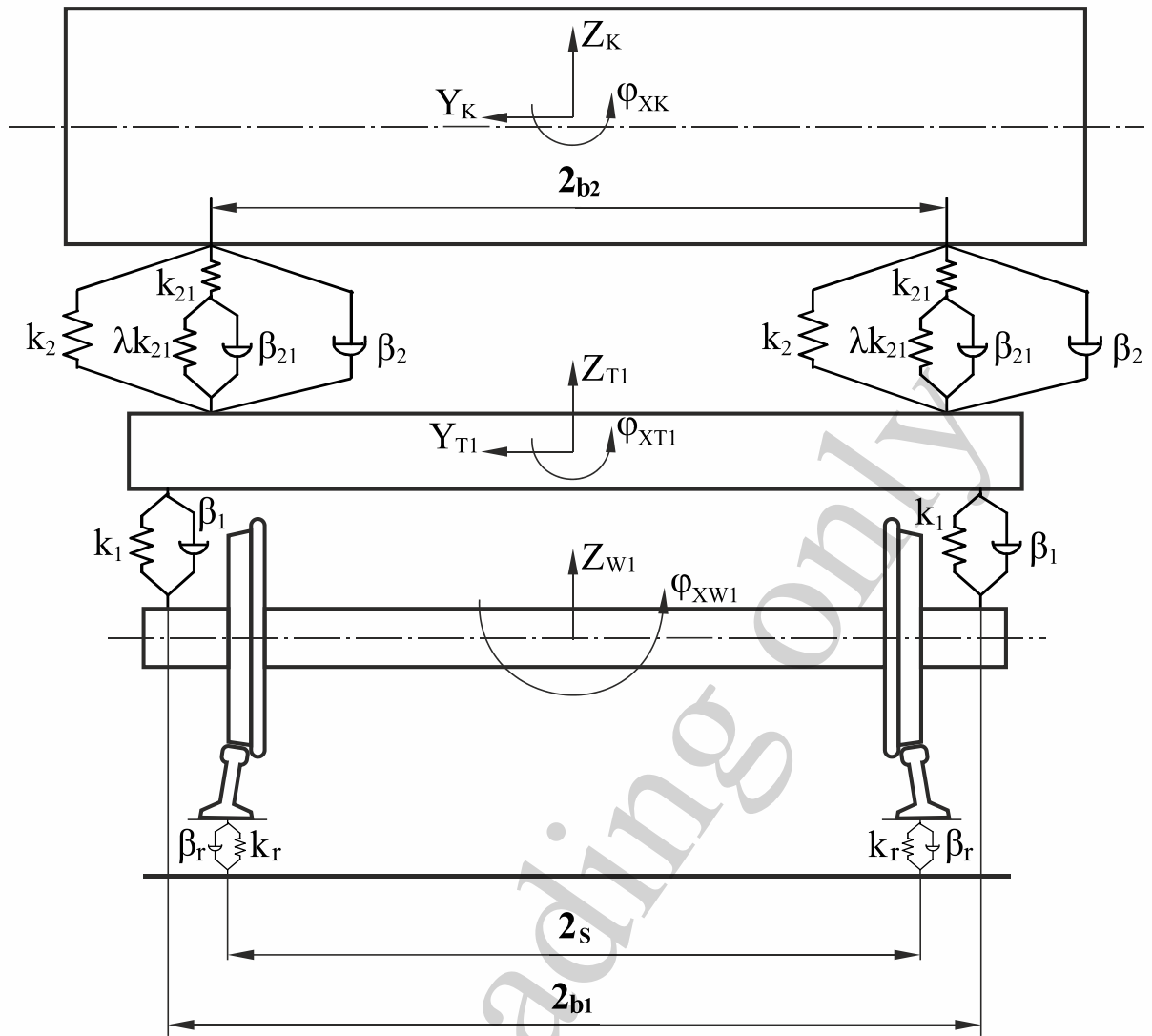


Рис. 2. Просторова кінематична схема моделі вагону метрополітену (вигляд спереду)

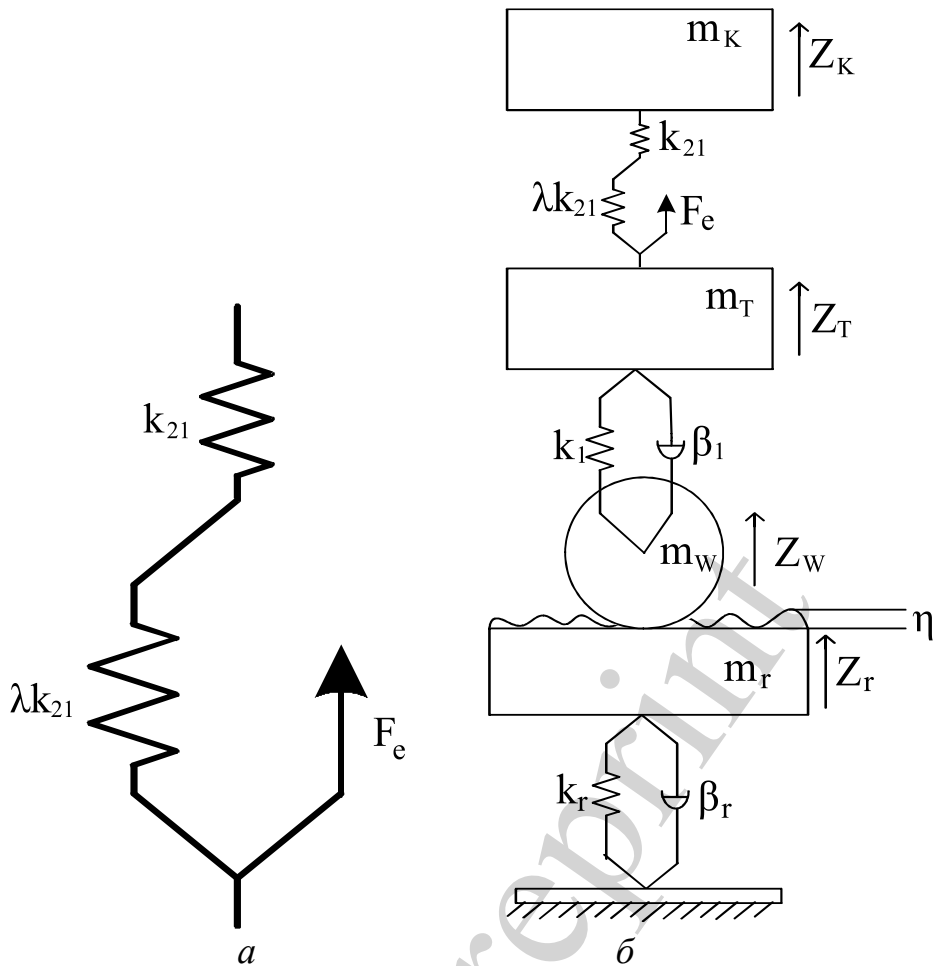


Рис. 3. Схема встановлення електромеханічного амортизатору : *a* – Механіко-математична модель; *б* – розрахункова кінематична схема

У складених рівняннях враховано, що на електроамортизатор передаються коливання кузова  $z_K$  і візка  $z_T$ . Система механічних рівнянь, що описує коливання цієї моделі, має вигляд:

$$m_K \ddot{z}_K + 4F_{ek} + 4k_{21}z_K = 0;$$

$$m_T \ddot{z}_T + (4\beta_{21} + \beta_1) \dot{z}_T - 4F_{ek} - \beta_1 \dot{z}_w - k_1 z_w + 4k_{21}z_T + k_1 z_T = 0;$$

$$(m_w + m_r) \ddot{z}_w + (\beta_1 + \beta_2) \dot{z}_w + (k_1 + k_r) z_w - \beta_1 \dot{z}_T - k_1 z_T = m_r \ddot{\eta} + \beta_r \dot{\eta} + k_r \eta.$$

(2)

Систему механічних рівнянь доповнено електричними рівняннями електромеханічних амортизаторів, аналогічних розробленим у [3] (рис. 4) відповідно до схеми електроамортизатора рис. 5. (символ  $k$  відповідає номеру електромеханічного амортизатора):

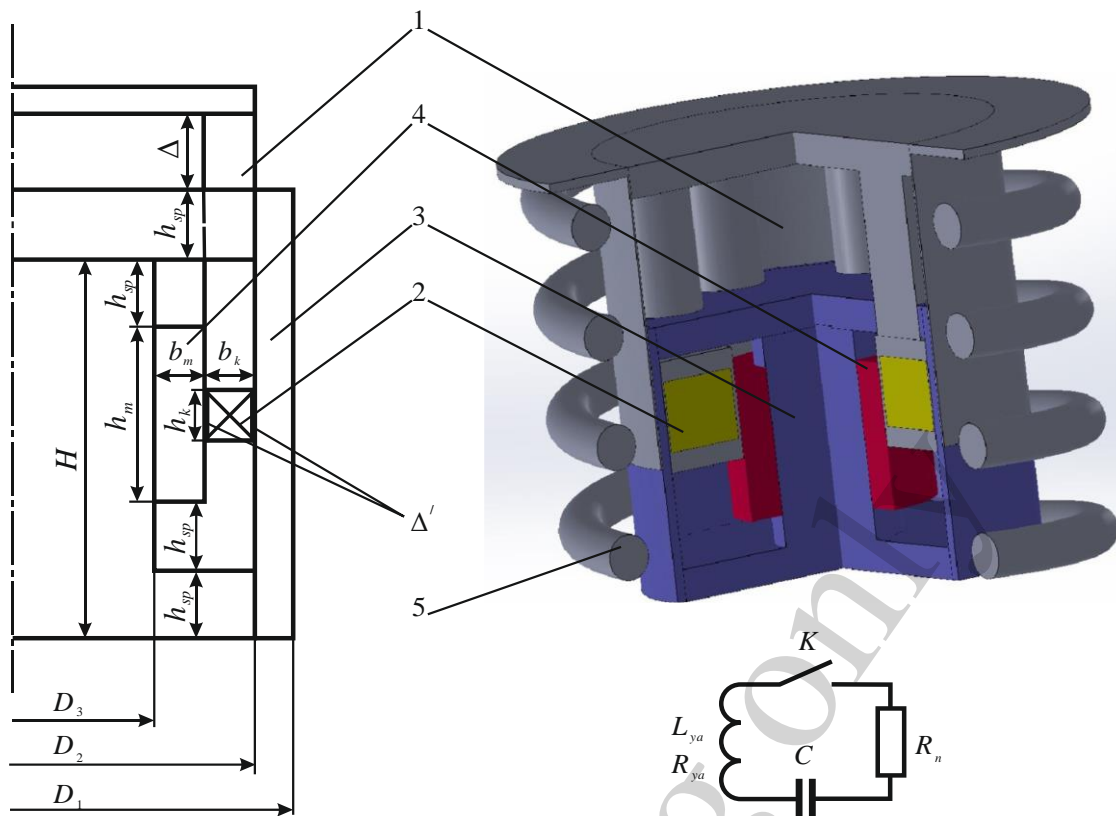


Рис. 4. Електромеханічний амортизатор постійного струму: 1 – якор; 2 – обмотка якорю; 3 – станина; 4 – постійний магніт; 5 – пружина

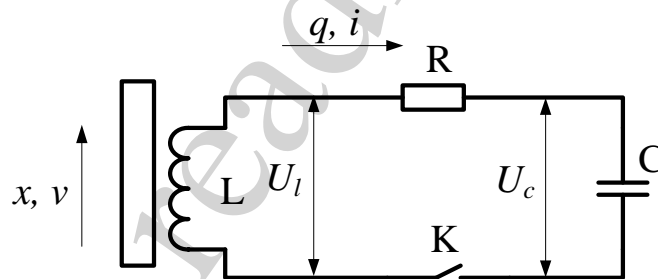


Рис. 5. Електромеханічна схема амортизатора

$$\frac{di_k}{dt} = \frac{U_{ck} - i_k \cdot R - K_d \cdot v_k}{L_d},$$

$$\frac{dU_{ck}}{dt} = -\frac{i_k}{C}. \quad (3)$$

Адекватність математичної моделі підтверджується принципами побудови математичних моделей екіпаж – колія для метровагону з осовою формулою 2<sub>0</sub>–2<sub>0</sub>, наведеними в роботах [1, 15], та принципами побудови математичних моделей для лінійних систем [8].



## 4. 2. Ідентифікація параметрів математичної моделі метровагону

Система рівнянь доповнюється виразами, що визначають диференціальну індуктивність, коефіцієнт при протидіючій електрорушійній силі та електромагнітну силу амортизатору, що визначаються за методикою [3]:

$$L_d = \frac{\partial \Psi(i, x)}{\partial i} = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K \left( AL_{jk} j MJ (MJ \cdot i + ZJ)^{j-1} (MK \cdot x + ZK)^k \right). \quad (4)$$

$$K_d = \frac{\partial \Psi(i, x)}{\partial x} = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K \left( AL_{jk} k MK (MJ \cdot i + ZJ)^j (MK \cdot x + ZK)^{k-1} \right). \quad (5)$$

$$F_e = \sum_{j=0}^{JF} \sum_{k=0}^{KF} \left( AF_{jk} (MJF \cdot i + ZJF)^j (MKF \cdot N + ZKF)^k \right), \quad (6)$$

де  $AL_{jk}$ ,  $AF_{jk}$  – коефіцієнт регресії полінома, що апроксимує потокозчеплення та силу;  $MJ$ ,  $MK$ ,  $MJF$ ,  $MKF$  – масштабні коефіцієнти по току і зазору відповідно потокозчеплення та сили;  $ZJ$ ,  $ZK$ ,  $ZJF$ ,  $ZKF$  – зміщення по току і зазору відповідно потокозчеплення та сили;  $J$ ,  $K$ ,  $JF$ ,  $KF$  – ступені поліному по току і зазору, що апроксимує відповідно потокозчеплення та силу.

Рівняння (2) та (3) зв'язуються алгебраїчними виразами для координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_k + a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} - b_1 \phi_{xt1} + x_n, \\ x_2 &= z_k + a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} + b_1 \phi_{xt1} + x_n, \\ x_3 &= z_k - a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt2} - b_1 \phi_{xt2} + x_n, \\ x_4 &= z_k - a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt2} + b_1 \phi_{xt2} + x_n, \end{aligned} \quad (7)$$

та швидкостей:

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{z}_k + a_2 \dot{\phi}_{yk} - b_2 \dot{\phi}_{xk} - \dot{z}_{t1} + a_1 \dot{\phi}_{yt1} - b_1 \dot{\phi}_{xt1}, \\ v_2 &= \dot{z}_k + a_2 \dot{\phi}_{yk} + b_2 \dot{\phi}_{xk} - \dot{z}_{t1} + a_1 \dot{\phi}_{yt1} + b_1 \dot{\phi}_{xt1}, \end{aligned}$$

$$v_3 = \dot{z}_k - a_2 \dot{\phi}_{yk} - b_2 \dot{\phi}_{xk} - \dot{z}_{t2} - a_1 \dot{\phi}_{yt2} - b_1 \dot{\phi}_{xt2},$$

$$v_3 = \dot{z}_k - a_2 \dot{\phi}_{yk} + b_2 \dot{\phi}_{xk} - \dot{z}_{t2} - a_1 \dot{\phi}_{yt2} + b_1 \dot{\phi}_{xt2}. \quad (8)$$

Враховуючи [14, 15], записано рівняння коливань просторової моделі вагону метрополітену в центральному ступені підвішування. Складено їх на основі принципу Д'аламбера. Для надання рівнянням руху тіла формального виду рівнянь рівноваги, до сил що діють на тіло і моментів сил додано сили інерції: головний вектор і головний момент.

Враховуючи вирази (1)–(8) узагальнена математична модель має вигляд:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{z}_k + F_e(x_1, i_1) + F_e(x_2, i_2) + F_e(x_3, i_3) + F_e(x_4, i_4) + \\ + k_{21} (z_k + a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} - b_1 \phi_{xt1}) + \\ + k_{21} (z_k + a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} + b_1 \phi_{xt1}) + \\ + k_{21} (z_k - a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt2} - b_1 \phi_{xt2}) + \\ + k_{21} (z_k - a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt1} + b_1 \phi_{xt2}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yk} \ddot{\phi}_{yk} + a_2 \left( \begin{array}{l} F_e(x_1, i_1) + F_e(x_2, i_2) - \\ - F_e(x_3, i_3) - F_e(x_4, i_4) \end{array} \right) + \\ + k_{21} a_2 (z_k + a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} - b_1 \phi_{xt1}) + \\ + k_{21} a_2 (z_k + a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} + b_1 \phi_{xt1}) - \\ - k_{21} a_2 (z_k - a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt2} - b_1 \phi_{xt2}) - \\ - k_{21} a_2 (z_k - a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt1} + b_1 \phi_{xt2}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xk} \ddot{\phi}_{xk} + b_2 \left( \begin{array}{l} -F_e(x_1, i_1) + F_e(x_2, i_2) - \\ - F_e(x_3, i_3) + F_e(x_4, i_4) \end{array} \right) - \\ - k_{21} b_2 (z_k + a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} - b_1 \phi_{xt1}) + \\ + k_{21} b_2 (z_k + a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t1} + a_1 \phi_{yt1} + b_1 \phi_{xt1}) - \\ - k_{21} b_2 (z_k - a_2 \phi_{yk} - b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt2} - b_1 \phi_{xt2}) + \\ + k_{21} b_2 (z_k - a_2 \phi_{yk} + b_2 \phi_{xk} - z_{t2} - a_1 \phi_{yt1} + b_1 \phi_{xt2}) = 0, \end{aligned}$$

$$m_{r1}\ddot{z}_{r1} + 4\beta_1\dot{z}_{r1} - k_{21}b_2\phi_{xt1} + k_{21}b_2\varphi_{xt1} + \\ + 4k_1z_{r1} - 2\beta_1(\dot{z}_{w1} + \dot{z}_{w2}) - 2k_1(z_{w1} + z_{w2}) = 0,$$

$$m_{r2}\ddot{z}_{r2} + 4\beta_1\dot{z}_{r2} - k_{21}b_2\phi_{xt2} + k_{21}b_2\varphi_{xt2} + \\ + 4k_1z_{r2} - 2\beta_1(\dot{z}_{w3} + \dot{z}_{w4}) - 2k_1(z_{w3} + z_{w4}) = 0,$$

$$J_{yr}\ddot{\phi}_{yr1} + 4\beta_1a_1^2\dot{\phi}_{yr1} + 4k_1a_1^2\varphi_{yr1} + \\ + 2\beta_1a_1(\dot{z}_{w2} - \dot{z}_{w1}) + 2k_1a_1(z_{w2} - z_{w1}) = 0,$$

$$J_{yr}\ddot{\phi}_{yr2} + 4\beta_1a_1^2\dot{\phi}_{yr2} + 4k_1a_1^2\varphi_{yr2} + \\ + 2\beta_1a_1(\dot{z}_{w4} - \dot{z}_{w3}) + 2k_1a_1(z_{w4} - z_{w3}) = 0,$$

$$J_{xr}\ddot{\phi}_{xr1} + 4\beta_1b_1^2\dot{\phi}_{xr1} + (2k_{21}b_2^2 + 4k_1b_1^2)\varphi_{xr1} + \\ + 2\beta_1b_1^2(\dot{\phi}_{xw1} + \dot{\phi}_{xw2}) - 2k_1b_1^2(\varphi_{xw1} + \varphi_{xw2}) = 0,$$

$$J_{xr}\ddot{\phi}_{xr2} + 4\beta_1b_1^2\dot{\phi}_{xr2} + (2k_{21}b_2^2 + 4k_1b_1^2)\varphi_{xr2} + \\ + 2\beta_1b_1^2(\dot{\phi}_{xw3} + \dot{\phi}_{xw4}) - 2k_1b_1^2(\varphi_{xw3} + \varphi_{xw4}) = 0,$$

$$(m_{w1} + 2m_r)\ddot{z}_{w1} + (2\beta_1 + 2\beta_r)\dot{z}_{w1} + (2k_1 + 2k_r)z_{w1} - \\ - 2\beta_1\dot{z}_{r1} - 2k_1z_{r1} - 2\beta_1a_1\dot{\phi}_{yr1} - 2k_1a_1\varphi_{yr1} = \\ = m_r(\ddot{\eta}_{L1} + \ddot{\eta}_{P1}) + \beta_r(\dot{\eta}_{L1} + \dot{\eta}_{P1}) + k_r(\eta_{L1} + \eta_{P1}),$$

$$J_{xw}\ddot{\phi}_{xw1} + (2\beta_1b_1^2 + \beta_r s^2)\dot{\phi}_{xw1} + (2k_1b_1^2 + k_r s^2)\varphi_{xw1} - \\ - 2\beta_1b_1^2\dot{\phi}_{xr1} - 2k_1b_1^2\varphi_{xr1} = \beta_r s(\dot{\eta}_{P1} - \dot{\eta}_{L1}) + k_r s(\eta_{P1} - \eta_{L1}),$$

$$(m_{w1} + 2m_r)\ddot{z}_{w2} + (2\beta_1 + 2\beta_r)\dot{z}_{w2} + (2k_1 + 2k_r)z_{w2} - \\ - 2\beta_1\dot{z}_{r1} - 2k_1z_{r1} - 2\beta_1a_1\dot{\phi}_{yr1} - 2k_1a_1\varphi_{yr1} = \\ = m_r(\ddot{\eta}_{L2} + \ddot{\eta}_{P2}) + \beta_r(\dot{\eta}_{L2} + \dot{\eta}_{P2}) + k_r(\eta_{L2} + \eta_{P2}),$$

$$J_{xw}\ddot{\phi}_{xw2} + (2\beta_1b_1^2 + \beta_r s^2)\dot{\phi}_{xw2} + (2k_1b_1^2 + k_r s^2)\varphi_{xw2} - \\ - 2\beta_1b_1^2\dot{\phi}_{xr2} - 2k_1b_1^2\varphi_{xr2} = \beta_r s(\dot{\eta}_{P2} - \dot{\eta}_{L2}) + k_r s(\eta_{P2} - \eta_{L2}),$$

(9)

$$\begin{aligned}
& (m_{w_2} + 2m_r) \ddot{z}_{w_3} + (2\beta_1 + 2\beta_r) \dot{z}_{w_3} + (2k_1 + 2k_r) z_{w_3} - \\
& - 2\beta_1 \dot{z}_{r2} - 2k_1 z_{r2} - 2\beta_1 a_1 \dot{\phi}_{y_{t2}} - 2k_1 a_1 \phi_{y_{t2}} = \\
& = m_r (\ddot{\eta}_{L3} + \ddot{\eta}_{P3}) + \beta_r (\dot{\eta}_{L3} + \dot{\eta}_{P3}) + k_r (\eta_{L3} + \eta_{P3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_{XW} \ddot{\phi}_{XW3} + (2\beta_1 b_1^2 + \beta_r s^2) \dot{\phi}_{XW3} + (2k_1 b_1^2 + k_r s^2) \phi_{XW3} - \\
& - 2\beta_1 b_1^2 \dot{\phi}_{x_{t2}} - 2k_1 b_1^2 \phi_{x_{t2}} = \beta_r s (\dot{\eta}_{P3} - \dot{\eta}_{L3}) + k_r s (\eta_{P3} - \eta_{L3}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_{w_2} + 2m_r) \ddot{z}_{w_4} + (2\beta_1 + 2\beta_r) \dot{z}_{w_4} + (2k_1 + 2k_r) z_{w_4} - \\
& - 2\beta_1 \dot{z}_{r2} - 2k_1 z_{r2} - 2\beta_1 a_1 \phi_{y_{t2}} - 2k_1 a_1 \phi_{y_{t2}} = \\
& = m_r (\ddot{\eta}_{L4} + \ddot{\eta}_{P4}) + \beta_r (\dot{\eta}_{L4} + \dot{\eta}_{P4}) + k_r (\eta_{L4} + \eta_{P4}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_{XW} \ddot{\phi}_{XW4} + (2\beta_1 b_1^2 + \beta_r s^2) \dot{\phi}_{XW4} + (2k_1 b_1^2 + k_r s^2) \phi_{XW4} - \\
& - 2\beta_1 b_1^2 \dot{\phi}_{x_{t2}} - 2k_1 b_1^2 \phi_{x_{t2}} = \beta_r s (\dot{\eta}_{P4} - \dot{\eta}_{L4}) + k_r s (\eta_{P4} - \eta_{L4}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L(x_1, i_1) \cdot \dot{i}_1 = U_{c2} - i_1 \cdot R - K(x_1, i_1) \times \\
& \times (\dot{z}_k + a_2 \dot{\phi}_{y_k} - b_2 \dot{\phi}_{x_k} - z_{t1} + a_1 \dot{\phi}_{y_{t1}} - b_1 \dot{\phi}_{x_{t1}}),
\end{aligned}$$

$$C\dot{U}_{c1} = -i_1,$$

$$\begin{aligned}
& L(x_2, i_2) \cdot \dot{i}_2 = U_{c2} - i_2 \cdot R - K(x_2, i_2) \times \\
& \times (\dot{z}_k + a_2 \dot{\phi}_{y_k} + b_2 \dot{\phi}_{x_k} - z_{t1} + a_1 \dot{\phi}_{y_{t1}} + b_1 \dot{\phi}_{x_{t1}}),
\end{aligned}$$

$$C\dot{U}_{c2} = -i_2,$$

$$\begin{aligned}
& L(x_3, i_3) \cdot \dot{i}_3 = U_{c3} - i_3 \cdot R - K(x_3, i_3) \times \\
& \times (\dot{z}_k - a_2 \dot{\phi}_{y_k} - b_2 \dot{\phi}_{x_k} - z_{t2} - a_1 \dot{\phi}_{y_{t2}} - b_1 \dot{\phi}_{x_{t2}}),
\end{aligned}$$

$$C\dot{U}_{c3} = -i_3,$$

$$\begin{aligned}
& L(x_4, i_4) \cdot \dot{i}_4 = U_{c4} - i_4 \cdot R - K(x_4, i_4) \times \\
& \times (\dot{z}_k - a_2 \dot{\phi}_{y_k} + b_2 \dot{\phi}_{x_k} - z_{t2} - a_1 \dot{\phi}_{y_{t2}} + b_1 \dot{\phi}_{x_{t2}}),
\end{aligned}$$

$$C\dot{U}_{c4} = -i_4.$$

Система рівнянь (9) є диференційною системою рівнянь другого порядку для візка метровагону. Система враховує сумісну роботу чотирьох електромеханічних амортизаторів, що встановлені у другому ступені ресорного підвішування, збудження що виникають завдяки нерівності колії, параметри шляху та властивості інших елементів ресорного підвішування. Для зв'язку параметрів, система (9) доповнюється алгебраїчними виразами зв'язку (4)–(8).

Для ідентифікації параметрів математичної моделі метровагону було виконано обґрунтування вибору схеми і параметрів ресорного підвішування перспективних вагонів метрополітену [1, 15], які прийнято за базову конструкцію. Масові, інерційні та геометричні характеристики досліджуваної математичної моделі вагону метрополітену прийнято відповідно до рекомендацій, наведених в [1, 15]. Ці характеристики відповідають параметрам вагону метрополітену типу «Русич» (ВАТ «Метровагонмаш» (Митіщинський машинобудівний вагон), Росія). Жорсткості центрального і буксового ступенів ресорного підвішування при використанні в цих ступенях пружин приймалися, як і в [1, 15], за даними заводу виробника. Коефіцієнти загасання  $\beta_{1,2}$  в буксовому і центральному ступенях підвішування визначалися таким чином:

$$\beta_{1,2} = n_{1,2}\beta_{кр1,2},$$

де  $n_{1,2}$  – відносний коефіцієнт загасання, ( $n_1=0,3$ ,  $n_2=0,2$ );  $\beta_{кр1,2}$  – критичний коефіцієнт загасання.

Для моделювання режимів роботи ресорного підвішування розглянуто роботу ресорного підвішування при синусоїдальній нерівності.

Параметри нерівності визначаються виразами, що доповнюють систему (9)

$$\eta_{L1} = A \cos(\omega t),$$

$$\eta_{P1} = A \cos(\omega t - \theta_4),$$

$$\eta_{L2} = A \cos(\omega t - \theta_1),$$

$$\eta_{P2} = A \cos(\omega t - \theta_4 - \theta_1),$$

$$\eta_{L3} = A \cos(\omega t - \theta_2),$$

$$\eta_{P3} = A \cos(\omega t - \theta_4 - \theta_2),$$

$$\eta_{L4} = A \cos(\omega t - \theta_2 - \theta_3),$$

$$\eta_{P4} = A \cos(\omega t - \theta_4 - \theta_2 - \theta_3),$$

(10)

де  $A$  – амплітуда нерівності яка обчислюється виразом, що обирається за рекомендаціями [16],  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  – зсуви фаз коливань між першою та другою колісною парою, між другою та третьою колісною парою, а також на правому та лівому колесах відповідно,  $\omega$  – кутова частота коливань, яка визначається виразом

$$\omega = \frac{2\pi}{L}V, \quad (11)$$

де  $L$  – довжина рейки,  $V$  – швидкість руху.

### 4.3. Моделювання роботи ресорного підвішування метровагону при проходженні синусоїдальної нерівності

Моделювання роботи ресорного підвішування було проведено на швидкостях руху 40 км/год, 60 км/год, 80 км/год та 100 км/год.

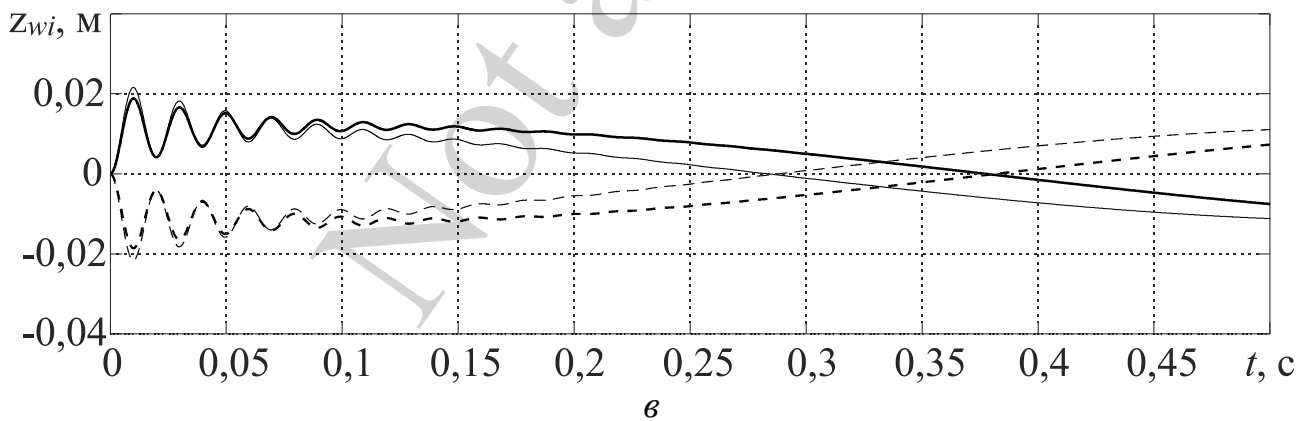
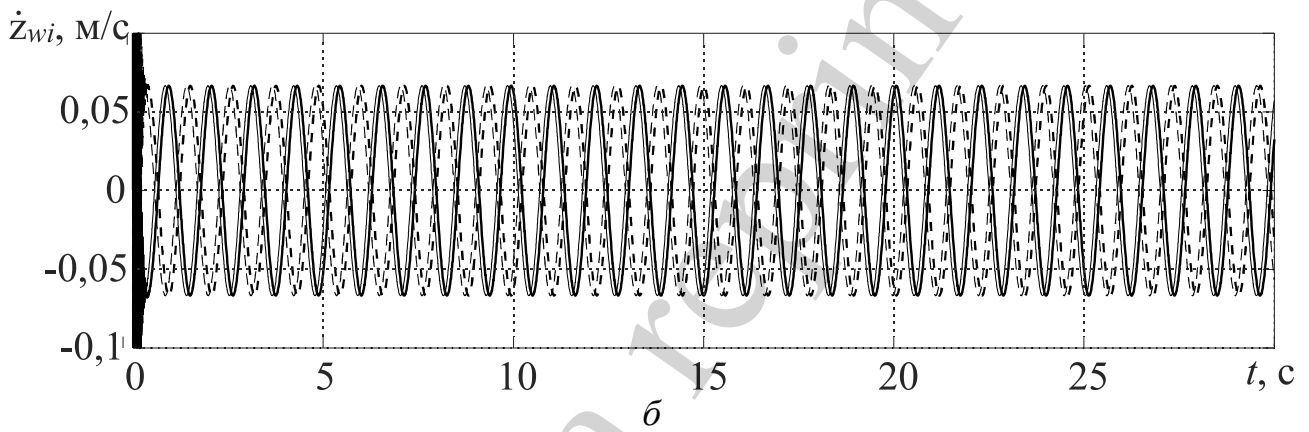
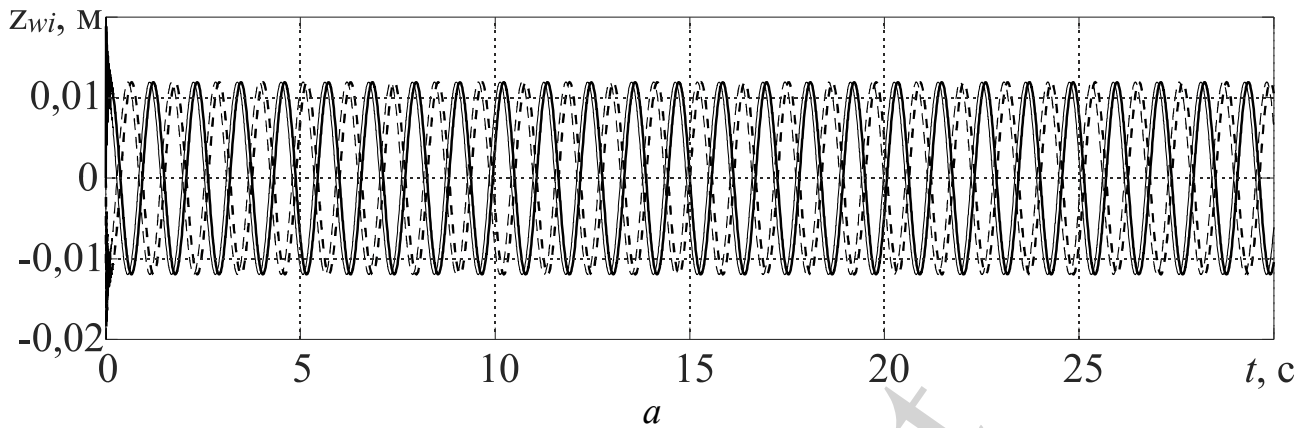
Результати моделювання при швидкостях руху 80 км/год для коливань колісних пар наведено на рис. 6, кузова та візків – рис. 7, а електромеханічних амортизаторів – на рис. 8. Моделювання процесів коливання представлено на протязі 30 с.

Весь час коливань можливо розділити на два основних етапи. В час з початку до близько 0,15 с. спостерігаються вільні коливання механічної частини. Період коливань не залежить від швидкості руху та становить близько 0,02 с., а максимальне значення амплітуди становить 0,011 м для 1 та 3 колісних пар, та 0,01 м для 2 та 4 колісних пар. Коливання 1 та 2 колісних пар близькі за фазами, а 3 та 4 знаходяться у протифазі до них. Максимальне значення швидкостей становить 2,8 м/с для 1 та 3 колісних пар та 2,3 м/с для 2 та 4 колісних пар.

Вимушені коливання колісних пар мають значно більший період коливань, що обумовлено швидкістю руху метровагону. Він зменшується з ростом швидкості з 3 с. при швидкості 40 км/год до 1 с. при швидкості 100 км/год. Амплітуда коливань зростає з 0,01 до 0,013 м. Амплітуда швидкості зростає з 0,03 м/с до 0,1 м/с при збільшенні швидкості руху з 40 км/год до 100 км/год. Такі процеси обумовлені збільшенням частоти зміни нерівності шляху.

Як і для коливань колісних пар в час з початку до близько 0,15 с спостерігаються вільні коливання візків. Період коливань не залежить від швидкості руху та становить близько 0,02 с, амплітуда їх становить близько 0,001 м, а лінійна швидкість має максимальну амплітуду 0,2 м/с. Крім коливань, обумовлених вільними коливаннями колісних пар, наявні також вільні коливання візків, які спостерігаються до 0,25 с з початку моделювання, з максимальною амплітудою 0,02 м та максимальною амплітудою коливання швидкості 0,4 м/с. Період цих коливань становить 0,15 с, його залежність від швидкості відсутня, оскільки він залежить лише від конструкції візка. З 2 по 30 с. процесу моделювання спостерігаються вимушені коливання візків та кузова. Частота їх обумовлена швидкістю руху метровагону, як і частота коливань колісних пар. Як і для коливань колісних пар в час з початку до близько 0,15 с. спостерігаються вільні коливання візків. Період коливань не залежить від швидкості руху та становить близько 0,02 с., амплітуда їх становить близько 0,001 м, а лінійна швидкість має

максимальну амплітуду 0,2 м/с. Лінійна швидкість теж збільшується з 0,025 м/с при 40 км/год до 0,07 м/с при 100 км/год, що обумовлено ростом динамічних сил від нерівностей шляху.



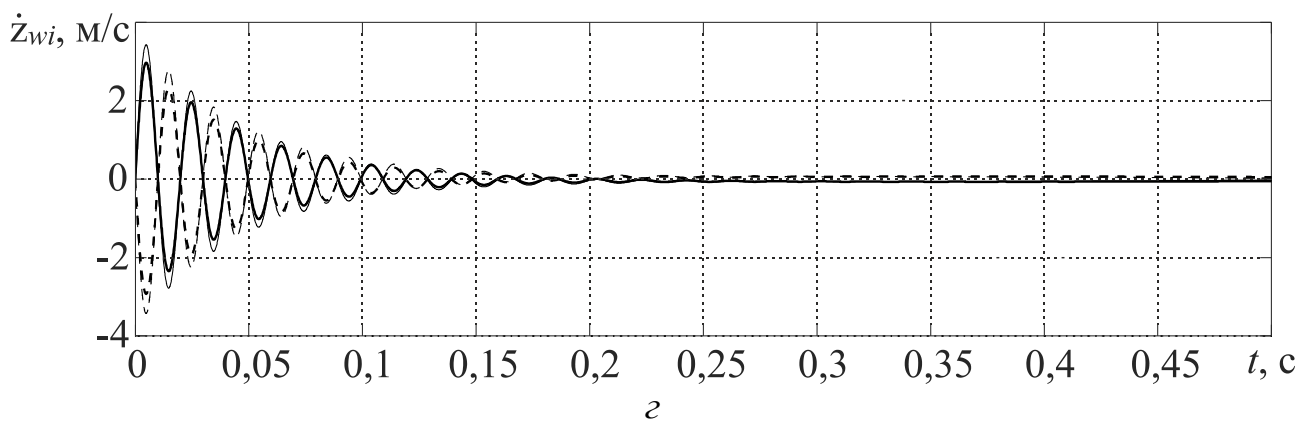
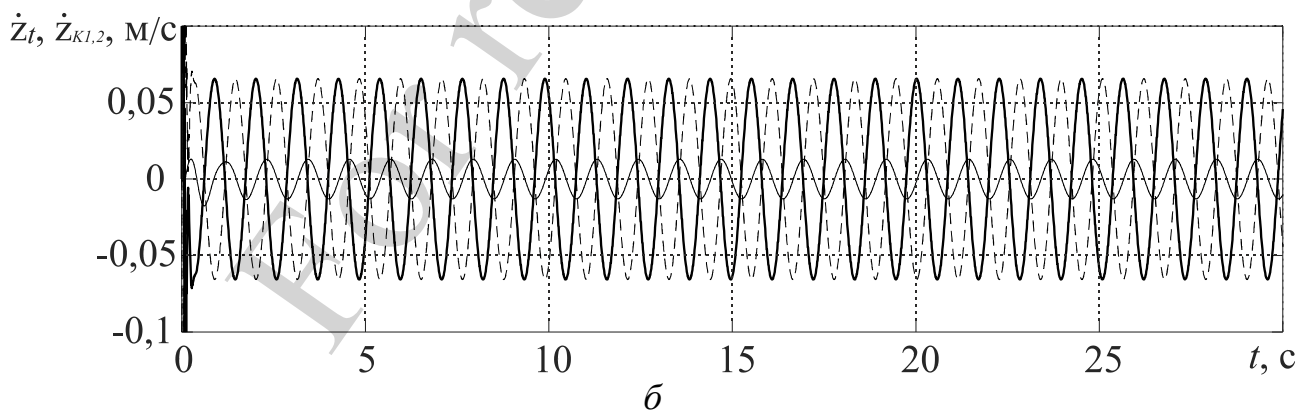
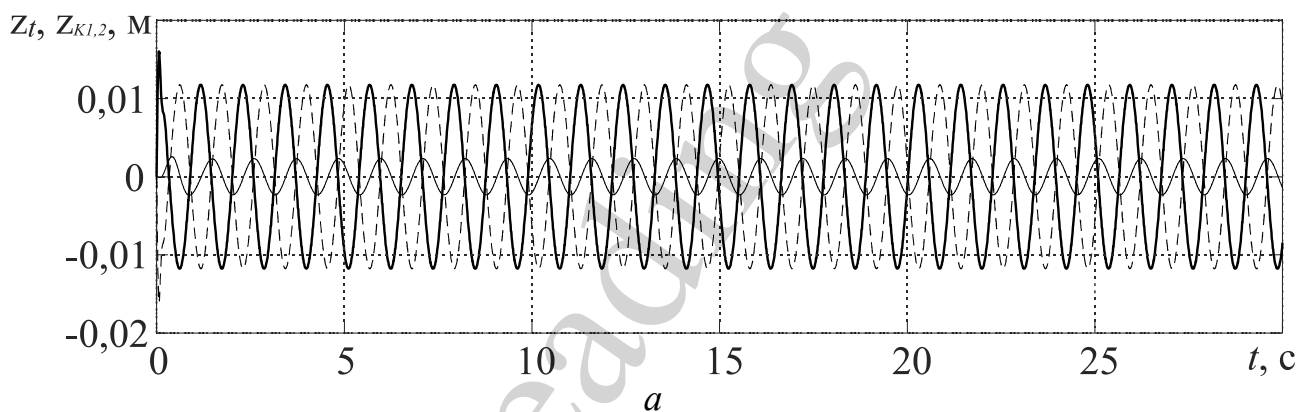


Рис. 6. Результати моделювання коливань колісних пар при швидкості руху 80 км/год: *a* – лінійних переміщень на відрізьку від початку моделювання до 30 с, *б* – лінійних швидкостей від початку моделювання до 30 с, *в* – лінійних переміщень на відрізьку від початку моделювання до 0,5 с, *г* – лінійних швидкостей від початку моделювання до 0,5 с; ——— – Кп1, ———— – Кп2, - - - - - – Кп3, - . - . - - - – Кп4





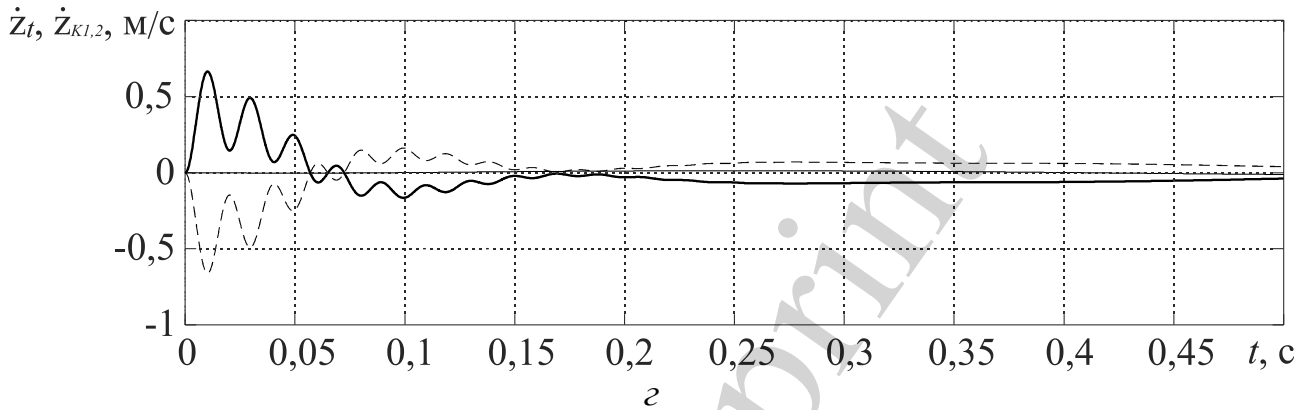
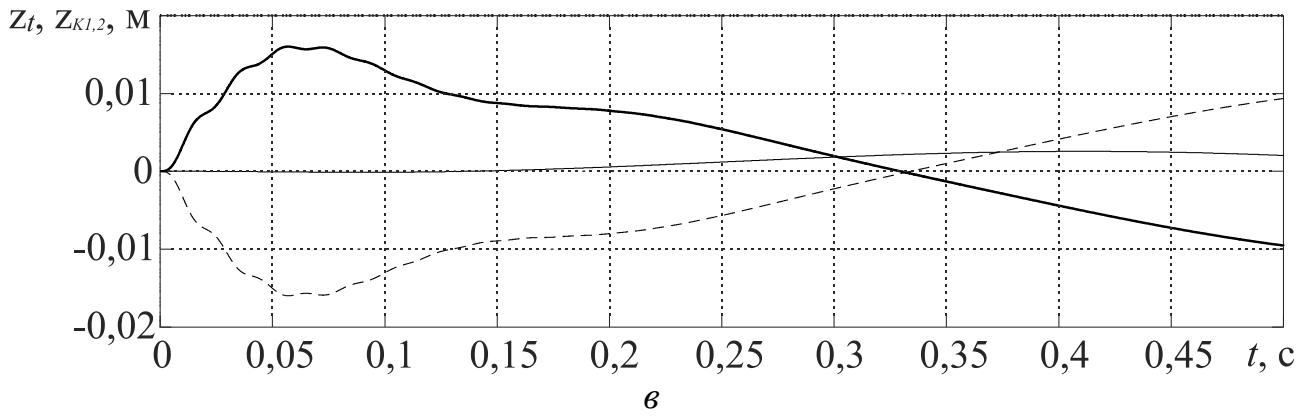
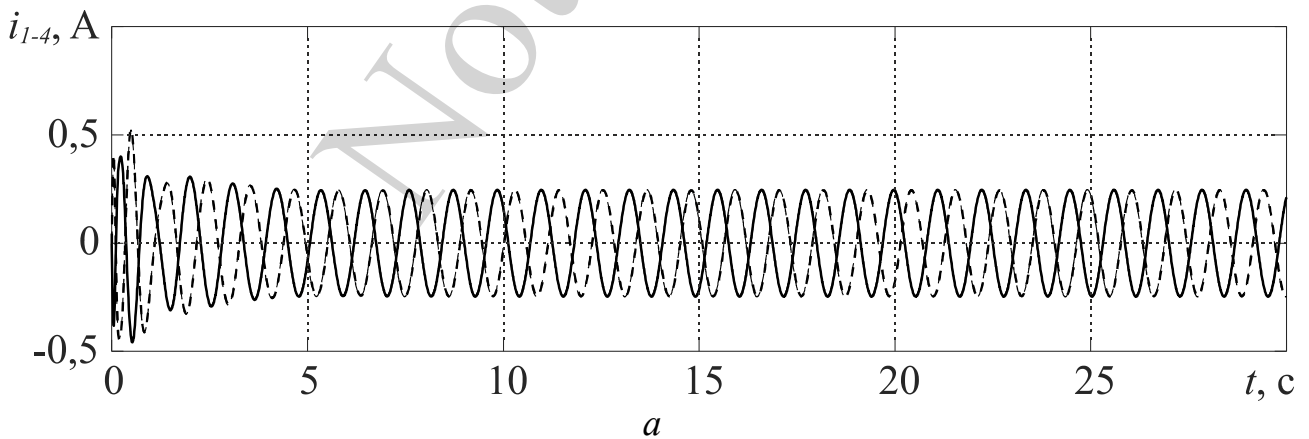


Рис. 7. Результати моделювання коливань кузова та візків при швидкості руху 80 км/год: *a* – лінійних переміщень на відрізку від початку моделювання до 30 с, *б* – лінійних швидкостей від початку моделювання до 30 с, *в* – лінійних переміщень на відрізку від початку моделювання до 0,5 с, *г* – лінійних швидкостей від початку моделювання до 0,5; ——— – Кузов, ————— – Візок, - - - - - Візок 2



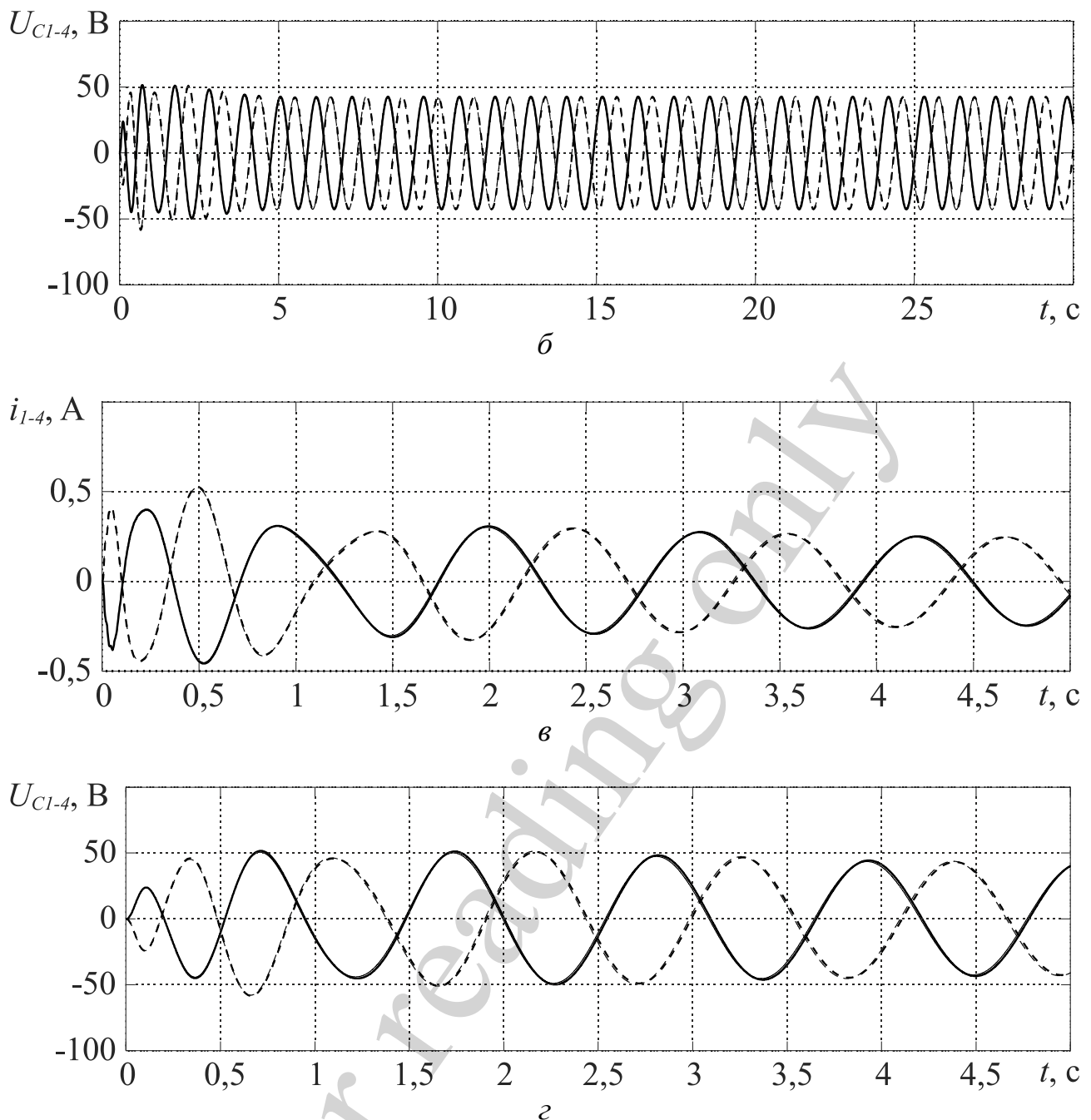


Рис. 8. Результати моделювання електромеханічних амортизаторів при швидкості руху 80 км/год: *a* – струмів на відрізку від початку моделювання до 30 с., *б* – напруг від початку моделювання до 30 с., *в* – струмів на відрізку від початку моделювання до 5 с., *г* – напруг від початку моделювання до 5 с; ——— – EA1, ———— – EA2, - - - - - – EA3, - . - . - – EA4

Амплітуда вимушених коливань кузова значно менша, ніж у візків, у зв'язку з більшою масою кузова та становить 0,002 м при 40 км/год. Ці коливання також носять гармонійний характер та зсунуті на пів фази відносно 1-го візка. Амплітуда коливань збільшується з ростом швидкості до 0,002 м при 100 км/год, а лінійна швидкість з 0,01 м/с при 40 км/год до 0,02 м/с при 100 км/год. Вільні коливання кузова мають незначний характер.

Електромеханічні процеси в електроамортизаторах можливо поділити на три частини. З 0 по 0,5 с. наявні вільні коливання механічної частини, що зумовлені коливаннями візків та кузова. Максимальні амплітуди струмів складають 0,32 А, а напруг – 38 В. Цій складовій властиве затухання. Другою частиною є вільна складова електромагнітних коливань, яка спостерігається з 0 по 3 с. Характер коливань носить гармонійний характер. Третьою частиною є вимушені коливання струмів та напруг. Амплітуда цих коливань значно змінюється з ростом швидкості руху: з 0,01 А та 2 В при 40 км/год до 0,9 А та 115 В при 100 км/год. Коливання носять гармонійний характер. Частота коливань відповідає частоті нерівності шляху.

Електрична потужність електроамортизатора збільшується з 0,018 Вт при 40 км/год до 98 Вт при 100 км/год.

### **5. Обговорення результатів моделювання роботи ресорного підвішування метровагону при проходженні синусоїдальної нерівності**

Отримані результати досліджень обумовлюються наступним. Характер вільної складової коливань колісних пар та візків залежить від власних частот елементів конструкції ресорного підвішування (рис. 6, 7). Фаза коливань залежить від відстані розташувань колісних пар та їх знаходження у візках метровагону.

Характер вимушених коливань обумовлений частотою нерівності, що збуджує коливання, та безпосередньо залежить від швидкості руху – (10) та (11). З ростом швидкості частота коливань зростає.

Перша складова електромеханічних вільних коливань в електроамортизаторах залежить від параметрів ходової частини та обумовлена їх масогабаритними показниками (рис. 8). Друга обумовлюється параметрами електричного кола обмотки електроамортизаторів та опором навантаження. Частота вимушеної складової коливань струму та напруги, як і механічних переміщень, залежить від швидкості руху – (10) та (11).

Зростання амплітуди коливань елементів ходової частини та потужності електроамортизатору обумовлене збільшенням енергії, що поступає в ходову частину від нерівностей шляху.

Завдяки створенню єдиної математичної моделі процесів коливання кузова (9) вагону метрополітену з системами електромеханічного гасіння коливань вдалося визначити вплив характеру нерівностей на електромагнітні процеси в електромеханічному амортизаторі. Визначено залежності струмів та напруг на амортизаторі, а також його потужність.

В розробленій математичній моделі, на відміну від запропонованих в [2], враховано вплив нерівностей колії та сумісну дію амортизаторів. Використання методики по визначенню диференціальної індуктивності, коефіцієнту при протидіючій електрорушійної сили та електромагнітної сили амортизатору, що визначаються за методикою [3], (4)–(6), дозволяє врахувати геометрію магнітного кола електроамортизатору та насичення його частин.

Розроблена модель справедлива для рухомого складу з осьюовою характеристикою  $2_0-2_0$  та двоступеневим ресорним підвішуванням. Ідентифікація параметрів амортизатору обмежена конструкцією, яку наведено в [2, 3].

Оригінальність отриманої математичної моделі, в першу чергу, обумовлюється поєднанням математичних моделей вагону метрополітену і рейкової колії тунелю з математичними моделями, що враховують електромеханічні системи електроамортизатору. Останні створені на підставі досить точних та враховуючих геометрію магнітних систем розрахунків магнітного поля методом скінченних елементів.

Подальшим розвитком математичної моделі може бути синтез збуджуючих нерівностей колії в залежності від типу шляху та узагальнений аналіз якості роботи ходової частини метровагону на підставі узагальнених критеріїв оцінки.

## 6. Висновки

1. На підставі розробленої просторової кінематичної схеми динамічної системи екіпаж – колія для метровагону з осью формулою  $2_0-2_0$  і рейкової колії тунелю створено математичну модель вагону метрополітену, в центральному ступені ресорного підвішування якого використані пружини і електромеханічні гасителі коливань. Модель складається з:

- 17 диференціальних рівнянь другого порядку, які описують роботу механічної частини екіпаж – колія;
- 8 диференціальних рівнянь першого порядку, які описують роботу 4-х електромеханічних амортизаторів;
- 3 поліномів 32 та 63 порядків які описують стан магнітного поля електромеханічних амортизаторів та їх електромагнітну силу;
- 4 алгебраїчних рівнянь зв'язку.

Математична модель системи екіпаж – колія з електромеханічним амортизатором враховує наступне. Повздовжні та поперечні коливання колісних пар візків та кузова вагону. Параметри рейкової колії, електромагнітні особливості електроамортизаторів та збудження, що виникають завдяки нерівності колії. Параметри шляху та властивості інших елементів ресорного підвішування.

2. Проведено ідентифікацію параметрів моделі шляхом визначення диференціальної індуктивності, коефіцієнту при протидіючій електрорушійній силі та електромагнітної сили амортизатору. Встановлені алгебраїчні зв'язки механічної складової моделі (2) з електромеханічними рівняннями електроамортизаторів (3). Математична модель доповнена виразами, що визначають нерівність шляху (10) та збуджують коливання кузова метровагону.

3. Проведено моделювання роботи ресорного підвішування на швидкостях руху 40 км/год, 60 км/год, 80 км/год та 100 км/год. Визначено, що весь час коливань можливо розділити на два основних етапи. В час з початку до близько 0,15 с. спостерігаються вільні коливання механічної частини. Період коливань не залежить від швидкості руху та становить близько 0,02 с., а максимальне значення амплітуда становить 0,011 м для 1 та 3 колісних пар, та 0,01 м для 2 та 4 колісних пар. Вимушені коливання колісних пар мають значно більший період коливань, який обумовлено швидкістю руху метровагону. Він зменшується з ростом швидкості з 3 с. при швидкості 40 км/год до 1 с. при швидкості 100 км/год. Електромеханічні процеси в електроамортизаторах можливо поділити на три частини. З 0 по 0,5 с. наявні вільні коливання механічної частини,

що спричинені коливаннями візків та кузова. Максимальні амплітуди струмів складають 0,32 А , а напруг – 38 В. Цій складовій властиве затухання. Другою частиною є вільна складова електромагнітних коливань, що спостерігаються з 0 по 3 с. Коливання носять гармонійний характер. Третю частину складають вимушені коливання струмів та напруг. Амплітуда цих коливань значно змінюється з ростом швидкості руху з 0,01 А та 2 В при 40 км/год до 0,9 А та 115 В при 100 км/год. Коливання носять гармонійний характер. Частота коливань відповідає частоті нерівності шляху. Електрична потужність електроамортизатора збільшується з 0,018 Вт при 40 км/год до 98 Вт при 100 км/год.

### Література

1. Сердобинцев, Е. В., Хан, Й. В. (2013). Вертикальные колебания метровагона с пневмоподвешиванием. Мир транспорта, 2, 78–84.
2. Liubarskyi, B., Lukashova, N., Petrenko, O., Yeritsyan, B., Kovalchuk, Y., Overianova, L. (2019). Procedure for modeling dynamic processes of the electromechanical shock absorber in a subway car. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5 (5 (101)), 44–52. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.181117>
3. Liubarskyi, B., Lukashova, N., Petrenko, O., Pavlenko, T., Iakunin, D., Yatsko, S., Vashchenko, Y. (2019). Devising a procedure to choose optimal parameters for the electromechanical shock absorber for a subway car. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4 (5 (100)), 16–25. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.176304>
4. Сердобинцев, Е., Званцев, П., Хан, Й. В. (2014). Выбор параметров метровагона с пневморессорами. Мир транспорта, 1, 34–41.
5. Лукашова, Н. П., Павленко, Т. П., Любарський, Б. Г., Петренко, О. М. (2018). Аналіз конструкцій ресорних підвішувань рейкового міського електрорухомого складу. Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць, 5 (51), 65–68. doi: <https://doi.org/10.26906/sunz.2018.5.065>
6. Пассажи́рское вагоностроение. Каталог. Крюковский вагоностроительный завод. URL: <http://www.kvsz.com/images/catalogs/tsn.pdf>
7. Kolpakhch'yan, P. G., Shcherbakov, V. G., Kochin, A. E., Shaikhiev, A. R. (2017). Sensorless control of a linear reciprocating switched-reluctance electric machine. Russian Electrical Engineering, 88 (6), 366–371. doi: <https://doi.org/10.3103/s1068371217060086>
8. Forster, N., Gerlach, A., Leidhold, R., Buryakovskiy, S., Masliy, A., Lyubarskiy, B. G. (2018). Design of a Linear Actuator for Railway Turnouts. IECON 2018 - 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 463–470. doi: <https://doi.org/10.1109/iecon.2018.8591471>
9. Сергиенко, А. Н. (2013). Математическая модель колебаний в ходовой системе автомобиля с электромагнитным демпфированием. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Транспортне машинобудування, 31 (1004), 86–93.
10. Gysen, B. L. J., van der Sande, T. P. J., Paulides, J. J. H., Lomonova, E. A. (2011). Efficiency of a Regenerative Direct-Drive Electromagnetic Active

Suspension. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 60 (4), 1384–1393. doi: <https://doi.org/10.1109/tvt.2011.2131160>

11. Sulym, A. O., Fomin, O. V., Khozia, P. O., Mastepan, A. G. (2018). Theoretical and practical determination of parameters of on-board capacitive energy storage of the rolling stock. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, 5, 79–87. doi: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2018-5/8>

12. Васьковський, Ю. М., Пода, М. В. (2020). Оцінка енергетичної ефективності систем рекуперації енергії механічних коливань транспортних засобів. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: «Електричні машини та електромеханічне перетворення енергії», 3 (1357), 52–55. doi: <https://doi.org/10.20998/2409-9295.2020.3.09>

13. Nikonov, O., Kyrychenko, I., Shuliakov, V. (2020). Simulation modeling of external perturbations affecting wheeled vehicles of special purpose. Proceedings of The Third International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2020). Zaporizhzhia, 547–556. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2608/paper42.pdf>

14. Uspensky, B., Avramov, K., Liubarskyi, B., Andrieiev, Y., Nikonov, O. (2019). Nonlinear torsional vibrations of electromechanical coupling of diesel engine gear system and electric generator. Journal of Sound and Vibration, 460, 114877. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114877>

15. Савоськин, А. Н., Сердобинцев, Е. В., Ибраев, Б. М. (2009). Колебания вагона рельсового автобуса. Мир транспорта, 1, 50–55.

16. Рубан, В. Г., Матва, А. М. (2009). Решение задач динамики железнодорожных экипажей в пакете Mathcad. Ростов-на-Дону, 100.