Science & Philosophy Volume 8(2), 2020, pp. 181-192

A logical framework for democratic decision-making: epistemic logic and liquid democracy

Simone Cuconato♦

Abstract

Since Hintikka's epistemic logic, the logic of knowledge, has been a subject of research in philosophy, computer science, artificial intelligence and game theory. This paper presents a framework of dynamic epistemic logic capable of investigating interactive voting decisions in liquid democracy.

Keywords: epistemic logic, applied logic to social and economic sciences, liquid democracy, multiagent systems, game theory.

Sunto

Dalla logica epistemica di Hintikka, la logica della conoscenza, è stata oggetto di ricerca in filosofia, informatica, intelligenza artificiale e teoria dei giochi. Questo articolo presenta un *framework* di logica epistemica dinamica in grado di indagare le decisioni interattive di voto in democrazia liquida.

Parole chiave: logica epistemica, logica applicata alle scienze economiche e sociali, democrazia liquida, sistemi multi-agente, teoria dei giochi.

♦ *Università della Calabria,* Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica, Elettronica e Sistemistica – DIMES, Via P.Bucci, 87036, Rende (CS), Italy. simone.cuconato@unical.it

† Received on December 3th, 2020. Accepted on December 17th, 2020. Published on December 31st, 2020. doi: 10.23756/sp.v8i2.558. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765.

1. Introduzione

La creazione di modelli logico-matematici delle capacità deduttive degli agenti razionali è da alcuni decenni percepita come un problema urgente nell'ambito della teoria della decisione. La teoria della decisione si occupa del ragionamento alla base delle scelte di un agente, sia che si tratti di una scelta banale tra l'ordinare una pizza o un hamburger per cena, sia che si tratti di una scelta più delicata sull'opportunità di intraprendere una carriera lavorativa particolarmente impegnativa. Secondo una visione standard, la teoria della decisione si divide in tre rami principali [6]: la teoria delle decisioni individuali (o semplicemente teoria delle decisioni), la teoria delle decisioni interattive (nota anche come teoria dei giochi) e la teoria della scelta sociale. Nonostante siano presenti delle significative sovrapposizioni, la tripartizione è fondata su una *condizione di razionalità* (*cr*) ed è radicata in tre domande distinte, rispettivamente:

> (*cr*): ciò che un agente sceglie di fare in una data occasione è completamente determinato dalle sue convinzioni, desideri o valori e le linee d'azione alternative a sua disposizione hanno una conseguenzialità incerta.
> (1) quali sono i vincoli di "razionalità" da imporre a un individuo?
> (2) qual è una soluzione "razionale" a un'interazione tra agenti?
> (3) come aggregare le preferenze "razionali" individuali in una collettività che esprime la preferenza della società nel suo insieme?

I criteri che definiscono la razionalità di una decisione sono fortemente radicati nel paradigma della razionalità come coerenza che unisce i fondamenti della teoria della decisione e della teoria della probabilità a quelli della logica. Il rapporta fra la logica e la teoria della razionalità economica e sociale ha prodotto, a partire dallo scorso secolo, una notevole mole di ricerca interdisciplinare su almeno cinque problemi fondamentali [3]: il *paradosso di Condorcet*; il *problema del dilemma discorsivo*; il *problema dell'onniscienza logica*; l'applicazione della logica alla teoria dei giochi e la formalizzazione del concetto di "conoscenza condivisa".

Il seguente articolo elabora un *framework* logico in grado di analizzare il metodo di voto noto come *liquid democracy.* La democrazia liquida [1] è una forma di processo decisionale di gruppo in cui gli elettori possono votare direttamente o delegare il proprio voto ad altri elettori. Una delle ragioni del successo della democrazia liquida è il fatto di essere vista come un compromesso pratico tra democrazia diretta e democrazia rappresentativa. È stata utilizzata e resa popolare da campagne per le riforme democratiche (ad esempio *Make Your Laws* negli Stati Uniti) e da partiti politici (come *Demoex* in Svezia e *Piratenpartei* in Germania) per coordinare il comportamento dei rappresentanti del partito nelle assemblee locali e nazionali. In *liquid democracy*, per ogni *evento* presentato da votare, ogni agente può esprimere il proprio voto oppure può delegare il proprio voto a un altro agente, un delegato, e quell'agente, a sua volta, può delegare a un altro agente e così via. Questo differenzia la democrazia liquida dal voto per *delega standard* [9], in cui i delegati non possono delegare ulteriormente il proprio voto (figura 1).

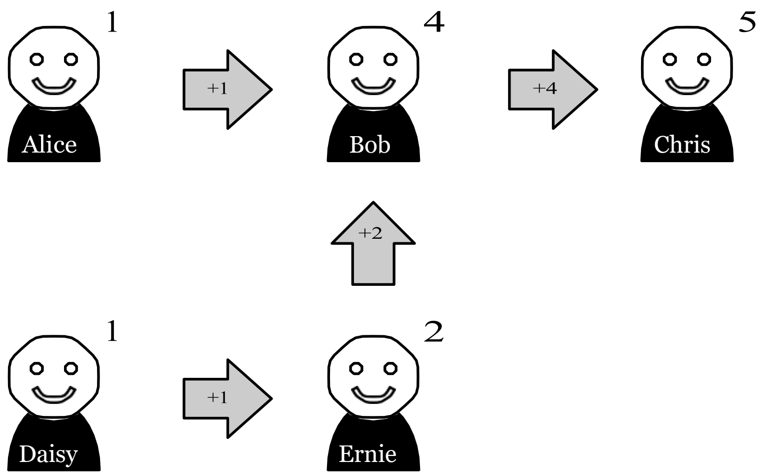

Figura 1: Esempio di delega transitiva: Alice delega a Bob, Daisy delega a Ernie, Ernie delega il suo voto a Bob, che delega tutti i voti di Alice, Daisy e Ernie insieme al suo voto a Chris, che ottiene un potenziale peso di 5 voti[1].

Grazie all'introduzione di due nuovi predicati "vota" e "delega" e alle nozioni di "struttura dinamica", "scenario epistemico", "condizione epistemica", "rete sociale" e "propagazione di opinione", sarà presentato un *framework* logico innovativo in grado di indagare le decisioni interattive di voto nei sistemi multi-agente in democrazia liquida [2].

2. Logica epistemica: sintassi e semantica

Sintassi. La logica epistemica $[4, 5, 7, 10, 11, 12]$ è una estensione della logica classica che ha come oggetto di studio gli enunciati di credenza e di sapere. Esaminiamo il linguaggio logico del primo ordine $\mathcal{L}$. L'*alfabeto* di $\mathcal{L}$ è composto dai seguenti insiemi di simboli:

[1] Immagine tratta da [1].

- lettere proposizionali: $p_1, p_2, p_3, \ldots$
- variabili individuali: $x, y, z, \ldots$
- costanti individuali: 1,2,3, ...
- costanti predicative: P_k^n
- connettivi vero-funzionali: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow, \leftrightarrow$
- operatori modali: $\Box$, $\Diamond$
- operatori epistemici: B, K
- quantificatori esistenziali: $\forall, \exists$
- parentesi: (,)

L'*insieme delle formule* φ di $\mathcal{L}$ è definito come segue:

$$\varphi ::= p|\neg p|(\varphi \wedge \varphi)|(\varphi \vee \varphi)|\Box\varphi|K_i\varphi|B_i\varphi^1$$

Semantica. Le formule associate agli operatori modali ed epistemici verranno valutate vere o false in relazione ad un particolare modello epistemico $\mathcal{M}$. Nello specifico il modello sarà $\mathcal{M} = \langle$W,R$_{K_{1-n}}$, R$_{B_{1-n}}$,I$\rangle$[2], dove W sta per un insieme non vuoto di *mondi possibili*, R$_K$ e R$_B$[3] per una relazione binaria in W e I per la funzione che, dato un mondo $w \in$ W, associa uno e un solo valore di verità (T o F) ad ogni formula atomica di $\mathcal{L}$. Chiameremo la tripla ordinata $\langle$W, R$_K$, R$_B\rangle$ *frame epistemico*.

Definiamo la *verità di una formula nel mondo* w *del modello* $\mathcal{M}$ attraverso le seguenti clausole:

- $\mathcal{M}, w \vDash p$ iff $w \in \mathrm{I}(p)$
- $\mathcal{M}, w \vDash \neg p$ iff $w \notin \mathrm{I}(p)$
- $\mathcal{M}, w \vDash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ iff $\mathcal{M}, w \vDash \varphi_1$and $\mathcal{M}, w \vDash \varphi_2$
- $\mathcal{M}, w \vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ iff $\mathcal{M}, w \vDash \varphi_1$or $\mathcal{M}, w \vDash \varphi_2$
- $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ iff $(om\ w')(w\mathrm{R}w'$then $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi)$[4]
- $\mathcal{M}, w \vDash K_i\varphi$ iff $(om\ w')(w\mathrm{R}_K w'$then $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi)$
- $\mathcal{M}, w \vDash B_i\varphi$ iff $(om\ w')(w\mathrm{R}_B w'$then $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi)$

[1] In dettaglio, data una formula φ, $K_i\varphi$ sta per «L'agente cognitivo i sa che φ», mentre $B_i\varphi$ sta per «L'agente cognitivo i crede che φ».

[2] Poiché la credenza è una condizione necessaria perché si abbia conoscenza, assumeremo che R$_K$ sia un sottoinsieme di R$_B$:R$_K \subseteq$ R$_B$.

[3] In generale, la relazione di accessibilità R nei calcoli modali è così definita: R è $seriale$ iff $(om\ w)(ex\ w')(wRw')$; R è $riflessiva$ iff $(om\ w)(wRw)$; R è $simmetrica$ iff $(om\ w)(om\ w')(wRw'$ iff $wRw')$;
R è $transitiva$ iff $(om\ w)(om\ w')(om\ w'')(wRw'$ and $w'Rw''$then $wRw'')$.

[4] $\mathcal{M}, w \vDash\Diamond\ \varphi$ iff $(ex\ w')(w\mathrm{R}w'$and $\mathcal{M}, w' \vDash \varphi)$.

3. Costruzione del *framework*

Sintassi. Per trattare in modo adeguato il concetto di democrazia liquida estendiamo il linguaggio $\mathcal{L}$ per ottenere un linguaggio $\mathcal{L}^+$. L'*alfabeto* di $\mathcal{L}^+$ contiene due nuovi predicati a due posti:

- $\mathcal{V}$, da leggersi "vota"
- $\mathcal{D}$, da leggersi "delega"

L'*insieme delle formule* ψ di $\mathcal{L}^+$ è definito come segue:

$$\psi ::= \Gamma_i^{K\oplus B} p_{w_i} \big| \neg\psi | (\psi \wedge \psi) | \psi \vee \psi$$

Dove $\Gamma_i^{K\oplus B} p_{w_i}$ indica che «L'agente cognitivo i sa (K) o crede (B) p_{w_i}», con p_{w_i} avente la seguente forma:

$$p_{w_i} =_{df} \mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no} \text{ oppure } \mathcal{D}_{i\oplus j}^{l}$$

Con $\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}$ intendiamo che i o j $vota$ yes o no, mentre con $\mathcal{D}_{i\oplus j}^{l}$ intendiamo che i o j $delega$ il voto a l. Di conseguenza, in $\mathcal{L}^+$ l'insieme delle formule ψ è sempre costituito da *formule epistemiche*.
Specifichiamo inoltre l'irriflessività di $\mathcal{D}$:

- $\mathcal{D}$ è irriflessiva iff not $\mathcal{D}_i^i$.

Semantica. Il modello per $\mathcal{L}^+$ è sempre $\mathcal{M} = \langle$W,R$_{K_{1-n}}$, R$_{B_{1-n}}$,I$\rangle$. Naturalmente, in questo caso l'interpretazione I associa uno dei due valori di verità (T/F) come segue:

- $K_i\big(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\big) = \mathrm{T/F}$
- $B_i\big(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\big) = \mathrm{T/F}$
- $K_i\big(\mathcal{D}_{i\oplus j}^{l}\big) = \mathrm{T/F}$
- $B_i\big(\mathcal{D}_{i\oplus j}^{l}\big) = \mathrm{T/F}$

Definiamo la *verità di una formula nel mondo w del modello* $\mathcal{M}$ attraverso le seguenti clausole:

- $\mathcal{M}, w \vDash \Gamma_i^{K\oplus B} P_{w_i}$ iff $K_i\big(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\big)$ or $B_i\big(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\big)$ or $K_i\big(\mathcal{D}_{i\oplus j}^{l}\big)$ or $B_i\big(\mathcal{D}_{i\oplus j}^{l}\big)$
- $\mathcal{M}, w \vDash \neg\psi$ iff $\mathcal{M}, w \nvDash \psi$
- $\mathcal{M}, w \vDash (\psi_1 \wedge \psi_2)$ iff $\mathcal{M}, w \vDash \psi_1$and $\mathcal{M}, w \vDash \psi_2$
- $\mathcal{M}, w \vDash (\psi_1 \vee \psi_2)$ iff $\mathcal{M}, w \vDash \psi_1$or $\mathcal{M}, w \vDash \psi_2$

Struttura. Consideriamo la seguente struttura $\mathcal{S} = \langle A, W, P_{w_i}, S, R \rangle$, dove:

- $A = \{1,2,3, \dots\}$ è un insieme non vuoto di agenti;
- $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ è un insieme non vuoto di mondi epistemici ($|W| = m \in \mathbb{N}$);
- $P_{w_i} = \left\{p!, p_{1_{w_i}}, \dots, p_{m_{w_i}}\right\}$ è un insieme non vuoto di proposizioni $\left(\left|P_{w_i}\right| = i \in \mathbb{N}\right)$;
- $S_{w_i} = \left\{s_{1_{w_i}}, \dots, s_{m_{w_i}}\right\}$ è un insieme di scenari epistemici $\left(S_{w_i} \in P_{w_1} \text{ and } \left|S_{w_i}\right| = |A|\right)$;
- $R_{w_i} = \left\{r^1_{1_{w_i}}, \dots, r^n_{m_{w_i}}\right\}$ è un insieme di reti sociali $\left(\left|R_{w_i}\right| = \left|S_{w_i}\right|\right)$

$\mathcal{S}$ è una struttura dinamica, una struttura nella quale si verificano *mondi possibili epistemici* W. In ciascun mondo epistemico ogni agente: *i*) possiede uno *scenario epistemico* S, ossia una serie di *credenze dinamiche* su sé stesso e sugli altri agenti; *ii*) non eredita le credenze errate nel primo mondo, tuttavia, ciò non vuol dire che gli agenti non possano avere nuove credenze; e *iii*) appartiene ad una *rete sociale*, un gruppo di agenti connessi tra loro da legami conoscitivi, e la rete non è ereditaria di mondo in mondo. Naturalmente, l'operatori epistemico *dinamico* è B, mentre l'operatore del sapere K è un operatore *statico*. A è l'insieme degli agenti della struttura, mentre P_{w_1} è l'insieme delle proposizioni epistemiche *iniziali* possedute da ciascun individuo appartenente ad A. Nello specifico, ogni agente ha delle *conoscenze di base* $p!$ e delle credenze o conoscenze precise su sé stesso e gli altri agenti $p_{i_{w_i}}$. Mentre $p_{i_{w_i}}$ sappiamo già essere uguale per definizione a $\mathcal{V}^{yes \oplus no}_{i \oplus j}$ oppure $\mathcal{D}^{l}_{i \oplus j}$, al contrario per $p!$ intendiamo:

$$p! =_{df} \bigwedge_{i \in A} K_i(\Sigma)$$

Ogni individuo i che appartiene ad A conosce la *condizione epistemica* Σ. Dove a sua volta per Σ intendiamo quattro *sottocondizioni* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

- α: in $\mathcal{S}$ si ha una *maggioranza assoluta* quando il voto *yes* o il voto *no* prende il $50\% + 1$ di voti;
- β: se non si verifica in w_1 una maggioranza assoluta si passerà ad un mondo epistemico successivo w_2 ed eventualmente a w_3, w_4, ecc.;
- γ: ogni qual volta si effettua il passaggio ad un mondo epistemico successivo si verifica una situazione che chiameremo "*propagazione di opinione*". Per propagazione di opinione intendiamo il fatto che ogni agente all'interno della struttura può modificare il proprio voto *iff* la credenza relativa al voto appena dato è diversa da quella della

maggioranza relativa degli agenti appartenenti alla propria rete sociale. Formalmente:

- $B_i\left(\mathcal{V}_i^{yes}\right)_{yes}^{no}$;
- $B_i(\mathcal{V}_i^{no})_{no}^{yes}$;
- $B_i\left(\mathcal{D}_i^j\right)_j^l$

- δ: indicheremo il passaggio da credenza a conoscenza come segue:

$$[\uparrow_B]K_i\left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\right) =_{df} \text{da } B_i\left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\right) \text{ a } K_i\left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\right)$$

dove il cambiamento da credenza a conoscenza $[\uparrow_B]K_i$ può verificarsi *iff* almeno il 75% degli agenti appartenenti alla stessa rete sociale sa di votare *yes* o *no*. Formalmente la $verità\ di$ $[\uparrow_B]K_i\left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\right)$ $nel\ mondo\ w\ del\ modello\ \mathcal{M}$ sarà:

$\mathcal{M}, w \vDash [\uparrow_B]K_i\left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\right)$ iff $\forall i$
$\wedge\ (om\ w^*)\left(i \in A \text{ and } w\mathrm{R}_K w^* \text{then } \mathcal{M}, w^* \vDash \left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes\oplus no}\right)\right)$

Inoltre, indicheremo con:

- $[\uparrow_B]K_i\left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{yes}\right)_{yes}^{no}$;
- $[\uparrow_B]K_i\left(\mathcal{V}_{i\oplus j}^{no}\right)_{no}^{yes}$

il passaggio da credenza a conoscenza e il relativo cambiamento di opinione da parte di un agente di A.

Posta la condizione epistemica Σ possiamo ora definire l'*operatore di transizione di opinione* μ:

Definizione 1 (operatore di transizione di opinione) Data una struttura $\mathcal{S}$ e una proposizione $p_{i_{w_i}} \in P_{w_i}$, l'operatore di transizione di opinione μ definirà la transizione di opinione come segue:

$$\mu p'_{1_{w_i}}, p'_{2_{w_i}}, \dots, p'_{m_{w_i}} \longleftarrow p_{1_{w_i}}, p_{2_{w_i}}, \dots, p_{m_{w_i}}$$

Nello specifico, μ definirà il passaggio secondo le sottocondizioni γ e δ:

1. $\gamma.\ p'_{i_{w_i}} = [\gamma]p_{i_{w_i}}$
2. $\delta.\ p'_{i_{w_i}} = [\delta]p_{i_{w_i}}$
3. $\gamma + \delta.\ p'_{i_{w_i}} = [\gamma + \delta]p_{i_{w_i}}$
4. not γ and not δ. $p'_{i_{w_i}} = p_{i_{w_i}}$

Algebricamente:

$$\mu p'_{i_{w_i}} \leftarrow p_{i_{w_i}} \equiv \left\{ \begin{array}{c} p'_{i_{w_i}} = [\gamma] p_{i_{w_i}} \text{ se vale } \gamma \\ p'_{i_{w_i}} = [\delta] p_{i_{w_i}} \text{ se vale } \delta \\ p'_{i_{w_i}} = [\gamma + \delta] p_{i_{w_i}} \text{ se vale } \gamma + \delta \\ p'_{i_{w_i}} = p_{i_{w_i}} \text{ se vale not } \gamma \text{ and not } \delta \end{array} \right\}$$

Ad esempio, data la proposizione epistemica $p_{1_{w_i}} = B_i(\mathcal{V}_i^{yes})$ l'operatore di transizione di opinione μ trasformerà la proposizione nel seguente modo:

$$\mu p'_{1_{w_i}} \leftarrow B_i(\mathcal{V}_i^{yes}) \equiv \left\{ \begin{array}{c} p'_{1_{w_i}} = B_i(\mathcal{V}_i^{yes})_{yes}^{no} \text{ se vale } \gamma \\ p'_{1_{w_i}} = [\uparrow_B] K_i(\mathcal{V}_i^{yes}) \text{ se vale } \delta \\ p'_{1_{w_i}} = [\uparrow_B] K_i(\mathcal{V}_i^{yes})_{yes}^{no} \text{ se vale } \gamma + \delta \\ p'_{1_{w_i}} = B_i(\mathcal{V}_i^{yes}) \text{ se vale not } \gamma \text{ and not } \delta \end{array} \right\}$$

4. Esempio di $\mathcal{S}$

Consideriamo la seguente struttura $\mathcal{S} = \langle A, W, P_{w_{1,2}}, S_{w_{1,2}}, R_{w_{1,2}} \rangle$:

- $A = \{1, \ldots, 8\}$
- $W = \{w_1, w_2\}$
- $P_{w_1} = \left\{p!, p_{1_{w_1}}, \ldots, p_{17_{w_1}}\right\}$
- $S_{w_1} = \left\{s_{1_{w_1}}, \ldots, s_{8_{w_1}}\right\}$
- $R_{w_1} = \left\{r_{1_{w_1}}, \ldots, r_{8_{w_1}}\right\}$

$\boldsymbol{w_1}$:

P_{w_1}:

$$\forall_i \in A, \psi_i: \left\{ \begin{array}{c} \bigwedge_{i \in A} K_i(\Sigma), K_1(\mathcal{V}_1^{yes}), B_1(\mathcal{V}_2^{yes}), B_1(D_5^2), \\ K_2(D_2^7), B_2(D_5^2), K_3(\mathcal{V}_3^{no}), B_3(\mathcal{V}_4^{no}), \\ B_4(\mathcal{D}_4^3), B_4(\mathcal{V}_3^{no}), B_5(D_5^2), B_5(\mathcal{V}_4^{no}), B_6(V_6^{no}), \\ B_6(D_5^1), K_7(\mathcal{V}_7^{yes}), B_8(V_8^{no}), B_8(\mathcal{V}_7^{no}), B_8(\mathcal{V}_1^{yes}) \end{array} \right\}$$

$\boldsymbol{S_{w_1}}$:
$s_{1_{w_1}}: K_1(\mathcal{V}_1^{yes}), B_1(\mathcal{V}_2^{yes}), B_1(D_5^2)$;
$s_{2_{w_1}}: K_2(D_2^7), B_2(D_5^2)$;
$s_{3_{w_1}}: K_3(\mathcal{V}_3^{no}), B_3(\mathcal{V}_4^{no})$;
$s_{4_{w_1}}: B_4(\mathcal{D}_4^3), B_4(\mathcal{V}_3^{no})$;
$s_{5_{w_1}}: B_5(D_5^2), B_5(\mathcal{V}_4^{no})$;
$s_{6_{w_1}}: B_6(V_6^{no}), B_6(D_5^1)$;
$s_{7_{w_1}}: K_7(\mathcal{V}_7^{yes})$;
$s_{8_{w_1}}: B_8(V_8^{no}), B_8(\mathcal{V}_7^{no}), B_8(\mathcal{V}_1^{yes})$

$\boldsymbol{R_{w_1}}$:
$R_{1_{w_1}}: r_1^{1,2,5}$
$R_{2_{w_1}}: r_2^{2,5}$
$R_{3_{w_1}}: r_3^{3,4}$
$R_{4_{w_1}}: r_4^{4,3}$
$R_{5_{w_1}}: r_5^{5,2,4}$
$R_{6_{w_1}}: r_6^{6,5}$
$R_{7_{w_1}}: r_7^{7}$
$R_{8_{w_1}}: r_8^{8,1,7}$

In W_1, dopo la prima votazione sia il *sì* – grazie a i voti di 1,2,5,7 – che il *no* – grazie a i voti di 3,4,6,8 – hanno preso quattro voti. Tuttavia, in R_8 esistono le condizioni affinché si possa verificare una *propagazione di opinione* e il *passaggio da credenza a conoscenza*. Infatti, poiché l'agente 7 e l'agente 1 sanno di votare *yes*, è possibile applicare le sottocondizioni γ e δ alla proposizione dell'agente 8:

$$\mu p'_{i_{w_2}} \leftarrow B_8(V_8^{no}) \equiv \left\{ p'_{i_{w_2}} = [\uparrow_B] K_8(\mathcal{V}_8^{yes})_{yes}^{no} \text{ se vale } \gamma + \delta \right\}$$

In questo modo, il passaggio al mondo epistemico successivo W_2 segna anche un equilibrio diverso tra i voti a favore del *sì* e del *no*:

- $A = \{1, \dots, 8\}$

- $W = \{w_1, w_2\}$
- $P_{w_2} = \left\{p!, p_{1_{w_2}}, \dots, p_{11_{w_2}}\right\}$
- $S_{w_2} = \left\{s_{1_{w_2}}, \dots, s_{8_{w_2}}\right\}$
- $R_{w_2} = \left\{r_{1_{w_2}}, \dots, r_{8_{w_2}}\right\}$

$\boldsymbol{w_2}$:

$\boldsymbol{P_{w_2}}$:

$$\forall_i \in A, \psi_i: \left\{\begin{matrix} \bigwedge_{i \in A} K_i(\Sigma), K_1\left(\mathcal{V}_1^{yes}\right), B_1(D_5^2), \\ K_2(D_2^7), B_2(D_5^2), K_3(\mathcal{V}_3^{no}), \\ B_4(\mathcal{D}_4^3), B_4(\mathcal{V}_3^{no}), B_5(D_5^2), B_6(V_6^{no}), \\ K_7\left(\mathcal{V}_7^{yes}\right), K_8\left(V_8^{yes}\right) \end{matrix}\right\}$$

$\boldsymbol{S_{w_2}}$:
$s_{1_{w_2}}: K_1\left(\mathcal{V}_1^{yes}\right), B_1\left(\mathcal{V}_2^{yes}\right);$
$s_{2_{w_2}}: K_2(D_2^7), B_2(D_5^2);$
$s_{3_{w_2}}: K_3(\mathcal{V}_3^{no});$
$s_{4_{w_2}}: B_4(\mathcal{D}_4^3), B_4(\mathcal{V}_3^{no});$
$s_{5_{w_2}}: B_5(D_5^2);$
$s_{6_{w_2}}: B_6(V_6^{no});$
$s_{7_{w_2}}: K_7\left(\mathcal{V}_7^{yes}\right);$
$s_{8_{w_2}}: K_8\left(V_8^{yes}\right)$

$\boldsymbol{R_{w_2}}$:
$R_{1_{w_2}}: r_1^{1,2}$
$R_{2_{w_2}}: r_2^7$
$R_{3_{w_2}}: r_3^3$
$R_{4_{w_2}}: r_4^{4,3}$
$R_{5_{w_2}}: r_5^5$
$R_{6_{w_2}}: r_6^6$
$R_{7_{w_2}}: r_7^7$
$R_{8_{w_2}}: r_8^8$

Dopo la seconda votazione, si verifica in $\mathcal{S}$ la sottocondizione α grazie al *sì* degli agenti 1,2,5,7,8.

5. Osservazioni conclusive

In questo articolo ho presentato un *framework* logico innovativo in grado di indagare le decisioni interattive di voto nei sistemi multi-agente in democrazia liquida. In particolare, sono stati sintatticamente e semanticamente definiti due nuovi predicati a due posti "vota" e "delega", le nozioni di "struttura dinamica", "scenario epistemico", "condizione epistemica" e "rete sociale" e, infine, la situazione di "propagazione di opinione" con la definizione di uno specifico "operatore di transizione di opinione". Fornire un modello espresso in un linguaggio logico governato da precise regole formali garantisce uno strumento indispensabile alla creazione di una rigorosa teoria della scelta razionale. L'idea che la logica possa svolgere, nell'analisi del comportamento razionale, un ruolo propulsivo analogo a quello che ha svolto, a partire dalla seconda metà del ventesimo secolo, nello sviluppo dell'informatica, è alla base del programma delineato da Rohit Parihk e suggestivamente chiamato *Social Software*[8].

Riferimenti bibliografici

[1] J. Behrens, A. Kistner, A. Nitsche, B. Swierczek. *The Principles of Liquid Feedback*. Interaktieve Demokratie. 2014.

[2] S. Cuconato, G. Greco. "Logica epistemica dinamica per sistemi multi-agente in 'liquid democracy'". *Da Pitagora a Schützenberger*. A cura di: G. d'Atri, F. Caldarola, M. Maiolo, G. Pirillo. Pellegrini Editore. Cosenza. (*forthcoming*).

[3] M. D'agostino. "La logica nelle scienze economiche e sociali". *Le direzioni della ricerca logica in Italia*. A cura di: H. Hosni, G. Lolli, C. Toffalori. Edizioni della Normale. 2015.

[4] S. Galvan. *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica*. Franco Angeli. 1991.

[5] J. Hintikka. *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*. Second edition, Vincent F. Hendriks and John Symons (eds.), (Texts in Philosophy, 1). London: College Publications. 1962 [2005].

[6] H. Hosni. *Trough the logician's glass*. http:// crm.sns.it/media/course/3661/trough-the-logicians glass%20Copy.pdf, 2013, Workshop on "Games and Decisions", July 2013, Centro di Ricerca Matematica "Ennio De Giorgi", Scuola Normale Superiore, Pisa. 2013.

[7] Ch. Meyer, W. van der Hoek. *Epistemic Logic for AI and Computer Science*. Cambridge University Press. 1995.

[8] R. Parikh. "Social software". *Synthese*, 3, 187-211. 2002.

[9] G. Tullock. "Computerizing politics". *Mathematical and Computer Modelling*, 16(8-9), 59–65. 1992.

[10] J. van Benthem. "Dynamic logic for belief revision", *Journal of Applied Non- Classical Logics*, 17(2), 129–155. 2007.

[11] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, B. Kooi. *Dynamic Epistemic Logic*, Synthese Library, Volume 337. Netherlands: Springer. 2007.

[12] H. van Ditmarsch, J. Halpern, B. Van Der Hoek, B. Kooi. *Handbook of Epistemic Logic*. College Publications. 2015.