

N° d'ordre : 2343

THESE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR

Par **M. Philippe ANCELIN**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

*MODÉLISATION DU COMPORTEMENT BIOMÉCANIQUE
DE L'ARBRE DANS SON ENVIRONNEMENT FORESTIER.
APPLICATION AU PIN MARITIME*

Soutenue le : 27 mars 2001

Après avis de :

Mme. M. FOURNIER	Professeur, ENGREF	Rapporteurs
M. A. FRANC	Ingénieur en chef, ENGREF	

Devant la Commission d'examen formée de :

M. J.P. CALTAGIRONE	Professeur, Univ. Bordeaux I	Président
M. T. FOURCAUD	Chargé de Recherches, CIRAD	Rapporteur
Mme. M. FOURNIER	Professeur, ENGREF	Examineurs
M. P. CASTERA	Chargé de Recherches, INRA	
M. P. DREYFUS	Chargé de Recherches, INRA	

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le Professeur Pierre Morlier de m'avoir accueilli et permis de grandir au sein de son laboratoire.

Je remercie Patrick Castéra d'avoir accepté de diriger cette thèse. Que Thierry Fourcaud et Patrick Lac reçoivent ici ma profonde reconnaissance pour avoir suivi et encadré ce travail.

Je remercie sincèrement François Houllier, Gérard Nepveu, Philippe Dreyfus, Benoît Courbaud et Jean-Michel Carnus de leur participation à mes comités de thèse.

Je tiens à remercier le Professeur Jean-Paul Caltagirone, le professeur Mériem Fournier, Alain Franc et Philippe Dreyfus d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie chaleureusement, sans les nommer, tous les membres du LRBB pour l'ambiance de travail qu'ils savent créer.

Enfin, mes plus sincères remerciements vont à ma famille sans laquelle je n'aurais pu écrire ces pages, à mes amis dont le soutien a été permanent, et à Marie...

- SOMMAIRE -

- INTRODUCTION GENERALE -

1

- PREMIER CHAPITRE -

7

COMPORTEMENT BIOMECHANIQUE A L'ECHELLE DE L'ARBRE :
MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS ET ANALYSE NON LINEAIRE

Introduction.....	9
1.1 Description et résolution du problème incrémental	11
1.1.1 L'arbre : une structure en croissance et des phénomènes biologiques.....	11
1.1.2 Discrétisation du temps et de la structure.....	14
1.1.3 Formulation en analyse linéaire	17
1.2 Analyse non linéaire d'une structure en croissance	22
1.2.1 Introduction à l'analyse non linéaire	22
1.2.2 Discrétisation géométrique du PTV incrémental de la FLAI.....	25
1.2.3 Interpolation et calcul des grandeurs élémentaires.....	27
1.2.4 Algorithme d'analyse non linéaire de la FLAI.....	34
Discussion.....	36
Conclusion	40

- DEUXIEME CHAPITRE -

41

MODELISATION DU COMPORTEMENT A L'ECHELLE DU PEUPELEMENT :
BIOMECHANIQUE DU TRONC ET COMPETITION SPATIALE ENTRE HOUPPIERS.

Introduction.....	43
2.1 Analyse biomécanique du tronc par Matrices de Transfert.....	47
2.1.1 Présentation des hypothèses de la méthode d'analyse	47

2.1.2	Vecteurs d'état et matrice de transfert des poutres 3D.....	49
2.1.3	Prise en compte des déformations de maturation.....	52
2.1.4	Méthode et outils pour le calcul de la structure	56
2.1.5	Procédure d'analyse du tronc par matrices de transfert	59
2.2	Gestion de la compétition spatiale et impact sur la structure	66
2.2.1	Compétition entre individus et diagrammes de Voronoï	66
2.2.2	Espace vital et excentrement du houppier.....	70
2.2.3	Stratégies de construction des surfaces de croissance.....	76
	Discussion.....	83
	Conclusion	86

- TROISIEME CHAPITRE -

87

***PREMIERES EVALUATIONS DES MODELES PEUPLEMENT DE CAPSIS :
COMPARAISONS AVEC AMAP ET PROTOCOLE DE MESURES SUR UNE PLACETTE DE PINS
MARITIMES.***

	Introduction.....	89
3.1	Simulations comparatives AMAP – CAPSIS.....	90
3.1.1	Objectif de la comparaison.....	90
3.1.2	Simulations de la croissance d'un axe.....	90
3.1.3	Prise en compte du poids du houppier à l'échelle de l'arbre.....	93
3.2	Protocole de mesures en vue de l'évaluation des modèles	101
3.2.1	Présentation du dispositif expérimental de Nezer	101
3.2.2	Mesure de la forme des troncs par la méthode des trois piquets.....	104
3.2.3	Mesure de la projection au sol des houppiers	107
3.2.4	Evaluation des stratégies du modèle 2D de compétition entre houppiers.....	110
	Discussion.....	114
	Conclusion	116

- CONCLUSION GENERALE -

117

- ANNEXES -

123

Annexe 1 : Formulation incrémentale du PTV en FLAI.....127

Annexe 2 : Description d'un modèle de poutre tridimensionnelle131

Annexe 3 : Discrétisation de l'élément fini de poutre 3D de type Bernoulli.....141

Annexe 4 : Transformation du PTV par la Méthode des Eléments Finis.....147

Annexe 5 : Outils de la Méthode des Matrices de Transfert de poutres.....155

Annexe 6 : Diagramme de Voronoï : définition et construction.....159

- BIBLIOGRAPHIE -

165

- TABLE DES MATIERES -

177

- INTRODUCTION GENERALE -

Les problèmes de forme de la tige (écart à la verticalité, courbures, cylindricité), associés dans une large mesure au comportement biomécanique de l'arbre, pèsent lourdement sur la qualité de la production de bois et sur le rendement des opérations de transformation. Dans une synthèse récente, Fourcaud (1999) rappelle que ces aspects sont particulièrement cruciaux chez le Pin maritime (*Pinus pinaster*) pour lequel la rectitude du tronc constitue un des principaux critères permettant d'évaluer la qualité de la production d'un peuplement. Le concept de biomécanique appliquée aux arbres recouvre des phénomènes mécaniques (contraintes de croissance), anatomiques (bois de réaction), géométriques (défauts de forme), ayant tous des implications sur la qualité. Les déformations instantanées importantes (éclatement des troncs à l'abattage, fente des grumes, gauchissement des planches..., Timell, 1986 ; Gérard, 1992 ; Hargoues, 1997 ; Constant *et al.*, 1999) observées lors de la transformation du bois sont attribuées à la présence de forces intérieures que l'on nomme contraintes de croissance. D'une part, ces contraintes sont dues aux efforts supportés par l'arbre sur pied tout au long de sa croissance. On parle alors des contraintes de support. D'autre part, les déformations dues à la maturation cellulaire du bois en différenciation, partiellement gênées par la présence du bois ancien rigidifié, conduisent à l'apparition de contraintes dites de maturation. En outre, l'apparition de zones de bois de réaction, pour lequel les déformations de maturation diffèrent de celles du bois normal, est un phénomène qui conditionne fortement l'établissement des contraintes de croissance. Par ailleurs, ce différentiel de déformations se traduit par l'apparition d'un moment de flexion interne qui peut permettre aux axes de l'arbre de se redresser et ainsi de réguler leur forme. L'étude de la mise en place progressive des contraintes de croissance dans des troncs soumis à des sollicitations externes (poids propre du tronc, poids du houppier, accidents dus au vent) et internes (mécanismes de redressement) montre que leur distribution est tout à fait inattendue (Gillis, 1973 ; Archer, 1986 ; Kubler, 1987 ; Fournier *et al.*, 1991). Elles ne dépendent pas seulement de l'état observable à un instant donnée, mais de toute l'histoire de croissance de l'arbre. C'est dans le but de mieux comprendre ces phénomènes que le Laboratoire de Rhéologie de Bois de Bordeaux (LRBB) développe depuis dix ans un outil de simulation du comportement biomécanique d'un arbre en croissance basé sur la Méthode des Eléments Finis (module AMAPméca) et fonctionnant en interaction avec le logiciel de simulation de la croissance des plantes AMAPpara. Ce travail est réalisé en collaboration avec l'Unité de Modélisation des Plantes du CIRAD, et a débuté dans le cadre d'une thèse de Mathématiques Appliquées soutenue à l'Université Bordeaux I (Fourcaud, 1995). Les résultats de ce travail permettent de simuler les relations entre la croissance de l'arbre et la qualité du bois. Les arbres, dont la topologie et la géométrie sont fournis à chaque cycle de croissance, définissent des structures mécaniques soumises au champ de pesanteur ainsi qu'à des phénomènes biomécaniques internes liés à la maturation cellulaire du bois. Le simulateur permet de

calculer l'évolution de la forme de l'arbre (modèle 3D) ainsi que le champ des contraintes de croissance se mettant progressivement en place dans le tronc.

Les concepts de biomécanique que nous venons de présenter ont conduit à la construction de modèles mathématiques et informatiques décrivant le comportement biomécanique de l'arbre isolé. Si des études dendrométriques (Polge, 1981 ; Ferrand, 1982) ont permis de mettre en évidence que les contraintes de croissance et la forme des tiges sont le résultat de l'histoire de la croissance de l'arbre en relation avec l'évolution de l'environnement physique (espace, lumière, statut social de l'arbre par rapport à celui des voisins, éclaircies...) dans lequel il se développe, aucun modèle explicatif n'a vu le jour à l'échelle du peuplement forestier. L'objectif de cette étude est de caractériser ces relations en faisant appel au fonctionnement biomécanique de l'arbre. Elle s'inscrit dans le cadre du développement de modèles permettant d'effectuer le changement d'échelle arbre / peuplement et visant à intégrer les aspects "forme" dans les modèles spatialisés de croissance et de production des peuplements forestiers. En s'appuyant sur les modèles de croissance à l'échelle individuelle (AMAP) et à l'échelle de la plantation (CAPSIS), ce travail de thèse doit contribuer au développement d'un outil informatique, qui à long terme, devra permettre de prévoir les dimensions, la forme et la distribution des propriétés du bois pertinentes dans les tiges d'un peuplement en fonction du scénario sylvicole appliqué.

Ce mémoire est structuré autour de la problématique du passage de l'arbre isolé à l'arbre pris dans son environnement forestier et comporte trois chapitres.

La complexité du changement d'échelle que nous envisageons résulte, d'une part, du fait qu'il doit être opéré spatialement, si l'on considère qu'il y a une différence de comportement entre l'arbre isolé et l'arbre en peuplement. D'autre part, il existe deux échelles de temps à considérer dans l'étude du comportement biomécanique. La première, que l'on peut qualifier d'échelle prédictive, peut être considérée comme l'intervalle de temps séparant deux interventions sylvicoles ; du moins elle rend compte de réactions lentes à l'échelle de la vie de l'arbre. La seconde, qualifiée d'échelle explicative, se situe au niveau de périodes telles que le cycle annuel de croissance, voire la saison de végétation. Une partie du travail s'est attachée à la prise en compte, dans AMAPméca, des grands déplacements résultant de certains phénomènes (inclinaison accidentelle, redressement actif – primaire et secondaire – brutal et intense) qui interviennent durant un cycle de croissance et généralement pendant les stades juvéniles. Un travail de développement au sein d'AMAPméca a donc été conduit dans le but de permettre une étude du comportement en analyse non linéaire géométrique capable de traiter les grands déplacements de manière exacte, dans le cas où l'hypothèse des petits déplacements de l'analyse linéaire n'est plus valable. Après un bref rappel des principes de la

modélisation du comportement biomécanique d'un arbre en croissance par la méthode des Eléments finis, nous présenterons, dans le premier chapitre, les bases théoriques de l'analyse non linéaire de ce comportement. La réalisation de simulations comparatives dans AMAPméca nous permettra de conclure quant à l'intérêt d'utiliser ce type d'analyse, en fonction de ce que l'on attend du modèle.

L'objectif central de ce travail de thèse est de construire un formalisme permettant d'évaluer le comportement biomécanique des arbres dans leur environnement forestier, c'est à dire prenant en compte de manière dynamique les phénomènes de compétition entre arbres, en s'appuyant sur les acquis du LRBB en matière d'analyse du comportement biomécanique de l'arbre. Le module AMAPméca permet d'étudier les relations existant entre le comportement biomécanique et la dynamique de croissance d'un arbre isolé. Pour mener une telle analyse au niveau du peuplement, l'idée est d'effectuer le changement d'échelle de l'arbre isolé à l'arbre dans son environnement forestier. Ce passage est réalisé au sein de la plate-forme logicielle de simulation de la croissance des peuplements, CAPSIS, développée à l'INRA. Il doit, au travers de modèles de comportement simplifiés, permettre d'étudier le comportement biomécanique de l'arbre en peuplement, en relation avec la dynamique de croissance (développement du houppier, croissance secondaire). En outre, la prise en compte de la structure de l'environnement dans lequel l'arbre se développe ouvre la voie à l'étude des effets d'un scénario sylvicole (densité de plantation, pratique des éclaircies) sur la forme future des arbres. A l'échelle spatiale du peuplement, on limite alors, pour des raisons de coût de calcul, la description de l'arbre à celle de son tronc et de son houppier. L'enjeu est d'intégrer dans CAPSIS des fonctionnalités au niveau de chaque arbre permettant de rendre compte de la mobilité du houppier par rapport au tronc. Dans le second chapitre, on présentera les hypothèses des modèles développés pour chacun des deux compartiments de l'arbre. Le modèle de régulation de la forme du tronc utilise la méthode des Matrices de Transferts de poutres et permet de calculer la réponse biomécanique du tronc sous l'influence de sollicitations externes et internes. Le modèle de développement du houppier utilise le diagramme de Voronoï des arbres du peuplement pour rendre compte de l'anisotropie de croissance des houppiers, due aux phénomènes de compétition aérienne pour l'espace et la lumière, et de l'excentrement par rapport au tronc qui en découle. L'implémentation de ces deux modèles dans CAPSIS donne naissance à un nouveau module "modélisateur" qui se présente sous la forme d'une librairie dynamique chargée par le logiciel. Elle aboutit à la mise en place d'un support informatique utilisable pour le calcul et la visualisation de la forme des troncs d'une part, et du déplacement des houppiers sur une cartographie 2D du peuplement d'autre part.

Le troisième et dernier chapitre abordera les moyens d'évaluation des modèles présentés au deuxième chapitre pour une utilisation à l'échelle du peuplement. Dans un premier temps, notre démarche consiste à utiliser AMAP comme plate-forme de travail fournissant des simulations utiles à l'évaluation des modèles simplifiés que nous avons intégrés dans CAPSIS. Après avoir comparé les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et par celle des matrices de transfert dans le cas de la croissance d'un axe seul soumis à l'action de son propre poids, avec ou sans mécanismes de redressement, nous proposons d'estimer le biais dû à l'hypothèse d'une décomposition de l'arbre en deux compartiments. Nous observons alors que, dans certains cas, l'application du poids du houppier en son centre de masse peut conduire à des comportements très différents de ce que l'on obtient si on considère que les branches sont réparties tout le long du tronc. Dans un second temps, nous présentons le protocole de mesures que nous avons effectuées sur le terrain dans le but de récolter des données expérimentales pertinentes permettant d'évaluer nos hypothèses de travail. Réalisé sur une placette de 400 m² prise au sein d'un peuplement équienné de Pins maritimes planté en 1952, ce protocole a consisté à mesurer la projection au sol des houppiers et la forme des troncs des arbres encore présents sur le dispositif en 2000. Si ces mesures semblent intéressantes pour l'évaluation de nos modèles, leur utilisation reste cependant très limitée du fait qu'elles ne rendent compte de l'état de la placette qu'à un instant donné. Nous voyons alors qu'il est hasardeux de vouloir confronter les simulations aux mesures lorsque l'historique des arbres (dynamique de croissance et pratique des interventions sylvicoles) n'est pas connu.

- PREMIER CHAPITRE -

***COMPORTEMENT BIOMECHANIQUE
A L'ECHELLE DE L'ARBRE :
MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS ET
ANALYSE NON LINEAIRE***

Introduction.....	9
1.1 Description et résolution du problème incrémental	11
1.1.1 L'arbre : une structure en croissance et des phénomènes biologiques.....	11
<i>Déformations des cellules de bois dues à la maturation</i>	<i>11</i>
<i>Le Pin maritime et le bois de compression.....</i>	<i>13</i>
1.1.2 Discrétisation du temps et de la structure.....	14
1.1.3 Formulation en analyse linéaire	17
<i>Notations du Principe des Travaux Virtuels.....</i>	<i>17</i>
<i>Prise en compte des déformations de maturation.....</i>	<i>19</i>
1.2 Analyse non linéaire d'une structure en croissance	22
1.2.1 Introduction à l'analyse non linéaire	22
1.2.2 Discrétisation géométrique du PTV incrémental de la FLAI.....	25
1.2.3 Interpolation et calcul des grandeurs élémentaires.....	27
<i>Matrice de rigidité élémentaire des petits déplacements.....</i>	<i>28</i>
<i>Matrice de rigidité élémentaire des précontraintes.....</i>	<i>29</i>
<i>Vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes au poids propre.....</i>	<i>31</i>
<i>Vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes aux déformations de maturation.....</i>	<i>32</i>
<i>Vecteur des forces nodales internes élémentaires équivalentes à l'état de précontraintes.....</i>	<i>33</i>
1.2.4 Algorithme d'analyse non linéaire de la FLAI.....	34
Discussion.....	36
Conclusion	40

Introduction

De nombreux mathématiciens ont cherché à mettre en équation la croissance des plantes à partir d'observations diverses sur la forme et la disposition de leurs axes. L'apparition de l'outil informatique a permis de donner un élan nouveau à ces investigations. En particulier, voici une vingtaine d'années que l'équipe de l'Unité de Modélisation des Plantes du CIRAD, créée autour de compétences scientifiques pluridisciplinaires (botanique, agronomie, informatique, mathématiques, etc.), développe un logiciel de modélisation de l'architecture des plantes (en particulier des arbres), baptisé AMAPpara (Atelier de Modélisation de l'Architecture des Plantes, version parallélisée). Dans ce logiciel, la croissance des plantes est effectuée par l'intermédiaire de méthodes stochastiques (Reffye (de) *et al.*, 1989) basées sur les concepts de botanique. Les phénomènes d'élagage et d'adaptation au milieu environnant sont pris en compte. La mise en place de l'architecture de la plante, décrite comme un système hiérarchique d'axes, nécessite de modéliser l'activité simultanée des méristèmes au cours du temps (Blaise, 1991 : notion de parallélisme dans la modélisation de la croissance primaire). L'augmentation de la section des axes est, quant à elle, reliée à l'architecture externe de la plante par des modèles de diffusion des assimilats suivant un mode de répartition uniforme ou non (Reffye (de) *et al.*, 1997).

La bonne description de la croissance et de l'architecture des arbres permet d'obtenir des maquettes numériques réalistes pouvant servir de base à des applications pluridisciplinaires diverses. A ce titre, AMAPpara constitue une plate-forme de travail particulièrement intéressante pour les scientifiques soucieux de mieux comprendre les phénomènes de croissance des arbres et leurs conséquences. C'est dans cet esprit, et en essayant de rendre compte de certaines réalités biomécaniques que nous aborderons plus loin, que les travaux de Fourcaud (1995) ont donné naissance à une des premières "ramifications" du logiciel AMAPpara, baptisée "AMAPméca". Ce code de calcul, utilisant la Méthode des Eléments Finis, est adapté aux structures en croissance et fonctionne en interaction avec AMAPpara. Il définit un outil permettant d'analyser les relations existant entre l'évolution de la géométrie et de l'architecture de l'arbre et son comportement biomécanique. Notons que par la suite, l'utilisation du seul nom AMAP sans terminaison désignera pour nous le couple AMAPpara – AMAPméca.

Nous verrons dans ce premier chapitre les principes sur lesquels repose le module AMAPméca. Les grandes lignes de la modélisation par éléments finis du comportement biomécanique de l'arbre y seront rappelées. Nous exposerons ensuite les bases théoriques permettant une analyse non linéaire du comportement biomécanique pour la prise en compte des grands déplacements (Ancelin *et al.*, 1999). Ce type d'analyse se justifie lorsque les

incréments de sollicitations que supporte l'arbre deviennent trop importants durant un cycle de croissance. Ceux-ci entraînent alors de grands déplacements de la structure non pris en compte par l'analyse linéaire jusqu'alors utilisée dans AMAPméca : c'est le cas d'un arbre soumis à l'action de vents importants, ou ayant subi une inclinaison accidentelle du tronc, ou encore mettant en place des mécanismes de redressement actif brutal et intense, etc. Enfin, nous présenterons quelques simulations comparatives de façon à estimer le gain de précision et de réalisme du comportement lorsqu'on le simule en analyse non linéaire.

1.1 Description et résolution du problème incrémental

1.1.1 L'arbre : une structure en croissance et des phénomènes biologiques

Pour le mécanicien, un arbre est considéré comme une structure tridimensionnelle en croissance, encastrée dans le sol et soumise au champ de pesanteur. Cette croissance implique que l'architecture de la structure est en perpétuelle évolution. Elle se traduit d'une part, par l'allongement des différents axes déjà existants et par la création de nouveaux (croissance dite primaire ou apicale), et d'autre part par leur augmentation en section (croissance dite secondaire ou cambiale). La croissance de l'arbre est ainsi conditionnée par l'élévation progressive du poids propre (augmentation des efforts supportés, flexion des branches...), mais aussi par des phénomènes tels que, notamment, l'élagage naturel ou imposé et les compétitions aérienne et souterraine pour les éléments naturels.

Pour étudier le comportement biomécanique de structures telles que les arbres (ou plus généralement les plantes), il faut faire appel à des concepts autres que ceux de la mécanique classique. On entre alors dans le cadre de la mécanique des structures évolutives et auto-adaptatives (Mattheck, 1990 ; Fournier & Moulia, 1992 ; Mattheck & Kubler, 1995). La question est de savoir en quoi l'analyse de ces structures est différente. La mécanique des solides se consacre à l'étude de structures chargées une fois élaborées. Le problème posé par les structures évolutives est de connaître l'histoire de l'élaboration du solide par rapport à la mise en place du chargement (Fournier, 1989). Il est admis que la résolution d'un tel problème peut se faire par une formulation différentielle en découplant les deux étapes : incréments successifs de matière et de chargement (Thibault, 1992). L'apport progressif de matière implique que tous les points du domaine étudié n'ont pas le même âge et donc la même histoire. Ainsi l'histoire du chargement relativement à la cinétique de croissance est une donnée essentielle et conduit à des résultats très différents de ceux attendus en Résistance des Matériaux (notamment en ce qui concerne les profils de contraintes : Gillis, 1973 ; Archer, 1986 ; Kubler, 1987 ; Fournier *et al.*, 1991 ; Fourcaud, 1995 ; Ancelin, 1997).

Déformations des cellules de bois dues à la maturation

Dans le cas d'un arbre, le rôle d'un modèle de comportement biomécanique est d'analyser les relations entre forme, efforts supportés et tissus constitutifs des organes de support, en utilisant conjointement un outil de mécanique et des notions de biologie végétale. Etablir ce type de modèle nécessite non seulement de traduire les effets de l'apport progressif de matière mais aussi de prendre en compte un certain nombre de phénomènes biologiques

intrinsèques à la croissance. De nombreux travaux (Boyd, 1973 ; Wilson & Archer, 1979 ; Timell, 1986 ; Archer, 1987 ; Yamamoto & Okuyama, 1988 ; Chanson, 1992 ; Fournier *et al.*, 1994) ont permis d'expliciter ces mécanismes complexes dont la compréhension passe par une connaissance approfondie de la physiologie et de l'anatomie de l'arbre à l'échelle macroscopique et microscopique (structure cellulaire). Ces différents auteurs expliquent que la formation de nouvelles cellules de bois par le cambium est le résultat de trois phénomènes : la division, la différenciation et la maturation. Selon les contraintes environnementales en présence, la phase de différenciation conduit à la formation de cellules dont les propriétés peuvent fortement varier. Classiquement, on distingue les cellules de bois normal et les cellules de bois de réaction. Durant la phase de maturation, les cellules ont tendance à se déformer. Ces "déformations de maturation" sont consécutives à un changement d'état physico-chimique des parois cellulaires. Les cellules nouvelles étant solidaires du xylème intérieur rigide, ces déformations naturelles sont gênées et induisent des efforts internes (contraintes de maturation).

Les cellules de bois normal ont tendance à se rétrécir longitudinalement et à s'étendre dans le plan radial/tangentiel. Cela a pour conséquence un état de précontraintes en traction longitudinale à la périphérie de l'arbre, conduisant ainsi à une compression progressive du bois situé au centre de l'axe. L'existence de zones de bois de réaction revêt par ailleurs une grande importance. Ce bois particulier est un marqueur d'une réponse événementielle ou intrinsèque de l'arbre. Par exemple, il peut caractériser une réaction pour réorienter le tronc ou une branche. Deux types de bois de réaction se distinguent selon les essences. On parle de bois de tension chez les feuillus et de bois de compression chez les résineux. Lors de la phase de maturation, on assiste à une tendance au retrait longitudinal des cellules du bois de tension (plus important que dans le bois normal), tandis que celles du bois de compression montre une tendance à l'élongation en devenant plus étroites. La différenciation du bois de réaction génère un différentiel de déformations et donc un moment de flexion qui participe ainsi au processus de réorientation de l'axe ligneux : on parle de redressement secondaire. Ce phénomène, associé au redressement primaire (lié à la direction de croissance apicale), s'avère très efficace aux stades juvéniles (Loup *et al.*, 1991 ; Castéra, 1992). En revanche, à la base de l'arbre adulte, le redressement secondaire est quasiment nul du fait de la plus grande rigidité du tronc. La présence de bois de réaction ne joue alors qu'un rôle de soutien de la structure (Fourcaud, 1999). Ainsi les déformations de maturation constituent un paramètre important qui qualifie l'effet d'un changement d'état du bois sur le comportement biomécanique de l'arbre.

Le Pin maritime et le bois de compression

Chez le Pin maritime, le bois de compression joue un rôle moteur qui permet à l'arbre d'orienter ses axes dans le cas du gravitropisme (réaction aux forces de gravité) ou du phototropisme (recherche de la lumière). La mesure des déformations résiduelles longitudinales de maturation (DRLM) à la surface du xylème est un bon indicateur du taux de bois de compression présent à l'intérieur de la tige. Ces données permettent d'estimer, par le calcul, la distribution des contraintes dans les cernes internes du tronc en tenant compte de l'histoire de la croissance de l'arbre et des processus cumulatifs qui en résultent (Boyd, 1973 ; Gillis, 1973 ; Fournier *et al.*, 1994 ; Fourcaud & Lac, 1996). Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour mesurer les DRLM. Les plus connues sont la méthode de Nicholson (1971), la méthode Wap's (Fournier *et al.*, 1994; Stokes *et al.*, 1998) et la méthode du trou unique (Archer, 1986 ; Fournier *et al.*, 1994). Les résultats sur le Pin maritime (Loup *et al.*, 1991 ; Combes *et al.*, 1996 ; Stokes *et al.*, 1998) montrent que les niveaux de déformations de maturation se situent autour de -200 microdéformations (μdef) pour le bois normal (retrait longitudinal) et peuvent atteindre plus de 1000 μdef dans le bois de compression (élongation longitudinale). L'intérêt de telles mesures chez le Pin maritime réside dans l'estimation de l'intensité du redressement de sa tige. Combes (1994) ainsi que Alteyrac *et al.* (1999) ont observé une bonne corrélation entre l'inclinaison locale et les valeurs de DRLM mesurées sur la face inférieure du tronc (Fig. I.1).

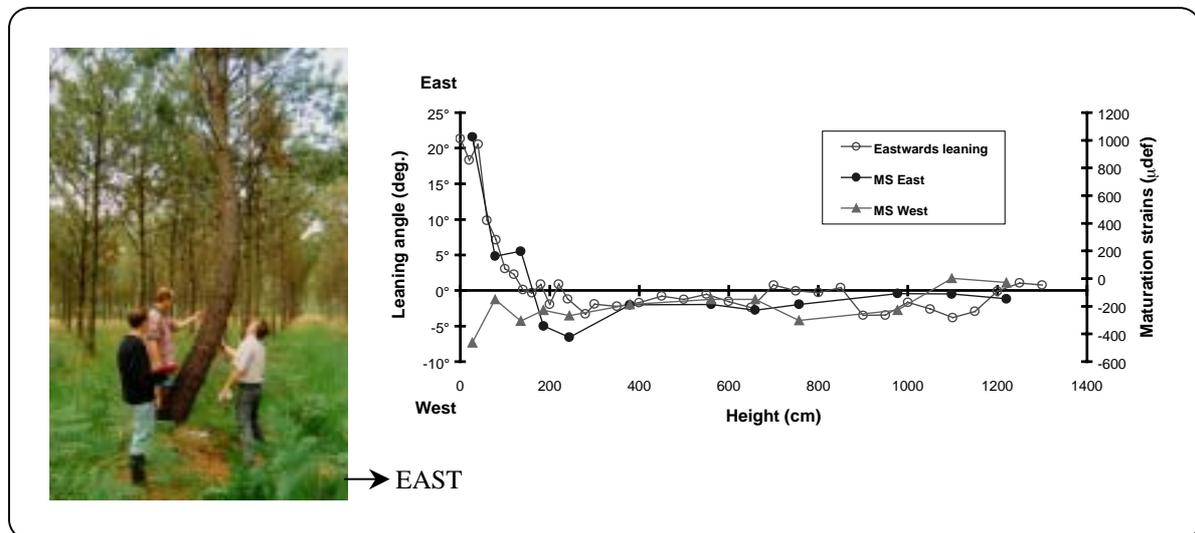


FIGURE I.1 – Relations entre les DRLM mesurées et l'inclinaison locale du tronc d'un Pin maritime. L'inclinaison prononcée de la base du tronc, dans la direction EST, est associée à de fortes valeurs positives de DRLM dans cette même direction. Ces valeurs correspondent à la présence en quantité de bois de compression (d'après Alteyrac *et al.*, 1999).

Avant d'aborder les concepts de la modélisation du comportement biomécanique d'un arbre en croissance, rappelons que les premiers cernes formés par un axe ligneux sont particuliers d'un point de vue anatomique et vis à vis de leurs propriétés physiques et mécaniques. Ils définissent ce que l'on appelle le bois juvénile. A l'intérieur de cette zone, les propriétés du bois évoluent graduellement pour atteindre une relative stabilité caractéristique du bois adulte (Dumail, 1995). Guitard (1987) souligne cette hétérogénéité radiale d'origine typiquement morphogénétique caractérisant le bois dans l'arbre, et que les modèles doivent s'efforcer d'intégrer.

1.1.2 Discrétisation du temps et de la structure

L'aspect cyclique de la croissance des arbres conduit naturellement à une discrétisation temporelle où le pas de discrétisation dépend des unités de temps physiologiques de l'individu. Dans notre étude, nous considérons que cet intervalle de temps correspond à la durée de mise en place d'une nouvelle unité de croissance. On parle alors de cycle de croissance (ou "cycle de calcul" ou "cycle") pour désigner la période temporelle du calcul de la croissance d'un arbre. Pour effectuer ce calcul, schématisé par la figure (I.2), le logiciel AMAPpara constitue le *moteur de croissance* de la structure à étudier. Il détermine au cycle n la nouvelle architecture de la structure. La nouvelle configuration obtenue est transmise au module de calcul de structures AMAPméca pour la mécanique. Ce dernier récupère les informations géométriques (coordonnées des nœuds, section des axes, etc.) et calcule les déplacements et déformations de la structure. La nouvelle géométrie calculée définit la configuration de la plante pour le calcul du cycle $n+1$. Le champ de contraintes se mettant progressivement en place dans chaque cerne de croissance est ainsi déterminé. Cet état de contraintes est lié à l'histoire du point où le calcul est effectué. Il découle du cumul des incréments de contrainte depuis la date d'apparition de ce point jusqu'à l'âge courant de la plante.

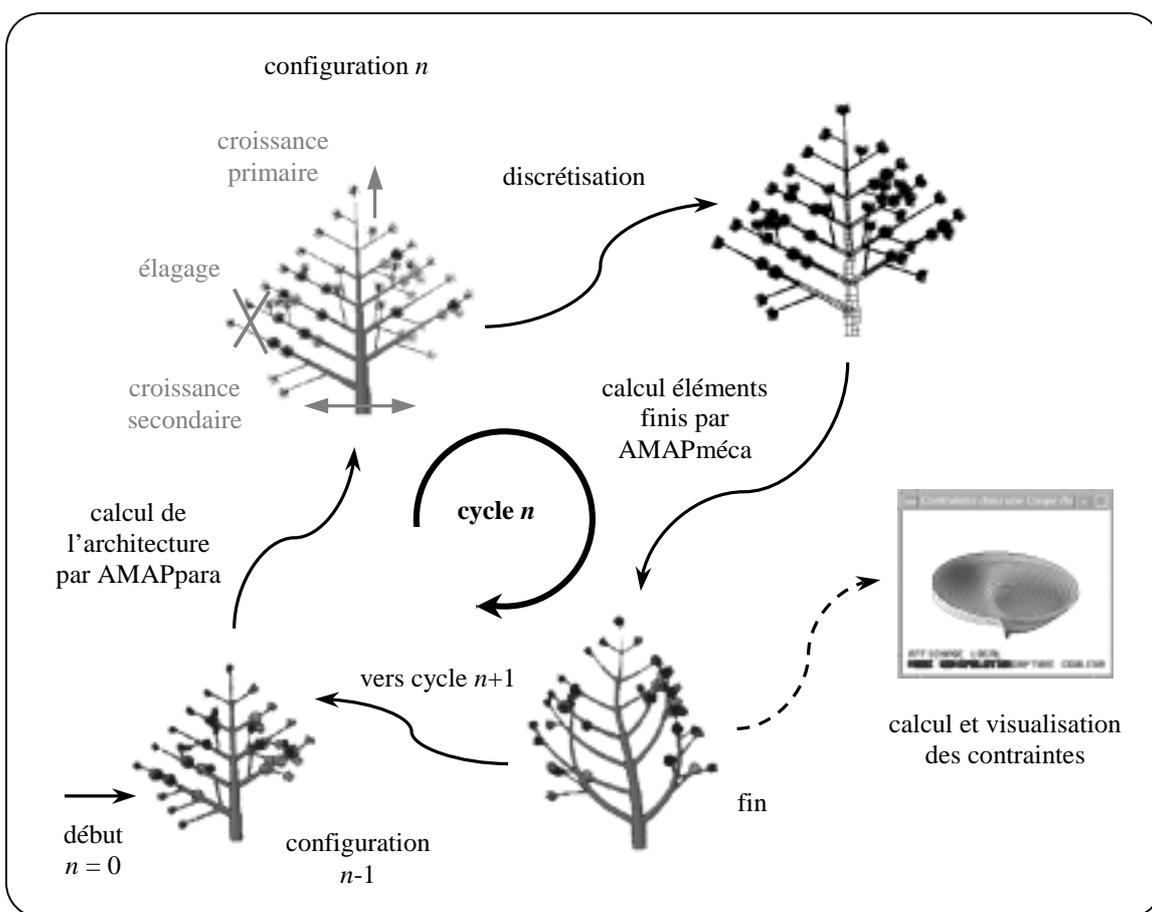


FIGURE I.2 – Déroulement schématisé d'un cycle de calcul dans le logiciel AMAP.

La croissance est donnée par AMAPpara et la nouvelle déformée est calculée par la méthode des éléments finis dans le module AMAPméca.

Le chargement considéré à chaque cycle de calcul correspond à deux types de sollicitations : d'une part l'incrément de poids propre dû à l'apport de matière, et d'autre part les déformations engendrées par le phénomène de maturation du bois. Le module AMAPméca utilise la méthode des éléments finis, avec des éléments de type déplacements, pour calculer les déformations et les contraintes sous l'effet de ces sollicitations. La forme élancée des axes d'un arbre permet de choisir une discrétisation de la structure à l'aide d'éléments finis de type poutre tridimensionnelle sans cisaillement (modèle de Bernoulli) à section circulaire constante. Les hypothèses simplificatrices liées à ce modèle, présentées en Annexe 2, rendent son utilisation peu coûteuse et permettent de considérer, dans le module AMAPméca, l'arbre dans sa globalité (tronc et système de branchaison). Signalons toutefois que, tel qu'il est utilisé actuellement, ce type d'élément ne permet pas simplement de décrire l'hétérogénéité de

la structure interne due à l'anisotropie de la croissance radiale, ni, donc, de prendre en compte les variations circonférentielles de propriétés qui en découlent.

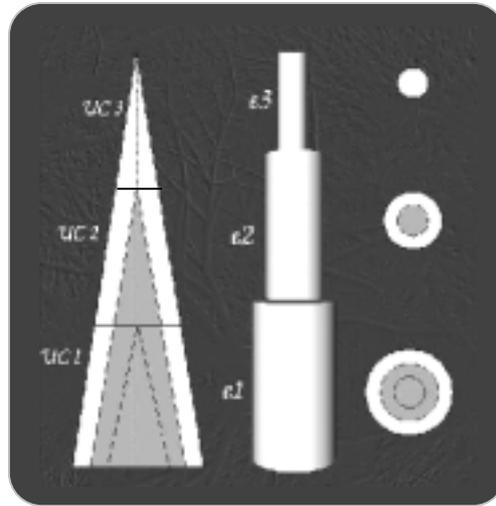


FIGURE I.3 – Discrétisation de la structure interne des axes d'un arbre au moyen d'éléments finis de poutre 3D multicouches.

De façon schématique, on peut considérer les axes d'un arbre comme l'empilement de couches coniques de bois correspondant aux cernes de croissance. Les unités de croissance sont définies par les nouveaux éléments végétatifs mis en place lors d'une période de croissance. Leur apparition traduit l'allongement des axes durant la croissance primaire. Initialement composées d'un seul cerne, elles voient leur section augmenter par adjonctions successives d'un nouveau cerne à chaque phase de croissance secondaire. Ainsi, lorsqu'on se déplace de la base d'un axe vers son sommet, on parcourt les unités de croissance de la plus ancienne à la plus récente, le passage à la suivante se traduisant par la perte d'un cerne de croissance. Dans le modèle, l'utilisateur peut choisir le nombre d'éléments finis à utiliser pour décrire une unité de croissance, le choix le plus simple étant de un élément pour une unité. La figure (I.3) montre comment, dans ce dernier cas, la structure interne des axes est alors discrétisée. Remarquons que ce type de description s'accompagne d'une rupture de la continuité des cernes le long de l'axe lorsque l'on change d'unité de croissance. Pour décrire la succession de cernes dans la direction radiale, des éléments 3D de poutre multicouches sont utilisés. Les couches, de section circulaire, sont concentriques, chacune d'elle correspondant à un cerne. Ainsi, des propriétés mécaniques différentes peuvent être attribuées à chaque couche de façon à rendre compte de l'hétérogénéité radiale cerne à cerne (les propriétés restant constantes sur une même couche). Ces éléments offrent une assez bonne description de la structure interne en première approche, mais celle-ci devient plus critiquable lorsque l'on

est en présence de zones de bois de réaction. En effet, on observe généralement dans ces zones des largeurs de cerne plus importantes, ainsi qu'une variation des caractéristiques mécaniques. Néanmoins, l'utilisation de ce modèle pour l'analyse mécanique permet de retrouver des géométries réalistes pour différents modèles architecturaux (Fourcaud, 1995).

1.1.3 Formulation en analyse linéaire

Notations du Principe des Travaux Virtuels

Ensembles descriptifs de la structure

${}^n E$	Ensemble des indices des éléments déjà existants à la date $n\Delta\tau$.
${}^n \Delta E$	Ensemble des indices des éléments apparaissant durant la période $\Delta\tau$ à venir.
${}^{n+1} E$	Ensemble des indices des éléments pris en compte pour le calcul de ${}^{n+1} C$ $= {}^n E \cup {}^n \Delta E$.

Grandeurs mécaniques

$\delta(\)$	Quantité virtuelle.
$\Delta(\)$	Incrément d'une quantité.
$d(e)$	Date d'apparition de l'élément e , i.e. $d\Delta\tau$, $d \in \{0, \dots, n\}$.
${}^n V_c^e$	Couche c de $e \in {}^n \hat{C}$, i.e. ajoutée à la date $c\Delta\tau$, $c \in \{d, \dots, n\}$.
${}^n u^e$	Vecteur colonne des déplacements de $e \in {}^n \hat{C}$.
${}^n \varepsilon^e$	Vecteur colonne des déformations infinitésimales de $e \in {}^n \hat{C}$.
${}^n \sigma_c^e$	Vecteur colonne des contraintes de Cauchy dans la couche ${}^n V_c^e$.
${}^n \rho_c^e$	Vecteur colonne des densités volumiques de charges de la couche ${}^n V_c^e$.
${}^n \mu_n^e$	Vecteur colonne des déformations de maturation de la couche externe ${}^n V_n^e$.

Le Principe des Travaux Virtuels (PTV) est la base des méthodes d'analyse des structures de type déplacement. A un instant donné t , ce principe traduit l'équilibre d'une structure soumise à des sollicitations extérieures (égalité des travaux virtuels interne et externe). La méthode des éléments finis consiste, dans un premier temps, à faire un maillage du domaine d'intégration du PTV. Puis, dans un deuxième temps, des approximations du champ de déplacements sont introduites sur chaque élément du maillage sous forme d'interpolation nodale. Dans le cas où la résolution du problème repose sur une discrétisation temporelle et où les caractéristiques de la structure sont dépendantes du temps, il devient

nécessaire d'utiliser une formulation incrémentale du PTV (Fourcaud & Lac, 1996). Elle définit une méthode de calcul, bien adaptée aux processus de croissance cyclique des arbres, qui consiste à calculer les configurations successives de la structure à chaque incrément de temps et à mettre leur géométrie à jour. Ce procédé permet de reproduire et d'étudier les effets cumulatifs qui résultent de la croissance. L'écriture d'une telle formulation des équations d'équilibre nécessite le choix d'une configuration de référence ; c'est par rapport à elle que seront exprimées les différentes grandeurs intervenant dans son expression.

Soit $\Delta\tau$ la période définissant un cycle de croissance, donc le pas naturel de discrétisation temporelle utilisé pour le calcul. L'origine des temps coïncide avec la date de plantation de la graine. Techniquement, cette période correspond à l'intervalle de temps séparant deux appels au *moteur de croissance* AMAPpara. Soit nC la configuration de la structure à l'instant $t = n\Delta\tau$ et issue du cycle n . L'accroissement en volume durant la période $\Delta\tau$ suivante nous amène à considérer une configuration virtuelle ${}^n\hat{C}$ qui sera la configuration de référence pour calculer la configuration ${}^{n+1}C$ issue du cycle $n+1$ (Fig. I.4). Cette configuration de référence correspond à la configuration nC à laquelle ont été rajoutés de nouveaux éléments végétatifs (croissance primaire) ainsi que de nouvelles couches de bois (croissance secondaire).

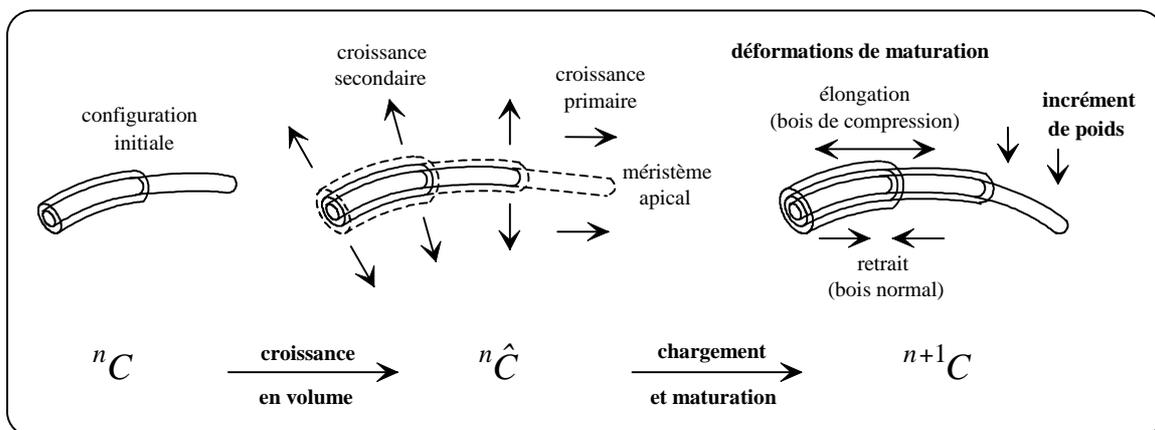


FIGURE I.4 – Configurations remarquables d'un cycle de croissance. La croissance s'effectue sur la configuration issue du cycle précédent, et fournit la configuration de référence pour calculer la nouvelle sous l'action des incréments de chargement du cycle courant.

En analyse linéaire, on considère que l'incrément de chargement du cycle de croissance courant reste modéré, de sorte que les configurations ${}^n\hat{C}$ et ${}^{n+1}C$ sont suffisamment proches pour que l'on se place dans l'hypothèse des petits déplacements à chaque cycle. Dans ce cas, il est aisé, à l'issue du cycle $n+1$, de déterminer directement la

configuration ${}^{n+1}C$ à partir de la connaissance de ${}^n\hat{C}$. L'écriture du PTV pour ${}^{n+1}C$ dans la configuration de référence ${}^n\hat{C}$ et sa résolution permettent d'accéder aux incréments de déplacements et de contraintes du cycle. L'étude d'une structure en croissance s'effectue alors comme la succession de problèmes linéaires correspondant aux cycles de croissance. L'actualisation de la géométrie de la structure au début de chaque cycle permet de traduire que la croissance s'effectue sur une configuration déjà déformée.

Les notations ci-dessus sont utilisées pour le calcul de ${}^{n+1}C$. Les couches des éléments sont parfaitement liées de sorte que les champs de déplacements et déformations sont continus. Les éléments de l'ensemble ${}^n\Delta E$ nouvellement créés correspondent aux éléments végétatifs générés par la croissance primaire. Les nouvelles couches de bois déposées lors de la croissance secondaire ne s'apparentent pas à un ensemble particulier puisqu'elles viennent simplement augmenter la section des éléments déjà existants de l'ensemble nE . Pour un élément e donné de ${}^n\hat{C}$, c'est à dire après la croissance en volume effectuée au début du cycle $n+1$, la notation ${}^nV_n^e$ désigne toujours la dernière couche de cet élément, qu'il appartienne à ${}^n\Delta E$ ou qu'il ait vu sa section modifiée dans nE . Ainsi, les nouveaux chargements extérieurs, venant se rapporter sur la structure, sont classiquement les poids propres des couches ${}^nV_n^e$ de chaque élément e . Ils sont exprimés sous la forme de densités volumiques de charges et se notent donc ${}^n\rho_n^e$. De l'application de ces incréments de charges résultent les incréments de contraintes $\Delta^n\sigma_c^e = {}^{n+1}\sigma_c^e - {}^n\sigma_c^e$ dans chaque couche de chaque élément e de l'ensemble ${}^{n+1}E$, entre les instants $n\Delta\tau$ et $(n+1)\Delta\tau$. En utilisant ces notations, la formulation incrémentale linéaire du PTV pour une structure en croissance, permettant de déterminer la nouvelle configuration ${}^{n+1}C$, s'écrit sous la forme suivante :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^nV_c^e} \Delta^n\sigma_c^{e^t} \cdot \delta^n\varepsilon^e \cdot dV \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \int_{{}^nV_n^e} {}^n\rho_n^{e^t} \cdot \delta^n u^e \cdot dV \right\} \quad (\text{I.1})$$

où $\delta^n\varepsilon^e$ et $\delta^n u^e$ sont respectivement les champs cinématiquement admissibles des déformations virtuelles et des déplacement virtuels dans l'élément e . Cette formulation fait apparaître la discontinuité cerne à cerne des incréments de contraintes, liée à l'hétérogénéité des propriétés mécaniques que nous évoquions plus haut.

Prise en compte des déformations de maturation

Nous avons vu que, durant la maturation, les cellules de bois ont une tendance à se déformer dans la couche externe nouvellement mise en place. Cette couche étant "collée" sur du bois anciennement rigidifié, les déformations ne se font pas librement et donnent naissance à un champ de contraintes dites de maturation. Ces déformations diffèrent selon le type de

bois en présence, et l'apparition de bois de réaction dans un secteur du cerne périphérique entraîne un différentiel de déformations provoquant une flexion plus ou moins importante de l'axe (Fig. I.5).

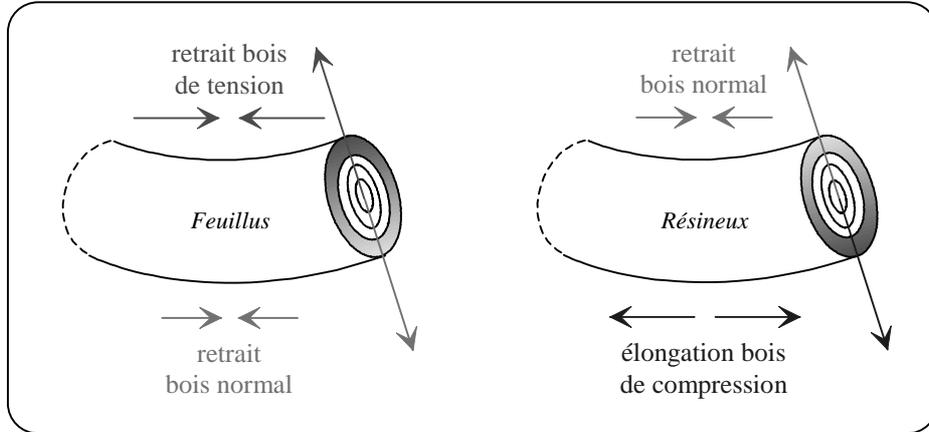


FIGURE I.5 – Schématisation du différentiel de déformations de maturation dans le cas des feuillus et dans le cas des résineux. Ce différentiel induit une flexion plus ou moins importante de l'axe.

Les incréments de déformations totales $\Delta^n \varepsilon^e$ sont donc définis comme étant la somme des incréments de déformations mécaniques $\Delta^n \varepsilon_{méc}^e$ et des déformations dues à la maturation ${}^n \mu_n^e$ dans les couches périphériques ${}^n V_n^e$:

$$\Delta^n \varepsilon^e = \Delta^n \varepsilon_{méc}^e + {}^n \mu_n^e \cdot \delta_{c,n} \quad (\text{I.2})$$

où $\delta_{c,n}$ est le symbole de Kronecker. Cette notation traduit le fait que la maturation n'a lieu que dans la couche externe (pour $c = n$).

On suppose l'existence d'une loi constitutive incrémentale linéaire permettant d'écrire la relation entre les incréments de contraintes et les incréments de déformations mécaniques dans la couche ${}^n V_c^e$:

$$\Delta^n \sigma_c^e = C_c^e \cdot \Delta^n \varepsilon_{méc}^e \quad (\text{I.3})$$

soit :

$$\Delta^n \sigma_c^e = C_c^e \cdot \Delta^n \varepsilon^e - C_c^e \cdot {}^n \mu_n^e \cdot \delta_{c,n} \quad (\text{I.4})$$

où C_c^e est la matrice des constantes élastiques de la couche V_c^e .

En reportant la relation (I.4) dans l'expression (I.1), la formulation incrémentale linéaire du PTV est finalement donnée par :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{V_c^e} \Delta^n \varepsilon^{e^t} \cdot C_c^e \cdot \delta^n \varepsilon^e \cdot dV \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \int_{V_n^e} \left({}^n \rho_n^{e^t} \cdot \delta^n u^e + {}^n \mu_n^{e^t} \cdot C_n^e \cdot \delta^n \varepsilon^e \right) dV \right\} \quad (\text{I.5})$$

Notons que le membre de droite ne contient qu'une intégrale sur les couches périphériques des éléments et traduit ainsi que les incréments de charges considérés lors du calcul d'un cycle de croissance ne proviennent que des derniers cernes formés. On pourra consulter la thèse de Fourcaud (1995) pour une démonstration générale de la formulation (I.5). On trouvera dans le mémoire de DEA d'Ancelin (1997) une autre présentation de son établissement au caractère plus pédagogique.

La résolution de l'équation (I.5) fait appel à la méthode des éléments finis. Cette méthode repose sur l'interpolation du champ de déplacements en chaque point d'un élément en fonction de ses déplacements nodaux. Cette interpolation, qui s'effectue sous forme matricielle, conduit à l'expression incrémentale finale du PTV prenant alors la forme d'un système linéaire de matrices et s'écrivant :

$${}^n K_l \cdot \Delta^n Q = \Delta^n F_{ext} \quad (\text{I.6})$$

où ${}^n K_l$ est la matrice de rigidité globale des petits déplacements (dite linéaire), $\Delta^n Q$ le vecteur des incréments de déplacements nodaux, et $\Delta^n F_{ext}$ le vecteur des forces nodales externes équivalentes à l'incrément de poids et à la maturation des couches périphériques dans la configuration ${}^n \hat{C}$.

Dans le paragraphe suivant, nous effectuons les développements théoriques permettant de calculer le comportement biomécanique d'un arbre en croissance en analyse non linéaire géométrique. Nous établissons la nouvelle expression incrémentale du Principe des Travaux virtuels pouvant être utilisée pour traiter les problèmes de grands déplacements de la structure, lorsque l'on sort du cadre des hypothèses d'établissement de la relation (I.6).

1.2 Analyse non linéaire d'une structure en croissance

1.2.1 Introduction à l'analyse non linéaire

L'hypothèse des petits déplacements n'est plus valable dès que les incréments de charge deviennent trop importants lors d'un cycle de croissance. On entre alors dans le cadre des grandes transformations (grands déplacements, grandes rotations de la structure) et le problème se formule à l'aide des techniques de l'analyse non linéaire géométrique des structures. Il en est de même si l'on souhaite, par exemple, simuler à un instant donné un essai de flexion, essai type sur le terrain et entraînant le plus souvent de grands déplacements de la structure. En théorie non linéaire, l'obtention de la configuration ^{n+1}C devient plus délicate et nécessite l'utilisation d'une méthode de calcul itérative (méthode de Newton-Raphson ; Guo, 1987). Afin d'assurer une bonne convergence de la solution, chaque cycle de croissance est découpé en plusieurs pas de charges dont la somme correspond à l'incrément de sollicitations du cycle. L'algorithme itératif de Newton-Raphson consiste à effectuer des corrections d'équilibres à l'intérieur de chaque pas de charge ; on dit alors que l'on effectue des itérations d'équilibre. Plaçons-nous dans le cas d'un problème simple sans croissance, à un degré de liberté. La figure (I.6) montre les courbes charge – déplacement que l'on obtient pour un pas de charge lorsque l'analyse est linéaire ou non linéaire.

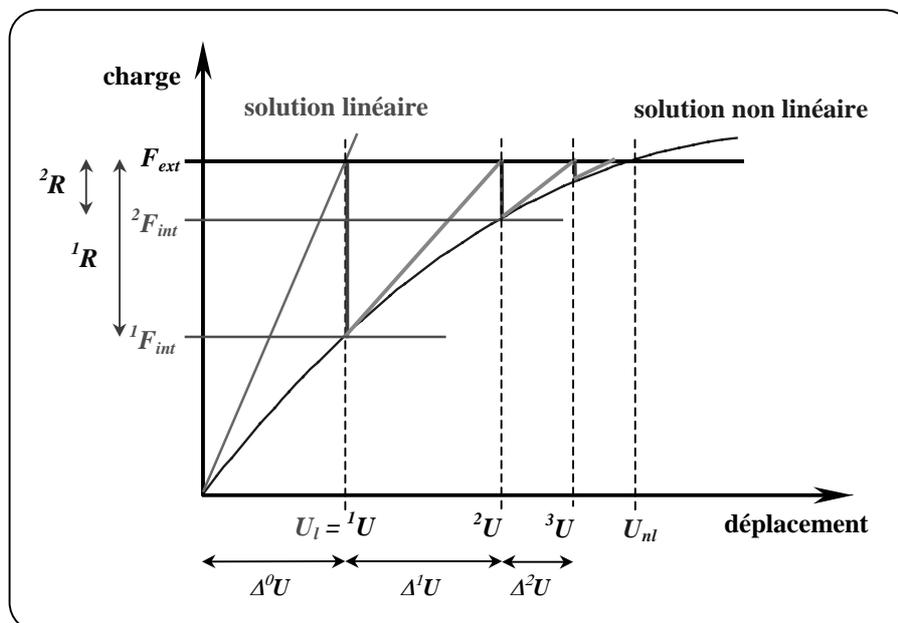


FIGURE I.6 – Description du procédé itératif de Newton-Raphson permettant d'obtenir la solution non linéaire. A chaque itération les forces hors équilibre sont utilisées comme nouveau cas de chargement. Exemple pour une structure à un degré de liberté (U) et pour un pas de charge (F_{ext}).

La résolution de l'équation (I.6) fournit, dans l'hypothèse des petits déplacements, le déplacement U_i de la structure lorsqu'on lui applique le chargement extérieur F_{ext} . Les simplifications liées à cette hypothèse conduisent à une solution différente de la solution exacte. On obtient dans ce cas une configuration pour laquelle l'équilibre entre les forces externes F_{ext} et les forces internes F_{int} n'est pas vérifié et on dit que cette configuration est non équilibrée. La méthode de Newton-Raphson permet de se rapprocher de la solution exacte à l'aide d'itérations de correction d'équilibre. Pour chaque itération, on définit le résidu iR (ou forces hors équilibre) comme étant la différence entre les forces externes F_{ext} et les forces internes ${}^iF_{int}$ et on l'utilise comme nouveau cas de chargement. On résout alors l'équation (I.6) en remplaçant le membre de droite par le résidu de l'itération courante et on obtient l'incrément de déplacement ${}^i\Delta U$. La solution exacte (U_{nl}) sera obtenue à l'itération pour laquelle le résidu deviendra inférieur à un critère de convergence que l'on se fixe. Cependant, la convergence vers cette solution exacte peut être plus ou moins rapide. Si à chaque itération, on se contente de résoudre l'équation (I.6) modifiée par le résidu, la convergence s'avère assez lente. La matrice de rigidité donne sur la figure (I.6) la pente de la droite sur laquelle on se déplace à chaque itération. L'utilisation de la seule matrice de rigidité des petits déplacements de l'équation (I.6) va donc conduire à un ensemble de droites parallèles, ce qui n'est pas le cas sur la figure (I.6). Il est en effet possible de recalculer la matrice de rigidité à chaque itération de manière à accélérer la convergence de la méthode. La formulation des équations d'équilibre en analyse non linéaire permet de déterminer la nouvelle matrice de rigidité qui sera utilisée pour la résolution de chaque itération d'équilibre. Dans l'exemple illustré par la figure (I.6), cette nouvelle matrice correspond à la pente de la tangente à la courbe non linéaire au point ayant pour abscisse le déplacement cumulé jusqu'à l'itération courante. Les développements qui vont suivre conduisent, dans le cas général d'une structure en croissance, à l'expression de cette nouvelle matrice de rigidité.

Compte tenu de ce qui vient d'être exposé, nous voyons que, lors du calcul d'un cycle (calcul de ${}^{n+1}C$ à partir de la connaissance de nC), il est possible de définir des configurations intermédiaires issues de chaque pas de charge ${}^nC^p$ et aussi de chaque itération d'équilibre ${}^nC_i^p$. L'obtention de la configuration ${}^{n+1}C$ nécessite donc la détermination des différentes configurations ${}^nC_i^p$ et s'effectue à l'aide d'un processus incrémental. La recherche des ${}^nC_i^p$ peut être réalisée de différentes façons en fonction du choix de la configuration de référence par rapport à laquelle sont exprimées les grandeurs de la formulation du PTV. Nous distinguons ainsi les différentes formulations que sont la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Cycle (FLAC), la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas (FLAP), et la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI), selon que l'on choisit respectivement comme référence la configuration nC , la configuration ${}^nC^p$, ou la configuration ${}^nC_i^p$. Bien qu'il n'ait pas conduit à une implémentation dans le module

AMAPméca, signalons que le formalisme mathématique de la FLAC avait déjà fait l'objet d'une présentation dans le mémoire de thèse de Fourcaud (1995).

Dans ce qui suit, nous utilisons une formulation du problème de type FLAI puisqu'elle présente les hypothèses les plus simples, du fait de la réactualisation permanente de la configuration de référence (cf. Annexe 1). Au début de l'itération d'équilibre $i+1$, ${}^n\hat{C}_i^p$ est la dernière configuration connue et non équilibrée. Nous allons montrer que la formulation de type FLAI conduit à définir la matrice de rigidité des précontraintes. Cette nouvelle matrice, qui vient s'ajouter à la matrice de rigidité des petits déplacements de l'équation (I.6), traduit le fait que la structure a une histoire : elle a été préalablement chargée et elle est donc dans un état de précontraintes. Rappelons qu'à la première itération du premier pas de charge du cycle $n+1$, la configuration de référence ${}^n\hat{C}$, de par sa définition, contient ce que l'on appelle des couches virtuelles (cf. Fig. I.4), donc non chargées et non précontraintes. Ceci n'est plus vrai par la suite (pour les configurations ${}^n\hat{C}_i^p$ suivantes), puisque ces couches vont être sollicitées au cours des différents pas de charge du cycle courant.

De façon à clarifier le problème avant d'entrer dans les développements, nous présentons ci-dessous l'algorithme général pour l'analyse non linéaire d'une structure en croissance. Soulignons que le passage d'un pas à l'autre, de même que celui d'une itération à la suivante, ne nécessite pas d'appel au *moteur de croissance*.

☞ **Boucle sur les cycles de croissance : $n = 1$, *NCYCL***

Mise à jour de l'architecture par le *moteur de croissance* : ${}^{n-1}C \Rightarrow {}^{n-1}\hat{C}$

$${}^{n-1}\hat{C} = {}^{n-1}\hat{C}^0 = {}^{n-1}\hat{C}_0^0$$

☞ **Boucle sur les pas de charge : $p = 1$, *NPAS***

Incrémenter la charge sur ${}^{n-1}\hat{C}^{p-1} = {}^{n-1}\hat{C}_0^{p-1}$

☞ **Boucle sur les itérations d'équilibre : $i = 1$, *NITER***

Déterminer ${}^{n-1}\hat{C}_i^{p-1}$ à partir de ${}^{n-1}\hat{C}_{i-1}^{p-1}$ non équilibrée...

...par résolution MEF du PTV incrémental de la FLAI

Test de convergence pour l'équilibre

☞ **Fin des itérations**

$${}^{n-1}\hat{C}^p = {}^{n-1}\hat{C}_{NITER}^{p-1} \text{ en équilibre}$$

☞ **Fin des pas**

$${}^nC = {}^{n-1}\hat{C}^{NPAS} = {}^{n-1}\hat{C}_{NITER}^{NPAS-1} \text{ en équilibre}$$

☞ **Fin des cycles**

1.2.2 Discrétisation géométrique du PTV incrémental de la FLAI

Nous nous plaçons dans le pas de charge $p+1$ du cycle n . Nous supposons que la configuration ${}^n\hat{C}^p$ est la dernière configuration connue en état d'équilibre. De plus, nous supposons que la configuration ${}^n\hat{C}_i^p$, issue de l'itération i , est la dernière configuration connue non équilibrée. Le Principe incrémental des Travaux Virtuels de la FLAI permet de déterminer la configuration suivante ${}^n\hat{C}_{i+1}^p$. Lorsque les itérations d'équilibre convergent, on aboutit à la configuration ${}^n\hat{C}^{p+1}$ à nouveau en équilibre et issue du pas de charge courant.

Dans les notations utilisées par la suite, l'indice i figurant en haut à gauche désigne l'itération courante, sous-entendu du pas de charge $p+1$ du cycle de croissance n . Seule la notation des configurations, portant les indices n , p et i , est explicite quant au niveau de la hiérarchie du calcul où l'on se trouve.

En prenant ${}^n\hat{C}_i^p$ comme configuration de référence, le Principe incrémental des Travaux Virtuels dans l'état ${}^n\hat{C}^{p+1}$ s'écrit (cf. Annexe 1, équation (A.1.11)) :

$$\int_V (\Delta^i \sigma^t \cdot \delta^i \varepsilon + {}^i \sigma^t \cdot \Delta \delta^i \eta) dV = \int_V {}^i \rho^t \cdot \delta^i u \cdot dV - \int_V {}^i \sigma^t \cdot \delta^i \varepsilon \cdot dV \quad (\text{I.7})$$

où ${}^i V$ est le volume total du domaine d'intégration dans la configuration ${}^n\hat{C}_i^p$. Le vecteur ${}^i \rho$ correspond à l'incrément de chargement appliqué sur le volume de la configuration ${}^n\hat{C}_i^p$. Son intensité est constante sur les itérations d'un même pas de charge, mais ses composantes évoluent en fonction de la réactualisation de la géométrie à chaque itération.

De la même façon qu'au paragraphe (1.1.3), ${}^{n+1}E$ désigne toujours l'ensemble des indices des éléments pris en compte pour le calcul de ${}^{n+1}C$. On introduit donc la discrétisation géométrique du PTV en écrivant que le volume d'intégration ${}^i V$ est la somme des volumes ${}^i V^e$ des éléments finis de l'ensemble ${}^{n+1}E$ dans la configuration ${}^n\hat{C}_i^p$. En utilisant l'exposant e pour faire référence aux variables prises pour un élément, le PTV incrémental discrétisé est alors donné par :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \int_{{}^i V^e} (\Delta^i \sigma^{e t} \cdot \delta^i \varepsilon^e + {}^i \sigma^{e t} \cdot \Delta \delta^i \eta^e) dV \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \int_{{}^i V^e} {}^i \rho^{e t} \cdot \delta^i u^e \cdot dV - \int_{{}^i V^e} {}^i \sigma^{e t} \cdot \delta^i \varepsilon^e \cdot dV \right\} \quad (\text{I.8})$$

Comme nous l'avons déjà vu, les incréments de déformations totales $\Delta^i \varepsilon^e$ sont définis comme étant la somme des incréments de déformations mécaniques $\Delta^i \varepsilon_{méc}^e$ et des

déformations dues à la maturation ${}^i\mu^e$. On suppose l'existence d'une loi constitutive incrémentale linéaire, du type (I.4), permettant d'écrire la relation entre les incréments de contraintes et les incréments déformations mécaniques dans l'élément e . En notant C^e la matrice des constantes élastiques de l'élément e , le PTV incrémental se réécrit alors :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \int_{V^e} \left(\Delta^i \varepsilon^{e^t} \cdot C^e \cdot \delta^i \varepsilon^e + {}^i \sigma^{e^t} \cdot \Delta \delta^i \eta^e \right) dV \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \int_{V^e} {}^i \rho^{e^t} \cdot \delta^i u^e \cdot dV \right. \\ \left. + \int_{V^e} {}^i \mu^{e^t} \cdot C^e \cdot \delta^i \varepsilon^e \cdot dV - \int_{V^e} {}^i \sigma^{e^t} \cdot \delta^i \varepsilon^e \cdot dV \right\} \quad (\text{I.9})$$

Soit ${}^n\mu^e$ les déformations de maturation devant être prise en compte dans l'élément e pour le cycle de croissance courant. Ses déformations s'appliquent dans la configuration ${}^n\hat{C}$ et contribuent à la déformer en ${}^{n+1}C$. Dans le processus itératif de Newton-Raphson, elles doivent, au même titre que les autres chargements, être appliquées en plusieurs incréments correspondants aux pas de charge. Ainsi, ${}^i\mu^e$ désigne le niveau de maturation atteint et considéré à l'itération i du pas p du cycle courant. Notons donc, qu'à l'intérieur d'un pas de charge, ce niveau ne varie pas avec les itérations.

De manière à aboutir à une formulation comparable avec (I.5), l'équation précédente peut à nouveau être discrétisée en tenant compte du type d'élément utilisé pour décrire la structure. L'utilisation d'éléments finis de poutre multicouche permet de considérer le volume ${}^iV^e$ de l'élément e dans la configuration ${}^n\hat{C}_i^p$ comme la somme des volumes ${}^iV_c^e$ des couches le constituant. L'indice c fait référence à une couche apparue à la date $c\Delta\tau$ (cf. paragraphe 1.1.3). La notion de couche permet alors d'exprimer que la maturation n'a lieu que dans la couche périphérique d'un élément. On écrit comme en (I.2) :

$${}^i\mu^e = {}^i\mu_n^e \cdot \delta_{c,n} \quad (\text{I.10})$$

En utilisant cette dernière relation, la discrétisation géométrique en couches conduit à la forme suivante du PTV incrémental de la FLAI, où seules les quantités pouvant présenter une discontinuité selon les couches d'un élément portent l'indice de couche c :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{V_c^e} \left(\Delta^i \varepsilon^{e^t} \cdot C_c^e \cdot \delta^i \varepsilon^e + {}^i \sigma_c^{e^t} \cdot \Delta \delta^i \eta^e \right) dV \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{V_c^e} {}^i \rho_c^{e^t} \cdot \delta^i u^e \cdot dV \right. \\ \left. + \int_{V_n^e} {}^i \mu_n^{e^t} \cdot C_n^e \cdot \delta^i \varepsilon^e \cdot dV - \sum_{c=d(e)}^n \int_{V_c^e} {}^i \sigma_c^{e^t} \cdot \delta^i \varepsilon^e \cdot dV \right\} \quad (\text{I.11})$$

La relation (I.11) permet, à partir de la configuration ${}^n\hat{C}_i^p$, des chargements qui lui sont appliqués et de son état de précontraintes, de calculer la géométrie de la configuration ${}^n\hat{C}_{i+1}^p$ ainsi que le nouvel état de contrainte de chaque couche de chaque élément, donné par :

$${}^{i+1}\sigma_c^e = {}^i\sigma_c^e + \Delta^i\sigma_c^e \quad (\text{I.12})$$

où :

$$\Delta^i\sigma_c^e = C_c^e \cdot \Delta^i\varepsilon^e - C_c^e \cdot {}^i\mu_n^e \cdot \delta_{c,n} \quad (\text{I.13})$$

Outre le terme non linéaire qui apparaît dans le membre de gauche de (I.11), on note, comme différence avec la formulation linéaire (I.5), que le second membre fait intervenir les densités volumiques de charge de l'ensemble des couches de la structure et pas seulement des dernières formées. Cependant, les chargements qui correspondent aux couches antérieures au cycle courant sont équilibrés par l'état de précontraintes de ces couches que l'on retrouve dans le dernier terme du second membre.

1.2.3 Interpolation et calcul des grandeurs élémentaires

La méthode des éléments finis permet de résoudre l'équation (I.11) et repose sur la discrétisation du champ de déplacements. Cette discrétisation consiste à interpoler les déplacements en tout point d'un élément en fonction de ceux de ses nœuds. L'interpolation des déplacements et des déformations, donnée dans l'Annexe 3, permet d'obtenir la formulation incrémentale discrétisée en déplacements du PTV de la FLAI, présentée dans l'Annexe 4. En traduisant, à partir de l'équation (A.4.32), que les éléments finis de poutre utilisés sont multicouches et en attribuant l'indice c , en référence à la couche ${}^iV_c^e$, aux quantités qui dépendent de la section (fonctions de y et z) de chaque élément, la formulation (I.11) devient :

$$\sum_{e \in {}^{i+1}E} \left\{ \Delta^i q^{e^t} \cdot \left(\sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^iV_c^e} ({}^iB_l^{e^t} \cdot {}^i h_c^e \cdot {}^i B_l^e + {}^i B_\sigma^{e^t} \cdot {}^i \Sigma_c^e \cdot {}^i B_\sigma^e) dV \right) \cdot \delta^i q^e \right\} = \sum_{e \in {}^{i+1}E} \left\{ \left(\sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^iV_c^e} {}^i p_c^{e^t} \cdot {}^i N^e \cdot dV + \int_{{}^iV_n^e} {}^i \alpha_n^{e^t} \cdot {}^i B_l^e \cdot dV - \sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^iV_c^e} {}^i m_c^{e^t} \cdot {}^i B_l^e \cdot dV \right) \cdot \delta^i q^e \right\} \quad (\text{I.14})$$

La formulation précédente permet de définir et de calculer différentes grandeurs élémentaires exprimées sous forme de matrices ou de vecteurs. La théorie des poutres permet de séparer les variables transverses décrivant la section droite, que sont y et z , de la variable longitudinale x . Chaque couche d'un élément de poutre ayant pour longueur celle de cet élément, notée ${}^iL^e$, les intégrales portant sur le volume des couches d'un élément peuvent

ainsi être calculées sur la section de chaque couche, notée ${}^iS_c^e$, puis selon la longueur de l'élément. L'intégration sur la section fait alors apparaître des grandeurs ne dépendant que de x , et dites généralisées. Dans le cas d'un élément de poutre multicouche e , apparu à la date $d(e) = d\Delta\tau$, les matrices et vecteurs élémentaires définis par les relations (A.4.33) à (A.4.37) s'écrivent donc, après sommation d'intégrales prises sur les sections de ses couches ${}^iS_c^e$, sous la forme d'intégrales sur la longueur de l'élément. Elles sont exprimées dans le repère local de chaque élément pris dans la configuration de structure ${}^n\hat{C}_i^p$.

Nous considérons que les couches d'un élément sont à section parfaitement circulaire et constante selon la longueur, et qu'elles sont concentriques. De plus, le repère local de chaque élément de poutre est établi en prenant l'axe x comme l'axe neutre, y et z comme les axes principaux d'inertie de la section droite. Ainsi, l'hypothèse d'un repère local principal géométrique pour chaque couche d'un élément entraîne les relations simplificatrices suivantes :

$$\int_{{}^iS_c^e} y \cdot dS = \int_{{}^iS_c^e} z \cdot dS = \int_{{}^iS_c^e} y \cdot z \cdot dS = 0 \quad (\text{I.15})$$

Matrice de rigidité élémentaire des petits déplacements

Cette matrice, symétrique, est donnée par :

$${}^i k_l^e = \int_{{}^iL^e} {}^i B_l^{e,t}(x) \cdot \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^iS_c^e} {}^i h_c^e(y,z) \cdot dS \right\} \cdot {}^i B_l^e(x) \cdot dx \quad (\text{I.16})$$

avec, d'après (I.15) :

$$\int_{{}^iS_c^e} {}^i h_c^e(y,z) \cdot dS = E_c^e \cdot \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{2(1+\nu)} \end{pmatrix}_c \quad (\text{I.17})$$

et où :

$${}^i I_{zc}^e = \int_{{}^iS_c^e} y^2 \cdot dS \quad {}^i I_{yc}^e = \int_{{}^iS_c^e} z^2 \cdot dS \quad {}^i J_c^e = \int_{{}^iS_c^e} (y^2 + z^2) \cdot dS \quad (\text{I.18})$$

sont respectivement les moments d'inertie de la section ${}^iS_c^e$ par rapport aux axes z , y et x . On définit ainsi la matrice de rigidité des modes de déformation de l'élément e par :

$${}^i H^e = \sum_{c=d(e)}^n \int_{S_c^e} {}^i h_c^e(y, z) dS = \begin{pmatrix} (ES) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (EI_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (EI_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (GJ) \end{pmatrix}^e \quad (\text{I.19})$$

où :

$$\begin{cases} (ES)^e = \sum_{c=d(e)}^n (E_c^e \cdot S_c^e) & (EI_z)^e = \sum_{c=d(e)}^n (E_c^e \cdot I_{zc}^e) \\ (EI_y)^e = \sum_{c=d(e)}^n (E_c^e \cdot I_{yc}^e) & (GJ)^e = \sum_{c=d(e)}^n \left(\frac{E_c^e \cdot J_c^e}{2(1+\nu_c^e)} \right) \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

sont respectivement les rigidités de l'élément à la traction selon l'axe x , à la flexion autour de l'axe z , à la flexion autour de l'axe y et à la torsion autour de l'axe x . La matrice de rigidité élémentaire des petits déplacements s'exprime finalement par :

$${}^i k_l^e = \int_{L^e} {}^i B_l^{e^t}(x) \cdot {}^i H^e \cdot {}^i B_l^e(x) dx \quad (\text{I.21})$$

Matrice de rigidité élémentaire des précontraintes

Cette matrice, symétrique, est donnée par :

$${}^i k_\sigma^e = \int_{L^e} {}^i B_\sigma^{e^t}(x) \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{S_c^e} {}^i \Sigma_c^e(y, z, {}^i \sigma_c^e(x, y, z)) dS \right\} \cdot {}^i B_\sigma^e(x) dx \quad (\text{I.22})$$

avec :

$$\int_{S_c^e} {}^i \Sigma_c^e(y, z, {}^i \sigma_c^e(x, y, z)) dS = \begin{pmatrix} 0 & -V_z & V_y & 0 \\ -V_z & N_x & 0 & -M_y \\ V_y & 0 & N_x & -M_z \\ 0 & -M_y & -M_z & N_m \end{pmatrix}_c (x) \quad (\text{I.23})$$

et où :

$$\begin{cases} {}^i N_{xc}^e(x) = \int_{S_c^e} ({}^i \sigma_{xx}(x, y, z))_c^e dS \\ {}^i V_{yc}^e(x) = \int_{S_c^e} ({}^i \sigma_{xy}(x, y, z))_c^e dS & {}^i V_{zc}^e(x) = \int_{S_c^e} ({}^i \sigma_{xz}(x, y, z))_c^e dS \\ {}^i M_{yc}^e(x) = \int_{S_c^e} z \cdot ({}^i \sigma_{xx}(x, y, z))_c^e dS & {}^i M_{zc}^e(x) = - \int_{S_c^e} y \cdot ({}^i \sigma_{xx}(x, y, z))_c^e dS \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

sont les efforts internes généralisés dus aux précontraintes dans la section ${}^iS_c^e$. Le principe d'équivalence des efforts internes et des contraintes conduit aux relations (I.24) et à la relation suivante, utilisée pour établir (I.23) :

$$\int_{{}^iS_c^e} \left(y^i (\sigma_{xy}(x, y, z))_c^e + z^i (\sigma_{xz}(x, y, z))_c^e \right) dS = 0 \quad (\text{I.25})$$

On définit ainsi la matrice suivante, contenant les efforts internes généralisés de l'élément e par :

$${}^iR_g^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^iS_c^e} \Sigma_c^e(y, z, {}^i\sigma_c^e(x, y, z)) dS = \begin{pmatrix} 0 & -V_z & V_y & 0 \\ -V_z & N_x & 0 & -M_y \\ V_y & 0 & N_x & -M_z \\ 0 & -M_y & -M_z & N_m \end{pmatrix}^e (x) \quad (\text{I.26})$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^iN_x^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n ({}^iN_{xc}^e(x)) \\ {}^iV_y^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n ({}^iV_{yc}^e(x)) \quad {}^iV_z^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n ({}^iV_{zc}^e(x)) \\ {}^iM_y^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n ({}^iM_{yc}^e(x)) \quad {}^iM_z^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n ({}^iM_{zc}^e(x)) \end{array} \right. \quad (\text{I.27})$$

sont respectivement l'effort normal selon l'axe x , l'effort tranchant selon l'axe y , l'effort tranchant selon l'axe z , le moment de flexion autour de l'axe y et le moment de flexion autour de l'axe z . Nous avons de plus :

$${}^iN_m^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n ({}^iN_{mc}^e(x)) \quad (\text{I.28})$$

où :

$${}^iN_{mc}^e(x) = \int_{{}^iS_c^e} (y^2 + z^2) \cdot {}^i(\sigma_{xx}(x, y, z))_c^e \cdot dS = \frac{{}^iJ_c^e}{{}^iS_c^e} \cdot {}^iN_{xc}^e(x) \quad (\text{I.29})$$

Enfin, signalons que, même s'il n'apparaît pas dans l'équation (I.26), le moment de torsion autour de l'axe x de l'élément e est donnée par :

$${}^iM_x^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n ({}^iM_{xc}^e(x)) \quad (\text{I.30})$$

où :

$${}^iM_{xc}^e(x) = \int_{{}^iS_c^e} \left(y \cdot {}^i(\sigma_{xz}(x, y, z))_c^e - z \cdot {}^i(\sigma_{xy}(x, y, z))_c^e \right) dS \quad (\text{I.31})$$

La matrice de rigidité élémentaire des précontraintes s'exprime finalement par :

$${}^i k_{\sigma}^e = \int_{{}^i L^e} {}^i B_{\sigma}^{e^t}(x) \cdot {}^i R_g^e(x) \cdot {}^i B_{\sigma}^e(x) \cdot dx \quad (\text{I.32})$$

Notons que les efforts élémentaires généralisés dans la configuration ${}^n \hat{C}_i^p$ sont obtenus sous une forme incrémentale similaire à celle qu'exprime la relation (I.12) pour les contraintes. Les incréments de ces efforts sont alors calculés en fonction des incréments de déformations généralisées de l'itération d'équilibre courante, et donc en fonction des incréments de déplacements nodaux élémentaires.

Vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes au poids propre

Compte tenu que les densités volumiques de poids propre, exprimées dans le repère local, sont constantes sur le volume d'une même couche, ce vecteur est donné par :

$${}^i f_{\rho}^e = \int_{{}^i L^e} {}^i N^{e^t}(x) \cdot \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^i S_c^e} {}^i p_c^e \cdot dS \right\} \cdot dx \quad (\text{I.33})$$

avec, d'après (I.15) :

$$\int_{{}^i S_c^e} {}^i p_c^e \cdot dS = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 0 \end{Bmatrix}_c^e \quad (\text{I.34})$$

et où :

$${}^i d_{xc}^e = {}^i \rho_{xc}^e \cdot {}^i S_c^e \quad {}^i d_{yc}^e = {}^i \rho_{yc}^e \cdot {}^i S_c^e \quad {}^i d_{zc}^e = {}^i \rho_{zc}^e \cdot {}^i S_c^e \quad (\text{I.35})$$

sont respectivement les densités linéiques de poids propre de la section ${}^i S_c^e$ suivant les axes x , y et z . On définit ainsi le vecteur des densités linéiques de poids propre de l'élément e par :

$${}^i d^e = \sum_{c=d(e)}^n \int_{{}^i S_c^e} {}^i p_c^e \cdot dS = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 0 \end{Bmatrix}^e \quad (\text{I.36})$$

où :

$${}^i d_x^e = \sum_{c=d(e)}^n ({}^i d_{xc}^e) \quad {}^i d_y^e = \sum_{c=d(e)}^n ({}^i d_{yc}^e) \quad {}^i d_z^e = \sum_{c=d(e)}^n ({}^i d_{zc}^e) \quad (\text{I.37})$$

sont respectivement les densités linéiques de poids propre de l'élément suivant les axes x , y et z . Le vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes au poids propre s'exprime finalement par :

$${}^i f_\rho^e = \int_{{}^i L^e} {}^i N^{e^t}(x) \cdot {}^i d^e \cdot dx \quad (\text{I.38})$$

Vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes aux déformations de maturation

Compte tenu que les déformations de maturation n'ont lieu que dans la dernière couche formée d'un élément, et qu'on ne considère que la déformation axiale de maturation ${}^i \mu_{xn}^e$, supposée constante selon la longueur mais pas dans la section ${}^i S_n^e$, ce vecteur est donné par :

$${}^i f_\mu^e = \int_{{}^i L^e} {}^i B_l^{e^t}(x) \cdot \left\{ \int_{{}^i S_n^e} {}^i \alpha_n^e(y, z) \cdot dS \right\} \cdot dx \quad (\text{I.39})$$

On définit ainsi le vecteur élémentaire des efforts généralisés équivalents aux déformations de maturation de la couche périphérique par :

$${}^i \alpha_g^e = \int_{{}^i S_n^e} {}^i \alpha_n^e(y, z) \cdot dS = \begin{matrix} {}^i \\ \left. \begin{matrix} \alpha_x \\ \alpha_z \\ \alpha_y \\ 0 \end{matrix} \right\}^e \end{matrix} \quad (\text{I.40})$$

où :

$$\begin{cases} {}^i \alpha_x^e = \int_{{}^i S_n^e} E_n^e \cdot {}^i \mu_{xn}^e(y, z) \cdot dS \\ {}^i \alpha_z^e = \int_{{}^i S_n^e} -y \cdot E_n^e \cdot {}^i \mu_{xn}^e(y, z) \cdot dS \\ {}^i \alpha_y^e = \int_{{}^i S_n^e} z \cdot E_n^e \cdot {}^i \mu_{xn}^e(y, z) \cdot dS \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

sont respectivement l'effort normal selon l'axe x , le moment de flexion autour de l'axe z et le moment de flexion autour de l'axe y équivalents aux déformations de maturation s'exerçant dans le cerne externe. On note que la maturation n'engendre pas de moment de torsion (dernière composante du vecteur ${}^i \alpha_g^e$), ni d'efforts tranchants équivalents. Le vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes aux déformations de maturation s'exprime finalement par :

$${}^i f_\mu^e = \int_{{}^i L^e} {}^i B_l^{e^t}(x) \cdot {}^i \alpha_g^e \cdot dx \quad (\text{I.42})$$

Vecteur des forces nodales internes élémentaires équivalentes à l'état de précontraintes

Ce vecteur est donné par :

$${}^i f_{int}^e = \int_{L^e} {}^i B_l^{et}(x) \left\{ \sum_{c=d(e)}^n \int_{S_c^e} {}^i m_c^e(y, z, {}^i \sigma_c^e(x, y, z)) dS \right\} dx \quad (\text{I.43})$$

avec :

$$\int_{S_c^e} {}^i m_c^e(y, z, {}^i \sigma_c^e(x, y, z)) dS = \begin{Bmatrix} N_x \\ M_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}_c^e(x) \quad (\text{I.44})$$

qui est le vecteur des efforts internes généralisés dus aux précontraintes, définis en (I.24) et (I.31), dans la section ${}^i S_c^e$. On définit ainsi le vecteur des efforts internes généralisés de l'élément e par :

$${}^i M_g^e(x) = \sum_{c=d(e)}^n \int_{S_c^e} {}^i m_c^e(y, z, {}^i \sigma_c^e(x, y, z)) dS = \begin{Bmatrix} N_x \\ M_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix}^e(x) \quad (\text{I.45})$$

contenant les efforts élémentaires généralisés définis en (I.27) et (I.30). Le vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes aux précontraintes s'exprime finalement par :

$${}^i f_{int}^e = \int_{L^e} {}^i B_l^{et}(x) \cdot {}^i M_g^e(x) dx \quad (\text{I.46})$$

En reportant les grandeurs élémentaires données en (I.21), (I.32), (I.38), (I.42) et (I.46) dans la formulation (I.14), le PTV incrémental de la FLAI s'écrit alors :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \Delta^i q^{et} \cdot ({}^i k_l^e + {}^i k_\sigma^e) \cdot \delta^i q^e \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \left({}^i f_\rho^e + {}^i f_\mu^e - {}^i f_{int}^e \right)^t \cdot \delta^i q^e \right\} \quad (\text{I.47})$$

soit finalement :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \Delta^i q^{et} \cdot {}^i k^e \cdot \delta^i q^e \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ {}^i r^{et} \cdot \delta^i q^e \right\} \quad (\text{I.48})$$

Cette dernière formulation fait apparaître, dans le membre de gauche, la matrice de rigidité élémentaire et, dans le membre de droite, le vecteur résidu élémentaire, aussi appelé vecteur élémentaire des forces nodales hors équilibre.

1.2.4 Algorithme d'analyse non linéaire de la FLAI

Le passage au repère global de la structure et l'opération d'assemblage (cf. Annexe 4) conduisent à la formulation incrémentale globale du PTV. En FLAI, elle est donnée par le système linéaire suivant :

$${}^i K \cdot \Delta^i Q = {}^i R \quad (\text{I.49})$$

où ${}^i K$ est la matrice de rigidité globale (somme de la matrice de rigidité globale des petits déplacements ${}^i K_l$ et de la matrice de rigidité globale des précontraintes ${}^i K_\sigma$), $\Delta^i Q$ le vecteur des incréments de déplacements nodaux de la configuration de référence ${}^n \hat{C}_i^p$ à la nouvelle ${}^n \hat{C}_{i+1}^p$, et ${}^i R$ le vecteur résidu global issu de l'itération d'équilibre i .

La résolution de ce système linéaire permet de déterminer les incréments de déplacements des nœuds de la structure à l'itération d'équilibre $i+1$ du pas de charge p du cycle de croissance $n+1$. Les relations entre les déformations et les déplacements ainsi que la loi de comportement du matériau considéré permettent de calculer le nouveau champ de contraintes en tout point $M(x,y,z)$ de la structure dans la nouvelle configuration ${}^n \hat{C}_{i+1}^p$. Nous donnons ci-dessous l'algorithme détaillé de résolution non linéaire de la FLAI d'un problème de structure en croissance. Pour ce faire, nous utilisons les deux notations suivantes :

- F_{ext} représente le vecteur des forces nodales externes de la structure équivalentes au poids propre et à la maturation des cernes périphériques.
- X représente le vecteur colonne des coordonnées globales des nœuds de la structure.

☞ *Boucle sur les cycles de croissance : $n = 1, NCYCL$*

${}^{n-1}C$ connue et en équilibre, ${}^n C$ recherchée pour ${}^n F_{ext} = {}^{n-1} F_{ext} + \Delta^n F_{ext}$

Mise à jour de l'architecture par le *moteur de croissance* : ${}^{n-1}C \Rightarrow {}^{n-1} \hat{C}$

$${}^{n-1} \hat{C} = {}^{n-1} \hat{C}^0 = {}^{n-1} \hat{C}_0^0$$

☞ *Boucle sur les pas de charge : $p = 1, NPAS$*

Incrémenter la charge sur ${}^{n-1} \hat{C}^{p-1} = {}^{n-1} \hat{C}_0^{p-1}$ de $\Delta^p F_{ext}$ $\left(\Delta^n F_{ext} = \sum_{p=1}^{NPAS} \Delta^p F_{ext} \right)$

☞ *Boucle sur les itérations d'équilibre : $i = 1, NITER$*

Déterminer ${}^{n-1} \hat{C}_i^{p-1}$ à partir de ${}^{n-1} \hat{C}_{i-1}^{p-1}$ non équilibrée...

$$\text{Faire } {}^i R = {}^{n-1}F_{ext} + \sum_I^p \Delta^p F_{ext}$$

☞ **Boucle sur les éléments** : $e \in {}^{n+1}E$

Extraire $\Delta^{i-1}Q^e$ de $\Delta^{i-1}Q$ par (A.4.46)

1/ Calcul des précontraintes dans ${}^{n-1}\hat{C}_{i-1}^{p-1}$

Calcul de l'incrément $\Delta^{i-1}q^e$ en local par (A.4.42)

Incréments de déformations de l'itération $i-1$ par (A.4.2)

☞ **Boucle sur les couches** : $c = d(e), n$

Incrément de contraintes $i-1$ par (I.13)

Cumul des contraintes par (I.12)

☞ **Fin des couches**

2/ Matrice de rigidité et Résidu

Matrice de rigidité élémentaire par (I.21) et (I.32)

Forces internes élémentaires par (I.46)

Passage en global et assemblage

Faire ${}^i R = {}^i R - {}^i P_{int}$

☞ **Fin des éléments**

Résolution de (I.48) et mise à jour de ${}^{n-1}\hat{C}_{i-1}^{p-1}$: ${}^i X = {}^{i-1}X + \Delta^i Q$

Test de convergence pour l'équilibre de ${}^{n-1}\hat{C}_i^{p-1}$

☞ **Fin des itérations**

$${}^{n-1}\hat{C}^p = {}^{n-1}\hat{C}_0^p = {}^{n-1}\hat{C}_{NITER}^{p-1} \text{ en équilibre}$$

☞ **Fin des pas**

$${}^n C = {}^{n-1}\hat{C}^{NPAS} = {}^{n-1}\hat{C}_{NITER}^{NPAS-1} \text{ en équilibre}$$

☞ **Fin des cycles**

Discussion

Le travail que nous venons de présenter dans ce chapitre doit nous permettre de choisir les hypothèses à adopter pour l'analyse du comportement biomécanique à l'échelle du peuplement, au regard de ce que l'on observe à l'échelle de l'arbre. L'écriture des équations d'équilibre dans l'hypothèse des petits déplacements ne permet pas d'obtenir des configurations en état d'équilibre si les chargements sont trop importants. De plus, lorsque l'on procède à l'analyse d'une structure en croissance, les écarts à la solution exacte se cumulent à chaque cycle. Le résultat final peut alors être très éloigné du comportement réel. Cette méthode a cependant l'avantage d'être beaucoup plus rapide que la résolution du problème en analyse non linéaire. Nous présentons ci-après quelques simulations permettant d'estimer les écarts entre les deux approches, en fonction du type de structure et de chargement que l'on considère. La première simulation (Fig. I.7) met en évidence la différence de comportement pour le cas simple d'une poutre sans croissance, encastree à une extrémité et dont l'autre, libre de tout déplacement, est soumise à l'application d'une charge ponctuelle induisant un grand déplacement. Ce cas d'école, référence en analyse des structures, montre bien les limites de l'analyse linéaire : l'extrémité ne se déplace que dans la direction transversale à l'axe de la poutre, ce qui provoque un allongement artificiel de celle-ci. La solution non linéaire ne présente pas cet inconvénient et fournit l'état de flexion exact en équilibre avec la sollicitation appliquée.

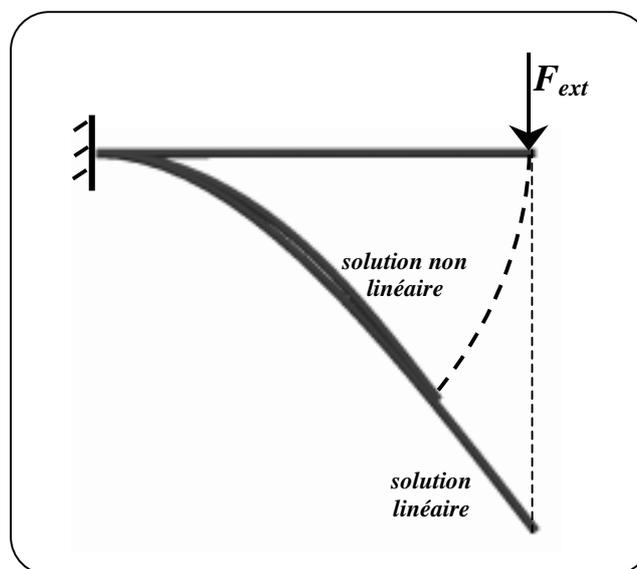


FIGURE I.7 – Flexion d'une poutre encastree soumise à l'application d'une charge ponctuelle normale à l'axe neutre. En analyse non linéaire, les déplacements axiaux sont permis. La poutre se déforme alors en conservant sa longueur.

Dans le cas précédent, la solution linéaire n'est pas pertinente car la force est beaucoup trop grande devant la rigidité de la poutre. Aussi, l'intensité des déplacements n'est pas compatible avec les hypothèses de l'analyse linéaire (cf. § 1.1.3).

La simulation suivante (Fig. I.8) montre les écarts dus au type d'analyse dans le cas d'une branche en croissance. Les résultats sont présentés à l'issue de 30 cycles et les écarts sont donc le résultat du cumul des différences obtenues à chaque cycle.

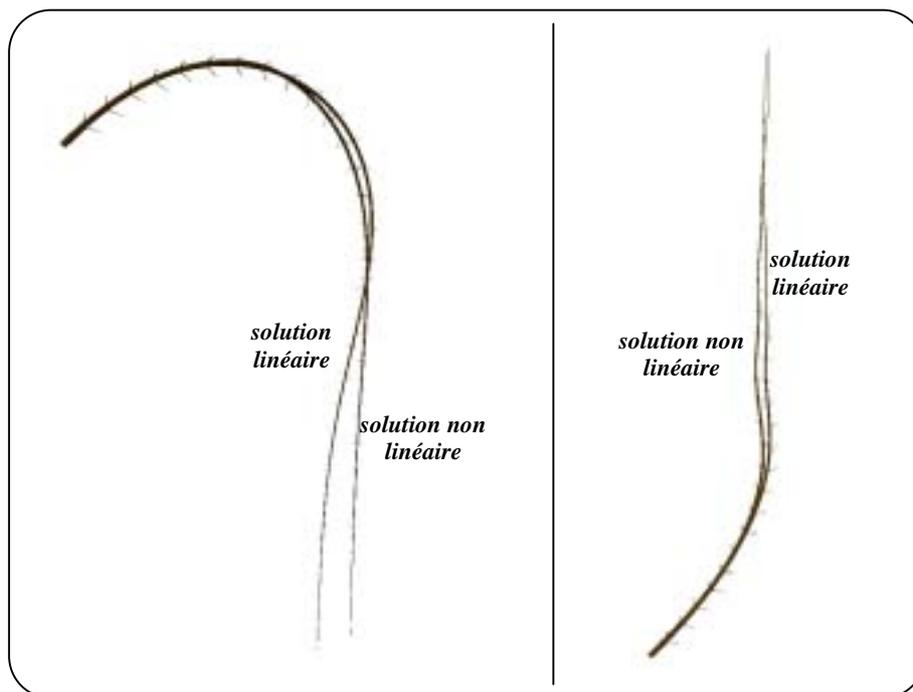


FIGURE I.8 – Simulation de la croissance d'une branche soumise à l'action de son poids propre et comparaison analyse linéaire / non linéaire. A gauche : sans redressement ; à droite : avec redressement. Résultats obtenus à l'issue de 30 cycles de croissance. Le cumul des écarts sur chaque cycle ne conduit pas à des formes finales très différentes.

La branche est initialement inclinée à 45° par rapport à la verticale. Tout au long de sa croissance, elle est soumise à l'action de son propre poids. Cette simulation a été réalisée en considérant le matériau homogène et isotrope avec une densité volumique importante de 2 g.cm^{-3} et un module d'Young longitudinal de 3000 MPa. La croissance primaire, qui s'effectue dans le prolongement de configuration déformée issue du cycle précédent, vient amplifier l'effet de flexion dû à l'action de la gravité. La partie droite de la figure (I.8) montre la déformée obtenue en appliquant une stratégie de redressement intense à cette même branche. Nous considérons qu'il s'agit d'une branche de résineux pour laquelle les déformations de maturation dans le bois normal sont de $-100 \mu\text{def}$ (retrait des cellules) et de

1500 μ def (élongation) dans les zones de bois de compression situées dans la partie inférieure de la branche. Pour les deux types de simulation, l'analyse linéaire ne conduit pas à des formes finales très éloignées de la solution non linéaire exacte. L'utilisation de la méthode itérative de Newton-Raphson est alors peu justifiée. En outre, notons que l'obtention de la solution exacte au terme des 30 cycles de croissance a nécessité un temps de calcul d'environ 80 fois celui du calcul en analyse linéaire. De manière générale, il est difficile d'estimer le surcoût en temps de calcul lorsque l'on travaille en analyse non linéaire, puisqu'il dépend du nombre de pas de charge que l'on effectue à l'intérieur d'un cycle de croissance et du critère de convergence mettant fin aux itérations d'équilibre d'un pas. Simplement, on peut remarquer que, pour un cycle donné, une itération de l'algorithme de résolution non linéaire nécessite le même temps de calcul que celui du cycle en cours en analyse linéaire.

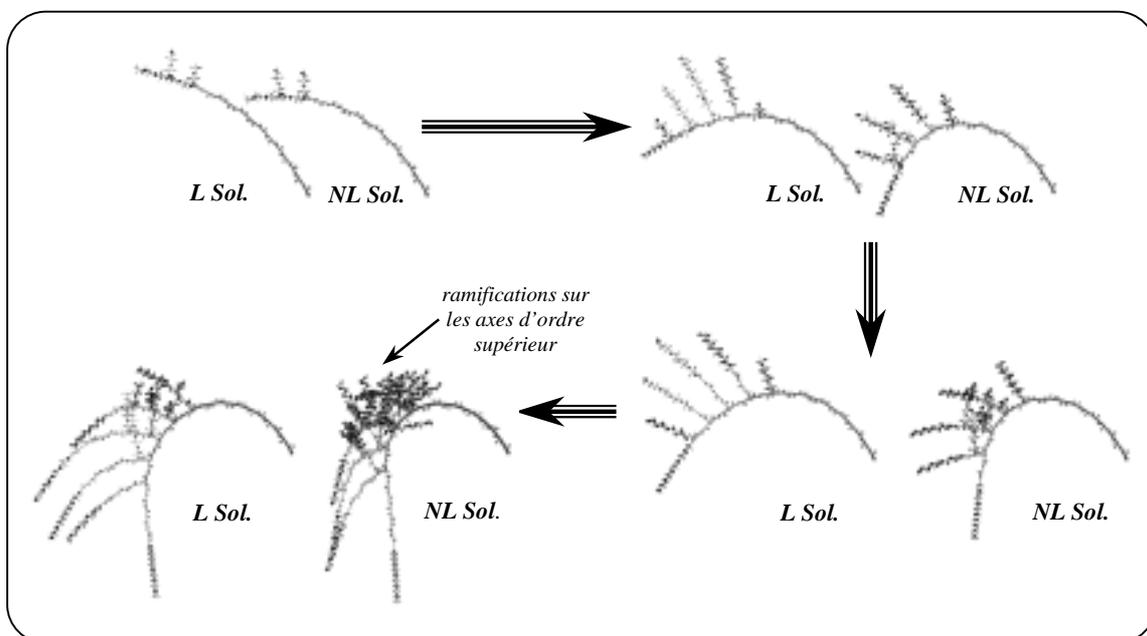


FIGURE I.9 – Simulation de la croissance d'une branche fruitière. Le type d'analyse (linéaire / non linéaire) influence non seulement l'évolution de la forme de l'axe principal, mais aussi le mode de développement des ramifications qui, dans le cas d'une plante épitone, dépend de la courbure de l'axe porteur.

La figure (I.9) présente quatre stades de la croissance d'une branche fruitière dont l'inclinaison basale correspond à son angle d'insertion sur le tronc. Le système de ramification des plantes épitones est lié à l'évolution de l'orientation des bourgeons dans l'espace et donc à la courbure des axes porteurs (Crabbé, 1975 ; Costes, 1994 ; Fourcaud *et al.*, 1998). Aussi, seuls les bourgeons bien orientés sont susceptibles de se développer, les autres restant alors dans un état latent. L'apparition de charges importantes, comme les fruits

chez les arbres fruitiers, modifient fortement la courbure des branches et, par conséquent, la probabilité d'apparition des ramifications. Pour ces branches, le type d'analyse utilisé pour le calcul du comportement biomécanique influence non seulement la forme, mais aussi le mode de développement des ramifications sur la branche et sur les axes d'ordre supérieur. Au final, le calcul en analyse non linéaire met en évidence une branche plus productive qu'en analyse linéaire. Ainsi, malgré l'important coût qu'elle occasionne, l'analyse non linéaire se justifie bien lorsque l'on souhaite modéliser le comportement des plantes épitones.

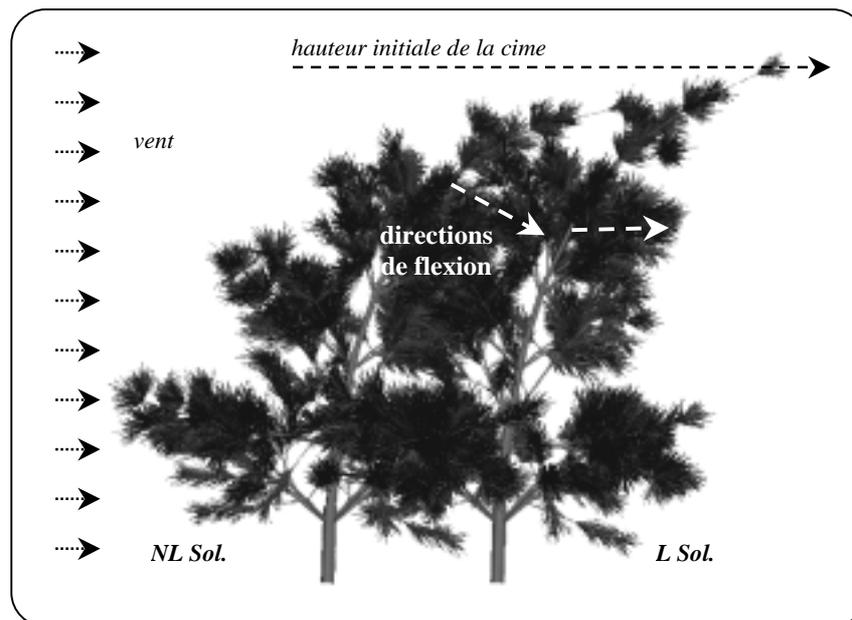


FIGURE I.10 – Simulation d'un jeune Pin maritime soumis à l'action du vent. La réponse fournie par l'analyse non linéaire évite l'allongement exagéré de la tige (cas en linéaire) et conduit à une déformée plus réaliste.

La figure (I.10) montre les effets du vent sur le comportement d'un jeune Pin maritime. Ici, le vent est considéré comme une charge répartie sur tous les éléments de l'arbre, appliquée perpendiculairement au tronc initialement vertical. Cette simulation conduit aux mêmes remarques que celles effectuées pour le cas simple de la poutre encastree de la figure (I.7). Le calcul en analyse linéaire conduit à une configuration déformée pour laquelle la longueur de la tige est plus importante que dans l'état initial. En effet, la cime se déplace à hauteur constante, de même que tous les points de la structure. Dans le cas d'un vent d'une intensité bien supérieure, on assisterait alors à un allongement exagéré du tronc. Le calcul en analyse non linéaire permet d'éviter ce genre d'erreur et fournit une déformée plus proche du comportement réel.

Conclusion

L'utilisation des techniques de l'analyse non linéaire géométrique pour la modélisation du comportement biomécanique d'un arbre en croissance se justifie plus ou moins bien en fonction des données du problème que l'on se pose. De plus, si ce type d'analyse permet d'obtenir l'équilibre exact des structures étudiées, elle présente cependant le gros inconvénient d'être beaucoup plus coûteuse que l'analyse linéaire. Pour ces différentes raisons, l'analyse non linéaire apparaît mal adaptée dans l'optique d'une application à l'échelle du peuplement. Dans le second chapitre, nous présentons les hypothèses de construction d'un modèle de comportement biomécanique à grande échelle. En particulier, le calcul des différentes structures y est alors effectué dans l'hypothèse des petits déplacements. Néanmoins, les développements que nous venons d'exposer ne manquent pas pour autant d'intérêt. Ils permettent de disposer d'un outil précieux dans le module AMAPméca pour aborder les problèmes de calibration des paramètres. La réalisation de simulations précises dans tous les cas de chargement permet alors d'envisager une confrontation sérieuse avec les mesures expérimentales détaillées de forme et de structure interne des tiges de Pins maritimes dont nous disposons au laboratoire.

- DEUXIEME CHAPITRE -

***MODELISATION DU COMPORTEMENT
A L'ECHELLE DU PEUPLEMENT :
BIOMECHANIQUE DU TRONC ET
COMPETITION SPATIALE ENTRE HOUPPIERS.***

Introduction.....	43
2.1 Analyse biomécanique du tronc par Matrices de Transfert.....	47
2.1.1 Présentation des hypothèses de la méthode d'analyse	47
<i>Description de la structure interne du tronc</i>	<i>48</i>
2.1.2 Vecteurs d'état et matrice de transfert des poutres 3D.....	49
<i>Relation de transfert incrémentale</i>	<i>51</i>
2.1.3 Prise en compte des déformations de maturation.....	52
<i>Effets mécaniques des déformations de maturation</i>	<i>53</i>
<i>Modélisation des déformations de maturation</i>	<i>55</i>
2.1.4 Méthode et outils pour le calcul de la structure	56
<i>Discrétisation du tronc</i>	<i>56</i>
<i>Vecteurs d'état aux nœuds.....</i>	<i>56</i>
<i>Changement d'élément au nœud i</i>	<i>58</i>
<i>Transfert sur l'élément i</i>	<i>59</i>
2.1.5 Procédure d'analyse du tronc par matrices de transfert	59
<i>Parcours des éléments et résolution.....</i>	<i>60</i>
<i>Cas d'une poutre encastree – libre.....</i>	<i>62</i>
<i>Procédure liée à la croissance</i>	<i>64</i>
2.2 Gestion de la compétition spatiale et impact sur la structure	66
2.2.1 Compétition entre individus et diagrammes de Voronoï	66
<i>Définition du voisinage au sens de Voronoï.....</i>	<i>68</i>
<i>Développement, compétition et diagrammes de Voronoï.....</i>	<i>69</i>
2.2.2 Espace vital et excentrement du houppier.....	70
<i>Hypothèses pour l'étude de peuplements de Pins maritimes.....</i>	<i>71</i>
<i>Interprétation de la notion d'espace vital et développement du houppier.....</i>	<i>72</i>
<i>Mécanisme de l'excentrement du houppier : notion de timidité.....</i>	<i>74</i>
<i>Détermination du point d'application de l'incrément de poids du houppier.....</i>	<i>75</i>
2.2.3 Stratégies de construction des surfaces de croissance.....	76
<i>Réglage des effets de bord par le tore</i>	<i>77</i>
<i>Construction de cellules évolutives dans le temps.....</i>	<i>78</i>
<i>Pondération des cellules par la taille des individus.....</i>	<i>80</i>
Discussion.....	83
Conclusion	86

Introduction

Les simulations comparatives à l'échelle de l'arbre, présentées au premier chapitre, montrent que l'analyse non linéaire n'est intéressante que dans certains cas de chargements importants : le surcoût en temps de calcul qu'elle occasionne est alors justifié par la mise en évidence de comportements différents et plus réalistes que ceux obtenus en analyse linéaire. Cependant, lorsque l'on désire suivre l'évolution de la forme de la tige d'arbres forestiers, généralement soumis à des sollicitations qui restent très modérées, l'étude du comportement biomécanique en analyse linéaire s'avère le plus souvent suffisante et présente l'avantage considérable d'être beaucoup plus rapide. Dans l'optique d'une étude à l'échelle du peuplement forestier, ce dernier point ne manque pas d'importance. De plus, la caractérisation du comportement biomécanique d'un peuplement ne nécessite pas forcément une description détaillée des phénomènes intervenant à l'échelle de chaque arbre ; on cherchera plutôt à en identifier les grandes lignes au travers de comportements individuels remarquables. Le changement d'échelle de l'arbre au peuplement doit donc être réalisé avec le souci d'obtenir un compromis correct entre l'important coût en temps de calcul qu'impose le nombre d'arbres et le niveau de description du modèle dont on se dote. Partant de ce constat, nous faisons le choix d'abandonner le modèle architectural utilisé dans AMAP pour passer à l'étude de structures considérées comme l'assemblage d'un tronc et d'un houppier. Ainsi, l'analyse du comportement biomécanique de chaque arbre se résume à celle de sa tige soumise à diverses sollicitations mécaniques dont le poids du houppier. L'élimination de la quantité colossale d'informations relatives au comportement des branches permet alors d'envisager des applications à l'échelle de plusieurs centaines d'individus.

A chaque cycle de croissance, le comportement biomécanique de chaque tronc est calculé en analyse linéaire à l'aide de la méthode des matrices de transfert de poutres que nous présentons ci-après, plus simple à mettre en œuvre que celle des éléments finis. La croissance en volume de chaque arbre n'est plus donnée par le moteur de croissance AMAPpara, mais par un modèle dendrométrique de croissance des peuplements forestiers correspondant à l'essence étudiée. Le logiciel CAPSIS (Croissance des Arbres en Peuplements et Simulation d'Interventions Sylvicoles), développé par l'INRA depuis 1994 (Dreyfus & Bonnet, 1995), sert de plate-forme informatique commune à quelques uns des principaux modèles de croissance issus de la recherche forestière française. C'est donc logiquement au sein du logiciel CAPSIS que nous avons entrepris le développement d'un module d'analyse du comportement biomécanique à l'échelle du peuplement. Destiné, dans un premier temps, à étudier les problèmes de formes rencontrés dans les peuplements de pins maritimes du massif landais, ce module utilise les accroissements prédits par le modèle

peuplement de Lemoine (1991), adapté en modèle de type arbre par Philippe Dreyfus de l'INRA d'Avignon.

Si dans ce nouveau module, on ne se préoccupe plus du comportement des branches du houppier, il n'en reste pas moins que le poids de cet ensemble continue d'être supporté par le tronc. Ainsi, la mise en place progressive de ce chargement et surtout la façon dont il s'applique sur le tronc tout au long de la croissance constituent des paramètres influant sur le comportement biomécanique de la tige et ayant certaines implications sur la qualité de la bille de pied que l'on souhaite récolter. Les phénomènes de compétition pour les ressources spatiales, existant entre houppiers voisins, peuvent conduire à un mode de développement dissymétrique du houppier avec, pour conséquence, son excentrement par rapport au tronc. Selon que le houppier d'un individu est plus ou moins volumineux, donc lourd, ce type de processus va se traduire par une flexion plus ou moins importante de la tige dans la direction de l'excentrement du houppier (Fig. II.1). L'apparition de tels défauts de forme peut, à son tour, avoir un impact sur le comportement biomécanique du tronc pour les cycles de croissance à venir. On peut en effet assister à des mécanismes de redressement actif de la tige, permis par les phénomènes de maturation du bois nouvellement formé, dont la conséquence sera, selon les cas, une atténuation ou une amplification de la flexuosité du tronc.

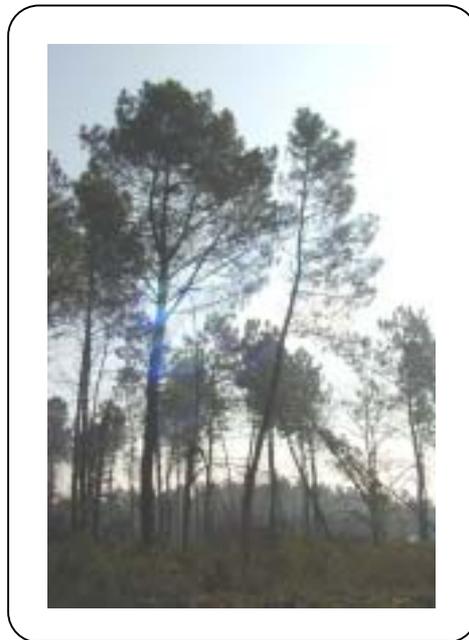


FIGURE II.1 – Photographie de deux Pins maritimes voisins. La compétition spatiale conduit à une dissymétrie de croissance du houppier de l'arbre de droite. Ses branches se développent dans la direction opposée au voisin dominant. La forme particulière du tronc de cet arbre est fortement liée à l'excentrement de son houppier.

La mise au point d'un outil d'analyse du comportement biomécanique de l'arbre dans son environnement forestier suppose donc que l'on soit capable de rendre compte de manière dynamique des phénomènes de compétition aérienne entre arbres pour l'espace et la lumière, et de leur influence sur le comportement de chaque arbre au sein du peuplement.

Pour permettre de formuler des hypothèses sur les mécanismes qui régissent le comportement des arbres en peuplement, la modélisation constitue un outil complémentaire à l'expérimentation et il est possible de réaliser des modèles dits prospectifs (Pavé, 1995). Les formes de modélisation sont variées et leur choix dépend du niveau d'organisation, de l'objectif et des contraintes de l'étude. Houllier *et al.* (1991) opposent ainsi les modèles de type peuplement, basés sur une description synthétique du peuplement (densité, surface terrière, hauteur dominante...), aux modèles de type arbre qui décrivent le comportement individuel de chaque arbre en fonction de son environnement. Pour compléter cette dernière approche, des modèles dits spatialisés peuvent être utilisés afin de traduire les variations du milieu et de l'arrangement des individus entre eux et d'en étudier l'influence sur le fonctionnement de chaque arbre (Ford & Sorrensen, 1992). Ces approches nous intéressent particulièrement dans l'optique d'analyser le comportement biomécanique de chaque arbre du peuplement en tenant compte de son environnement. En écologie forestière, les modèles spatialisés de type arbre appartiennent à l'une des grandes catégories suivantes:

- les modèles basés sur le rayon de voisinage, dans lesquels les arbres interagissent avec leurs voisins situés dans un périmètre déterminé (Thomas & Weiner, 1989 ; Umeki, 1995 ; Moravie *et al.*, 1997).

- les modèles à zone d'influence, où chaque arbre est représenté par un cercle dont le rayon est proportionnel à sa taille. Le potentiel de croissance d'un arbre est d'autant plus réduit que sa zone d'influence est recouverte par celle des voisins (Opie, 1968 ; Bella, 1971 ; Ottorini, 1978 ; Daniels *et al.*, 1986).

- les automates cellulaires, où une cellule correspondant à un arbre passe par divers états qualitatifs en fonction de règles simples de transition dépendant du voisinage (Franc & Picard, 1997).

- les modèles tridimensionnels fournissant une expression de la compétition horizontale et verticale que subit chaque arbre (Sorrensen-Cothorn *et al.*, 1993 ; Courbaud, 1997).

- les modèles basés sur les diagrammes de Voronoï qui attribuent, à chaque individu, un polygone, dont la surface représente l'intensité de la compétition (Brown, 1965 ; Mead, 1966 ; Moore *et al.*, 1973 ; Pelz, 1978 ; Daniels *et al.*, 1986 ; Tomé & Burkhart, 1989 ; Mercier, 1997 ; Chertov *et al.*, 1999).

Les diagrammes de Voronoï permettent de construire une partition de la surface totale du peuplement en polygones convexes, où chacun d'eux est associé à un arbre. Cette représentation géométrique offre la possibilité d'étudier la compétition interindividuelle avec une définition du voisinage différente de celle des plus proches voisins (en distance) ou de celle donnée par délimitation d'un périmètre. Nous proposons d'utiliser les diagrammes de Voronoï afin d'étudier les phénomènes de compétition aérienne entre individus et de traduire leurs effets sur le comportement biomécanique des arbres au sein du peuplement forestier. Plus précisément, il s'agit d'élaborer, dans le logiciel CAPSIS, un premier modèle dans lequel la compétition va conduire à un développement plus ou moins dissymétrique de chaque houppier. Ce modèle doit permettre d'analyser les répercussions d'une répartition évolutive du poids houppier, due à son excentrement par rapport au tronc, sur le comportement mécanique de chaque arbre et l'établissement de sa forme.

2.1 Analyse biomécanique du tronc par Matrices de Transfert

2.1.1 Présentation des hypothèses de la méthode d'analyse

Pour des raisons évidentes de coût en temps de calcul et de place mémoire liées au nombre important d'individus, le passage à l'échelle du peuplement forestier nous conduit à calculer le comportement biomécanique de structures évolutives correspondant aux troncs des arbres. Si la structure à étudier change, le problème incrémental reste néanmoins le même que celui décrit au premier chapitre et l'aspect cyclique de la croissance continue d'être envisagé au moyen d'une méthode de calcul reposant sur une discrétisation temporelle. Cette méthode consiste à calculer les configurations successives des troncs du peuplement à chaque incrément de temps et à mettre leur géométrie à jour. En conservant les notations du premier chapitre, ${}^n C$ désigne donc la configuration d'une tige à l'instant $t = n\Delta\tau$ et issue du cycle de croissance n . L'accroissement en volume durant la période $\Delta\tau$ suivante permet alors de considérer la configuration intermédiaire ${}^n \hat{C}$ qui, sous l'action des incréments de chargement, va se déformer pour donner la nouvelle configuration ${}^{n+1} C$ de la tige, issue du cycle $n+1$. Il n'est plus question de pas de charge et d'itérations d'équilibre puisque l'on travaille en analyse linéaire.

La structure générique que l'on doit calculer à chaque cycle de croissance est donc très largement simplifiée lorsque l'on travaille à l'échelle du peuplement forestier. La méthode des éléments finis, utilisée dans AMAPméca, est très puissante pour l'analyse des structures car elle permet d'obtenir une formulation globale du problème sous la forme d'un système matriciel linéaire. Cependant, son implémentation nécessite l'utilisation de techniques algorithmiques qui conduisent généralement à des développements informatiques assez lourds, mais pas insurmontables. L'écriture d'un code de calcul par éléments finis se justifie alors si l'on souhaite analyser des structures complexes telles qu'un arbre considéré avec son système de branchaison entier. Ce n'est pas nécessairement le cas si l'on désire ne modéliser que le tronc d'un arbre. Ainsi, pour calculer la réponse biomécanique du seul tronc soumis à divers types de chargements, nous adoptons dans CAPSIS une méthode bien plus simple à mettre en œuvre que celle des éléments finis. Il s'agit de la méthode des matrices de transfert des poutres droites. Cette méthode est peu employée dans le calcul des structures car elle n'est intéressante que dans le cas de structures non étagées. Le calcul du comportement biomécanique d'un tronc d'arbre entre bien dans le domaine d'utilisation de cette méthode qui présente l'avantage d'aboutir à une série de calculs matriciels simples. Si la méthode des éléments finis constitue une approche du problème de type déplacement, la méthode des matrices de transfert de poutres est, quant à elle, une approche de type force. En effet, la méthode des éléments finis conduit à résoudre un système linéaire dans lequel les inconnues

sont les déplacements des nœuds de la structure. Leur connaissance permet ensuite de calculer les déformations, les contraintes et les efforts internes. Quand on utilise la méthode des matrices de transfert, on est dans un premier temps amené à résoudre un système d'équations différentielles qui fournit les efforts internes, puis dans un deuxième temps un système qui fournit les déplacements généralisés en fonction de ces efforts internes. Nous verrons plus loin que, sous certaines hypothèses, ces étapes de résolution conduisent à une relation matricielle de transfert qui permet alors de déterminer simultanément les efforts internes et les déplacements de la structure.

Description de la structure interne du tronc

Dans le module AMAPméca, le maillage de la structure est réalisé à l'aide d'éléments finis de poutre 3D multicouche de type Bernoulli. Ainsi chaque unité de croissance, qu'elle appartienne au tronc ou aux branches, est discrétisée selon sa longueur en un ou plusieurs éléments finis de poutre. C'est ce type de description que nous adoptons dans CAPSIS mais limitée au seul tronc pour chaque arbre du peuplement. Au moyen d'éléments de poutre droite 3D multicouche, non pas au sens élément fini mais au sens segment ou entité élémentaire, le tronc est décrit selon sa hauteur avec la correspondance la moins coûteuse d'un élément de poutre par unité de croissance (Fig. II.2). L'utilisation d'éléments multicouches permet de considérer chaque unité de croissance comme l'empilement de cerne de croissance concentriques et de prendre en compte les variations de propriétés mécaniques cerne à cerne ainsi que les phénomènes de maturation du bois dans le cerne externe nouvellement formé.

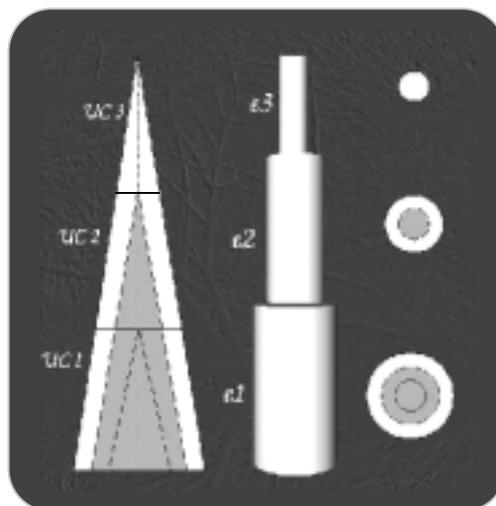


FIGURE II.2 – Description de la structure interne du tronc au moyen de poutres 3D multicouches avec la correspondance d'une poutre par unité de croissance et d'une couche par cerne.

Nous considérons que les couches d'une poutre sont concentriques et à section droite parfaitement circulaire. Ceci entraîne alors les égalités suivantes pour les moments d'inertie :

$$I = I_y = I_z \quad \text{et} \quad J = 2I \quad (\text{II.1})$$

Dans la configuration ${}^n\hat{C}$, l'élément e de poutre multicouche décrit une unité de croissance du tronc apparue à la date $d(e) = d\Delta\tau$. La section de cet élément est donc définie par les couches de numéro c ($c = d(e) \dots n$), de rayon externe R_c , de surface S_c , de moment d'inertie I_c par rapport à \vec{Oy} et \vec{Oz} , et de constantes élastiques E_c et ν_c . Les rigidités de l'élément aux modes de déformations sont alors données par :

$$E.S = \sum_{c=d(e)}^n E_c . S_c \quad E.I = \sum_{c=d(e)}^n E_c . I_c \quad G.J = 2.G.I = \sum_{c=d(e)}^n \left(\frac{E_c . I_c}{(1 + \nu_c)} \right) \quad (\text{II.2})$$

2.1.2 Vecteurs d'état et matrice de transfert des poutres 3D

Nous considérons des poutres droites régulières tridimensionnelles, c'est à dire des poutres dont les directions principales d'inertie de la section droite ne varient pas d'une section à l'autre. Nous établissons le repère local de chaque poutre en prenant l'axe x comme l'axe neutre, y et z comme les axes principaux d'inertie de la section droite (Fig. II.3).

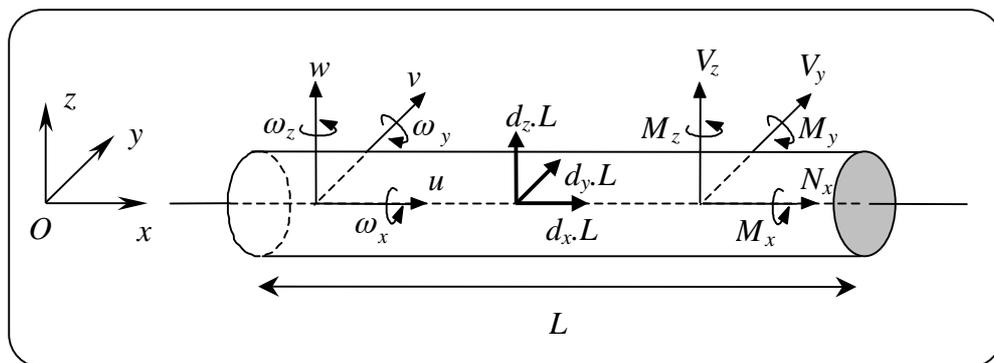


FIGURE II.3 – Déplacements et efforts internes généralisés dans une poutre droite 3D soumise à des densités linéiques de charge.

L'objet d'une théorie des poutres 3D est de décrire l'état de déformation en fonction de grandeurs ne dépendant que d'une seule variable, en l'occurrence l'abscisse x du point considéré dans le repère local de la poutre. Dans ce repère, on est alors amené à traiter un

problème à une dimension. De cette façon, le champ de déplacements est déterminé à partir des six déplacements généralisés $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $\omega_x(x)$, $\omega_y(x)$ et $\omega_z(x)$, et l'état mécanique à partir des six efforts internes généralisés $N_x(x)$, $V_y(x)$, $V_z(x)$, $M_x(x)$, $M_y(x)$ et $M_z(x)$, tous mesurés sur l'axe de référence et ne dépendant que de l'abscisse x . Les sollicitations extérieures qui s'exercent sur la poutre sont définies par :

- une densité linéique de charge, d_x , positive suivant la direction \overrightarrow{Ox} ,
- une densité linéique de charge, d_y , positive suivant la direction \overrightarrow{Oy} ,
- une densité linéique de charge, d_z , positive suivant la direction \overrightarrow{Oz} .

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où ces densités linéiques de charge sont constantes sur la longueur de la poutre. Dans le cas où elles représentent la décomposition d'une densité linéique de poids propre suivant les axes du repère local de la poutre, cette hypothèse peut alors être adoptée. Dans le modèle que nous développons, ces densités permettent de prendre en compte l'effet du poids propre du tronc sur son comportement mécanique. Nous établissons, dans l'Annexe 2, les équations différentielles fondamentales de la théorie des poutres droites 3D de type Bernoulli permettant de déterminer les douze inconnues du problème que sont les six déplacements généralisés et les six efforts internes. Les équations d'équilibre fournissent une première série de six équations différentielles, dites équations de la statique, qui définissent les efforts internes en fonction des densités linéiques de charge externes. Les équations de compatibilité des déformations généralisées du modèle de Bernoulli et la loi de comportement du matériau permettent de déterminer une deuxième série de six équations différentielles qui définissent les déplacements généralisés en fonction des efforts internes.

Nous considérons une poutre droite 3D de longueur L , orientée selon l'axe x de son repère local, et dont l'origine se situe à l'abscisse $x = 0$ et l'extrémité en $x = L$ (ces points particuliers définissent les nœuds de la poutre). En intégrant les équations différentielles fondamentales entre $x = 0$ et $x = L$ (cf. Annexe 5), nous obtenons les expressions des six efforts internes et des six déplacements de l'extrémité en fonction de leurs valeurs à l'origine et des densités linéiques de charge. Les différents vecteurs d'état et la matrice de transfert de la poutre, définis ci-dessous, permettent de réécrire l'ensemble de ces relations sous une forme matricielle simple, appelée relation de transfert.

On appelle vecteurs d'état à l'origine et à l'extrémité de la poutre, respectivement notés E_0 et E_L , les vecteurs à douze composantes contenant les déplacements généralisés et les forces nodales (ce sont les efforts exercés par les nœuds sur la poutre et donnés en fonction

des efforts internes) respectivement des nœuds origine et extrémité de la poutre. Ces vecteurs d'état sont alors donnés par :

$$E_0 = \langle u_0 \ v_0 \ w_0 \ \omega_{x0} \ \omega_{y0} \ \omega_{z0} \ / \ -N_{x0} \ -V_{y0} \ -V_{z0} \ -M_{x0} \ -M_{y0} \ -M_{z0} \rangle^t \quad (\text{II.3})$$

$$E_L = \langle u_L \ v_L \ w_L \ \omega_{xL} \ \omega_{yL} \ \omega_{zL} \ / \ N_{xL} \ V_{yL} \ V_{zL} \ M_{xL} \ M_{yL} \ M_{zL} \rangle^t \quad (\text{II.4})$$

où les indices 0 et L indiquent que les grandeurs sont respectivement prises pour $x = 0$ et $x = L$. La relation de transfert, qui exprime le vecteur d'état E_L en fonction du vecteur d'état E_0 , s'écrit alors :

$$E_L = G.E_0 + D \quad (\text{II.5})$$

où G , matrice carrée de dimension 12, est la matrice de transfert de la poutre droite et D le vecteur d'état des densités linéiques de charge. Les composantes de ce vecteur sont les effets résultants en terme de déplacements et d'efforts, en $x = L$, dus aux densités linéiques de charge. On trouvera les expressions de la matrice G et du vecteur D dans l'Annexe 5.

Relation de transfert incrémentale

Nous utilisons la relation de transfert (II.5) pour calculer les déplacements et les efforts de la poutre prise dans la configuration du tronc ${}^n\hat{C}$. Pour le cycle $n+1$, l'incrément de chargement appliqué sur cette configuration correspond, dans un premier temps, au poids propre des couches périphériques de numéro n nouvellement formées. Les densités linéiques que supporte la poutre sont donc des incréments que l'on note $\Delta^n d_\alpha$, avec $\alpha = x, y, z$. Le vecteur d'état des incréments de densités linéiques de charge du cycle courant se note alors $\Delta^n D$, et se calcule en fonction des $\Delta^n d_\alpha$ et des relations (II.2). De la même façon, les vecteurs d'état à l'origine et à l'extrémité de la poutre contiennent les incréments de déplacements généralisés de la configuration ${}^n\hat{C}$ à la nouvelle configuration ${}^{n+1}C$, ainsi que les incréments de forces nodales. Ils se notent respectivement $\Delta^n E_0$ et $\Delta^n E_L$. Lorsque l'on ne considère que les effets du poids propre, la relation de transfert incrémentale pour la poutre considérée s'écrit finalement :

$$\Delta^n E_L = {}^nG.\Delta^n E_0 + \Delta^n D \quad (\text{II.6})$$

où nG est la matrice de transfert de la poutre calculée à partir de ses caractéristiques prises dans la configuration ${}^n\hat{C}$ et données par les relations (II.2).

2.1.3 Prise en compte des déformations de maturation

Nous montrons, ci-dessous, comment la relation de transfert (II.6) doit être complétée pour rendre compte de l'effet des phénomènes de maturation cellulaire sur le comportement biomécanique du tronc. Nous avons vu que durant la maturation le bois a une tendance à se déformer dans le cerne externe nouvellement mis en place. Ces déformations diffèrent selon le type de bois en présence, et l'apparition de bois de réaction dans un secteur du cerne périphérique entraîne un différentiel de déformations provoquant une flexion plus ou moins importante de l'axe. Dans tous les cas, on assiste au retrait des cellules de bois normal, et dans ce qui suit nous décrivons, sans perte de généralité, les effets dus à la présence de zones de bois de compression (chez les résineux) dans lesquelles les cellules subissent une élévation durant la maturation. De manière générale et schématique, nous dirons que l'apparition de bois de compression survient dans la partie inférieure du cerne externe du tronc lorsqu'il est incliné. Le moment de flexion induit par ce phénomène va donc permettre à la partie du tronc concernée de se redresser et d'amorcer un retour à la verticalité.

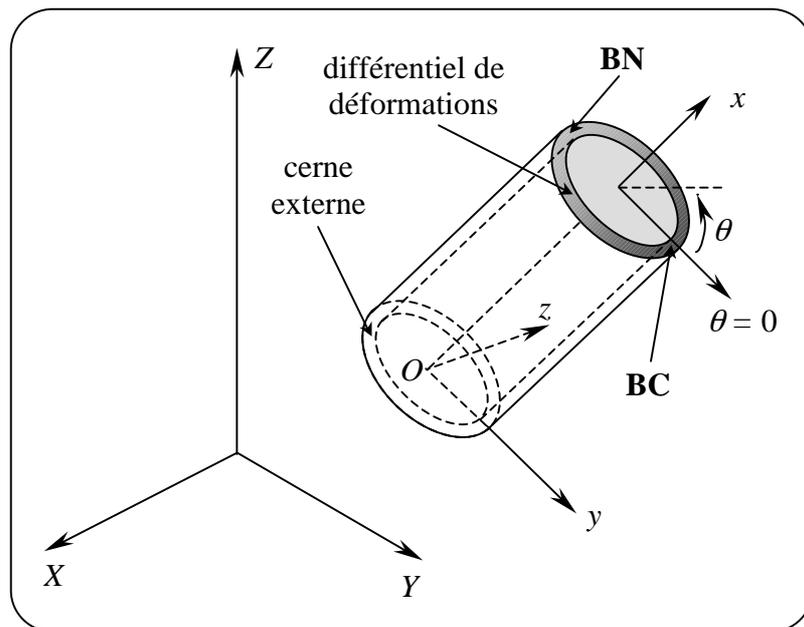


FIGURE II.4 – Zones de bois normal et de bois compression dans le cerne externe d'un segment de tronc incliné. Les hypothèses sur la construction du repère local et sur la répartition des déformations de maturation permettent le redressement de la partie de tronc dans son plan d'inclinaison (OxZ).

Nous considérons un segment de tronc incliné par rapport à la verticale dans une direction quelconque. La mise en place de type de bois différents dans le cerne externe lui permet de se redresser dans le plan de cette inclinaison. Nous supposons que les axes \overrightarrow{Ox} et

\vec{Oy} définissent ce plan de redressement (Fig. II.4). En pratique, c'est à dire lors des simulations, on s'arrangera toujours pour que la construction du repère local de chaque poutre utilisée conduise à ce type de configuration. Pour cela, on définit le plan d'inclinaison de la poutre comme étant le plan (OxZ) , où Z est l'axe vertical du repère global. Le repère local de la poutre est ensuite construit en prenant l'axe \vec{Oy} normal à l'axe \vec{Ox} , contenu dans le plan (OxZ) et dirigé de Z vers x . L'axe \vec{Oz} du repère local est finalement donné de telle sorte qu'il forme avec les précédents un trièdre direct. De plus, nous modélisons les phénomènes de maturation cellulaire en introduisant un différentiel de déformations dans la couche périphérique de la poutre et nous travaillons avec l'hypothèse d'une répartition des déformations de maturation symétrique par rapport au plan (Oxy) .

Effets mécaniques des déformations de maturation

Les déformations de maturation dans le cerne externe ne s'expriment pas librement et créent donc des contraintes dans la poutre dites contraintes de maturation. Les déformations mécaniques associées à ces contraintes (déformations que l'on cherche à déterminer) s'ajoutent aux déformations de maturation pour donner les déformations totales. Dans le cerne externe, nous faisons l'hypothèse que la maturation conduit uniquement à des déformations longitudinales des cellules de bois. La maturation ne provoque donc pas de cisaillement et crée ainsi, au cycle de croissance courant, des incréments de champs de déformations et de contraintes axiales. Sans autre type de chargement, les incréments de déformations axiales totales $\Delta^n \varepsilon_{xx}$ du segment de poutre dans la configuration ${}^n\hat{C}$ sont donc définies comme étant la somme des incréments de déformations axiales mécaniques $\Delta^n \varepsilon_{xx}^{méc}$, associées aux contraintes de maturation, et des déformations axiales de maturation ${}^n\mu$ dans la couche périphérique :

$$\Delta^n \varepsilon_{xx}(M) = \Delta^n \varepsilon_{xx}^{méc}(M) + {}^n\mu(M) \cdot \delta_n(M) \quad (\text{II.7})$$

où M est un point de la section droite de la poutre d'abscisse x et où $\delta_n(M) = 1$ si le point M appartient au cerne externe de numéro n , et 0 sinon.

La construction adoptée pour le repère local et l'hypothèse d'une répartition des déformations de maturation symétrique par rapport au plan (Oxy) permettent de toujours considérer les effets de la maturation comme la superposition d'incrément de déformations généralisées de traction, $\Delta^n \varepsilon^m(x)$, suivant l'axe \vec{Ox} et de flexion, $\Delta^n K_z^m(x)$, dans le plan (Oxy) donc autour de l'axe local \vec{Oz} . L'exposant m indique que ces incréments de déformations généralisées sont induits par la maturation. Ainsi, l'incrément de déformations axiales totales au point M de coordonnées (x, y, z) s'écrit :

$$\Delta^n \varepsilon_{xx}(M) = \Delta^n \varepsilon^m(x) - y \cdot \Delta^n K_z^m(x) \quad (\text{II.8})$$

En utilisant la loi de comportement et en notant $E(M)$ le module d'Young au point M , l'incrément de contraintes axiales de maturation en M s'exprime donc par :

$$\Delta \sigma_{xx}(M) = E(M) \cdot \Delta^n \varepsilon_{xx}^{méc}(M) = E(M) \cdot (\Delta^n \varepsilon_{xx}(M) - \mu^n(M) \cdot \delta_n(M)) \quad (\text{II.9})$$

soit :

$$\Delta^n \sigma_{xx}(M) = E(M) \cdot (\Delta^n \varepsilon^m(x) - y \cdot \Delta^n K_z^m(x) - \mu^n(M) \cdot \delta_n(M)) \quad (\text{II.10})$$

Les incréments de déformations généralisées de traction et de flexion induites par la maturation sont déduites du fait que l'incrément de champ de contraintes axiales $\Delta^n \sigma_{xx}(M)$ associées est auto-équilibré sur une section droite, ce qui se traduit par l'intégrale suivante :

$$\int_S \Delta^n \sigma_{xx}(M) \cdot dS = 0 \quad (\text{II.11})$$

on trouve alors :

$$\begin{cases} \Delta^n \varepsilon^m(x) = \frac{E_n}{E \cdot S} \int_{S_n} \mu(M) \cdot dS \\ \Delta^n K_z^m(x) = \frac{-E_n}{E \cdot I} \int_{S_n} y \cdot \mu(M) \cdot dS \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Une conséquence importante de la relation (II.11) est que la maturation n'engendre pas d'efforts internes. Ce phénomène génère des déformations, donc des déplacements, et des contraintes dont la résultante sur la section droite (*i.e.* effort interne) est nulle. Nous introduisons le vecteur d'état incrémental de maturation courant, $\Delta^n M(x)$, contenant les incréments de déplacements et d'efforts internes, à l'abscisse x , dus aux phénomènes de maturation, et pouvons donc immédiatement conclure quant à ses six dernières composantes correspondant aux efforts internes : elles sont nulles. Nous déterminons alors les incréments de déplacements généralisés induits par la maturation du cycle courant. Avec les hypothèses que nous utilisons, la maturation conduit à l'apparition d'une translation selon x , d'une translation selon y et d'une rotation autour de z . Ces incréments de déplacements généralisés supplémentaires sont donnés en intégrant les équations de compatibilité des déformations du type (A.2.7) et (A.2.9). Si de plus, on considère que les déformations de maturation sont constantes le long de l'axe x de la poutre, on obtient alors :

$$\begin{cases} \Delta^n u^m(x) = \Delta^n \varepsilon^m \cdot x \\ \Delta^n v^m(x) = \Delta^n K_z^m \cdot \frac{x^2}{2} \\ \Delta^n \omega_z^m(x) = \Delta^n K_z^m \cdot x \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Finalement, le vecteur d'état incrémental de maturation du segment de poutre dans la configuration ${}^n\hat{C}$ est donné par :

$$\Delta^n M = \left\langle \Delta^n \varepsilon^m \cdot L \quad \Delta^n K_z^m \cdot \frac{L^2}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta^n K_z^m \cdot L \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\rangle^t \quad (\text{II.14})$$

Les composantes non nulles de ce vecteur sont les effets résultants en terme d'incrément de déplacements, en $x = L$, induits par les déformations de maturation dans le cerne externe de la portion de tronc étudiée. Ainsi, lorsque l'on considère une poutre soumise à l'action d'incrément de densités linéiques de charge et de phénomènes de maturation, la relation de transfert incrémental prend la forme suivante :

$$\Delta^n E_L = {}^n G \cdot \Delta^n E_0 + \Delta^n D + \Delta^n M \quad (\text{II.15})$$

Modélisation des déformations de maturation

Nous modélisons la répartition des déformations de maturation dans le cerne externe par une loi sinusoïdale, symétrique par rapport au plan de redressement (Oxy), en fonction de l'angle θ . Cet angle, dont l'origine correspond à la génératrice inférieure de la poutre dans le plan de l'inclinaison, décrit la circonférence du cerne externe (Fig. II.3). Nous supposons donc, qu'en plus d'être constantes sur la longueur de la poutre, les déformations de maturation ne varient pas radialement dans la couche périphérique. La loi de répartition utilisée est de la forme :

$$\mu = a + s \frac{b}{2} (1 + \cos \theta) \quad (\text{II.16})$$

où a est l'intensité du retrait du bois normal et $a+b$ celle de l'élongation du bois de compression (en μdef). Le paramètre s vaut 1 si il y a présence de bois de compression et 0 sinon. Ainsi, les phénomènes de maturation ne permettent la flexion et le redressement du segment de tronc que lorsque le paramètre s est non nul.

Ce modèle conduit finalement à des incréments de déformations généralisées de traction et de flexion induites par la maturation dont les expressions s'obtiennent en calculant les intégrales (II.12) sur la surface du cerne externe. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta^n \varepsilon^m = \frac{E_n \cdot A_n}{E \cdot A} \left(a + s \cdot \frac{b}{2} \right) \\ \Delta^n K_z^m = \frac{-E_n}{E \cdot I} \cdot s \cdot \frac{b}{2} \cdot \pi \cdot \frac{R_n^3 - R_{n-1}^3}{3} \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

2.1.4 Méthode et outils pour le calcul de la structure

Discrétisation du tronc

Nous considérons le tronc de chaque arbre du peuplement comme une poutre 3D encastrée à sa base et libre à son extrémité, dont la section varie selon sa hauteur. Dans la configuration ${}^n \hat{C}$, cette poutre a une forme, à priori quelconque mais connue, que l'on approche en la discrétisant en n éléments de poutres rectilignes, de numéro i ($i = 1 \dots n$) et de longueur L_i (longueur de l'unité de croissance correspondante). Ainsi, pour chaque élément de poutre on a $0 \leq x \leq L_i$ dans le repère local qui lui est associé. Les connexions entre éléments sont les nœuds de la structure et on leur attribue aussi le numéro i ($i = 1 \dots n+1$) de sorte que le premier nœud d'un élément, en partant de la base du tronc, porte le même numéro que cet élément (Fig.II.5). La méthode de calcul que nous présentons a pour objet de déterminer les incréments de déplacements et d'efforts internes du cycle de croissance courant aux nœuds de la structure.

Vecteurs d'état aux nœuds

Nous adoptons la convention suivante pour orienter la structure lorsque l'on parcourt les différentes entités qui la composent de la base vers l'extrémité : si l'on vient se placer sur le nœud i alors l'élément $i-1$ (dont l'extrémité, donnée par $x = L_{i-1}$ dans le repère local associé, est le nœud i) est dit "à gauche" du nœud i , et l'élément i (dont l'origine, donnée par $x = 0$ dans le repère local associé, est le nœud i) est dit "à droite" du nœud i . De cette façon, nous dirons réciproquement que le nœud i se trouve à droite de l'élément $i-1$ et à gauche de l'élément i .

Dans la méthode des matrices de transfert de poutres, nous manipulons des vecteurs d'état associés aux nœuds de la structure et exprimés à leur gauche et à leur droite (Fig. II.5). Ainsi, le vecteur d'état à gauche du nœud i (respectivement à droite du nœud i) contient, pour

ses six premières composantes, les incréments de déplacements généralisés de l'élément $i-1$, calculés en $x = L_{i-1}$ et exprimés dans le repère local de cet élément (respectivement les incréments de déplacements généralisés de l'élément i , calculés en $x = 0$ et exprimés dans le repère local de cet élément). De plus, ce vecteur contient, pour ses six dernières composantes, les incréments d'efforts internes exercés par le nœud i sur l'élément $i-1$, exprimés dans le repère local de cet élément (respectivement les incréments d'efforts internes exercés par le nœud i sur l'élément i , exprimés dans le repère local de cet élément).

Nous formalisons cette définition par les notations suivantes, où le vecteur $\Delta^n Q$ contient les six incréments de déplacements généralisés et le vecteur $\Delta^n F$ les six incréments d'efforts internes, et où l'exposant i renvoie pour l'instant à l'élément courant. On note alors :

$$\begin{aligned} \Delta^n Q_0^i &= \Delta^n Q^i(0) & \Delta^n Q_{L_i}^i &= \Delta^n Q^i(L_i) \\ \Delta^n F_0^i &= \Delta^n F^i(0) & \Delta^n F_{L_i}^i &= \Delta^n F^i(L_i) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Les six incréments de déplacements généralisés à gauche et à droite du nœud i , respectivement exprimés dans le repère local de l'élément $i-1$ et de l'élément i , sont donc donnés par les vecteurs suivants, où l'exposant i renvoie à un nœud dans les membres de gauche et à un élément dans les membres de droite :

$$\Delta^n Q_G^i = \Delta^n Q_{L_i}^{i-1} \quad \text{et} \quad \Delta^n Q_D^i = \Delta^n Q_0^i \quad (\text{II.19})$$

Sachant que les efforts internes en un point sont exercés par la partie à droite du point sur la partie à gauche de ce point, les six incréments d'efforts internes exercés par le nœud i sur sa gauche et sur sa droite, respectivement exprimés dans le repère local de l'élément $i-1$ et de l'élément i , sont alors donnés par les vecteurs suivants, où l'exposant i renvoie à un nœud dans les membres de gauche et à un élément dans les membres de droite :

$$\Delta^n F_G^i = \Delta^n F_{L_i}^{i-1} \quad \text{et} \quad \Delta^n F_D^i = -\Delta^n F_0^i \quad (\text{II.20})$$

Finalement, les vecteurs d'état incrémentaux à gauche et à droite du nœud i , tels qu'ils sont définis plus haut, sont donnés par les expressions suivantes, où l'exposant i renvoie à un élément dans les membres de droites et à un nœud pour les deux premiers de gauche :

$$\Delta^n E_G^i = \begin{Bmatrix} \Delta^n Q_G^i \\ \Delta^n F_G^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta^n Q^{i-1}(L_{i-1}) \\ \Delta^n F^{i-1}(L_{i-1}) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta^n E_D^i = \begin{Bmatrix} \Delta^n Q_D^i \\ \Delta^n F_D^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta^n Q^i(0) \\ -\Delta^n F^i(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Changement d'élément au nœud i

Nous détaillons ci-dessous la relation qui permet d'obtenir le vecteur d'état incrémental à droite du nœud i à partir du vecteur d'état incrémental à gauche de ce nœud. A cette fin, nous introduisons la matrice de passage de dimension 3, ${}^nR^i$, du repère local de l'élément $i-1$ au repère local de l'élément i , dans la configuration nC . Les vecteurs contenant les six incréments de déplacements généralisés à gauche et à droite du nœud i sont alors reliés par :

$$\Delta^n Q_D^i = {}^nH^i \cdot \Delta^n Q_G^i \quad (\text{II.22})$$

avec :

$${}^nH^i = \begin{pmatrix} {}^nR^i & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & {}^nR^i \end{pmatrix} \quad (\text{II.23})$$

où $0_{3 \times 3}$ est la matrice carrée nulle de dimension 3.

Nous définissons de plus le vecteur, $\Delta^n F^i$, des incréments d'efforts externes concentrés au nœud i . En pratique, ce vecteur à six composantes, dont trois forces et trois moments, exprimé dans le repère local de l'élément i , sert à appliquer en des nœuds particuliers du tronc les incréments efforts correspondant à l'incrément de poids du houppier de l'arbre du cycle de croissance. Nous obtenons la relation analogue à (II.22) pour les vecteurs contenant les six incréments d'efforts internes exercés par le nœud i sur sa gauche et sur sa droite en exprimant l'équilibre de ce nœud dans le repère local de l'élément i (*i.e.* somme des efforts exercés sur le nœud $i = 0$). Cette relation s'écrit alors :

$$\Delta^n F_D^i = -{}^nH^i \cdot \Delta^n F_G^i + \Delta^n F^i \quad (\text{II.24})$$

Des relations (II.22) et (II.24), nous tirons finalement l'expression matricielle du vecteur d'état incrémental à droite du nœud i en fonction du vecteur d'état incrémental à sa gauche :

$$\Delta^n E_D^i = {}^nU^i \cdot \Delta^n E_G^i + \Delta^n S^i \quad (\text{II.25})$$

avec :

$${}^nU^i = \begin{pmatrix} {}^nH^i & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & -{}^nH^i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta^n S^i = \begin{Bmatrix} 0_6 \\ \Delta^n F^i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

où $0_{6 \times 6}$ et 0_6 sont la matrice carrée nulle et le vecteur nul de dimensions 6.

Transfert sur l'élément i

Nous donnons ci-dessous la relation matricielle permettant d'effectuer le transfert du vecteur d'état incrémental sur l'élément i . Cette relation de transfert exprime le vecteur d'état incrémental à gauche du nœud $i+1$ en fonction du vecteur d'état incrémental à droite du nœud i . Elle se déduit immédiatement de l'équation (II.15) et s'écrit :

$$\Delta^n E_G^{i+1} = {}^n G^i \cdot \Delta^n E_D^i + \Delta^n D^i + \Delta^n M^i \quad (\text{II.27})$$

où la matrice de transfert ${}^n G^i$ et les vecteurs d'état incrémentaux des densités linéiques de charge $\Delta^n D^i$ et de maturation $\Delta^n M^i$ sont donnés par les expressions de ${}^n G$, $\Delta^n D$ et $\Delta^n M$ en utilisant les caractéristiques propres à l'élément de poutre de numéro i .

2.1.5 Procédure d'analyse du tronc par matrices de transfert

Le fonctionnement de la méthode des matrices de transfert de poutres, illustré par la figure (II.5), consiste à parcourir la structure élément par élément pour déterminer de part et d'autre de chaque nœud le vecteur d'état incrémental en utilisant les relations de transfert incrémentales (II.25) et (II.27).

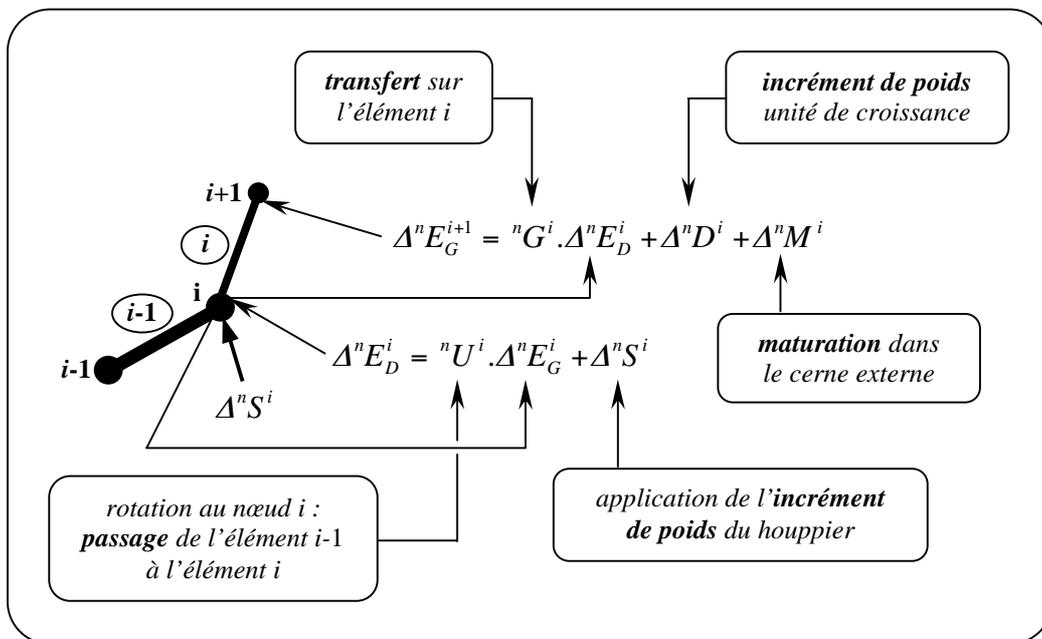


FIGURE II.5 – Schéma de fonctionnement de la méthode des matrices de transfert de poutres pour l'analyse d'un tronc d'arbre en croissance : sur un cycle, les relations de transfert incrémentales permettent de calculer, de proche en proche, la déformée de la configuration ${}^n \hat{C}$ pour obtenir ${}^{n+1} C$.

La méthode des matrices de transfert est donc une méthode discrète qui permet de calculer les incréments de déplacements et d'efforts internes aux points remarquables de la structure que sont les nœuds. La forme et l'état mécanique du tronc étudié seront donc décrits avec d'autant plus de précision que le tronc sera discrétisé avec un maximum d'éléments. La finesse de cette discrétisation dépend du type de résultats que l'on attend du modèle de comportement. Notre objectif n'est pas de connaître parfaitement le comportement biomécanique du tronc de chaque arbre du peuplement, mais de le décrire dans ses grandes lignes compte tenu des contraintes environnementales en présence. Nous chercherons donc à qualifier l'effet de la compétition spatiale et de l'excentrement des houppiers qui en découle, et par suite l'influence d'interventions sylvicoles telles que les éclaircies, sur l'évolution de la forme des troncs au cours de la croissance. Aussi, seules de grandes classes de formes, dans lesquelles viendront se ranger les troncs de formes similaires en termes d'inclinaison générale, d'inclinaison ou de courbure basale, de courbure maximale... (Radi, 1992), seront pertinentes pour évaluer le comportement biomécanique à l'échelle du peuplement et analyser l'impact d'un scénario sylvicole sur la qualité du bois qu'il produit. Avant même de se préoccuper des coûts en temps de calcul, ces considérations justifient notre choix de discrétiser le tronc avec la correspondance minimale d'un élément de poutre par unité de croissance permettant la prise compte de la diminution de la section du tronc avec la hauteur lorsque l'on passe à l'unité de croissance suivante.

Parcours des éléments et résolution

L'utilisation des relations (II.25) et (II.27), pour déterminer les incréments de déplacements généralisés et d'efforts internes aux nœuds de la structure comme le montre la figure (II.5), suppose que l'on débute le parcours des éléments et des nœuds à partir d'un point où le vecteur d'état est entièrement connu ; or un tel point n'existe jamais ! Les appuis sur lesquels repose la structure et qui définissent les conditions aux limites sont les points qui s'en rapprochent le plus. En effet, les conditions aux limites correspondent à des forces ou à des déplacements imposés, donc connus. Nous montrons ci-après comment déterminer le point de départ de la méthode, point où le vecteur d'état sera connu. A cette fin, nous considérons une poutre pour laquelle les conditions aux limites sont données à ses deux extrémités. Nous présentons dans ce cas particulier, mais sans perte de généralité pour les développements effectués, la méthode permettant d'atteindre le but que nous poursuivons.

Rappelons que la poutre est discrétisée en n éléments. Il y a donc $n+1$ nœuds. Les conditions aux limites sont donc données au nœud 1 et au nœud $n+1$, et la poutre se trouve à droite du nœud 1. Les vecteurs d'état à droite du nœud 1 et à gauche du nœud $n+1$ contiennent chacun six déplacements et six efforts, ce qui correspond à vingt-quatre

composantes parmi lesquelles douze sont déterminées par les conditions aux limites en ces nœuds. La méthode des matrices de transfert consiste à trouver une relation matricielle liant ces deux vecteurs d'état et fournissant ainsi un système linéaire de douze équations qui permettent d'accéder aux douze composantes inconnues restantes. Pour établir cette relation, il suffit d'exprimer le vecteur d'état incrémental à gauche du nœud 2, $\Delta^n E_G^2$, en fonction de celui à droite du nœud 1, $\Delta^n E_D^1$, par la relation de transfert (II.27). Ensuite, la relation (II.25) permet d'exprimer le vecteur d'état incrémental à droite du nœud 2, $\Delta^n E_D^2$, en fonction du vecteur $\Delta^n E_G^2$ et donc en fonction du vecteur de départ $\Delta^n E_D^1$. En parcourant les éléments jusqu'à atteindre le dernier nœud et en utilisant successivement les relations de transfert incrémentales, on aboutit finalement à l'expression du vecteur d'état incrémental à gauche du nœud $n+1$ en fonction du vecteur d'état incrémental de départ à droite du nœud 1. Elle est alors donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^n E_G^{n+1} = \left(\prod_{i=n}^1 {}^n G^i \cdot {}^n U^i \right) \cdot \Delta^n E_D^1 \quad \text{avec: } {}^n U^1 = I_{12 \times 12} \\ + \sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=n}^i {}^n G^j \cdot {}^n U^j \right) \cdot \Delta^n S^i \quad \text{avec: si } j = i \text{ alors } {}^n U^j = I_{12 \times 12} \\ + \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=n}^{i+1} {}^n G^j \cdot {}^n U^j \right) \cdot (\Delta^n D^i + \Delta^n M^i) \quad \text{avec: si } i = n \text{ alors } \prod_{j=n}^{n+1} {}^n G^j \cdot {}^n U^j = I_{12 \times 12} \end{array} \right. \quad \text{(II.28)}$$

où $I_{12 \times 12}$ est la matrice identité de dimension 12 et où chaque condition correspond au seul produit de matrice qui lui fait face. Notons au passage que les indices de ces produits sont décroissants. Après calcul des produits matriciels, cette relation peut se réécrire plus simplement sous la forme :

$$\Delta^n E_G^{n+1} = {}^n A \cdot \Delta^n E_D^1 + {}^n B \quad \text{(II.29)}$$

Ce système linéaire de douze équations à douze inconnues permet de déterminer complètement les deux vecteurs d'état impliqués et fournit, au choix, comme point de départ de la méthode un des deux nœuds où sont définies les conditions aux limites. Les relations de transfert ayant été établies pour parcourir la structure de la gauche vers la droite, il est alors plus judicieux de prendre le nœud 1 comme point de départ. A partir du vecteur d'état associé, les relations de transfert vont alors permettre de déterminer de proche en proche les vecteurs d'état aux nœuds restants de la structure. Ce procédé constitue la méthode générale de résolution d'un problème de poutre par matrices de transfert. Elle présente l'avantage de fournir un nœud de la structure où l'on connaît l'ensemble des déplacements généralisés et des efforts internes, et à partir duquel le parcours des éléments peut démarrer, que la structure soit isostatique ou hyperstatique. Néanmoins, l'obtention du système linéaire (II.29) à partir

de la relation (II.28), assez coûteuse en produits de matrices et de vecteurs de dimension 12, peut s'avérer être un inconvénient non négligeable de cette méthode. Elle nécessite en effet $2(n-1)$ produits de matrices, $(n-1)$ sommes de vecteurs et $2(n-1)$ produits matrice x vecteur, ce qui correspond, à titre d'exemple, à plus de 200 000 opérations élémentaires (additions et multiplications de scalaires) dans le cas où la structure est seulement composée de 30 éléments (discrétisation d'un tronc de 30 ans). Bien que l'établissement et la résolution du système (II.29) constituent le seul moyen d'obtenir le point de départ de la méthode des matrices de transfert lorsque la structure est hyperstatique, il existe d'autres techniques pour aborder le cas des structures isostatiques.

Cas d'une poutre encastree – libre

Rappelons que nous considérons le tronc de chaque arbre du peuplement comme une poutre 3D encastree à sa base et libre à son extrémité. Ce type de configuration de poutre, où les déplacements sont bloqués à l'encastrement et où les efforts appliqués à l'extrémité sont nuls, est défini par les douze conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \Delta^n Q_D^1 = 0 & \Rightarrow 6 \text{ C.L. géométriques à l'encastrement} \\ \Delta^n F_G^{n+1} = 0 & \Rightarrow 6 \text{ C.L. mécaniques à l'extrémité} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Les équations de la statique sont au nombre de six et l'extrémité libre est définie par autant de conditions aux limites mécaniques : ce type de structure est donc isostatique. La relation (II.29) peut être utilisée pour déterminer les inconnues du vecteur d'état incrémental à la base que sont les réactions d'encastrement. Avec les conditions (II.30), elle s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \Delta^n Q_G^{n+1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} {}^n A_{QQ} & {}^n A_{QF} \\ {}^n A_{FQ} & {}^n A_{FF} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta^n F_D^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^n B_Q \\ {}^n B_F \end{Bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

où la matrice ${}^n A$ et le vecteur ${}^n B$ sont symboliquement décomposés en blocs de dimension 6.

Après inversion de la matrice ${}^n A_{FF}$, les réactions d'encastrement incrémentales s'obtiennent finalement par :

$$\Delta^n F_D^1 = -{}^n A_{FF}^{-1} \cdot {}^n B_F \quad (\text{II.32})$$

Notons que le système (II.31) fournit aussi, par sa partie supérieure, les incréments de déplacements généralisés de l'extrémité libre de la poutre. Lorsque l'on souhaite résoudre un problème isostatique de type poutre encastree – libre, la méthode que nous venons de

présenter ci-dessus, efficace mais coûteuse en calculs, n'est pas la seule disponible. Dans ce cas, il existe en effet deux variantes de la méthode plus rapides :

– la première consiste à déterminer, dans un premier temps, les efforts internes aux nœuds de la poutre, indépendants des déplacements, puis dans un deuxième à calculer les déplacements généralisés en fonction de ces efforts. A cette fin, on utilise les six dernières lignes des relations matricielles de transfert (II.25) et (II.27). Elles définissent deux nouvelles relations, exprimées en fonction de matrices et de vecteurs de dimension 6, permettant le transfert des efforts internes de la gauche vers la droite. En inversant ces relations matricielles, pour un transfert des efforts de la droite vers la gauche, on effectue un premier parcours des éléments de l'extrémité libre, où les efforts sont connus et nuls, vers la base encastree. On détermine ainsi les efforts internes aux nœuds de proche en proche jusqu'à obtenir les réactions d'encastrement. Il reste alors à effectuer un deuxième parcours des éléments de la base encastree, où l'on connaît maintenant les déplacements (nuls) et les efforts, vers l'extrémité libre pour calculer les déplacements aux nœuds successifs à l'aide des six premières lignes des relations (II.25) et (II.27).

– la seconde consiste à déterminer les réactions d'encastrement inconnues en exprimant l'équilibre global de la poutre par le principe fondamental de la statique. Ces réactions sont alors données, au signe près, par les résultantes des forces extérieures appliquées sur la poutre et par les résultantes de leurs moments calculées à l'encastrement. Le vecteur d'état au nœud de la base est ainsi entièrement connu et l'on détermine celui des nœuds suivants en calculant simultanément les déplacements et les efforts à l'aide des relations de transfert (II.25) et (II.27), et ce en effectuant un seul parcours des éléments de la base vers l'extrémité. Cette dernière méthode présente l'avantage d'être non seulement rapide, mais aussi de permettre une implémentation claire et condensée lorsque qu'elle est effectuée à l'aide d'un langage de programmation orientée objet tel que le C++. Ce sont les raisons qui nous ont poussés à la développer dans le logiciel CAPSIS 3.0.

Dans tous les cas, les incréments de déplacements des nœuds sont déterminés dans les différents repères locaux des éléments décrivant le tronc. Une dernière série d'opérations matricielles, utilisant les matrices de passage du repère local des éléments successifs au repère global de la structure, permet d'obtenir les incréments de déplacements globaux des nœuds et de connaître ainsi la nouvelle forme du tronc sous l'action des différents types de chargements appliqués. On a donc déterminé la configuration ${}^{n+1}C$ issue du cycle de croissance $n+1$.

Procédure liée à la croissance

Chaque cycle de croissance du tronc est caractérisé par l'ajout d'une unité de croissance à l'extrémité (croissance primaire) et d'un cerne supplémentaire à la périphérie des unités de croissance existantes (croissance secondaire). Ces ajouts de matière, auxquels il convient de rajouter le poids de l'accroissement en volume du houppier, constituent les incréments de sollicitations extérieures à l'origine des incréments de déplacements et d'efforts que l'on calcule par la méthode que nous venons d'exposer. Outre les incréments de poids qu'elle implique sur la structure, la croissance s'accompagne de phénomènes dont la forme finale va fortement dépendre. Nous exposons ci-après comment nous les traitons dans le modèle de comportement biomécanique que nous développons dans CAPSIS. Ces phénomènes sont de trois types et il s'agit :

- du redressement primaire lié au phototropisme du bourgeon terminal. Ce redressement se traduit par l'apparition un angle entre la pousse terminale et l'unité de croissance qui la précède. Dans notre modèle, il est alors possible de créer l'élément de poutre correspondant à la nouvelle unité de croissance soit dans le prolongement de l'unité porteuse (pas de redressement primaire), soit selon l'axe vertical global \overrightarrow{OZ} (recherche maximale de la verticalité), soit avec un angle intermédiaire traduisant l'intensité de ce type de redressement. Cet angle est donné par l'utilisateur du modèle (Fig. II.6).

- du redressement secondaire lié au gravitropisme des unités de croissance existantes. Chaque nouveau cerne est alors le siège de déformations de maturation qui, en présence de bois de compression, permettent ce type de redressement. Dans notre modèle, le critère d'apparition des zones de bois de compression est géométrique. Si, au début d'un cycle, une unité de croissance présente une inclinaison supérieure à un angle maximal d'écart à la verticalité, que l'utilisateur définit, alors on introduit des déformations de maturation de bois de compression dans la partie inférieure de son cerne externe (Fig. II.4) en passant le paramètre s de la loi (II.16) à la valeur 1 (les paramètres a et $a+b$ de cette loi correspondent aux niveaux de déformations du bois normal et du bois de compression, et sont aussi définis par l'utilisateur). Pour les cycles à venir, ce processus pourra être répété tant que l'unité de croissance présentera une inclinaison supérieure à un angle minimal d'écart à la verticalité donné par l'utilisateur (Fig. II.6). L'angle maximal d'écart à la verticalité est appelé angle de début de redressement et l'angle minimal, angle de fin de redressement.

- de l'anisotropie de croissance du houppier due aux phénomènes de compétition spatiale et à l'excentrement qui en découle tel que nous le décrivons au paragraphe suivant. Sur un cycle de croissance, ce dernier phénomène, que nous modélisons par une position du

centre de gravité du houppier excentrée par rapport au tronc, va modifier la répartition de l'incrément de poids de la couronne sur la structure. Cette modification structurale doit être prise en compte lorsque l'on calcule les réactions d'encastrement car elle est la cause d'un moment de flexion supplémentaire dans le tronc. Ainsi, il faut non seulement calculer les résultantes de forces et de moments à l'encastrement correspondant à l'incrément de poids du houppier que l'on applique sur un nœud du tronc, mais aussi y ajouter l'incrément de moment de flexion dû à la position excentrée du point réel d'application par rapport à ce nœud.

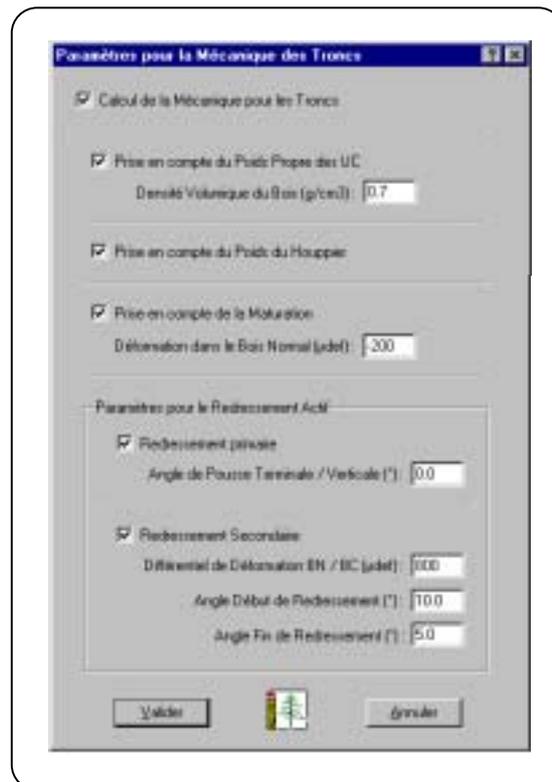


FIGURE II.6 – Boîte de dialogue "Utilisateur" du logiciel CAPSIS 3.0 pour le paramétrage du modèle de comportement biomécanique des troncs.

Le paragraphe suivant aborde l'étude des interactions existant entre un arbre et son environnement. Nous y présentons les hypothèses du modèle prospectif de gestion de la compétition spatiale que nous avons développer dans le logiciel CAPSIS. Ce modèle permet de simuler l'anisotropie de croissance des houppiers. Son utilisation conjointe avec le modèle de comportement biomécanique des troncs que nous venons de présenter permet d'analyser les relations entre le déséquilibre du houppier, dû à la gêne des voisins, et l'établissement de la forme du tronc d'un arbre pris dans son environnement forestier.

2.2 Gestion de la compétition spatiale et impact sur la structure

2.2.1 Compétition entre individus et diagrammes de Voronoï

L'axe majeur des problèmes traités à l'aide des modèles de compétition porte sur les relations qu'entretient un individu avec ses voisins. Les questions qui se posent sont souvent :

- à quelle distance une plante peut-elle en influencer une autre ?
- à densité locale égale, l'arrangement spatial des voisins influence-t-il la croissance ?
- le partage des ressources entre concurrents est-il équitable ?

De manière générale, le problème est d'évaluer la disponibilité en ressources naturelles d'un individu et de caractériser son statut de compétition avec les autres arbres du peuplement pour y accéder. Les différents indices de compétition utilisés dans les modèles de croissance des peuplements forestiers de type arbre dépendant des distances (MADD), dits aussi modèles spatialement explicites ou spatialisés, forment un ensemble de propositions pour aborder ce problème. Avant de poursuivre, signalons que l'on pourra se reporter aux travaux de thèse de Courbaud (1997) et de Gourlet-Fleury (1997), et aux remarques de Franc & Picard (1997) pour consulter des synthèses récentes et complètes sur les différents types de modèles de croissance des peuplements forestiers existants (également dits modèles de dynamique), autres que les modèles spatialisés.

Dans les modèles de type arbre dépendant des distances, le peuplement est cartographié et les indices de compétition, élaborés à partir des dimensions et des positions des concurrents de chaque individu (Biging & Dobbertin, 1992), sont utilisés pour évaluer la compétition locale et ainsi traduire l'effet réducteur des voisins en compétition avec le sujet sur son potentiel de croissance (Biging & Dobbertin, 1995). Ce type de modèle permet ainsi d'envisager des applications telles que l'étude des relations entre l'organisation spatiale du peuplement et la croissance des arbres (Pukkala, 1989). Aussi, pour analyser les relations entre le comportement biomécanique de l'arbre et la structure spatiale du voisinage dans lequel il se développe, notre démarche consiste-t-elle à s'inspirer du mode de construction des indices de compétition utilisés dans les MADD afin de développer un modèle de contrôle de la dissymétrie de croissance des houppiers en fonction des ressources spatiales disponibles. Ce modèle doit permettre de traduire les effets du phototropisme et d'interventions sylvicoles telles que les éclaircies sur le comportement de chaque arbre au sein du peuplement. Si, comme le notent les études comparatives menées par Daniels *et al.* (1986) et Tomé & Burkhart (1989), aucun indice de compétition ne s'est clairement imposé, nous avons

cependant porté notre attention sur l'un d'entre eux : il s'agit de l'APA (Area Potentially Available) initialement introduit par Brown (1965).

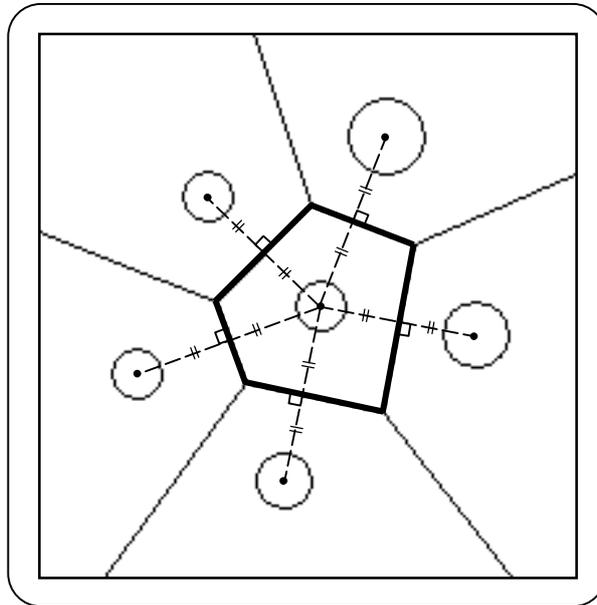


FIGURE II.7 – Construction du polygone dont la surface représente l'indice APA d'un individu en fonction des positions de ses voisins. Les cotés du polygone sont portés les médiatrices des segments joignant l'individu à ses différents voisins.

L'APA est un indice affecté à chaque arbre du peuplement comme la mesure de l'inverse d'une densité qui serait exprimée en nombre d'arbres par unité de surface. En effet, une partition de la surface totale du peuplement est effectuée pour déterminer la surface potentiellement disponible par arbre. L'APA est alors calculé comme étant l'aire du polygone construit autour de chaque individu et dont les cotés sont définis par les médiatrices des segments reliant le sujet à ses voisins (Fig. II.7). De fait, cet indice est inversement proportionnel à la densité locale du voisinage immédiat de l'arbre pour lequel il est estimé.

La technique utilisée pour construire le polygone autour de chacun des individus définit une méthode de pavage du plan, bien connue dans le domaine de la géométrie algorithmique et de la construction de maillages, dans laquelle les dits polygones sont appelés polygones de Voronoï (dits aussi régions ou encore cellules). Le pavage du plan obtenu en considérant la réunion de ces polygones s'appelle le diagramme (ou tessellation) de Voronoï de l'ensemble des individus (Fig. II.8). On trouvera quelques précisions sur les moyens d'obtenir de telles partitions du plan et sur leurs domaines d'utilisation dans l'Annexe 6.

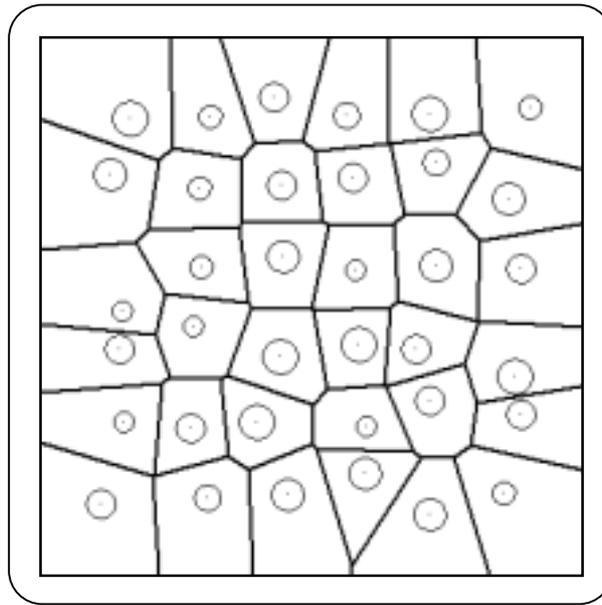


FIGURE II.8 – La réunion des polygones représentant l’indice APA de chaque individu s’appelle le diagramme de Voronoï de l’ensemble. Ici, ce diagramme est construit pour une placette simulée de 36 arbres plantés en bandes.

Les propriétés du voisinage d’un arbre influencent les conditions d’accès aux ressources naturelles et peuvent susciter des phénomènes de compétition entre arbres voisins. Le potentiel de développement d’un individu est alors réduit en fonction des pressions de compétition. Les diagrammes de Voronoï fournissent une représentation géométrique permettant de mesurer la compétition entre arbres au sein du peuplement.

Définition du voisinage au sens de Voronoï

Les diagrammes de Voronoï permettent de recueillir des informations concernant, d’une part, les voisins d’un individu (nombre, distance, taille) et, d’autre part, la partie du plan qui entoure le sujet (surface, périmètre, forme). Les voisins au sein du diagramme de Voronoï ne sont pas forcément les plus proches voisins d’un arbre mais ils lui sont contigus. Ainsi, la liste des plus proches voisins au sens de la distance euclidienne n’est pas la même que celle au sens de Voronoï. La définition du voisinage au sens de Voronoï permet, sur la figure (II.9), de reconnaître l’individu *B* comme voisin de *A*, alors qu’il est plus éloigné de *A* que l’individu *C*, qui lui n’est pas voisin de *A*.

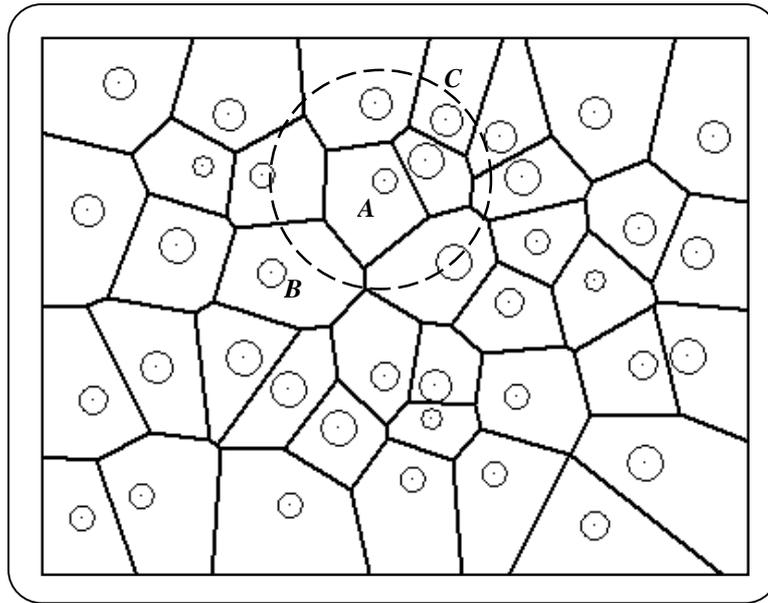


FIGURE II.9 – La définition du voisinage au sens de Voronoï est différente de celle du voisinage au sens de la distance euclidienne. L'individu C est plus proche de A que l'individu B mais n'est cependant pas considéré comme l'un des voisins de A, alors que B l'est.

Le voisinage au sens de Voronoï est par définition symétrique puisque deux individus voisins sont séparés par la médiatrice du segment qu'ils forment. Parmi les caractéristiques des polygones de Voronoï, la surface est la plus souvent retenue à titre d'indice de compétition. L'interprétation la plus fréquente de cette variable est celle qu'a proposé Brown (1965) pour son indice APA : il considère qu'elle représente l'aire potentiellement disponible et qu'elle contient les ressources utilisables par la plante pour assurer son développement. Plutôt que cette hypothèse forte sur la distribution spatiale des ressources, nous préférons l'interprétation proposée par Mead (1966), où la surface du polygone d'un individu correspond à une zone affranchie de l'influence des plantes voisines. Cette dernière accorde un rôle important à l'espace dont dispose chaque arbre dans le processus de compétition. Nous revenons sur ce point dans la description de notre modèle au paragraphe suivant.

Développement, compétition et diagrammes de Voronoï

Brown (1965), Mead (1966) et Jack (1967) furent, de façon indépendante, les premiers à utiliser les polygones de Voronoï pour représenter l'espace environnant une plante et pour en prédire le développement. Depuis, plusieurs auteurs se sont engagés dans cette voie, abordant des thèmes variés et utilisant différents supports végétaux.

En 1977, Harper souligne l'intérêt d'aborder la compétition existant au sein d'une population par une approche individuelle. En effet, si la densité globale réalise un bon condensé de l'information spatiale, elle en occulte une partie importante : l'arrangement des individus entre eux. Des études montrent ainsi que la qualité et la vitesse de développement d'une plante dépendent moins de la densité globale de la population que de la densité locale présente dans le voisinage de la plante (Mack & Harper, 1977 ; Mithen *et al.*, 1984 ; Matlack & Harper, 1986). Ces études soulignent la capacité des polygones de Voronoï à prédire les performances des plantes, et d'autres comme celles de Liddle *et al.* (1982) et Firbank & Watkinson (1987) tendent à confirmer ce résultat, même si la qualité de la prédiction varie considérablement d'une étude à l'autre.

Dans les peuplements forestiers, la dimension verticale joue un rôle important dans l'organisation en introduisant une hiérarchie sociale entre les arbres en fonction de leur hauteur et de leur accès à la lumière. Les propriétés des diagrammes de Voronoï, qui n'intègrent pas la troisième dimension, semblent à priori inadaptées pour aborder l'étude de ce type de population. Pourtant, les études comparatives menées sur des plantations d'arbres par Daniels *et al.* (1986) et Tomé & Burkhart (1989) reconnaissent la capacité de la surface des polygones de Voronoï, utilisée comme indice de compétition pour traduire l'effet inhibiteur du voisinage, à prédire l'accroissement en surface terrière, et ce d'autant mieux que le peuplement est dense et âgé. Cependant, ces auteurs ne concluent pas à une domination de cet indice sur les autres et soulignent qu'il peut convenir à une espèce et pas à d'autres, ou qu'au sein d'une espèce ses performances peuvent varier en fonction de l'âge et du type de culture. Par ailleurs, pour pallier le problème de la troisième dimension, Pelz (1978) propose un indice de compétition tridimensionnel qu'il calcule comme étant le produit de la surface du polygone de Voronoï d'un individu par sa hauteur totale. Signalons enfin, que dans le domaine des peuplements forestiers, les travaux de thèse de Mercier (1997) constituent l'une des toutes dernières études utilisant les diagrammes de Voronoï ; ils sont utilisés pour l'analyse statistique de la structure spatiale et la modélisation de la dynamique de la forêt intertropicale humide guyanaise.

2.2.2 Espace vital et excentrement du houppier

Les diagrammes de Voronoï fournissent une représentation géométrique permettant l'analyse et la modélisation prospective des processus de la dynamique forestière que sont la croissance, la mortalité et le recrutement. Ils proposent une définition particulière du voisinage d'un individu et permettent de traduire les phénomènes de compétition entre arbres au sein des peuplements forestiers. Dans ce qui suit, nous présentons les hypothèses de

construction de notre modèle de gestion de la compétition aérienne s'appuyant sur le diagramme de Voronoï des individus du peuplement. L'originalité de notre démarche est d'étudier l'influence de la compétition, non pas sur la croissance des arbres et la production du peuplement, mais sur le comportement physique et mécanique, de manière à évaluer la qualité de cette production, principalement en ce qui concerne la forme des tiges. Néanmoins, par analogie avec les modèles de croissance, notre modèle pourra être qualifié de modèle de comportement des peuplements forestiers de type arbre dépendant des distances. Il doit, dans un premier temps, permettre de caractériser les effets de la compétition sur la dynamique de développement des houppiers, et ensuite d'en analyser les répercussions sur le comportement biomécanique de chaque arbre.

Hypothèses pour l'étude de peuplements de Pins maritimes

L'objectif que nous poursuivons est de développer un modèle tridimensionnel de la dissymétrie de croissance du houppier de chaque arbre du peuplement, en fonction de la disponibilité des ressources spatiales (espace et lumière), et pouvant tenir compte des problèmes de contact, de surcimage ou d'englobement entre houppiers concurrents. Si, en l'état actuel de nos travaux, nous ne sommes par encore parvenus à ce stade, un premier modèle de gestion de la compétition spatiale entre houppiers voisins a néanmoins vu le jour. Ce modèle repose sur l'utilisation des diagrammes de Voronoï et permet ainsi de caractériser le statut de compétition de chaque arbre uniquement à partir de d'informations bidimensionnelles. On s'affranchit en effet de la dimension verticale du peuplement correspondant à la hauteur des arbres. En première approximation, les arbres sont donc considérés comme ayant tous la même hauteur totale et la même hauteur de houppier. Cette hypothèse n'est utilisée que dans le cadre de la représentation des phénomènes de compétition entre houppiers. Ceci revient donc à considérer que la gêne spatiale s'effectue dans un plan. Néanmoins, le modèle de croissance utilisé fournit bien des hauteurs différentes pour chaque arbre du peuplement. Ce sont ces écarts que l'on néglige pour étudier la compétition. Dans le cas d'un peuplement cultivé monospécifique équienne, tel un peuplement de Pins maritimes, où les hauteurs de houppiers varient dans une faible mesure (Fig. II.10), cette hypothèse se justifie assez bien. A contrario, il serait plus délicat de l'utiliser dans le cas de peuplements au caractère plus hétérogène, structurés en plusieurs strates par exemple.

Dans ce qui suit, les effets de la compétition sur la dissymétrie de croissance des houppiers sont donc étudiés à l'aide d'une modélisation 2D. Le diagramme de Voronoï des individus constitue le moyen d'appréhender le statut de compétition, et l'excentrement est simulé à partir de la projection au sol des houppiers. Cette projection est considérée comme étant parfaitement circulaire et centrée sur la projection au sol du centre de masse du

houppier. L'enveloppe 3D du houppier est assimilée à une parabolôïde de révolution dont l'axe reste toujours vertical. A chaque cycle de croissance, elle sert à estimer l'accroissement en volume du houppier et donc l'incrément de poids supplémentaire que supporte le tronc. Le modèle 2D de gestion de la compétition doit nous renseigner sur l'évolution dans le plan horizontal de la position du point d'application de cet incrément de poids, sa hauteur étant actualisée par le modèle de croissance.



FIGURE II.10 – Photographie d'un peuplement de Pins maritimes. On remarque que les houppiers forment une strate bien distincte dans laquelle les hauteurs varient peu.

Interprétation de la notion d'espace vital et développement du houppier

Le diagramme de Voronoï constitue une partition du plan qui fournit, autour de chaque site d'un ensemble donné, un polygone contenant tous les points du plan les plus proches du site en question que de tous les autres. Si, comme c'est le cas dans notre étude, les sites sont les arbres d'un peuplement forestier, cette méthode de pavage permet de définir pour chaque arbre ce que l'on peut appeler son espace vital ou encore sa surface de croissance. Les arbres, dont la surface de croissance possède une partie de frontière en commun avec celle d'un individu donné, sont appelés ses voisins naturels. La principale hypothèse de notre modèle repose sur l'interprétation de l'espace vital d'un individu que propose Mead (1966) : elle correspond à une zone affranchie de l'influence des arbres voisins. Nous considérons alors qu'au cours de la croissance du peuplement, chaque arbre est libre de développer son houppier à l'intérieur de son propre espace vital, et ce sans subir quelque phénomène de compétition que ce soit de la part de ses voisins. De plus, nous supposons que chaque houppier devra optimiser le remplissage de sa surface de croissance avant que son

développement ne s'effectue dans celle d'un de ses voisins naturels (Fig. II.11). C'est en ces termes que notre modèle est qualifié de modèle de comportement physique des houppiers. Si ce modèle ne vise pas à pondérer le potentiel de croissance des arbres du peuplement, il propose cependant un moyen d'en traduire le caractère dissymétrique en ce qui concerne les houppiers. L'hypothèse d'un développement du houppier tendant à combler en priorité l'espace vide de sa surface de croissance, avant d'entrer en compétition directe avec ses voisins, permet de rendre compte d'une certaine mobilité du houppier par rapport à la base du tronc. Etant donné que le poids des branches du houppier représente une partie importante des sollicitations mécaniques que doit supporter le tronc d'un arbre, cette mobilité va, selon son intensité, influencer le comportement biomécanique et donc l'évolution progressive de la forme du tronc, ainsi que la qualité du bois qu'il produit.

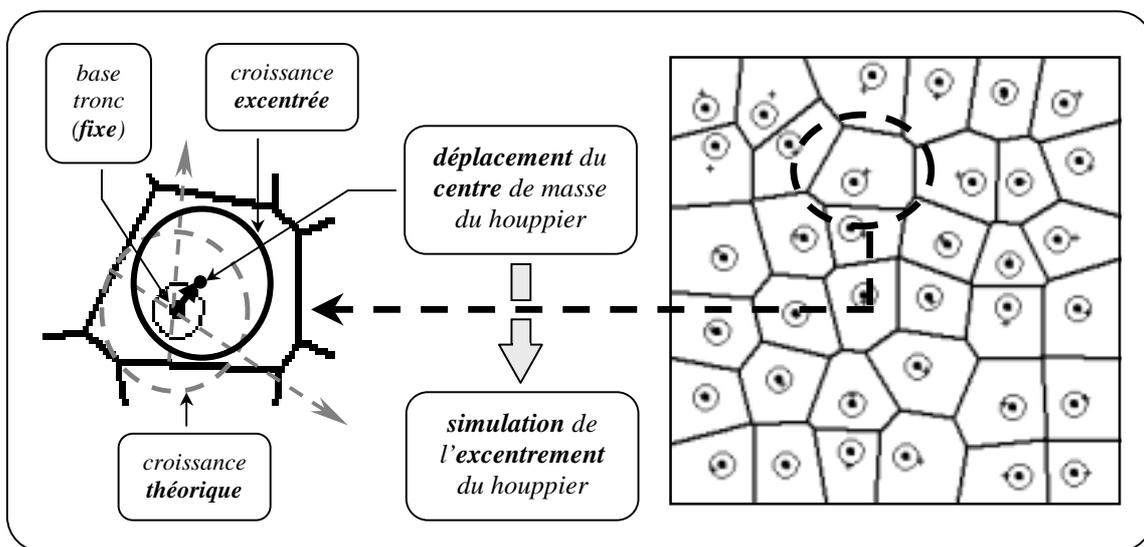


FIGURE II.11 – Utilisation du polygone de Voronoï d'un individu pour simuler l'excentrement du houppier par rapport au tronc. On contraint le houppier à optimiser le remplissage de sa surface de croissance avant de s'étendre sur celle des voisins. La forme du houppier n'est pas dégénérée mais son centre de masse est déplacé : la répartition de son poids sur le tronc est donc modifiée.

La figure (II.11) montre, dans sa partie droite, le diagramme de Voronoï d'une placette simulée de 36 arbres tous considérés initialement comme étant parfaitement droits. Les cercles symbolisent la projection au sol des houppiers et les points représentent la base des troncs, pour l'instant confondue avec la projection du centre de masse (centre du cercle) des houppiers correspondants. Les petites croix marquent le centre géométrique des cellules du diagramme de Voronoï. On peut noter que, suivant l'individu que l'on considère, le centre de l'espace vital, dont la position dépend directement de celles des voisins naturels, est plus ou moins proche de la base du tronc. Les positions relatives de ces deux points sont un indicateur

de l'organisation spatiale du voisinage et signifient une répartition plus ou moins excentrée de la surface de croissance autour du pied de l'arbre. Cet indicateur correspond à la caractéristique géométrique des polygones de Voronoï que Mead (1966) appelle "abcentricité" et qu'il définit comme étant le rapport de la distance entre un site et le centre de son polygone à la distance moyenne du centre aux sommets du polygone. Notons, par ailleurs, que cet auteur définit une autre caractéristique des polygones de Voronoï qu'il nomme "excircularité" et qu'il utilise comme étant une mesure de l'écart à la circularité de la forme des polygones.

Mécanisme de l'excentrement du houppier : notion de timidité

Dans leur étude portant sur les relations tronc – houppier de pins Sylvestres en forêt naturelle de Sibérie, Gavrikov *et al.* (1993) observent que l'angle (en projection au sol), formé par les vecteurs reliant la base du tronc au centre du houppier et la base du tronc au centre de la cellule de Voronoï associée, est le plus souvent petit. En outre, ils remarquent que le houppier a tendance à dévier dans la direction du plus grand espace vide défini par le polygone de Voronoï autour du tronc. C'est dans l'optique de rendre compte de telles observations que nous avons orienté nos développements.

Notre modèle de gestion de la croissance radiale du houppier en fonction des ressources spatiales utilise la cellule de Voronoï du sujet, construite en fonction des positions des voisins, pour exprimer une certaine "timidité" du houppier dans son développement en le poussant à croître vers les zones de plus grand vide dont il dispose. Ceci revient à dire que les branches du houppier n'ont pas le même taux de croissance dans toutes les directions. Cette anisotropie de croissance conduit à un excentrement du houppier par rapport au tronc et donc à un déplacement de son centre de masse. Il est important de noter que notre modèle n'envisage pas les choses dans cet ordre, mais exactement dans l'ordre inverse. En effet, nous comparons la position théorique de la projection du nouveau houppier obtenu après croissance à la géométrie de l'espace vital associé. Si une tentative de sortie du houppier de la surface de croissance est repérée (Fig. II.11, partie gauche), alors nous déplaçons son centre de masse de manière à optimiser le remplissage de cette dernière. La projection du houppier est donc déplacée par rapport au tronc et le houppier alors considéré comme excentré. La notion de timidité vient du fait que nous imposons un comportement dû à la compétition avant qu'il n'y ait réellement contact avec les concurrents. La forme géométrique du houppier n'est jamais dégénérée mais dispose, au travers de l'anisotropie de sa croissance, d'une certaine mobilité autour du tronc conduisant à une nouvelle répartition des chargements et donc à des répercussions sur le comportement biomécanique de l'arbre.

Détermination du point d'application de l'incrément de poids du houppier

Dans le mécanisme d'excentrement que nous venons de présenter, nous considérons la projection au sol des houppiers et nous la supposons circulaire. La projection au sol du centre de masse des houppiers est alors déplacée au travers du diagramme de Voronoï des individus. Il faut alors relier ces déplacements au modèle de régulation de la forme des troncs pour pouvoir appliquer les incréments de poids des houppiers, pour le cycle de croissance courant. En outre, la nouvelle position du centre de masse d'un houppier ne correspond pas forcément à celle de son incrément de volume. Rappelons que nous considérons cette position dans le plan horizontal et que sa hauteur est donnée par le modèle de croissance. La figure (II.12) montre, pour un cycle de croissance, la position du centre de masse du houppier initial (G_I), du houppier final excentré (G_F) et de l'accroissement du houppier (G_A).

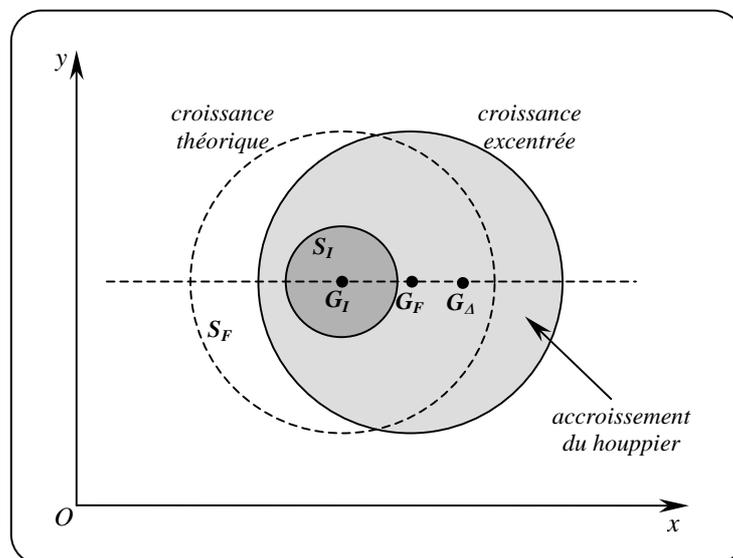


FIGURE II.12 – Schématisation de l'excentrement du houppier et détermination de la position du centre de masse (G_A) de l'incrément de volume du houppier (en gris clair), en projection au sol.

La position du point d'application de l'incrément de poids du houppier est donc déterminée en fonction de la position du centre de masse et de la surface projetée du houppier avant et après la croissance. On écrit alors :

$$\overrightarrow{OG_A} = \frac{S_F \cdot \overrightarrow{OG_F} - S_I \cdot \overrightarrow{OG_I}}{S_F - S_I} \quad (\text{II.33})$$

C'est à partir des coordonnées de G_A que les calculs relatifs à l'application de l'incrément de poids du houppier sont menés dans le modèle de comportement biomécanique des troncs.

2.2.3 Stratégies de construction des surfaces de croissance

Dans ce paragraphe, nous détaillons plusieurs stratégies possibles pour définir la surface de croissance de chaque arbre du peuplement. La figure (II.13) montre les différents paramètres de notre modèle pouvant être choisis pour réaliser le pavage de la surface totale du peuplement. Nous proposons alors le choix de procéder à la construction classique du diagramme de Voronoï des individus du peuplements, mais aussi de régler les effets de bord, d'utiliser un diagramme évolutif dans le temps, ou de construire un diagramme pour lequel la surface des polygones est pondérée par la taille des individus.



FIGURE II.13 – Boîte de dialogue "Utilisateur" du logiciel CAPSIS 3.0 pour le paramétrage du modèle de gestion de la compétition spatiale entre houppiers.

Nous exposons dans l'Annexe 6 trois méthodes de construction du diagramme de Voronoï d'un ensemble de n sites. Dans CAPSIS 3.0, nous avons opté pour celle où les cellules de Voronoï sont formées une à une comme étant la région polygonale intersection de $n-1$ demi-plans. Cette méthode présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et, à l'inverse des deux autres, elle ne nécessite pas de structures de données particulières, et souvent complexes, pour stocker le diagramme cherché. Cependant, la simplicité de cet algorithme s'accompagne de performances bien moindres puisque il possède une complexité $O(n^2 \log n)$ contre une complexité optimale $O(n \log n)$ pour les deux autres. Théoriquement, cela

signifie que le calcul du diagramme de Voronoï de 1000 sites est donc 1000 fois plus coûteux que s'il était effectué par une méthode optimale. Sachant que les problèmes de coût en temps de calcul comptent parmi les principales préoccupations d'un travail de modélisation, un des prolongements immédiats de nos développements devra être l'implémentation d'une méthode optimale de construction des diagrammes de Voronoï.

Réglage des effets de bord par le tore

Quelle que soit la méthode de construction du diagramme de Voronoï utilisée, il est nécessaire de définir un polygone rectangulaire contenant l'ensemble des sites afin que le diagramme ne possède pas de segments infinis et qu'il soit ainsi borné. Les polygones situés en périphérie du diagramme, appelés polygones marginaux, ne sont pas représentatifs d'un quelconque partage du plan. En outre, la taille du polygone rectangulaire additionnel conditionne directement la géométrie des cellules des sites en bordure de l'ensemble et génère ainsi des effets de bord dans le modèle de gestion de la compétition si les sites correspondent à une parcelle d'arbres pris à l'intérieur d'un peuplement. Picard (1999) montre comment ces effets de bord peuvent être réglés en considérant la parcelle, supposée rectangulaire, comme un tore (Fig. II.14).

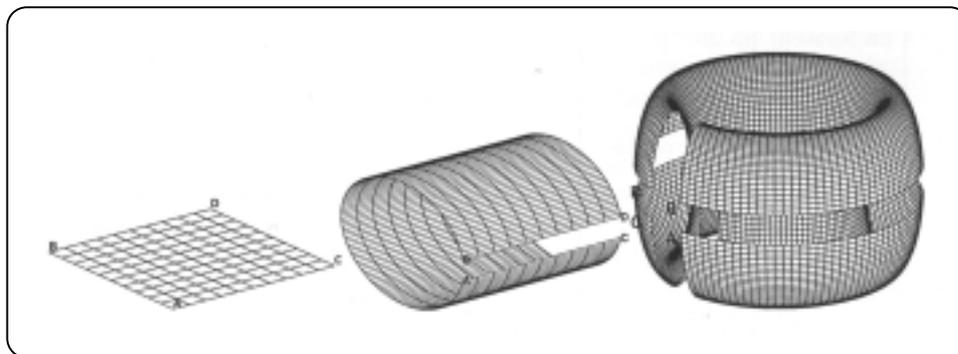


FIGURE II.14 – Transformation d'un rectangle en un tore en repliant les cotés opposés les uns contre les autres (d'après Picard, 1999).

En considérant la placette d'arbres à étudier comme un tore, on s'affranchit de l'utilisation du polygone additionnel et, du même coup, de l'apparition de polygones de Voronoï marginaux. Ceci revient à supposer que les arbres situés sur une bordure de la placette sont en compétition avec ceux situés sur la bordure opposée, de manière à définir un véritable voisinage de Voronoï pour chacun des individus. Cette hypothèse sur le système de compétition conduit alors à un diagramme de Voronoï de l'ensemble des individus dont les

bordures opposées s'emboîtent parfaitement (Fig. II.15). En outre, elle fournit une partition du plan où les cellules sont toutes représentatives du partage escompté des ressources spatiales. Enfin, elle permet d'éviter que le modèle conduise à un excentrement exagéré des houppiers de bord vers l'extérieur de la parcelle.

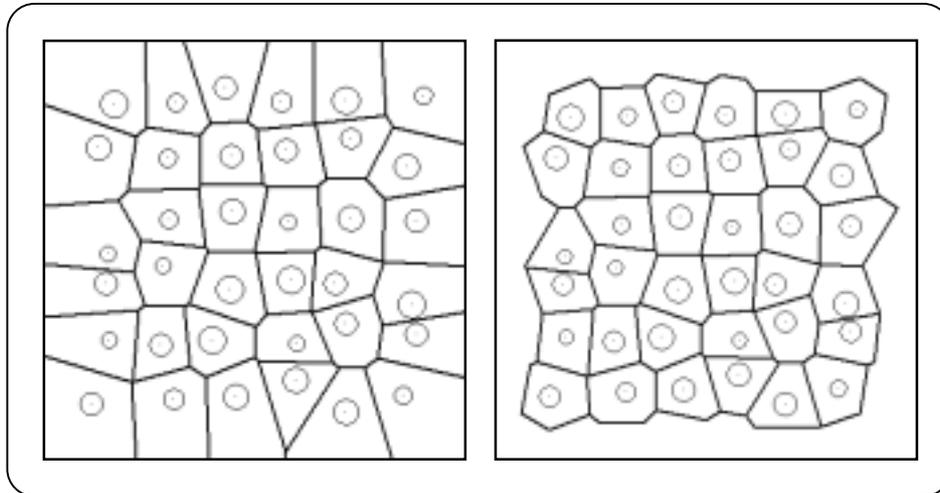


FIGURE II.15 – Réglage des effets de bord (à droite) pour la construction du diagramme de Voronoï des individus en considérant la placette rectangulaire comme un tore.

Construction de cellules évolutives dans le temps

La majorité des méthodes d'analyse de la structure spatiale des peuplements repose sur la représentation d'un arbre par un point dans le plan. Toutefois, ce que représente le point peut varier. Ainsi, Gavrikov *et al.* (1993) et Umeki (1995) montrent qu'il est plus informatif de travailler sur la structure spatiale des centres de gravité des couronnes des arbres que sur la position de la base des troncs. Nous distinguons alors deux types de sites, et donc deux stratégies, pour construire le diagramme de Voronoï d'un ensemble d'arbres : ils peuvent correspondre soit à la base des troncs soit à la projection au sol du centre de masse des houppiers. Dans le premier cas, la position des sites étant fixe tout au long de la croissance du peuplement, il n'est nécessaire de construire le diagramme de Voronoï qu'une seule fois au début de la simulation. La cellule ainsi définie autour de chaque arbre est donc établie pour toute l'étude, de sorte que l'utilisation du diagramme de Voronoï pour traduire les effets de la compétition reste peu pénalisante en terme de coût de calcul. Cependant, dans la mesure où la structure spatiale va être modifiée sous l'action du modèle de contrôle de la dissymétrie des houppiers, cette première stratégie semble présenter une faiblesse quant à sa capacité à traduire la dynamique des phénomènes mis en jeu dans le comportement des arbres. Il en va de même si l'on cherche à étudier l'influence de différents facteurs extérieurs tels que, par

exemple, une inclinaison accidentelle des tiges due à des vents violents (Fig. II.16). Le déplacement des houppiers induit par cette inclinaison provoque un changement du mode d'occupation de leur espace vital n'étant pas dû à la compétition et pouvant entraîner un comportement différencié du modèle inattendu.

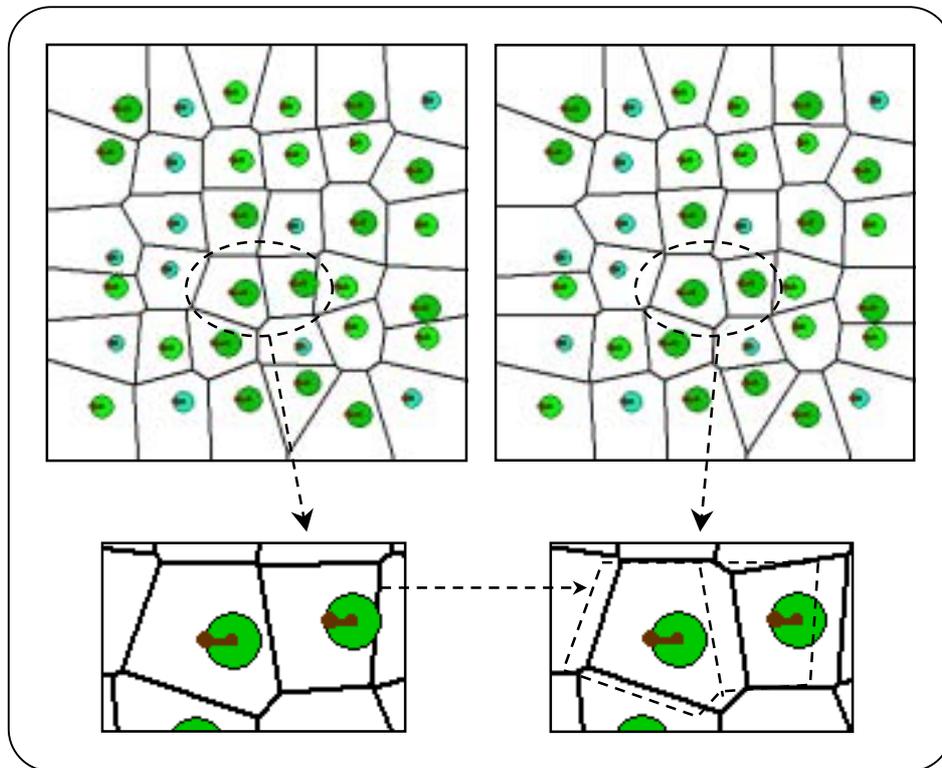


FIGURE II.16 – Mise en évidence du caractère évolutif des surfaces de croissance lorsque les sites de construction sont le centre de masse des houppiers (à droite). Dans le cas d'une inclinaison accidentelle des tiges, les cellules évolutives permettent de recalculer le diagramme de Voronoï par rapport à la nouvelle occupation de l'espace des houppiers.

La deuxième stratégie consiste alors à utiliser la projection du centre de masse des houppiers comme sites de construction du diagramme. Sous l'hypothèse d'un excentrement dynamique des houppiers, la position des sites évolue donc dans le temps et dépend de l'étape de simulation à laquelle on se trouve. Il devient alors nécessaire de reconstruire le diagramme de Voronoï à chacune de ces étapes. La possibilité de générer des surfaces de croissances évolutives en fonction de la croissance et de la gêne spatiale doit conduire à un comportement plus pertinent de notre modèle, mais s'accompagne cependant d'une forte augmentation du coût de calcul des simulations. Notons enfin que, quelle que soit la stratégie envisagée, le diagramme de Voronoï du peuplement est nécessairement recalculé lorsque l'on procède à des éclaircies.

Pondération des cellules par la taille des individus

Il existe plusieurs déclinaisons des diagrammes de Voronoï dans le plan. Parmi elles se trouvent les diagrammes de Voronoï pondérés. Le diagramme de Voronoï classique présume un poids égal des individus puisque les arêtes des polygones sont les médiatrices des segments joignant deux sites voisins. Lorsque ces poids varient d'un individu à l'autre, il est possible de construire un diagramme pondéré par le poids de chaque site. Dans le cas d'une application à la forêt, le poids d'un site peut être proportionnel aux dimensions de l'arbre (diamètre, hauteur, surface terrière, etc.). Comme Pardé & Bouchon (1988) le soulignent, l'idée de construire les cotés du polygone de Voronoï dans un rapport lié aux poids des arbres permet de traduire que la zone de contact des houppiers de deux arbres de tailles différentes est plus proche du petit que du gros arbre. Ainsi, en s'inspirant de l'APA de Brown (1965), Moore *et al.* (1973) développent un indice de compétition fondé sur un modèle de polygones pondérés par le carré du diamètre à 1m30 des troncs du peuplement. Pelz (1978) calcule lui aussi un indice similaire et teste des pondérations par la hauteur totale des arbres ou par le produit de la hauteur et du diamètre. En généralisant la pondération par le carré du diamètre, Tomé & Burkhart (1989) proposent l'indice APA_k comme étant la surface du polygone de Voronoï d'un individu dont les cotés sont donnés par les distances pondérées suivantes :

$${}^p d_{ij} = \frac{D_i^k}{D_i^k + D_j^k} d_{ij} \quad (\text{II.34})$$

où ${}^p d_{ij}$ est la distance pondérée de l'individu i au côté de son polygone le séparant de son voisin j , d_{ij} la distance du sujet i au sujet j , D_i et D_j les diamètres à 1m30 des arbres i et j .

Ces auteurs calculent cet indice pour des valeurs de l'exposant telles que $k = 0, 1, 2, 3$ et 4 ; la valeur 0 conduisant à un poids de 0.5 et donnant l'APA de Brown (1965), la valeur 2 correspondant à la pondération de Moore *et al.* (1973). Si ce type de pondération préserve la propriété d'exclusion mutuelle des polygones, elle induit cependant l'apparition d'espaces vides entre les polygones et génère ainsi un pavage incomplet du plan (Fig. II.17).

L'intégration dans notre modèle des diagrammes de Voronoï pondérés, en fonction de la taille des arbres, doit permettre de tenir compte du statut social de chaque arbre dans le peuplement et de mettre en évidence des comportements différents, en ce qui concerne les processus de compétition et le potentiel de croissance, selon que l'arbre étudié se positionne comme arbre dominant ou arbre dominé.

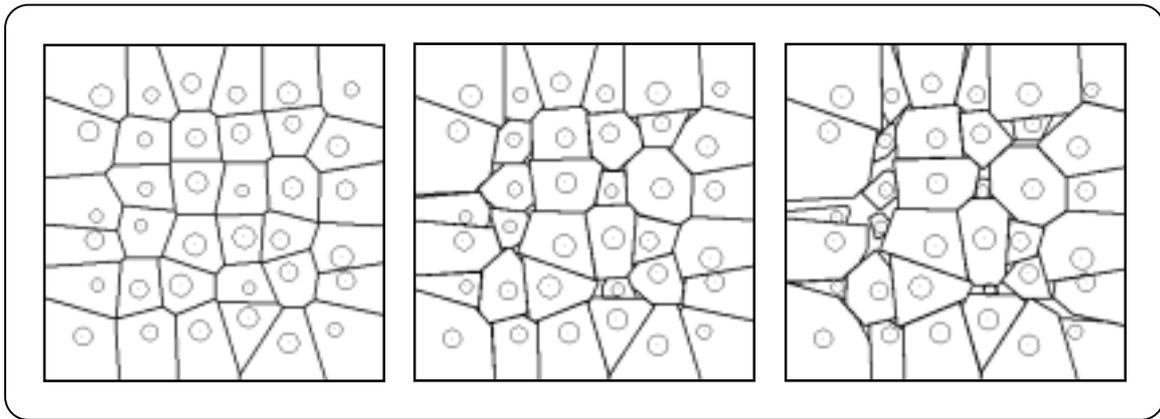


FIGURE II.17 – Pondération des surfaces de croissance en fonction des dimensions relatives du sujet par rapport à ses voisins.
De gauche à droite : $k = 0$ (pas de pondération), $k = 1$, $k = 2$.

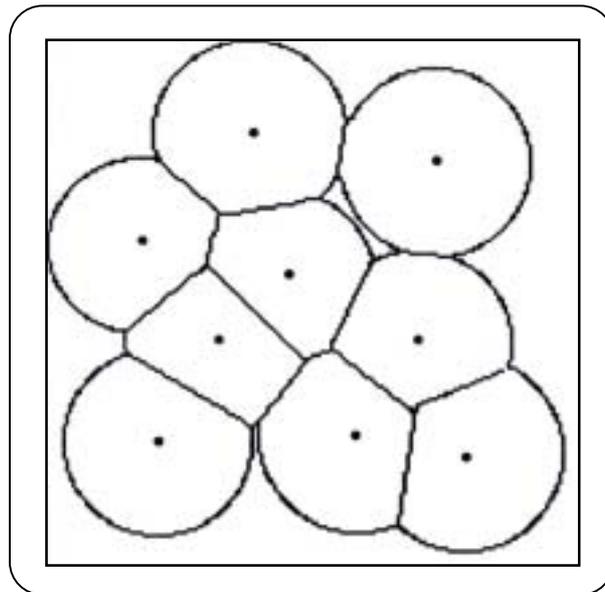


FIGURE II.18 – Méthode de construction d'un diagramme de Voronoï à partir de la croissance synchronisée de cercles.

Notons enfin qu'il existe d'autres méthodes de construction des diagrammes de Voronoï, ainsi que bien d'autres types de pondération que (Okabe *et al.*, 1992). En particulier, Boots (1973) rappelle la possibilité d'obtenir un diagramme de Voronoï par une méthode de croissance de cercles (Fig. II.18). Si les sites du plan engagent simultanément un processus de

croissance à la même vitesse, alors, à condition que l'intersection de deux cercles suspende leur croissance en ce point, le stade ultime de développement des cercles correspond à un diagramme de Voronoï.

Si l'on considère qu'un diagramme de Voronoï est construit par cette méthode, le synchronisme des temps initiaux et l'égalité des vitesses de croissance induisent la formation d'arêtes rectilignes et médiatrices. Lorsque les temps initiaux sont décalés et/ou que les vitesses de croissance différent, les arêtes du diagramme deviennent alors curvilignes (Boots, 1980). Ce type de modèle n'a jamais été utilisé en écologie forestière, probablement en raison de la complexité des algorithmes. Pourtant, ce mode de construction n'est pas sans faire penser à la croissance des houppiers et aux phénomènes de gêne physique lorsqu'ils entrent en contact.

Discussion

L'approche que nous avons adoptée offre une première possibilité de gérer la compétition pour les ressources spatiales et fournit en l'état actuel une méthode prospective pour étudier la biomécanique de l'arbre en interaction avec son voisinage. En particulier, elle permet de simuler l'anisotropie de croissance des houppiers qui résulte des phénomènes de compétition pour l'espace et la lumière, et ainsi de traduire l'effet des éclaircies sur le comportement biomécanique des arbres et sur la dynamique de la structure spatiale du peuplement. La figure (II.19) montre six étapes d'une simulation réalisée dans CAPSIS en utilisant conjointement les modèles que nous avons développés pour chaque compartiment de l'arbre. Cette simulation doit être considérée comme un test de comportement des modèles et ne tend pas à mettre en évidence quelque résultat que ce soit. Nous l'avons effectuée en utilisant un paramétrage exagéré qui nous permettait d'obtenir une évolution remarquable au terme de peu de cycles de croissance. Pour la réaliser, nous avons imposé que tous les arbres aient le même taux de croissance, ce qui explique que tous les cercles (projection au sol des houppiers) ont la même taille à un instant donné. Cette simulation comporte deux "éclaircies", au terme de 7 puis de 17 cycles, et les cercles épais désignent les arbres qui vont être supprimés. Les cellules du diagramme Voronoï sont calculées à partir de la position du centre des houppiers et sont donc évolutives dans le temps. Le centre géométrique d'une cellule de Voronoï est représenté par un petit point. Sa présence permet d'observer si, suite aux effets de la compétition, le centre du houppier se déplace vers ce dernier. Les vecteurs relient la base des troncs au centre des houppiers. D'une manière générale, on observe que leur extrémité se dirige vers les zones de vide produites par les éclaircies. Les individus restants peuvent alors étendre leur croissance vers ce nouvel espace libre et le combler progressivement. Il est important de noter que la taille du vecteur reliant la base du tronc d'un arbre à son centre de houppier est le résultat cumulé de deux phénomènes qui se produisent à chaque cycle de croissance. Au début de chaque cycle, le diagramme de Voronoï permet de rendre compte des effets de la compétition et conduit à un premier déplacement du centre des houppiers simulant ainsi l'anisotropie de la croissance. Lorsque l'opération de croissance est terminée pour tous les arbres, le modèle de comportement biomécanique permet de calculer la nouvelle forme des troncs sous l'action des incréments de sollicitations externes et internes. Les incréments de déplacements du tronc sont alors répercutés sur la position du centre du houppier sous la forme d'une translation de corps rigide. Les deux effets peuvent alors s'ajouter ou se compenser selon que le tronc fléchit dans la direction de l'excentrement de son houppier ou bien qu'il se redresse à l'opposé au moyen d'apparition de zones de bois de réaction. Cette dernière option conduit à des troncs dont la forme est du même type que celle représentée sur la figure (II.20.b).

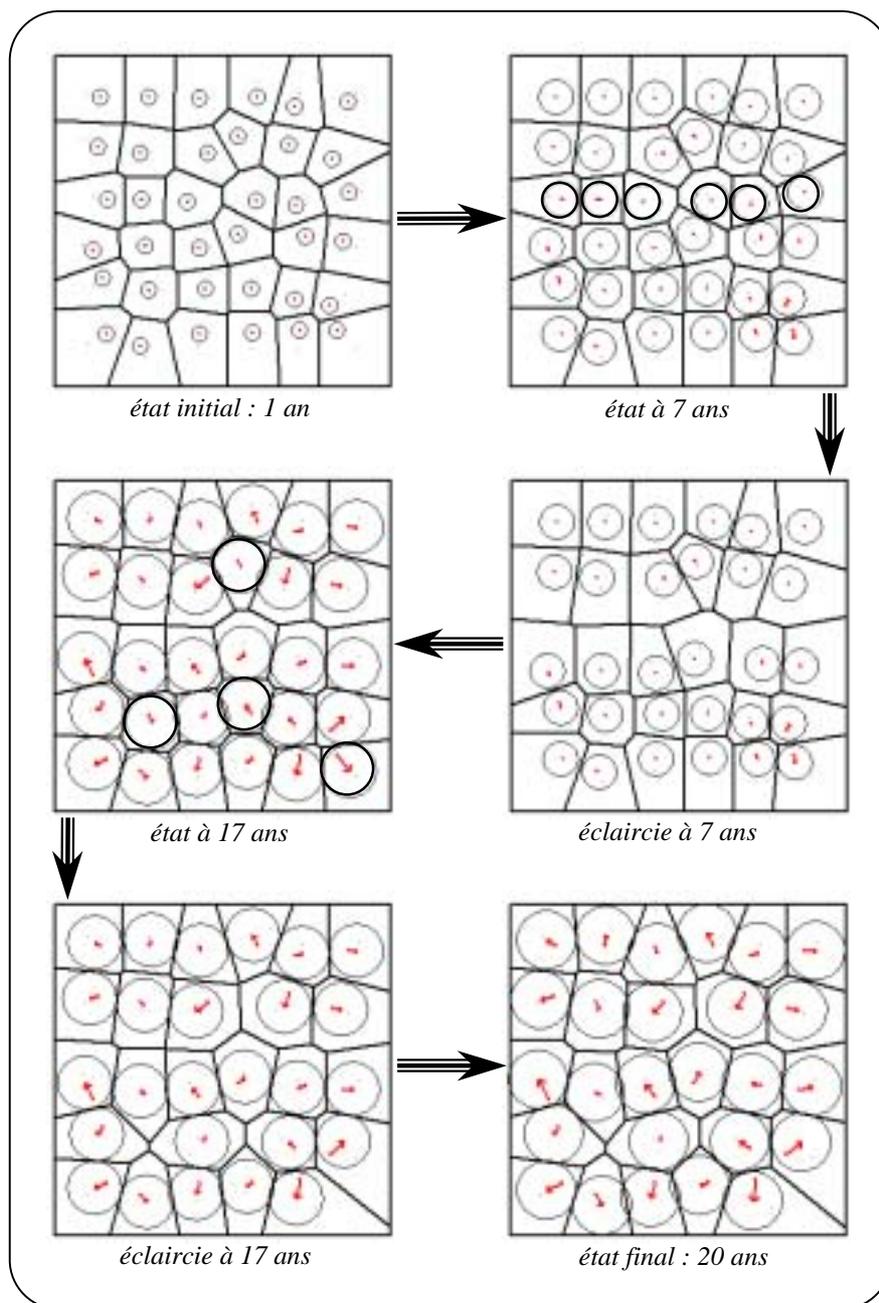


FIGURE II.19 – Simulation d’une placette (vue en projection au sol) sur 20 cycles de croissance obtenue avec notre modèle de comportement dépendant des distances. Tous les arbres ont le même taux de croissance. Les cercles épais désignent les arbres qui vont être éclaircis. Les petits points sont les centres géométriques des cellules de Voronoï (évolutives). Les vecteurs relient les bases des troncs aux centres des houppiers.

Avant de conclure ce chapitre, nous présentons, à titre d’exemple, deux types de forme obtenues en utilisant notre modèle. La figure (II.20.a) montre la forme d’un arbre, qui ayant

subi une inclinaison accidentelle lors des premiers stades de développement, met en place une stratégie de redressement secondaire de son tronc pour retrouver la verticalité. La figure (II.20.b) montre le type d'influence que les interactions avec le voisinage de l'arbre peuvent avoir sur le comportement biomécanique du tronc et donc sur sa forme. La gêne occasionnée par la compétition spatiale provoque une dissymétrie de croissance du houppier impliquant un déséquilibre de la répartition du poids du houppier. La conséquence de ce mécanisme se traduit par une flexion du tronc dans la direction de l'excentrement du houppier. Si le déséquilibre devient trop important, on assiste alors à un phénomène de redressement actif du tronc permis par la mise en place de zones de bois de réaction.

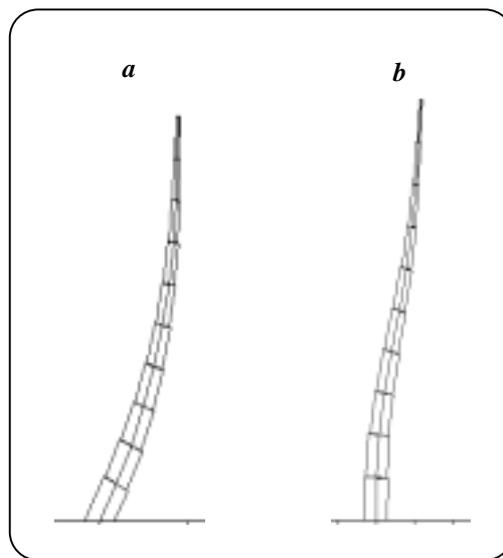


FIGURE II.20 – Exemples de forme de tiges obtenus avec le modèle de comportement biomécanique des troncs de CAPSIS 3.0. A gauche, la forme est due à une inclinaison basale ; à droite, elle est le résultat d'un excentrement du houppier.

Conclusion

Situé au croisement de l'écologie forestière, de la modélisation mathématique et informatique et de l'analyse des structures en mécanique, le travail que nous avons exposé dans ce chapitre constitue l'apport original de cette thèse. Il s'agit d'un travail prospectif qui fournit de nouvelles informations sur l'intérêt des modèles spatio-temporels en écologie forestière, notamment en ce qui concerne les moyens d'étude de la dynamique de structure de l'environnement dans lequel les arbres se développent, d'analyse du comportement biomécanique à l'échelle du peuplement forestier, et de prévision de la qualité du bois qu'il produit. Le chapitre suivant aborde le problème de l'évaluation des modèles développés dans CAPSIS pour une utilisation à l'échelle du peuplement.

- TROISIEME CHAPITRE -

***PREMIERES EVALUATIONS DES
MODELES PEUPEMENT DE CAPSIS :
COMPARAISONS AVEC AMAP ET PROTOCOLE DE
MESURES SUR UNE PLACETTE DE PINS MARITIMES.***

Introduction.....	89
3.1 Simulations comparatives AMAP – CAPSIS.....	90
3.1.1 Objectif de la comparaison.....	90
3.1.2 Simulations de la croissance d'un axe.....	90
<i>Flexion d'un axe en croissance sous l'action de son poids propre</i>	<i>90</i>
<i>Redressement d'un axe en croissance selon deux stratégies</i>	<i>92</i>
3.1.3 Prise en compte du poids du houppier à l'échelle de l'arbre.....	93
<i>Comportement du tronc sans redressement.....</i>	<i>94</i>
<i>Etude de l'influence des mécanismes de redressement.....</i>	<i>95</i>
3.2 Protocole de mesures en vue de l'évaluation des modèles	101
3.2.1 Présentation du dispositif expérimental de Nezer	101
3.2.2 Mesure de la forme des troncs par la méthode des trois piquets.....	104
3.2.3 Mesure de la projection au sol des houppiers	107
<i>Descriptif du protocole de mesure et résultat.....</i>	<i>107</i>
<i>Approximation de la mesure pour la modélisation.....</i>	<i>109</i>
3.2.4 Evaluation des stratégies du modèle 2D de compétition entre houppiers.....	110
<i>Mise en garde sur la méthode d'évaluation</i>	<i>113</i>
Discussion.....	114
Conclusion	116

Introduction

Ce troisième chapitre a pour objectif d'évaluer la pertinence des modèles décrits au chapitre précédent pour l'étude à l'échelle du peuplement. Le passage de l'arbre isolé à l'arbre pris dans son environnement forestier nécessite certaines hypothèses simplificatrices. Ainsi, la description du houppier est agrégée et les relations de compétition qu'entretient un individu avec ses voisins sont étudiées à l'aide d'un modèle 2D reposant sur les diagrammes de Voronoï.

Dans un premier temps, nous proposons une évaluation numérique du modèle de comportement biomécanique du tronc en comparant, à l'issue de plusieurs cycles de croissance, la forme d'un axe, soumis à son propre poids et à des mécanismes de redressement secondaire, obtenue par matrices de transfert (CAPSIS) et par éléments finis (AMAP). Dans les modèles, l'analyse est effectuée dans l'hypothèse des petits déplacements. Ensuite, la prise en compte du poids du houppier permet d'évaluer l'erreur commise lorsque l'on considère qu'il est appliqué au centre de masse de ce dernier, sans effectuer la discrétisation des branches. Soulignons que, par abus de langage, nous parlerons des résultats de CAPSIS pour désigner ceux que fournissent les modèles que nous y avons développés, tout en se souvenant que cette environnement informatique accueille bien d'autres modèles d'horizons différents.

Dans un deuxième temps, nous présentons le protocole de mesures sur le terrain que nous avons réalisées sur le dispositif expérimental de Nezer. Il s'agit d'une placette circulaire de 400 m² située dans un peuplement monospécifique équienné de Pins maritimes planté en 1952, et suivie par l'unité de bioclimatologie de l'INRA de Bordeaux depuis 1986. Ce protocole de mesures visait à récolter des données pour l'évaluation de nos modèles à l'échelle du peuplement. D'une part, la mesure de la forme des tiges doit permettre d'évaluer la pertinence des formes obtenues à l'aide du modèle de comportement biomécanique des troncs de CAPSIS. D'autre part, la mesure de la projection au sol des houppiers des huit pins encore présents sur le dispositif en 2000 a pour objectif de vérifier les observations de Gavrikov *et al.* (1993) concernant les positions relatives du centre du houppier (en projection) et du centre de la cellule de Voronoï associée, et servant de base d'évolution pour notre modèle de dissymétrie de la croissance des houppiers.

3.1 Simulations comparatives AMAP – CAPSIS

3.1.1 Objectif de la comparaison

La modélisation du comportement biomécanique de l'arbre à l'échelle du peuplement forestier conduit à formuler des hypothèses simplificatrices. En s'appuyant sur les fonctionnalités du modèle développé dans AMAPméca pour une analyse de l'arbre isolé, modèle qui en intègre toute la complexité topologique, nous présentons, au second chapitre, les concepts et les outils intégrés dans CAPSIS et permettant d'aborder le problème à plus grande échelle. Dans notre modèle à l'échelle du peuplement, la description des arbres est agrégée, et chaque arbre est considéré comme l'assemblage des deux compartiments distincts que sont le tronc et le houppier. De plus, la méthode de calcul de la réponse biomécanique aux diverses sollicitations externes et internes est modifiée. Le premier modèle repose sur la Méthode des Eléments Finis alors que le second utilise la Méthodes des Matrices de Transfert, plus simple à mettre en œuvre. L'objectif des simulations comparatives AMAP – CAPSIS présentées dans ce paragraphe, est de mettre en parallèle les réponses des deux modèles de régulation de la forme des troncs afin d'estimer l'influence de l'abandon d'une description fine du houppier. En préambule, nous présentons des simulations croisées d'un axe en croissance. Elles permettent de valider numériquement les développements réalisés dans CAPSIS, dans un cas simple en l'absence de ramifications. Les exemples qui suivent ont tout d'abord été réalisés avec AMAP. Un système de communication par fichiers entre les deux logiciels a permis de travailler avec les mêmes paramètres, en particulier avec les mêmes données de croissance.

3.1.2 Simulations de la croissance d'un axe

Flexion d'un axe en croissance sous l'action de son poids propre

Les deux simulations présentées sur les figures (III.1) et (III.2) montrent les résultats obtenus avec AMAP et CAPSIS dans le cas d'un axe non ramifié en croissance et après trente cycles de calcul. L'axe est soumis à l'action de son poids propre et fléchit progressivement au cours de la croissance. Selon les paramètres que l'on choisit, l'axe supporte plus ou moins bien le chargement qui lui est appliqué. Les deux simulations ont été réalisées en considérant un matériau homogène et isotrope dont le module d'Young E est de 3000 MPa. Pour la première, on considère une densité volumique (ρ) du matériau de $0,7 \text{ g.cm}^{-3}$ et un angle d'inclinaison initiale de 10° par rapport à la verticale. Pour la seconde, l'axe est initialement

incliné à 45° , et ρ vaut 2 g.cm^{-3} . En utilisant la même discrétisation de l'axe, à savoir un élément de poutre par unité de croissance, les deux modèles de comportement fournissent exactement les mêmes incréments de déplacements à chaque cycle. Au final, les formes obtenues sont bien identiques.

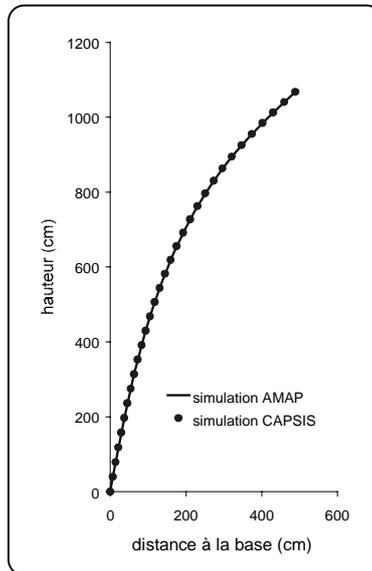


FIGURE III.1 – Forme d'un axe en croissance soumis à l'action de son poids propre et initialement incliné de 10° par rapport la verticale. Comparaison des résultats d'AMAP et de CAPSIS à l'issue de 30 cycles de croissance, avec $\rho = 0,7 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 3000 \text{ MPa}$.

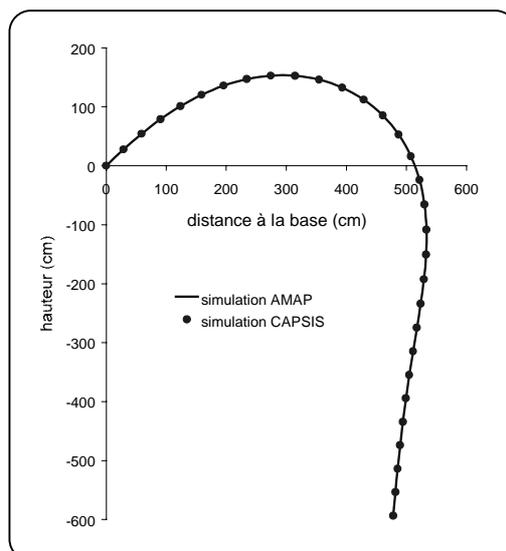


FIGURE III.2 – Forme d'un axe en croissance soumis à l'action de son poids propre et initialement incliné de 45° par rapport la verticale. Comparaison des résultats d'AMAP et de CAPSIS à l'issue de 30 cycles de croissance, avec $\rho = 2 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 3000 \text{ MPa}$.

Redressement d'un axe en croissance selon deux stratégies

Les figures (III.3) et (III.4) montrent les résultats, au terme de trente cycles, de deux simulations comparatives AMAP – CAPSIS dans le cas d'un axe non ramifié en croissance, soumis à l'action de son poids propre et présentant un angle d'inclinaison initiale de 50° par rapport à la verticale. Deux stratégies de redressement secondaire, lié au gravitropisme des unités de croissance, sont distinguées et appliquées. Elles conduisent à des modes de développement de l'axe que l'on qualifie, en botanique, de plagiotrope et d'orthotrope (Hallé & Oldemann, 1970). Dans le premier cas, l'axe pousse horizontalement, alors qu'il tend à croître en direction de la verticale dans le second. Nous nous plaçons dans le cas d'un axe de résineux. A chaque cycle de croissance, le redressement de l'axe est contrôlé par l'apparition de zones de bois de compression dans les derniers cerne formés. Le différentiel de déformations de maturation est modélisé par la relation (II.16) donnée au second chapitre. Les paramètres a et b de cette loi donnent les déformations de maturation du bois normal (a) et du bois de compression ($a+b$). Ils s'expriment en microdéformations (μdef). Les deux simulations ont été réalisées avec $\rho = 2 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 3000 \text{ MPa}$ et $a = -100 \mu\text{def}$. Le critère d'apparition de bois de compression dans le cerne externe d'une unité de croissance est géométrique. On compare l'inclinaison de l'unité de croissance aux angles de début et de fin de redressement qui définissent la stratégie. Ces angles sont donnés par rapport à la verticale et respectivement notés adr et afr . Pour le cas de l'axe plagiotrope les paramètres utilisés sont : $b = 2100 \mu\text{def}$, $adr = 60^\circ$ et $afr = 60^\circ$. Pour l'axe orthotrope, on prend : $b = 900 \mu\text{def}$, $adr = 50^\circ$ et $afr = 0^\circ$. Comme précédemment, une même discrétisation de l'axe conduit à un comportement identique des deux modèles de mécanique comparés. Notre modèle est donc validé numériquement dans la cas non ramifié en considérant le poids propre et le redressement secondaire.

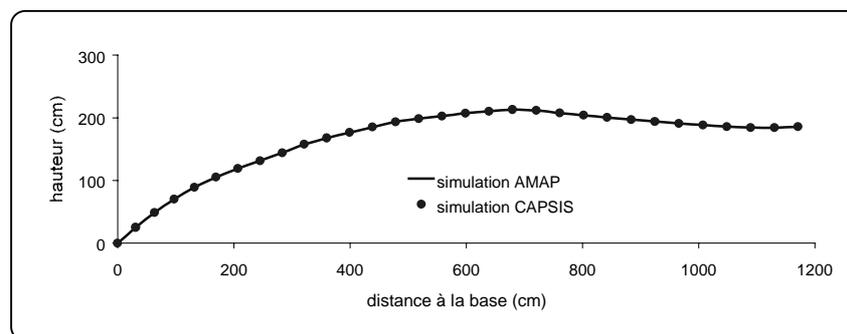


FIGURE III.3 – Forme d'un axe en croissance, de type plagiotrope, soumis à l'action de son poids propre et initialement incliné de 50° par rapport la verticale. Comparaison des résultats d'AMAP et de CAPSIS à l'issue de 30 cycles de croissance, avec $\rho = 2 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 3000 \text{ MPa}$, $a = -100 \mu\text{def}$, $b = 2100 \mu\text{def}$, $adr = 60^\circ$, $afr = 60^\circ$.

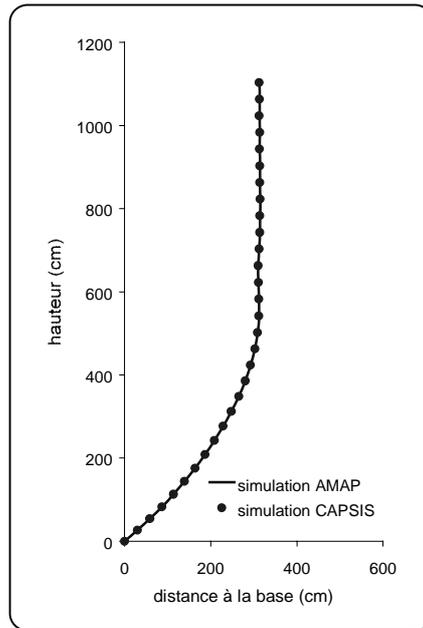


FIGURE III.4 – Forme d’un axe en croissance, de type orthotrope, soumis à l’action de son poids propre et initialement incliné de 50° par rapport la verticale. Comparaison des résultats d’AMAP et de CAPSIS à l’issue de 30 cycles de croissance, avec $\rho = 2 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 3000 \text{ MPa}$, $a = -100 \mu\text{def}$, $b = 900 \mu\text{def}$, $adr = 50^\circ$, $afr = 0^\circ$.

3.1.3 Prise en compte du poids du houppier à l’échelle de l’arbre

Les simulations comparatives présentées ci-dessus montrent que l’implémentation du modèle de régulation de la forme des troncs a été correctement réalisée dans CAPSIS. Cette première validation numérique nous permet alors d’envisager la simulation de troncs d’arbres en tenant compte de l’application des incréments de poids du houppier à chaque cycle de croissance. Rappelons que dans AMAP, la topologie et la géométrie des branches du houppier sont entièrement décrites. Ainsi, les actions des branches sur le tronc sont prises en compte sur toute la partie du tronc présente dans le houppier. Dans CAPSIS, nous faisons l’hypothèse que l’ensemble de ces informations est condensé en un seul point. Les incréments de poids du houppier sont alors appliqués au centre de masse de l’incrément de volume de ce dernier. L’objectif des simulations suivantes est d’estimer le biais dû à cette hypothèse quant à la mise en place progressive de la forme du tronc. Cette évaluation est tout d’abord conduite dans le cas extrême d’un tronc qui ne se redresse jamais. Ensuite, différentes intensités des mécanismes de redressement de la tige sont considérées. Dans tous les cas présentés, le tronc est supposé homogène et on utilise les paramètres suivants : $\rho = 0,7 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 11000 \text{ MPa}$. A chaque cycle de croissance, l’incrément de poids du houppier est communiqué par fichiers d’AMAP vers CAPSIS.

Comportement du tronc sans redressement

La figure (III.5) montre trois étapes de la croissance d'un arbre simulé avec le logiciel AMAP. Le tronc, initialement incliné de 30° par rapport à la verticale, supporte son propre poids et celui des branches du houppier. Dans ce premier cas, aucune réaction gravitropique n'est considérée. Le tronc fléchit alors progressivement sous l'effet du chargement.

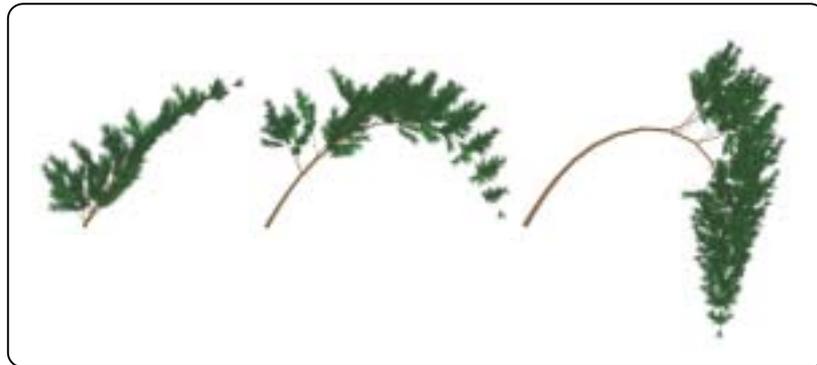


FIGURE III.5 – Evolution de la forme d'un tronc soumis à l'action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30° . De gauche à droite : au terme de 10, 15 et 20 cycles de croissance. Simulation réalisée avec AMAP.

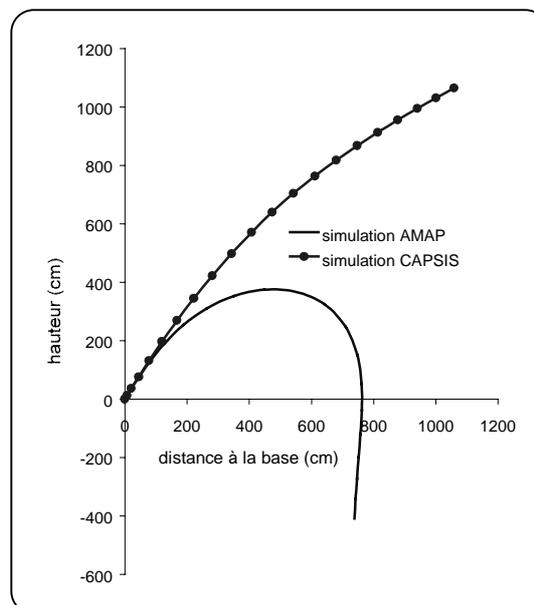


FIGURE III.6 – Forme d'un tronc en croissance soumis à l'action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30° . Comparaison des résultats d'AMAP et de CAPSIS à l'issue de 20 cycles de croissance, avec $\rho = 0,7 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 11000 \text{ MPa}$.

En simulant la croissance de cet arbre avec le modèle de CAPSIS, on met en évidence un tronc apparemment plus rigide (Fig. III.6). Or, il n'en est rien puisque les mêmes paramètres sont utilisés. Ainsi, l'importante différence de réponse des deux modèles est due à l'hypothèse simplificatrice sur l'application du poids du houppier. Lorsque l'on concentre tout le poids du houppier en son centre de masse, il résulte alors que toute la partie du tronc située au dessus de ce point n'est plus soumise à l'action des branches qu'elle porte. De fait, les unités de croissance terminales du tronc sont moins chargées dans CAPSIS que dans AMAP. Pour un cycle de calcul donné, la flexion de ces dernières est donc plus importante dans AMAP que dans CAPSIS. Cependant, les écarts de forme observés ne trouvent pas là leur seule explication et la croissance primaire contribue largement à les amplifier. En effet, la création de l'unité de croissance terminale s'effectue dans le prolongement de la précédente, de sorte que les directions de pousse ne sont pas les mêmes dans les deux simulations. En outre, le cumul des différences de comportement obtenues à chaque cycle de croissance les fait diverger rapidement. Finalement, ce cas extrême de croissance du tronc sans redressement montre bien les limites de l'hypothèse d'application du poids du houppier en un seul point que l'on utilise pour la modélisation du comportement biomécanique à l'échelle du peuplement.

Etude de l'influence des mécanismes de redressement

Dans ce qui suit, nous présentons les simulations comparatives réalisées sur le même arbre que précédemment en considérant trois stratégies différentes de redressement secondaire de la tige. Numérotées de 1 à 3, elles correspondent respectivement à un gravitropisme de plus en plus intense. Dans les trois cas, les déformations de maturation du bois normal et du bois de compression sont : $a = -200 \mu\text{def}$ et $b = 1200 \mu\text{def}$. Les trois stratégies diffèrent dans le choix du critère géométrique contrôlant l'apparition de zones de bois de compression. Ainsi, ce sont les angles de début et de fin de redressement qui varient. Les valeurs utilisées sont :

- stratégie 1 : $adr = 45^\circ$ et $afr = 0^\circ$,
- stratégie 2 : $adr = 35^\circ$ et $afr = 11^\circ$,
- stratégie 3 : $adr = 31^\circ$ et $afr = 5^\circ$.

Le tronc est toujours initialement incliné de 30° par rapport à la verticale. Les figures (III.7), (III.9) et (III.11) montrent trois étapes de l'évolution de la forme du tronc de l'arbre simulé avec le logiciel AMAP, pour chaque stratégie de redressement. Les figures (III.8), (III.10) et (III.12) comparent les formes du tronc obtenues avec le modèle fin d'AMAP et le modèle simplifié de CAPSIS à l'issue de 20 cycles de croissance. Dans tous les cas, la croissance primaire s'effectue dans le prolongement de l'unité de croissance précédente.



FIGURE III.7 – Evolution de la forme d’un tronc soumis à l’action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30°. De gauche à droite : au terme de 10, 15 et 20 cycles de croissance.
Simulation réalisée avec AMAP. Cas de la stratégie 1.

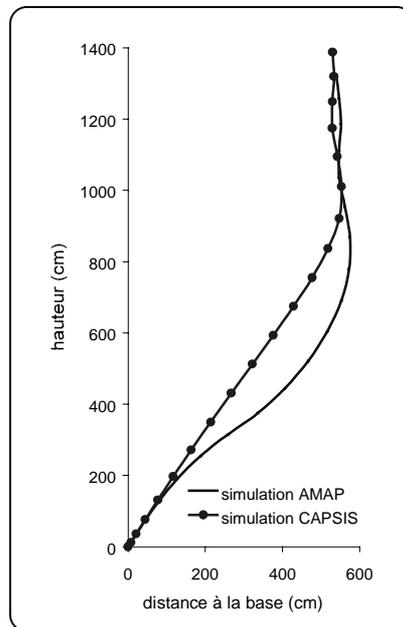


FIGURE III.8 – Forme d’un tronc en croissance soumis à l’action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30°. Comparaison des résultats d’AMAP et de CAPSIS à l’issue de 20 cycles de croissance. Cas de la stratégie 1 : $\rho = 0,7 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 11000 \text{ MPa}$, $a = -200 \mu\text{def}$, $b = 1200 \mu\text{def}$, $adr = 45^\circ$, $afr = 0^\circ$.



FIGURE III.9 – Evolution de la forme d’un tronc soumis à l’action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30°. De gauche à droite : au terme de 10, 15 et 20 cycles de croissance.
Simulation réalisée avec AMAP. Cas de la stratégie 2.

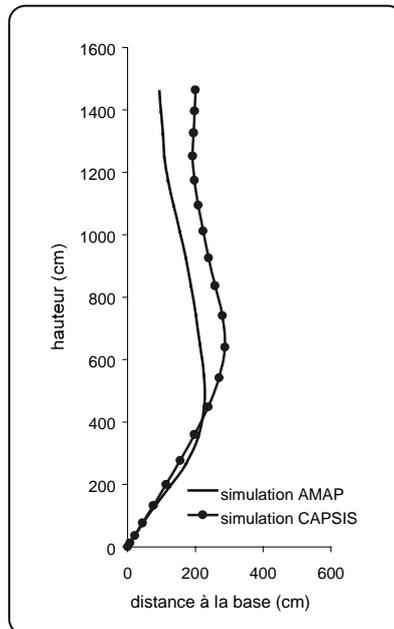


FIGURE III.10 – Forme d’un tronc en croissance soumis à l’action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30°. Comparaison des résultats d’AMAP et de CAPSIS à l’issue de 20 cycles de croissance. Cas de la stratégie 2 : $\rho = 0,7 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 11000 \text{ MPa}$, $a = -200 \mu\text{def}$, $b = 1200 \mu\text{def}$, $adr = 35^\circ$, $afr = 11^\circ$.

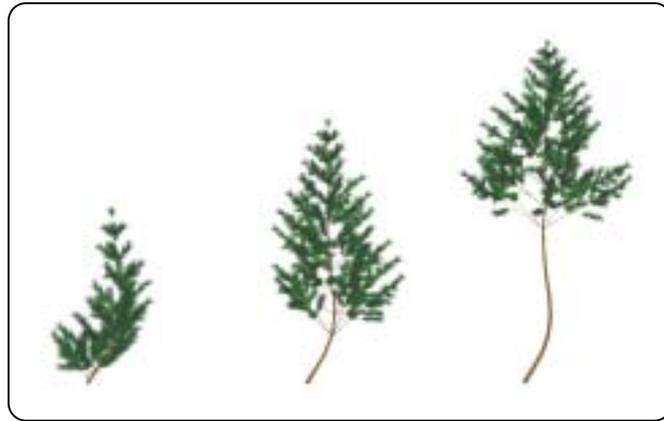


FIGURE III.11 – Evolution de la forme d’un tronc soumis à l’action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30° . De gauche à droite : au terme de 10, 15 et 20 cycles de croissance. Simulation réalisée avec AMAP. Cas de la stratégie 3.

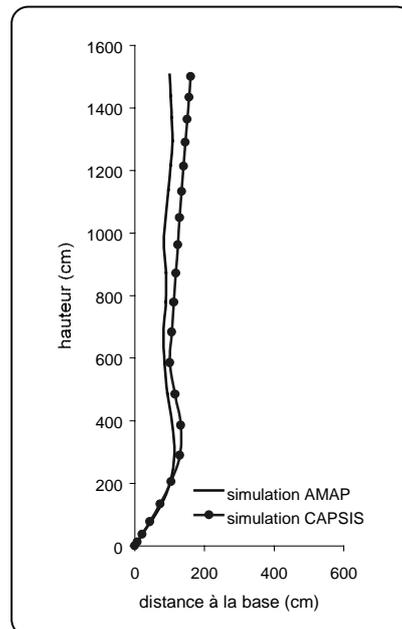


FIGURE III.12 – Forme d’un tronc en croissance soumis à l’action de son poids propre et du poids du houppier, et initialement incliné de 30° . Comparaison des résultats d’AMAP et de CAPSIS à l’issue de 20 cycles de croissance. Cas de la stratégie 3 : $\rho = 0,7 \text{ g.cm}^{-3}$, $E = 11000 \text{ MPa}$, $a = -200 \text{ }\mu\text{def}$, $b = 1200 \text{ }\mu\text{def}$, $adr = 31^\circ$, $afr = 5^\circ$.

Les simulations comparatives qui viennent d'être présentées permettent tout d'abord de remarquer que la présence de mécanismes de redressement secondaire conduit à un comportement des deux modèles beaucoup plus proche qu'en l'absence de réaction. Néanmoins, les différences dues au mode d'application du poids du houppier persistent et seule la stratégie 3 fournit des formes similaires en termes d'inclinaison et de courbure de la tige.

Dans le cas de la stratégie 1, la simulation AMAP met en évidence une forme finale à la flexuosité beaucoup plus marquée que celle obtenue avec CAPSIS, particulièrement en ce qui concerne les dix premiers mètres de la tige. L'analyse, dans le temps, de l'évolution de la forme dans la simulation AMAP montre que la courbure basale y est imprimée aux premiers stades de croissance durant lesquels l'extrémité fine du tronc fléchit progressivement sous l'action du poids des branches situées au sommet de l'arbre. En outre, la croissance primaire vient amplifier cet effet de déformation de la partie terminale, tandis que la croissance secondaire rigidifie la partie basale antérieurement déformée. L'inversion de courbure de la tige est produite lorsque l'inclinaison des jeunes pousses terminales du tronc atteint le critère de début de redressement. Plus tard, cette stratégie permet à la cime de l'arbre d'amorcer un retour à la verticalité. Lorsque dans la simulation CAPSIS, on applique le poids du houppier en son centre de masse, situé plus près des grandes branches du bas que des petites du haut, l'effet de flexion des dernières unités de croissance est diminué, voire très faible, de sorte que leur écart à la verticale s'amplifie lentement (voir le cas de la figure (III.6)). Ainsi, la réaction secondaire intervient plus tard, et donc plus haut dans le tronc, que dans la simulation AMAP. Au final, bien qu'ils soient inclinés, les dix premiers mètres du tronc présentent peu de défauts de forme. Pour cette stratégie, l'écart de comportement dû à notre hypothèse sur le houppier reste donc largement significatif.

Dans le cas des stratégies 2 et 3, l'hypothèse dans CAPSIS sur l'application du poids du houppier conduit au même mécanisme de retard concernant le déclenchement de la réaction secondaire, qui vient d'être décrit. La diminution des écarts de forme de la stratégie 2 à la 3 s'explique par le raccourcissement du temps de réaction de la tige aux sollicitations externes, imposé par les paramètres du critère géométrique. Le retard de la réaction observé dans CAPSIS en est d'autant plus faible, et l'évolution de la forme plus proche que celle simulée par AMAP.

Si ces simulations montrent dans quelle mesure la simplification du houppier, effectuée dans CAPSIS, atteint ses limites, elles mettent surtout en évidence l'influence des mécanismes de redressement sur le comportement biomécanique du tronc d'un arbre. En particulier, soulignons l'importance de la croissance primaire ainsi que celle de la dynamique

de croissance secondaire, qu'il s'agisse de l'augmentation en section ou du gravitropisme, des dernières unités de croissance apparues. Les déformations qu'elles subissent lorsqu'elles sont jeunes et fines conditionnent fortement leur forme finale.

Après cette première évaluation numérique du modèle de régulation de la forme des troncs destiné à l'échelle du peuplement, nous présentons, au paragraphe suivant, les mesures réalisées sur une placette de Pins maritimes en vue d'une phase d'évaluation des modèles intégrés dans CAPSIS, reposant sur des données réelles.

3.2 Protocole de mesures en vue de l'évaluation des modèles

3.2.1 Présentation du dispositif expérimental de Nezer

Dans ce paragraphe, nous présentons le protocole de mesures que nous avons réalisées sur le dispositif expérimental de Nezer. Il s'agit d'une placette (n° 632/2) circulaire de 400 m² (*i.e.* de 11,28 m de rayon), située au sein d'un peuplement monospécifique équienné de Pins maritimes (Fig. III.13), planté en 1952 lors du reboisement d'après guerre et conduit en culture intensive classique.

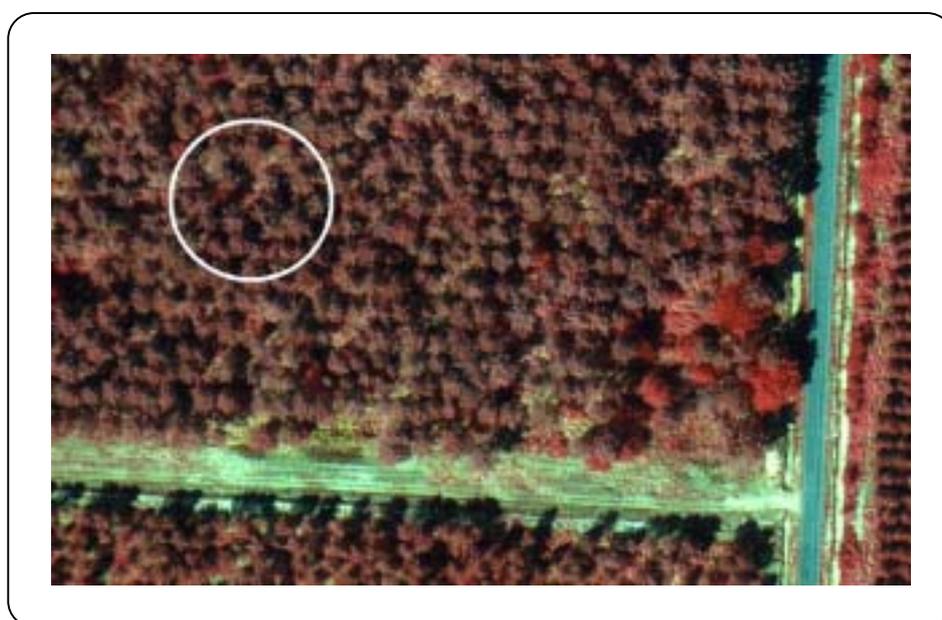


FIGURE III.13 – Photographie aérienne du peuplement de Pins maritimes au sein duquel se trouve la placette 632/2 (intérieur du cercle blanc) du dispositif expérimental de Nezer.

Source : Unité de Bioclimatologie – INRA Bordeaux (1989).

Cette placette est suivie depuis 1986 par l'Unité de Bioclimatologie de l'INRA de Bordeaux (Guyon & Courrier, 1994). La position de la base des troncs par rapport au centre de la placette a tout d'abord été relevée. Ensuite, le diamètre à 1m30, la hauteur totale et la hauteur du houppier des arbres de ce dispositif ont été régulièrement mesurées. Les deux dernières éclaircies connues du peuplement ont été effectuées en 1989 et en 1991. Initialement composé de 19 pins, le dispositif est donc passé à 12, puis à 8 individus. Les figures (III.14) à (III.17) montrent respectivement l'état de la placette 632/2 en 1986, 1989, 1991 (après éclaircies) et 1998.

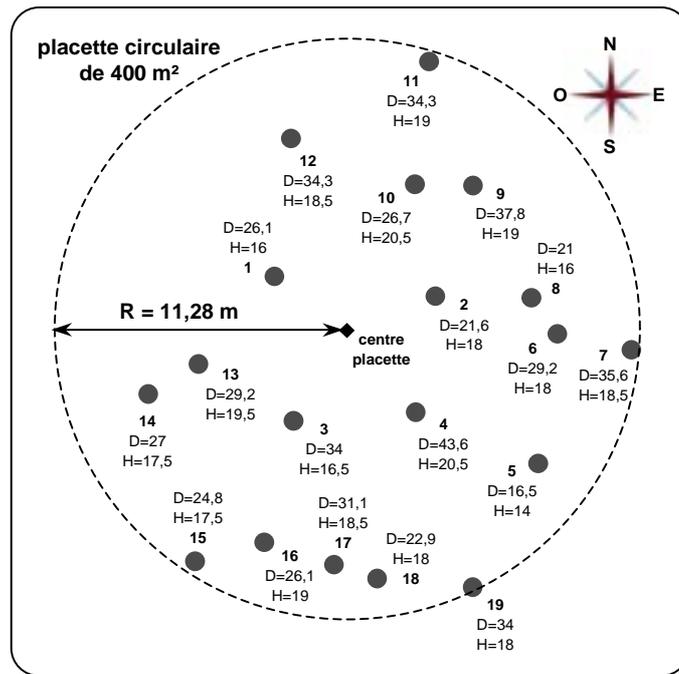


FIGURE III.14 – Positions relatives, numéro, diamètre à 1m30 (D en cm) et hauteur totale (H en m) des troncs pour les 19 pins de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer. Mesures effectuées en **1986**.

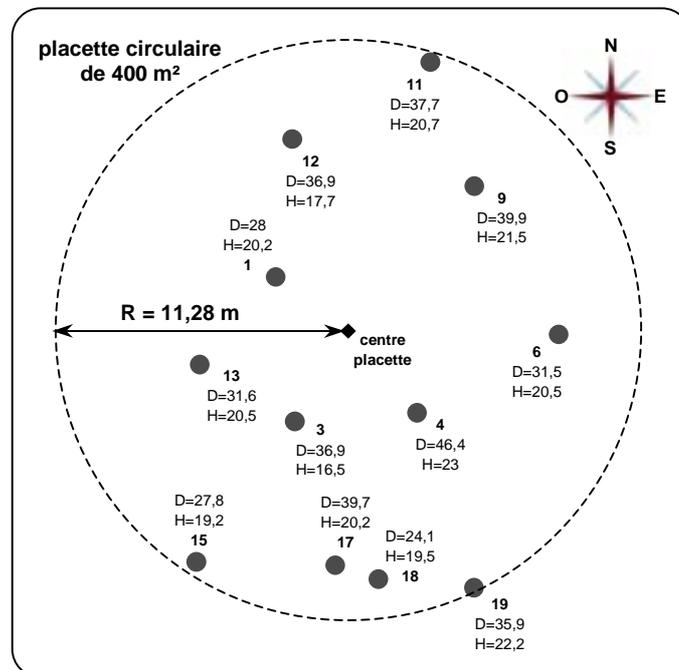


FIGURE III.15 – Positions relatives, numéro, diamètre à 1m30 (D en cm) et hauteur totale (H en m) pour les troncs des 12 pins de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer. Mesures effectuées en **1989**.

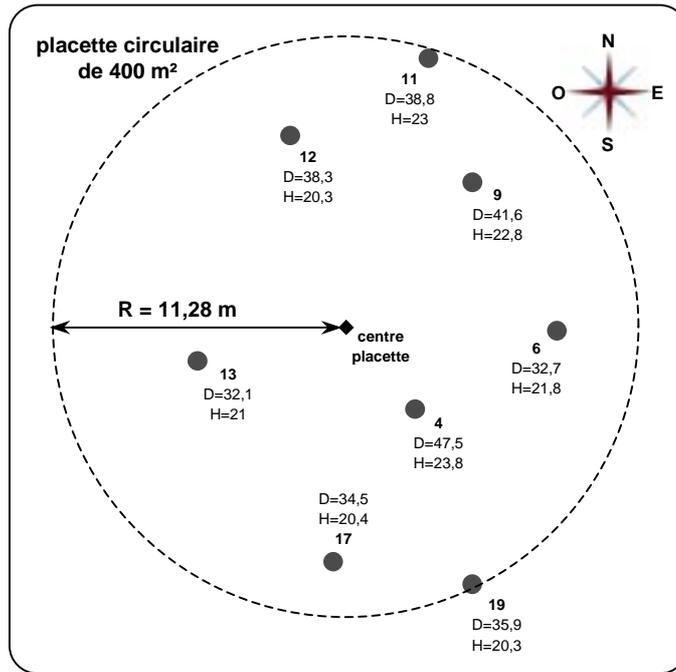


FIGURE III.16 – Positions relatives, numéro, diamètre à 1m30 (D en cm) et hauteur totale (H en m) pour les troncs des 8 pins de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer. Mesures effectuées en **1991**.

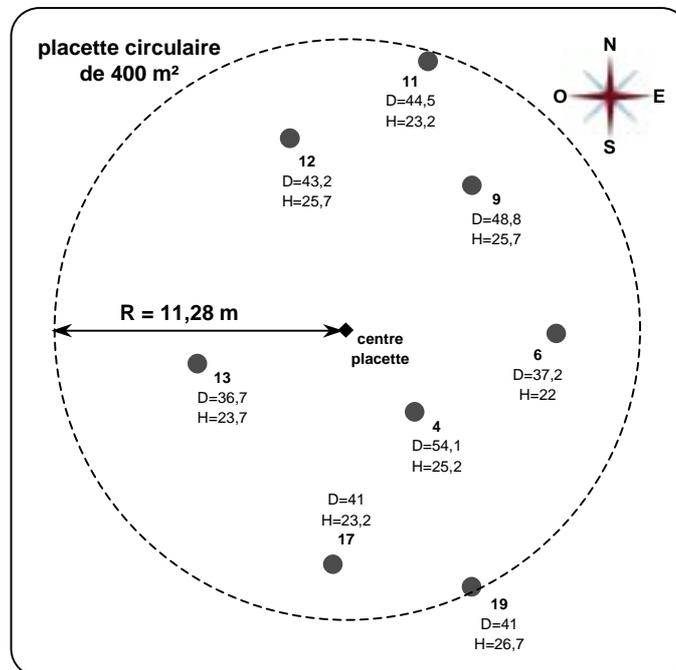


FIGURE III.17 – Positions relatives, numéro, diamètre à 1m30 (D en cm) et hauteur totale (H en m) pour les troncs des 8 pins de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer. Mesures effectuées en **1998**.

3.2.2 Mesure de la forme des troncs par la méthode des trois piquets

Le protocole que nous présentons ci-après a été réalisé dans le but de disposer de données pour l'évaluation de notre modèle de régulation de la forme des troncs. Si les mesures de forme des troncs que nous avons effectuées sont intéressantes, elles ne sont cependant pas suffisantes pour envisager la phase d'évaluation souhaitée. Nous reviendrons sur ce point important dans la discussion de ce chapitre.

Parmi les moyens expérimentaux permettant de mesurer la forme d'un tronc, la méthode des trois piquets (Godin & Costes, 1997) présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et ne nécessite pas un matériel onéreux. Pour la réaliser, il suffit de se munir de trois piquets, d'une boussole, d'un mètre à ruban suffisamment long (dans l'ordre de grandeur de la hauteur des arbres) et d'une échelle de forestier.

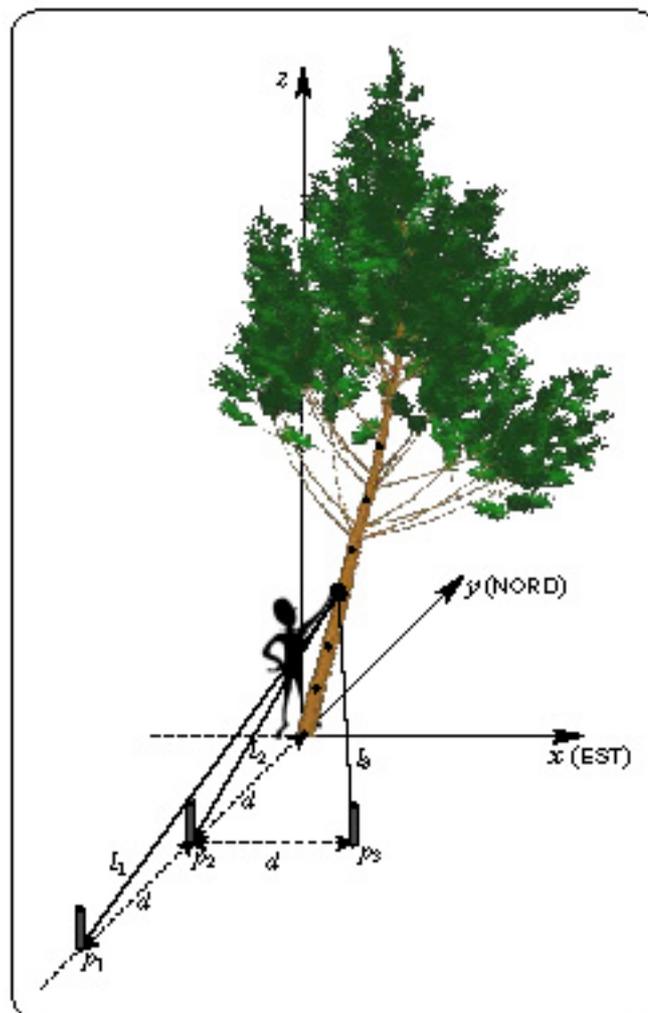


FIGURE III.18 – Mesure de la forme 3D d'un tronc d'arbre par la méthode des trois piquets. Les coordonnées (x, y, z) du point de mesure s'obtiennent en fonction des distances de ce point aux trois piquets (l_1, l_2, l_3) .

La figure (III.18) montre le principe de mesure de la forme d'un tronc d'arbre par la méthode des trois piquets. La première étape consiste à placer les trois piquets au sol. Ils sont positionnés de manière à former un triangle rectangle isocèle. Les deux cotés perpendiculaires de ce triangle définissent alors les axes horizontaux du repère local associé à l'arbre et dont l'origine est la base du tronc. Lors de nos mesures, nous avons aligné les piquets p_1 et p_2 selon la direction donnée par le NORD et passant par la base du tronc (axe y). Le piquet p_3 est ensuite placé de telle sorte que la direction $(p_2 p_3)$ désigne l'EST (axe x). L'axe z correspond à la verticale. La mesure de la forme est d'autant plus précise que la distance d , séparant p_1 de p_2 , p_2 de la base du tronc et p_2 de p_3 , est importante. Il faut ainsi faire un compromis entre la valeur de cette distance et l'espace disponible autour des arbres. Nos mesures ont été réalisées en prenant cette distance égale à 4 mètres. Enfin, la méthode consiste à mesurer les distances d'un point du tronc aux trois piquets, respectivement notées l_1 , l_2 et l_3 . Cette mesure est répétée pour plusieurs points pris le long du tronc avec la fréquence souhaitée (à chaque mètre pour nos mesures). Dans le repère attaché à l'arbre, les coordonnées (x, y, z) des différents points de mesure sur le tronc s'obtiennent en fonction des distances (l_1, l_2, l_3) correspondantes. En considérant les triangles rectangles adéquats, l'application du théorème de Pythagore conduit aux résultats suivants :

$$x = \frac{(l_2^2 - l_3^2) + (x_{p_3}^2 - x_{p_2}^2)}{2(x_{p_3} - x_{p_2})} \quad \text{(III.1)}$$

$$y = \frac{(l_1^2 - l_2^2) + (y_{p_2}^2 - y_{p_1}^2)}{2(y_{p_2} - y_{p_1})} \quad \text{(III.2)}$$

et au choix :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{l_1^2 - (x - x_{p_1})^2 - (y - y_{p_1})^2} \\ &= \sqrt{l_2^2 - (x - x_{p_2})^2 - (y - y_{p_2})^2} \\ &= \sqrt{l_3^2 - (x - x_{p_3})^2 - (y - y_{p_3})^2} \end{aligned} \quad \text{(III.3)}$$

Dans notre cas, avec $p_1(0, -8, 0)$, $p_2(0, -4, 0)$, $p_3(4, -4, 0)$, on obtient finalement :

$$x = \frac{l_2^2 - l_3^2 + 16}{8}, \quad y = \frac{l_1^2 - l_2^2 - 48}{8}, \quad z = \sqrt{l_2^2 - x^2 - (y + 4)^2} \quad \text{(III.4)}$$

L'utilisation de la même construction du repère local pour chacun des huit arbres mesurés sur le dispositif expérimental de Nezer et la connaissance de leurs positions relatives permettent d'obtenir la maquette 3D de la placette 632/2 (Fig. III.19 et III.20).

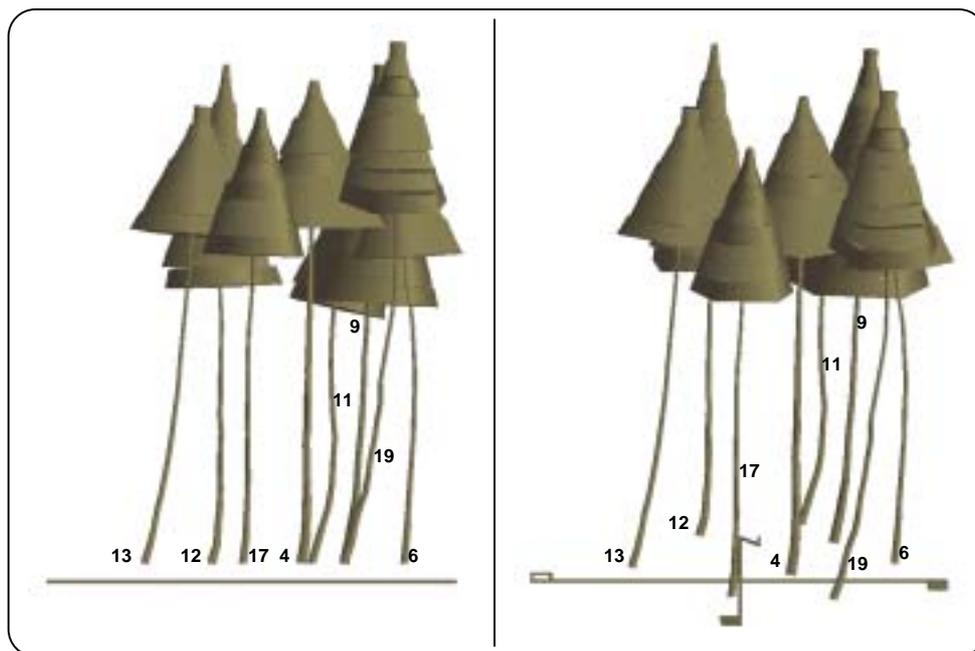


FIGURE III.19 – Reconstitution 3D de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer à partir des mesures de la forme des troncs des 8 pins présents en **2000**. Le défilement des houppiers est fictif ; seuls la hauteur et le plus grand diamètre sont issus de la mesure.
A gauche : vue de SUD ; à droite : vue de SUD en perspective.

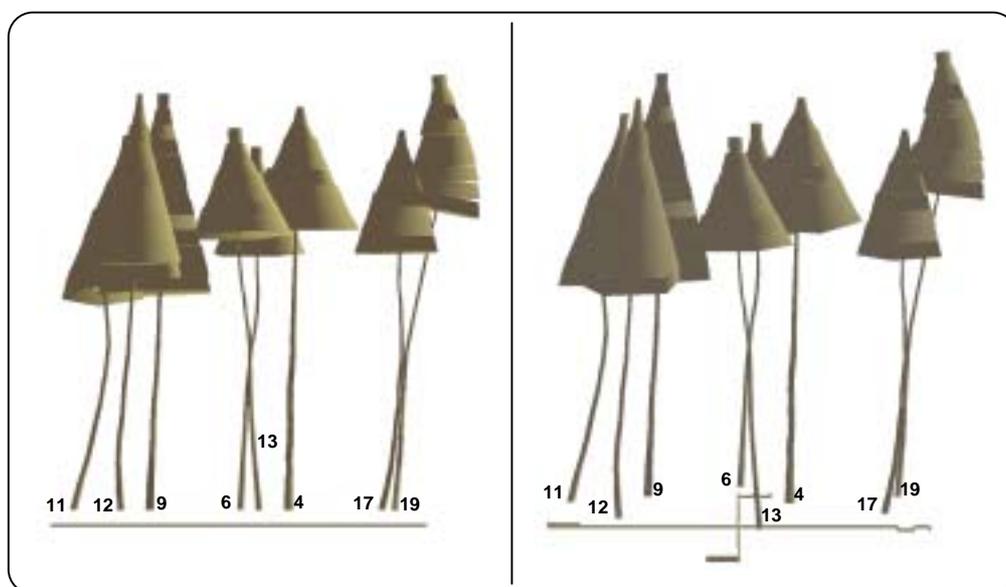


FIGURE III.20 – Reconstitution 3D de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer à partir des mesures de la forme des troncs des 8 pins présents en **2000**. Le défilement des houppiers est fictif ; seuls la hauteur et le plus grand diamètre sont issus de la mesure.
A gauche : vue d'OUEST ; à droite : vue d'OUEST en perspective.

Les figures (III.19) et (III.20) ont été réalisées en utilisant le logiciel AMAPmod développé au CIRAD de Montpellier. Le défilement des troncs est issu de la mesure : pour chaque point pris sur le tronc, nous avons aussi relevé la circonférence. A contrario, le défilement des houppiers représentés sur ces figures est fictif. Seuls leur hauteur et leur plus grand rayon correspondent à des quantités mesurées. En particulier, ces rayons ont été obtenus au moyen des mesures de projection au sol des houppiers que nous présentons par la suite.

3.2.3 Mesure de la projection au sol des houppiers

Descriptif du protocole de mesure et résultat

Afin de disposer de données pertinentes pour envisager une phase d'évaluation du modèle de dissymétrie de croissance des houppiers développé sous CAPSIS, nous avons procédé à la mesure de la projection au sol des houppiers des pins de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer.

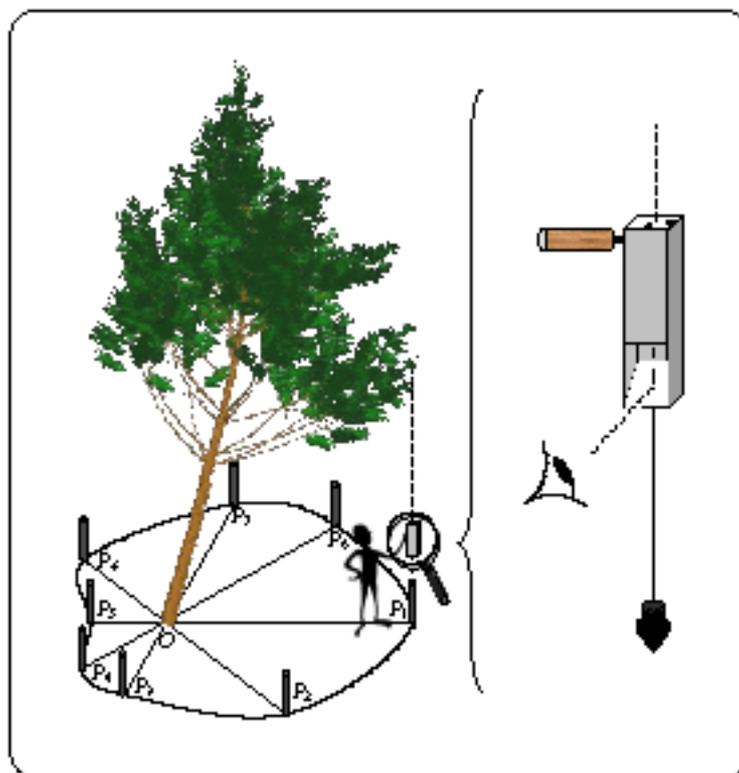


FIGURE III.21 – Mesure de la projection au sol du houppier d'un arbre, selon 8 directions, au moyen d'un appareil constitué d'un miroir faisant un angle de 45° avec l'horizontale, d'un réticule au sommet et d'un fil à plomb donnant la verticale.

Pardé & Bouchon (1988) décrivent et analysent le protocole de mesure de la projection au sol du houppier d'un arbre, schématisé par la figure (III.21). Ce protocole permet d'obtenir une estimation de la surface projetée du houppier à partir de plusieurs rayons. La méthode consiste à repérer un point qui sera le centre de rayonnement O , à partir duquel on trace huit rayons décalés de 45° en 45° et matérialisés par les huit jalons P_i . Lors de nos mesures, nous avons fait le choix pratique de prendre, pour tous les arbres, le point O comme étant le centre de la base du tronc. Ensuite, on repère les intersections de la projection au sol du houppier avec les huit rayons, au moyen d'un appareil constitué d'un miroir faisant un angle de 45° avec l'horizontale, d'un réticule au sommet et d'un fil à plomb donnant la verticale. Notons que sur la figure (III.21) les huit jalons P_i matérialisent non seulement les huit rayons, mais aussi les intersections mesurées.

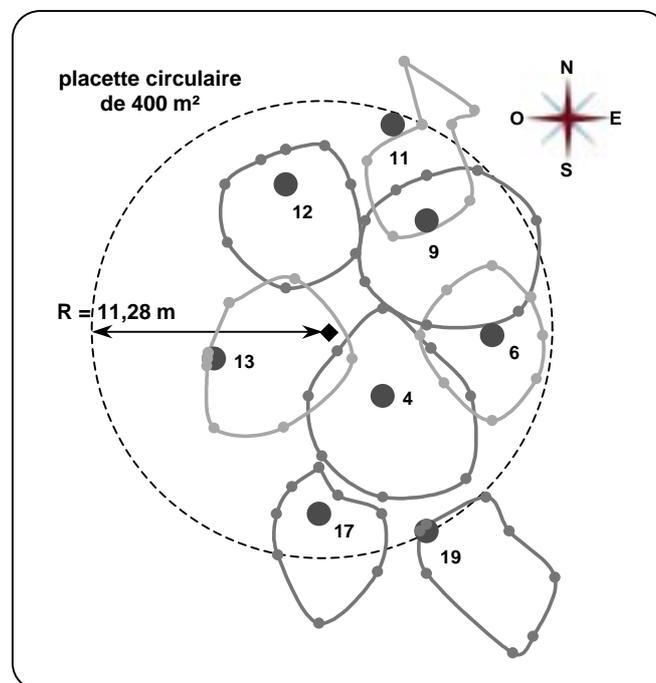


FIGURE III.22 – Projection au sol, mesurée selon les 8 directions de la rose des vents (tous les 45°), des houppiers pour les 8 pins de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer. Mesures effectuées en **2000**.

La figure (III.22) montre le résultat de la mesure de projection au sol des houppiers pour les huit pins encore présents sur le dispositif de Nezer en 2000. Les projections représentées en clair indiquent que les houppiers se trouvent à une hauteur inférieure à celle des houppiers dont la projection est tracée en foncé. Ainsi, le chevauchement des projections n'indique pas pour autant qu'il y a interpénétration des houppiers. C'est précisément cet effet

hauteur que nous négligeons dans le modèle 2D de gestion de la compétition spatiale présenté au chapitre précédent.

Approximation de la mesure pour la modélisation

Dans notre modèle, nous considérons que la projection des houppiers est parfaitement circulaire. Aussi, pour utiliser les résultats précédents, nous proposons de calculer la surface des projections mesurées afin d'en déduire le rayon des disques équivalents. De plus, il nous faut déterminer le centre géométrique des projections sur lequel chaque disque sera alors centré dans le modèle. La surface projetée du houppier (Fig. III.21) se calcule par :

$$S = \frac{\pi}{8} \sum_{i=1}^8 (OP_i)^2 \quad \text{(III.5)}$$

Cette surface peut aussi être calculée en considérant la projection mesurée des houppiers comme un polygone (Fig. III.23). On utilise alors les procédures de calcul de la surface d'un polygone que nous avons développé dans CAPSIS pour déterminer la surface des cellules du diagramme de Voronoï. En outre, précisons que ces procédures permettent aussi de calculer le centre géométrique d'un polygone.

Pour les houppiers de formes régulières (numéro d'arbre 4, 6, 9, 12) les deux méthodes conduisent à des différences de 1 à 2%. En raison du fort excentrement vers l'EST du houppier de l'arbre 13 par rapport à la base de son tronc, la relation (III.5) accorde un poids trop important aux grands rayons OP_i mesurés autour de cette direction ; elle conduit à une surface qui surestime de 20% celle obtenue par la deuxième méthode. On observe le même phénomène pour le houppier de l'arbre 19, très excentré et qui plus est de forme allongée. La formule (III.5) surestime alors de 136% la valeur de notre méthode numérique. Dans le cas du houppier de l'arbre 17, à la forme intermédiaire entre celles du 12 et du 13, la surestimation de la surface est de 6%. Enfin la projection du houppier de l'arbre 11, complètement excentrée vers le SUD-EST et à la forme fortement non convexe, conduit à une surface, calculée par (III.5), surestimée de 63%.

Les surfaces plutôt surprenantes que fournit la relation (III.5) ne doivent pas nécessairement la remettre en question. En effet, Pardé & Bouchon (1988) soulignent que cette estimation est d'autant plus précise que le centre de rayonnement O est proche du milieu du plus grand diamètre de la projection. Comme nous n'avons pas respecté ce conseil (pour nous, O est dans tous les cas la base du tronc), il n'est donc pas étonnant que l'estimation (III.5) soit erronée lorsque les houppiers sont excentrés. Les écarts concernant les arbres 11, 13, 17 et 19 trouvent là leur explication.

La surface et le centre géométrique de la projection mesurée des houppiers sont alors calculés au moyen des procédures numériques, en les considérant comme des polygones. On trace sur la figure (III.23) les disques équivalents aux projections des houppiers ainsi que leur centre géométrique calculé. On utilise la même convention (tracé clair ou foncé) qu'à la figure (III.22) pour représenter l'effet hauteur dont la projection au sol ne tient pas compte.

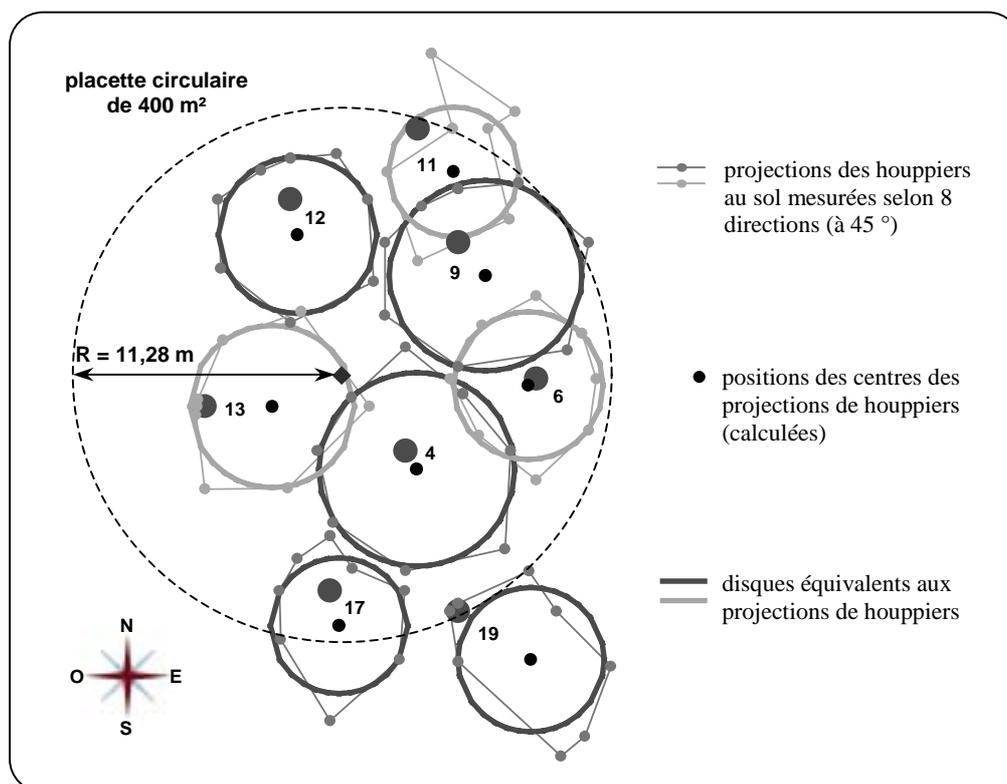


FIGURE III.23 – Représentation de la projection au sol des houppiers sous forme polygonale, centres géométriques associés et disques équivalents associés pour les 8 pins, présents en 2000, de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer.

3.2.4 Evaluation des stratégies du modèle 2D de compétition entre houppiers

Le modèle 2D de gestion de la compétition spatiale entre houppiers, que nous avons présenté au second chapitre, utilise le diagramme de Voronoï des individus. On associe à chaque arbre une cellule polygonale qui représente sa surface de croissance. Le modèle fonctionne alors sous l'hypothèse que le développement du houppier optimise le remplissage de cette cellule avant de s'effectuer dans celle d'un arbre voisin. Pour ce faire, les intersections de la projection au sol du houppier avec l'enveloppe de la cellule associée sont calculées afin de déterminer la direction selon laquelle le centre de houppier sera déplacé. Ce procédé, lorsqu'on le réitère à chaque cycle de la croissance de l'arbre, produit un

déplacement progressif du centre de houppier vers le centre de sa cellule d'espace vital. Par ce moyen, le modèle conduit ainsi à des résultats qui vont dans le sens des observations de Gavrikov et al. (1993). Dans leur étude portant sur des pins Sylvestres en forêt naturelle de Sibérie, ces auteurs remarquent en effet que le houppier a tendance à dévier dans la direction du plus grand espace vide défini par la surface de croissance autour du tronc. En outre, ils constatent que l'angle (en projection au sol), formé par les vecteurs reliant la base du tronc au centre du houppier et la base du tronc au centre de la cellule de Voronoï associée, est le plus souvent petit. Partant de l'hypothèse que ce critère est valable pour une plantation de Pins maritimes, nous l'utilisons par la suite pour évaluer les différentes stratégies de construction des cellules du diagramme Voronoï.

Nous utilisons les mesures effectuées sur le dispositif expérimental de Nezer dans le but de déterminer la stratégie la plus pertinente pour représenter l'état de la placette étudiée. A cette fin, nous relevons les positions des premiers arbres voisins pris à l'extérieur de la placette (Fig. III.24). Ces positions permettent alors de disposer des sites nécessaires pour construire les cellules de Voronoï associées aux huit pins mesurés à l'intérieur du dispositif.

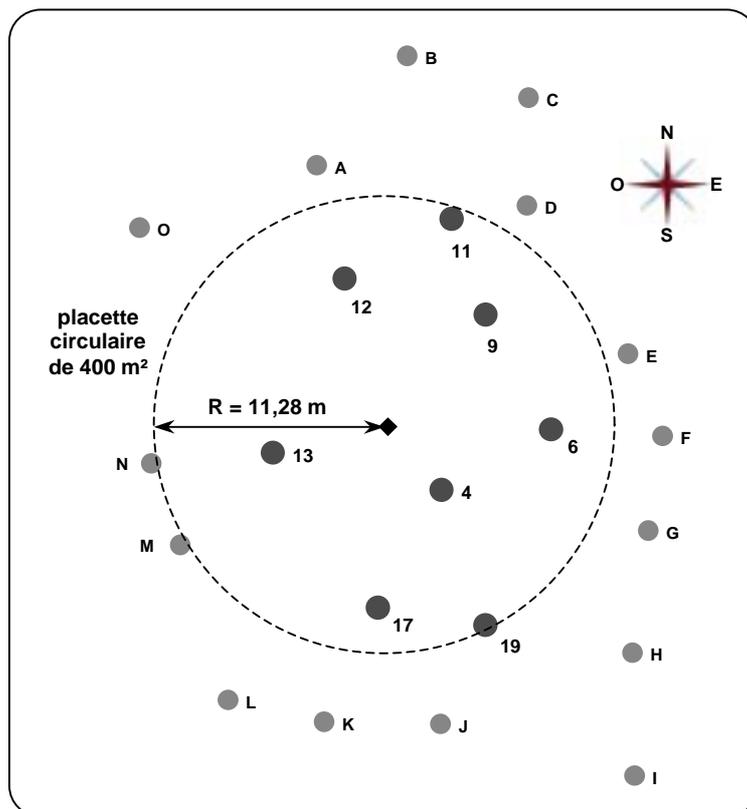


FIGURE III.24 – Position des premiers voisins extérieurs à la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer. Mesures effectuées en 2000.

Les résultats des mesures reportés sur les figures (III.23) et (III.24) permettent alors de comparer la position de la projection au sol du centre des houppiers à la position du centre géométrique des cellules de Voronoï calculées suivant plusieurs stratégies. La figure (III.25) montre les positions relatives de ces points lorsque les sites du diagramme de Voronoï sont la base des troncs (stratégie *a*) et lorsque ces derniers sont le centre des houppiers (stratégie *b*). Le centre géométrique d'une cellule de Voronoï y est représenté par une croix. Les vecteurs relient la base des troncs au centre projeté des houppiers. Les cercles sont la projection équivalente des houppiers que nous avons précédemment déterminée. Ils sont donc centrés sur l'extrémité des vecteurs.

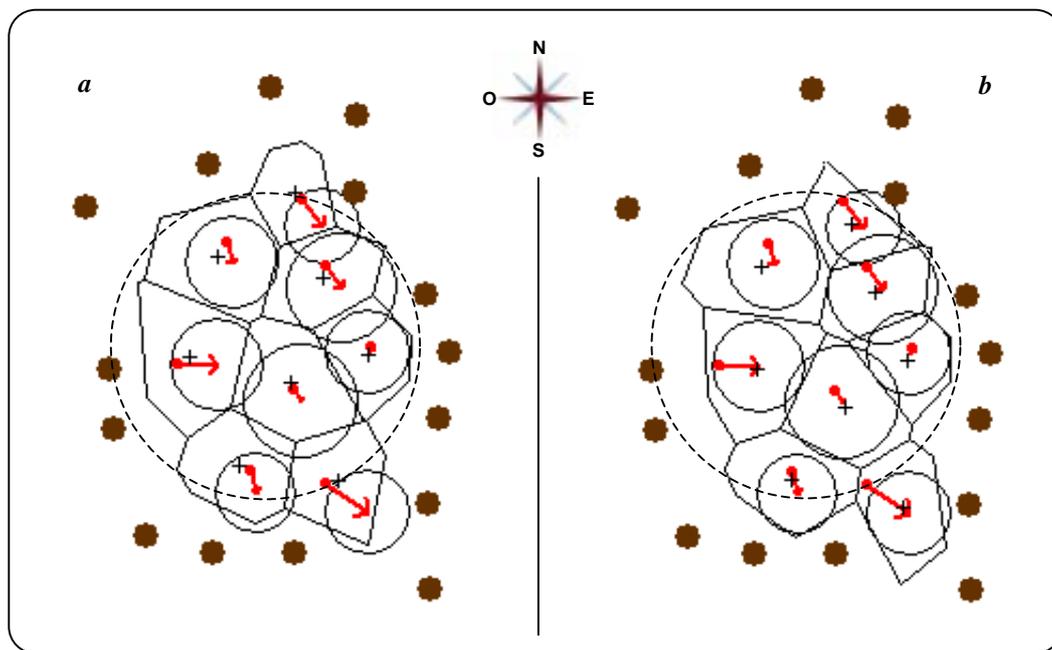


FIGURE III.25 – Comparaison, selon deux stratégies, de la position du centre des houppiers (extrémité des vecteurs) et du centre des cellules de Voronoï (marqué par une croix) pour les 8 pins de la placette 632/2 du dispositif expérimental de Nezer. A gauche : les sites de construction des cellules de Voronoï sont la base des troncs (origine des vecteurs) ; à droite : les sites sont le centre des houppiers mesurés.

Si l'on calcule les angles formés par les vecteurs reliant la base des troncs au centre des houppiers et les vecteurs reliant la base des troncs au centre géométrique des cellules de Voronoï, on obtient alors un angle moyen de 90° dans le cas de la stratégie *a* contre un angle moyen de 20° pour la stratégie *b*. La supériorité de cette dernière renvoie aux remarques que nous faisons au chapitre précédent sur l'intérêt d'utiliser des cellules évolutives. En effet, on observe une orientation moyenne des vecteurs base des troncs – centre des houppiers vers le

SUD-EST liée à la direction des vents dominants dans la région (Polge & Illy, 1967). Aussi, le diagramme de Voronoï construit à partir de la base des troncs ne traduit pas ce phénomène alors que l'utilisation de cellules évolutives permet de prendre en compte l'effet du basculement des arbres dû aux contraintes climatiques. Enfin, on pourra remarquer à titre indicatif que la forme de la projection des houppiers de la figure (III.23) n'est pas sans rappeler celle des surfaces de croissance de la figure (III.25.b), particulièrement dans le cas de l'arbre 19.

Mise en garde sur la méthode d'évaluation

Nous avons effectué les constructions présentées à la figure (III.25) en utilisant la pondération (II.34) de la distance entre voisins par les dimensions relatives des arbres, pour des valeurs de k allant de 1 à 4. Par rapport à l'absence de pondération ($k = 0$), ces différentes stratégies conduisent à des écarts de quelques centimètres sur la position du centre géométrique des surfaces de croissance. En tout état de cause, le calcul des angles formés par les vecteurs base des troncs – centre des houppiers et les vecteurs base des troncs – centre des cellules indique que la stratégie b sans pondération reste la mieux adaptée pour représenter l'état de la placette tel qu'il a été mesuré en 2000. Au regard de ce résultat, il serait néanmoins imprudent de conclure quant à la supériorité absolue de cette stratégie sur les autres. En effet, leur évaluation n'a porté que sur une observation faite à un instant donné. Aussi, elle ne permet pas de prévoir quel degré de pondération sera le plus pertinent pour rendre compte de la dynamique de comportement des houppiers dans le temps. Finalement, le protocole que nous venons de présenter permet simplement de mettre en évidence la nécessité d'utiliser le caractère évolutif du diagramme de Voronoï dans notre modèle.

Discussion

Les simulations comparatives AMAP – CAPSIS, présentées au premier paragraphe, montrent les limites de l'hypothèse d'agrégation de la description du houppier utilisée pour l'analyse à l'échelle du peuplement. Néanmoins, l'évolution testée à la figure (III.5) ne présente qu'un intérêt purement numérique et reste très éloigné du comportement réel d'un Pin maritime. Selon leur intensité, la prise en compte des mécanismes de redressement, dont le rôle est prépondérant dans l'établissement de la forme du tronc, conduit à des différences de comportement des deux modèles plus acceptables. La pertinence du modèle développé dans CAPSIS dépend alors des critères que l'on se donne pour qualifier la forme des troncs à l'échelle du peuplement. Si l'application du poids du houppier en un point présente des conséquences numériques, ce modèle peut cependant s'avérer suffisant pour rendre compte d'inclinaisons et de courbures des tiges permettant, en première approximation, de caractériser la qualité de la production d'un peuplement.

C'est dans le but d'évaluer les capacités de notre modèle de comportement à simuler l'état d'un ensemble d'arbres réels que nous avons réalisé le protocole de mesures présentées au deuxième paragraphe. Notre choix s'est porté sur le dispositif expérimental de Nezer car, outre les mesures dendrométriques, l'Unité de Bioclimatologie disposait de photographies aériennes (Fig. III.13) de la placette étudiée prises à intervalles de temps réguliers. Cette succession de "vues de dessus" nous semblait intéressante pour étudier l'évolution dans le temps de la position des couronnes et évaluer notre modèle 2D d'excentrement des houppiers utilisant les diagrammes de Voronoï. Cependant, les outils dont nous disposions pour traiter ces clichés, dont les échelles varient du 1/6400 au 1/10000, ne nous ont pas permis d'atteindre cet objectif. Aussi, l'évaluation a été conduite à partir de la mesure de la projection des houppiers. Si une stratégie de construction du diagramme de Voronoï a pu être isolée pour décrire au mieux l'état de la placette mesurée, il n'en reste pas moins que nous ne pouvons pas établir que cette dernière conduise à la meilleure prédiction. En outre, les formes très marquées que nous avons mesurées sont le résultat de 48 années de croissance pour lesquelles les interventions sylvicoles sont seulement connues depuis 14 ans. Ainsi, tenter d'expliquer ces formes, en utilisant conjointement les modèles de comportement biomécanique et de compétition spatiale à l'échelle du peuplement, s'avère pratiquement irréalisable du fait que l'on ne connaisse pas tout l'historique des arbres mesurés. Quel était la densité de plantation initiale ? Quels ont été les premiers voisins éclaircis ? Et quand ? Les vents dominants ont-ils été la cause de certaines inclinaisons basales ? Quels arbres ont été touchés ? A quel âge ? La prépondérance des phénomènes intervenant aux stades juvéniles sur l'établissement de la forme future donne la mesure de l'importance de ces questions sur l'histoire des arbres.

Les mesures de forme des troncs et de projection des houppiers que nous avons effectuées sont intéressantes mais devraient être réalisées sur des placettes beaucoup plus jeunes suivies depuis les premiers stades de croissance, et ce chaque année. La connaissance des pratiques sylvicoles conduites et des accidents (en particulier, les basculements dus au vent) permettrait alors d'envisager une méthodologie sérieuse de comparaison entre la simulation et la mesure. Néanmoins, l'inconvénient majeur de ce type de démarche reste le temps.

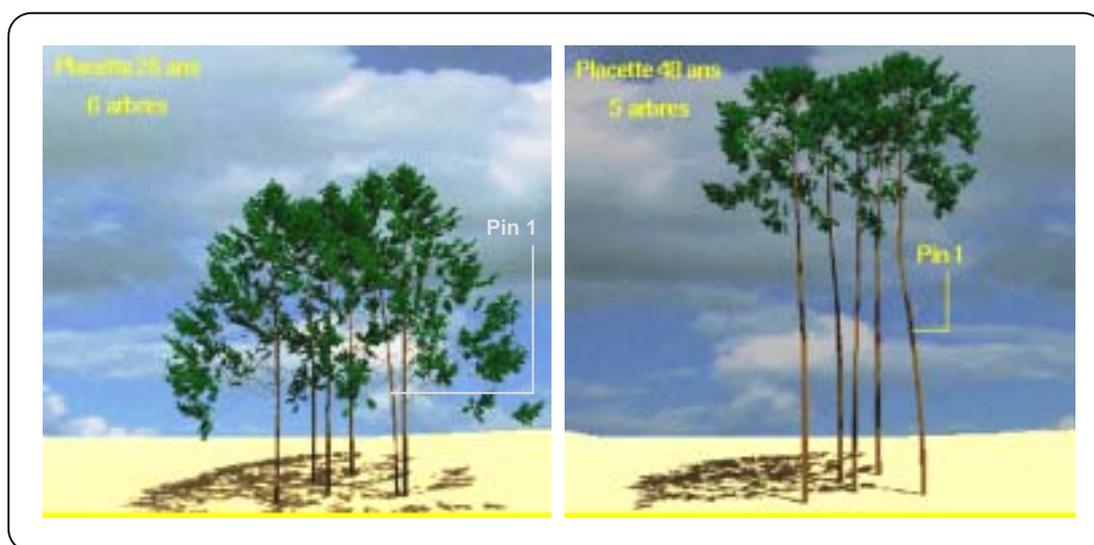


FIGURE III.26 – Simulation d'une placette de Pins maritimes réalisée avec le logiciel AMAP.

A 48 ans, on constate avec surprise que le Pin 1 penche vers l'intérieur de la placette. Sa forme ne peut s'expliquer que si l'on connaît son histoire. En effet, elle est due à la présence passée d'un voisin très proche, supprimé depuis.

L'idée de substituer des simulations issues du logiciel AMAP, à l'échelle de quelques arbres, aux mesures des arbres d'une placette constitue une perspective qui pourrait pallier ce problème. Comme le montre la figure (III.26), les formes observées à un instant donné ne peuvent s'expliquer que par la connaissance de l'histoire de la placette. Ainsi, la maîtrise de l'historique des individus permettrait de disposer de toutes les données nécessaires pour alimenter les modèles peuplement que nous avons développés dans le logiciel CAPSIS. Par ce moyen, une étude de sensibilité de ces modèles aux paramètres qui les gouvernent serait finalement envisageable.

Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre visait à évaluer les différentes hypothèses du modèle global, dépendant des distances, de comportement des arbres en peuplement dont l'implémentation a été réalisée au sein de la plate-forme logicielle CAPSIS. La phase d'évaluation numérique a permis de critiquer le modèle de régulation de la forme des troncs en fonction des sollicitations que l'on considère. En ce qui concerne le modèle 2D de gestion de la compétition spatiale et de dissymétrie de la croissance des houppiers, le protocole expérimental réalisé sur une placette de Pins maritimes âgés de 48 ans nous a conduit à identifier la stratégie de construction des surfaces de croissances la plus pertinente, mais seulement pour décrire l'état mesuré à un instant donné. A l'heure actuelle, les données dont nous disposons ne permettent pas de procéder à une véritable évaluation dynamique des modèles. Le travail de ce dernier chapitre montre combien il est difficile d'évaluer et de calibrer des modèles temporels à partir de mesures expérimentales. Comme bien souvent, c'est le manque d'information sur l'historique des individus qui rend cette étape difficile.

- CONCLUSION GENERALE -

L'objectif de ce travail de thèse était de construire un modèle de comportement biomécanique de l'arbre dans son environnement forestier, avec la problématique initiale de l'étude des défauts de forme du tronc dans les peuplements de Pins maritimes et de l'évaluation de la qualité du bois qu'ils produisent. La flexuosité ou l'inclinaison générale de la tige sont bien souvent le résultat de facteurs environnementaux liés au climat (vents dominants), au statut social de l'arbre (compétition pour l'espace et la lumière), et à des épidémies provoquant un fonctionnement anormal de l'arbre (mort d'apex, tordeuse, rouille...). Ces défauts de rectitude peuvent avoir des conséquences préjudiciables pour l'économie de la filière Forêt-Bois-Papier. Ils augmentent les coûts de transport (coefficient d'empilement) et occasionnent des pertes à la transformation (sciage, déroulage). De plus, ils contribuent à la dépréciation de la qualité du bois (hétérogénéité des propriétés mécaniques). En effet, ces défauts de forme sont généralement associés à la présence de bois de compression en plus ou moins grande quantité dans le tronc. L'amélioration génétique ainsi que l'utilisation de techniques sylvicoles adaptées constituent les principales réponses pour tenter de minimiser ces problèmes. Aussi, ce travail s'inscrit-il dans le développement d'un outil informatique d'aide à la gestion forestière devant permettre d'étudier l'influence des interventions sylvicoles sur le comportement biomécanique et l'établissement progressif de la forme des tiges en peuplement.

Depuis dix ans, le LRBB développe un outil de simulation du comportement biomécanique d'un arbre isolé (baptisé AMAPméca) fonctionnant en interaction avec le logiciel de simulation de la croissance des plantes AMAPpara, développé à l'Unité de Modélisation des Plantes du CIRAD. C'est en s'inspirant des fonctionnalités de cet outil que nous avons entrepris la construction d'un modèle à grande échelle au sein de la plate-forme logicielle CAPSIS, développée à l'INRA et destinée à la modélisation de la croissance des peuplements. Le module AMAPméca repose sur une approche en déplacements de la Méthode des Eléments Finis formulée dans l'hypothèse des petits déplacements (analyse linéaire). Les concepts de base de ce type de modélisation ont été rappelés dans le premier chapitre. Par ailleurs, le souci d'une meilleure prise en compte des grands déplacements, pouvant intervenir lors d'un cycle de croissance, nous a conduit à développer les outils mathématiques et informatiques permettant de modéliser le comportement biomécanique de l'arbre en analyse non linéaire. Si ce travail permet d'envisager la calibration des paramètres d'AMAPméca dans de meilleures conditions qu'auparavant, il apparaît, d'une part, que l'analyse non linéaire ne se justifie que dans certains cas de chargements élevés (pour l'étude des arbres fruitiers par exemple). D'autre part, l'important coût de calcul qu'elle occasionne s'avère déjà très pénalisant dans le cas de la simulation d'un seul arbre. A l'échelle du peuplement, ce dernier point prend toute son importance et nous a donc conduit à construire un modèle de comportement biomécanique dans l'hypothèse des petits déplacements. Les

hypothèses simplificatrices supplémentaires pour l'étude à cette nouvelle échelle ont été exposées dans le second chapitre. D'une part, un modèle de régulation de la forme des troncs, soumis à des sollicitations internes (mécanismes de redressement secondaire) et externes (poids propre, poids du houppier), a été développé. Il utilise les Matrices Transfert des poutres droites et fonctionne sous l'hypothèse que le poids du houppier s'applique en son seul centre de masse. D'autre part, un premier modèle de dissymétrie de la croissance des houppiers a vu le jour. Il repose sur l'utilisation des diagrammes de Voronoï (modèle 2D) pour traduire les effets de la compétition spatiale entre arbres voisins sur le développement des houppiers. Le fonctionnement conjoint de ces deux modèles ouvre la voie à l'étude des relations qui existent entre l'excentrement des houppiers et la mise en place progressive de la forme des troncs. Par ailleurs, il permet de simuler l'effet des éclaircies du peuplement sur le comportement des arbres. Enfin, ces différents modèles ont été discutés dans le troisième chapitre de ce document où le problème de leur évaluation d'un point de vue numérique (à l'aide d'AMAP) puis expérimental (à partir de mesures de terrain sur une placette de Pins maritimes) est abordé. Il ressort de ce dernier chapitre que l'évaluation de tels modèles spatio-temporels reste suspendue à la connaissance parfaite de l'historique des individus étudiés.

Malgré les problèmes persistants, les travaux de cette thèse offrent des possibilités de calcul et d'analyse qui ne demandent qu'à être exploitées par la recherche forestière. Qu'elles concernent l'amélioration des modèles ou leur utilisation future, nous proposons ci-après les principales perspectives qu'ils suscitent.

Perspectives de développement de nos modèles

D'un point de vue technique, l'implémentation d'une méthode de construction optimale des digrammes de Voronoï s'avère nécessaire. En effet, celle que nous avons choisie, pour sa simplicité, ne permet pas actuellement d'envisager des applications à grande échelle, particulièrement lorsque l'on utilise une stratégie évolutive qui impose de reconstruire en permanence les surfaces de croissance des arbres. D'un point de vue scientifique, il serait intéressant d'envisager une amélioration de la description des houppiers afin de rendre compte de la géométrie de base liée à l'espèce ainsi que des contacts entre arbres. En particulier, ce travail devrait permettre une application du chargement en décomposant le houppier par strates dans le but de s'affranchir des problèmes numériques mis en évidence au troisième chapitre. Par ailleurs, il apparaît indispensable de conduire un travail d'analyse et de modélisation des mécanismes de redressement primaire qui jouent un rôle essentiel dans l'apparition des défauts de forme. Comme nous l'avons précisé dans le dernier chapitre, une campagne de mesures sur de jeunes placettes devra être réalisée afin de disposer des données nécessaires sur l'historique des arbres pour calibrer les paramètres et évaluer les

modèles. Parallèlement, soulignons l'intérêt d'utiliser l'expérimentation virtuelle à l'aide de maquettes AMAP, à condition que ces modèles soient eux-mêmes calibrés et évalués. Le module d'analyse non linéaire du comportement biomécanique d'un arbre en croissance, que nous avons développé dans AMAPméca, devra être utilisé pour s'attaquer à ce problème. Enfin, une perspective importante sera de travailler à la détermination de la zone d'influence d'un arbre dans des situations types (différentes sylvicultures, différents statuts sociaux, inclinaisons accidentelles à différents âges). Ce travail implique des simulations à plus grande échelle. L'objectif sera de déterminer, si possible, les surfaces élémentaires représentatives du comportement des arbres en peuplement pour l'élaboration de modèles d'agrégation d'arbres. En sortie, on imagine que l'on pourra affecter des critères de qualité (défauts de forme, taux de bois de compression dans les tiges...) à chacun de ces agrégats.

Perspectives d'utilisation de nos modèles

A moyen terme, les sorties attendues de nos modèles devront permettre de prévoir la distribution de classes de forme dans un peuplement et d'évaluer les propriétés du bois associé (taux de bois de compression) en fonction de la sylviculture appliquée, éventuellement en réalisant un couplage avec des modèles statistiques de risques d'inclinaison, de mort d'apex ou d'attaques phytosanitaires.... Ces sorties seront non seulement utiles pour faire de la prévision, mais aussi de l'estimation de la qualité de la ressource en place, ce qui intéresse davantage l'industriel. Par ailleurs, la modélisation que nous proposons pourra être utilisée comme un outil d'aide à l'élaboration de protocoles expérimentaux visant à qualifier la forme des tiges et la qualité de la ressource. Ainsi, à partir des différentes formes issues des simulations (étude de sensibilité), on pourra tenter de construire une typologie selon divers critères (inclinaison basale ou globale, courbures du tronc) directement accessibles par le calcul. Cette typologie devra permettre d'identifier les mesures pertinentes qui seront à réaliser sur le terrain en vue d'une classification des arbres d'un peuplement. A plus long terme, il serait intéressant de travailler sur les problèmes dits de structure/fonction. A l'heure actuelle, nous proposons des outils qui qualifient les effets de la croissance de l'arbre sur son état mécanique. Néanmoins, le retour de la mécanique sur la croissance peut s'avérer tout aussi important. Il s'agirait d'étudier le mode d'allocation des assimilats sous contrôle mécanique. En fonction des contraintes environnementales, ou selon que l'arbre recherche la stabilité ou la lumière, l'investissement du potentiel de croissance se fait-il dans les racines, dans le bois du tronc ou dans les rameaux ? L'étude de la mise en place des contraintes mécaniques dans la structure peut prétendre à l'apport de quelques réponses. Ce dernier point nous amène aux problèmes de stabilité des arbres. Ainsi, la modélisation du comportement de l'ancrage racinaire constitue une perspective dont l'intérêt nous a été dramatiquement rappelé

par les tempêtes de 1999 en France. Une meilleure compréhension des chablis dus au vent et leur prise en compte dans la sylviculture apparaissent donc nécessaires. Cette problématique constitue l'un des axes de travail du projet Européen EcoSlopes (coordinatrice A. Stokes, INRA Bordeaux), qui débute en 2001. Dans le cadre de ce projet, on devra procéder à l'implémentation de nos modèles dans la toute dernière version de la plate-forme CAPSIS (version 4.0), écrite en Java et développée par l'INRA et le CIRAD. Notre modèle de comportement biomécanique des troncs à l'échelle du peuplement pourra alors être utilisé conjointement à des modèles de croissance dépendants des distances dédiés à d'autres essences que le Pin maritime. Ainsi, il devra contribuer à la mise au point d'indices de stabilité pour les arbres en pessières irrégulières de montagne. Cette perspective s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le CEMAGREF de Grenoble.

- ANNEXES -

- Annexe 1 -

Formulation incrémentale du PTV en FLAI

A.1.1 Choix de la formulation et notations.....	127
A.1.2 Principe incrémental des Travaux Virtuels en FLAI	128

- Annexe 2 -

Description d'un modèle de poutre tridimensionnelle

A.2.1 Déplacements généralisés et déformations généralisées.....	131
A.2.2 Modèle de Bernoulli	133
A.2.3 Loi de comportement	134
A.2.4 Expressions des déformations non linéaires	135
A.2.5 Efforts internes généralisés	136
A.2.6 Equations différentielles fondamentales	137

- Annexe 3 -

Discrétisation de l'élément fini de poutre 3D de type Bernoulli

A.3.1 Interpolation des déplacements.....	141
A.3.2 Interpolation des déformations	144

- Annexe 4 -

Transformation du PTV par la Méthode des Eléments Finis

A.4.1 Interpolation et formulation en déplacements.....	147
A.4.2 Matrices et vecteurs élémentaires	151
A.4.3 Assemblage et formulation globale	152

- Annexe 5 -

Outils de la Méthode des Matrices de Transfert de poutres

A.5.1	Intégration des équations fondamentales des poutres	155
A.5.2	Vecteurs d'état et matrice de transfert	156

- Annexe 6 -

Diagramme de Voronoï : définition et construction

A.6.1	Diagramme de Voronoï de n points du plan	159
A.6.2	Construction par intersection de demi-plans.....	160
A.6.3	Construction par la méthode Divide and Conquer.....	161
A.6.4	Construction par la méthode de Fortune	163

- ANNEXE 1 -

Formulation incrémentale du PTV en FLAI

Le calcul d'une structure en analyse non linéaire repose sur l'utilisation de la méthode itérative de Newton-Raphson dans laquelle la charge totale est appliquée en plusieurs incréments : on effectue alors des pas de charge. Par application successive de ces pas de charge, la configuration initiale de la structure, C^0 , se déforme pour donner la configuration finale cherchée. A l'issue du pas de charge p , on obtient la configuration intermédiaire C^p : elle correspond à la déformée de la structure obtenue après application des p premiers incréments de chargement. Lorsque l'on applique l'incrément de charge suivant sur la configuration C^p , on aboutit à une configuration qui n'est pas en équilibre. L'algorithme itératif de Newton-Raphson consiste à effectuer des corrections d'équilibre sous forme d'itérations à l'intérieur du pas de charge pour finalement obtenir la nouvelle configuration équilibrée C^{p+1} . La configuration C_i^p désigne alors la configuration de la structure obtenue à partir de C^p , à l'issue de l'itération d'équilibre i . Cette configuration est supposée être la dernière connue du processus de résolution. Dans cette annexe, nous montrons alors comment déterminer la configuration suivante C_{i+1}^p . La configuration C^{p+1} sera alors obtenue lorsque les itérations auront convergé vers l'équilibre.

A.1.1 Choix de la formulation et notations

Il existe plusieurs types de formulation Lagrangienne pour tenir compte des grands déplacements dans l'analyse non linéaire des structures. Ces formules sont classées selon le choix de la référence dans l'évaluation des déformations et des contraintes. Ainsi, on distingue la Formulation Lagrangienne Totale (FLT), lorsque la référence est la configuration initiale C^0 ; la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Pas (FLAP), lorsque la référence est la dernière configuration connue C^p en état d'équilibre au début du nouveau pas de charge ; la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI), lorsque la référence est la dernière configuration connue C_i^p non équilibrée au début de la nouvelle itération d'équilibre.

La FLT exige une formulation exacte du champ de déplacements de la structure afin de calculer correctement les déformations dans la configuration C_i^p mais mesurées par rapport à la référence éloignée C^0 . La FLAP permet certaines simplifications mais l'incrément de chargement doit rester suffisamment petit pour respecter l'hypothèse de déplacements modérés entre C_i^p et C^0 . Dans la FLAI, la proximité de la configuration

recherchée et de la référence permet d'utiliser l'hypothèse des petits déplacements. La formulation est alors simplifiée et les déformations infinitésimales, ainsi que les contraintes de Cauchy, peuvent être utilisées. C'est cette dernière formulation que nous utilisons pour établir l'expression incrémentale du Principe des Travaux Virtuels (PTV) dont la résolution conduit à la configuration C_{i+1}^p .

Nous nous plaçons dans le pas de charge $p+1$. La configuration C^p est la dernière configuration connue en équilibre et la configuration C_i^p , au début de l'itération courante $i+1$, est la dernière configuration connue non équilibrée. L'objectif est alors de déterminer la configuration C^{p+1} à nouveau en équilibre et issue du pas de charge courant. Nous utilisons les notations suivantes, exprimées dans le repère local de la configuration qu'elles décrivent, pour mener le calcul :

$\delta()$	Quantité virtuelle.
$\Delta()$	Incrément d'une quantité.
iV	Volume d'intégration de la configuration C_i^p .
${}^i\mathbf{u}$	Vecteur colonne des déplacements de C_i^p .
${}^i\boldsymbol{\varepsilon}$	Vecteur colonne des déformations infinitésimales (linéaires) de C_i^p .
${}^i\boldsymbol{\eta}$	Vecteur colonne des déformations non linéaires de C_i^p .
${}^i\mathbf{E}$	Vecteur colonne des déformations de Green-Lagrange de C^{p+1} et mesurées dans C_i^p .
${}^i\boldsymbol{\sigma}$	Vecteur colonne des contraintes de Cauchy de C_i^p .
${}^i\mathbf{S}$	Vecteur colonne des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce (PK2) de C^{p+1} et exprimées dans C_i^p .
${}^i\rho$	Vecteur colonne des densités de charges par unité de volume de C_i^p .
${}^i\tilde{\rho}$	Vecteur colonne des densités de charges par unité de volume de C^{p+1} et exprimées par unité de volume dans C_i^p .

A.1.2 Principe incrémental des Travaux Virtuels en FLAI

En prenant C_i^p comme configuration de référence, l'expression du Principe des Travaux Virtuels de la FLAI dans l'état C^{p+1} , traduisant l'équilibre de cette configuration, s'écrit sous la forme suivante :

$${}^{p+1}W = {}^{p+1}W_{int} - {}^{p+1}W_{ext} = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

avec :

$${}^{p+1}W_{int} = \int_V {}^i S^t \cdot \delta^i E \cdot dV : \text{travail virtuel interne dans } C^{p+1} \quad (\text{A.1.2})$$

$${}^{p+1}W_{ext} = \int_V {}^i \tilde{\rho}^t \cdot \delta^i u \cdot dV : \text{travail virtuel externe dans } C^{p+1} \quad (\text{A.1.3})$$

où $\delta^i E$ et $\delta^i u$ sont respectivement les champs cinématiquement admissibles des déformations virtuelles de Green-Lagrange et des déplacement virtuels. Le vecteur ${}^i u$, inconnue du problème et solution de l'équation non linéaire exacte (A.1.1), contient les déplacements entre C_i^p et C^{p+1} . Les déformations de Green-Lagrange sont données par :

$${}^i E = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^i u^t}{\partial^i x} + \frac{\partial^i u}{\partial^i x} + \frac{\partial^i u^t}{\partial^i x} \frac{\partial^i u}{\partial^i x} \right) = {}^i \varepsilon + {}^i \eta \quad (\text{A.1.4})$$

La méthode itérative de Newton-Raphson permet de résoudre l'équation (A.1.1). Elle consiste à rechercher, non pas la configuration C^{p+1} , mais une configuration approchée C_{i+1}^p non équilibrée. Elle fournit ainsi les incréments de déplacements $\Delta^i u$ entre C_i^p et C_{i+1}^p . Comme le précisent Shakourzadeh *et al.* (1993), ce type de résolution est permis en considérant l'approximation linéaire suivante :

$${}^{i+1}W \approx {}^i W + \Delta^i W \approx 0 \quad (\text{A.1.5})$$

avec :

$${}^i W = \int_V {}^i \sigma^t \cdot \delta^i \varepsilon \cdot dV - \int_V {}^i \rho^t \cdot \delta^i u \cdot dV \quad (\text{A.1.6})$$

L'expression de $\Delta^i W$ s'obtient à partir du calcul de la variation $\Delta^{p+1}W$, prise par rapport aux déplacements, en considérant que C_i^p est déjà une estimation de C^{p+1} , ce qui revient à supposer que ces configurations sont suffisamment proches pour écrire :

$${}^i E \approx {}^i \varepsilon \quad \text{et} \quad {}^i S \approx {}^i \sigma \quad (\text{A.1.7})$$

et montrer que :

$$\Delta \delta^i E \approx \Delta \delta^i \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta^i u^t}{\partial^i x} \frac{\partial \Delta^i u}{\partial^i x} + \frac{\partial \Delta^i u^t}{\partial^i x} \frac{\partial \delta^i u}{\partial^i x} \right) \quad (\text{A.1.8})$$

En se plaçant dans l'hypothèse des charges mortes, le terme associé aux charges suiveuses disparaît. On a :

$$\Delta^i \tilde{\rho} = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

De plus, comme c'est généralement le cas, la matrice d'interpolation (cf. Annexe 3) du champ de déplacements ne dépendant pas des déplacements, on a la propriété suivante :

$$\Delta \delta^i u = \Delta(N_u \cdot \delta q) = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

Ces dernières relations permettent alors d'obtenir :

$$\Delta^i W \approx \Delta^{p+1} W = \int_V (\Delta^i S^t \cdot \delta^i E + {}^i S^t \cdot \Delta \delta^i E) dV \quad (\text{A.1.9})$$

soit :

$$\Delta^i W = \int_V (\Delta^i \sigma^t \cdot \delta^i \varepsilon + {}^i \sigma^t \cdot \Delta \delta^i \eta) dV \quad (\text{A.1.10})$$

En reportant (A.1.6) et (A.1.10) dans (A.1.5), nous arrivons à la relation :

$$\int_V (\Delta^i \sigma^t \cdot \delta^i \varepsilon + {}^i \sigma^t \cdot \Delta \delta^i \eta) dV = {}^i W_{ext} - {}^i W_{int} \quad (\text{A.1.11})$$

avec :

$${}^i W_{ext} = \int_V \rho^t \cdot \delta^i u \cdot dV : \text{travail virtuel externe dans } C_i^p \quad (\text{A.1.12})$$

$${}^i W_{int} = \int_V {}^i \sigma^t \cdot \delta^i \varepsilon \cdot dV : \text{travail virtuel interne dans } C_i^p \quad (\text{A.1.13})$$

La relation (A.1.11) est l'expression du principe incrémental des travaux virtuels de la FLAI. Elle permet de calculer la configuration C_{i+1}^p , approchée de C^{p+1} mais non équilibrée, ainsi que son état de contrainte alors donné par :

$${}^{i+1} \sigma = {}^i \sigma + \Delta^i \sigma \quad (\text{A.1.14})$$

- ANNEXE 2 -

Description d'un modèle de poutre tridimensionnelle

Dans cette annexe, nous décrivons un modèle de poutre droite tridimensionnelle à section circulaire. Nous définissons le champ linéaire des déplacements compatible avec l'hypothèse des petits déplacements et nous présentons les expressions des déformations ainsi que celles des travaux virtuels internes et externes pour le modèle de Bernoulli. Pour finir, nous donnons les équations différentielles fondamentales de la théorie des poutres droites de type Bernoulli. Les différents résultats présentés fournissent la base théorique des méthodes numériques que nous utilisons pour le calcul de structures constituées de poutres et qui sont la méthode des éléments finis et la méthode des matrices de transfert de poutres.

A.2.1 Déplacements généralisés et déformations généralisées

Une poutre droite tridimensionnelle est un solide orienté dans la direction x , dont les dimensions dans le plan yz normal à x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale selon x (solide dit de forme élancée).

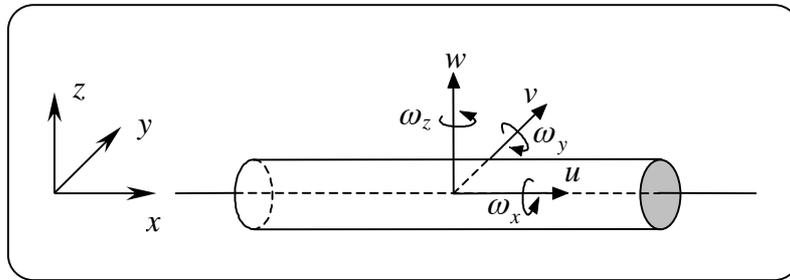


FIGURE A.2.1 – Déplacements généralisés dans un élément de poutre 3D.

Il est fréquent et commode d'établir le repère local de chaque élément de poutre en prenant l'axe x comme l'axe neutre, y et z comme les axes principaux d'inertie de la section droite (Fig. A.2.1). Ceci entraîne les relations simplificatrices suivantes :

$$\int_S y \cdot dS = \int_S z \cdot dS = \int_S y \cdot z \cdot dS = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

où S est la section de la poutre.

Dans le cas de petits déplacements, le champ linéaire des déplacements s'écrit en superposant les effets de torsion à ceux de membrane et de flexion :

$$\begin{Bmatrix} U(x, y, z) \\ V(x, y, z) \\ W(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -y.\omega_z(x) \\ v(x) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z.\omega_y(x) \\ 0 \\ w(x) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -z.\omega_x(x) \\ y.\omega_x(x) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

membrane flexion \curvearrowright_z flexion \curvearrowright_y torsion \curvearrowright_x

Ainsi, le champ de déplacements est déterminé à partir des six déplacements généralisés $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $\omega_x(x)$, $\omega_y(x)$ et $\omega_z(x)$ mesurés sur l'axe de référence et ne dépendant que de x : $u(x)$, $v(x)$ et $w(x)$ définissent la translation du centre de la section, $\omega_x(x)$, $\omega_y(x)$ et $\omega_z(x)$ définissent la rotation de la normale à la section (Fig. A.2.1). Notons qu'une formulation de type FLAI permet d'utiliser ce champ de déplacements linéaire pour traiter les problèmes de grands déplacements (analyse non linéaire) car la configuration de référence de la FLAI est très proche de la configuration étudiée.

On considère que la section droite ne se déforme pas dans son plan, c'est à dire qu'elle ne subit pas d'extension et qu'elle ne contient pas de cisaillement. Ceci implique les hypothèses simplificatrices suivantes sur l'état de déformation :

$$\begin{cases} E_{yy} = \varepsilon_{yy} = \eta_{yy} = 0 \\ E_{zz} = \varepsilon_{zz} = \eta_{zz} = 0 \\ E_{yz} = \varepsilon_{yz} = \eta_{yz} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.3})$$

Les composantes non nulles du tenseur des déformations infinitésimales se déduisent par dérivation des composantes du champ de déplacements comme indiqué ci-dessous :

$$\varepsilon_{ij}(x, y, z) = \frac{1}{2}(U_{i,j}(x, y, z) + U_{j,i}(x, y, z)), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (\text{A.2.4})$$

avec $U_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, et où x_1, x_2, x_3, U_1, U_2 et U_3 désignent respectivement x, y, z, U, V et W .

Cela donne alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}(x, y, z) = \varepsilon_x(x) - y.K_z(x) + z.K_y(x) \\ 2\varepsilon_{xy}(x, y, z) = \gamma_y(x) - z.K_x(x) \\ 2\varepsilon_{xz}(x, y, z) = \gamma_z(x) + y.K_x(x) \end{cases} \quad (\text{A.2.5})$$

où les six déformations généralisées $\varepsilon_x(x)$, $\gamma_y(x)$, $\gamma_z(x)$, $K_z(x)$, $K_y(x)$ et $K_x(x)$ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x(x) = u'(x) \\ \gamma_y(x) = v'(x) - \omega_z(x) \\ \gamma_z(x) = w'(x) + \omega_y(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{déformation axiale due à la traction} \\ \text{déformations de cisaillement} \\ \text{transverse dues aux flexions} \end{array} \quad (\text{A.2.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_z(x) = \omega'_z(x) \\ K_y(x) = \omega'_y(x) \\ K_x(x) = \omega'_x(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{déformations de flexion} \\ \text{déformation de torsion} \end{array}$$

A.2.2 Modèle de Bernoulli

L'hypothèse de Bernoulli suppose que la normale à la section droite reste normale après déformation. Ceci revient à dire qu'il ne peut pas y avoir de rotation de la normale due aux déformations de cisaillement transverse $\gamma_y(x)$ et $\gamma_z(x)$. En négligeant ces dernières, on obtient alors les relations suivantes :

$$\gamma_y(x) = \gamma_z(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_z(x) = v'(x) \\ \omega_y(x) = -w'(x) \end{array} \right. \quad (\text{A.2.7})$$

Le champ de déplacement (A.2.2) s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, y, z) = u(x) - y.v'(x) - z.w'(x) \\ V(x, y, z) = v(x) - z.\omega_x(x) \\ W(x, y, z) = w(x) + y.\omega_x(x) \end{array} \right. \quad (\text{A.2.8})$$

Les déformations généralisées s'expriment finalement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x(x) = u'(x) \\ K_z(x) = v''(x) \\ K_y(x) = -w''(x) \\ K_x(x) = \omega'_x(x) \end{array} \right. \quad (\text{A.2.9})$$

Il reste donc quatre déplacements généralisés indépendants $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ et $\omega_x(x)$, et quatre déformations généralisées indépendantes $\varepsilon_x(x)$, $K_z(x)$, $K_y(x)$ et $K_x(x)$. Les relations (A.2.7) et (A.2.9) sont les équations de compatibilité des déformations généralisées du modèle de Bernoulli.

Écriture matricielle des relations déformations – déplacements

L'écriture matricielle des relations déformations – déplacements (A.2.9) est donnée par la relation suivante :

$$\varepsilon_g(x) = D.u_g(x) \quad (\text{A.2.10})$$

avec les expressions vectorielles des déformations et des déplacements généralisés, et de l'opérateur différentiel D données par :

$$\varepsilon_g(x) = \langle \varepsilon_x(x) \ K_z(x) \ K_y(x) \ K_x(x) \rangle^t \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.11})$$

$$u_g(x) = \langle u(x) \ v(x) \ w(x) \ \omega_x(x) \rangle^t$$

A.2.3 Loi de comportement

Les composantes du tenseur des déformations mécaniques infinitésimales $\varepsilon(x, y, z)$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(x, y, z)$ peuvent s'écrire sous forme de vecteurs. On pose alors :

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{xz}(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(x, y, z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) \\ \sigma_{xz}(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.12})$$

avec : $\gamma_{xy}(x, y, z) = 2\varepsilon_{xy}(x, y, z)$ et $\gamma_{xz}(x, y, z) = 2\varepsilon_{xz}(x, y, z)$.

La loi de comportement (exprimant les relations contraintes – déformations) pour un matériau élastique linéaire s'écrit selon l'expression matricielle suivante :

$$\sigma(x, y, z) = C.\varepsilon(x, y, z) \quad (\text{A.2.13})$$

où C est la matrice des constantes élastiques telle que :

$$C = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.14})$$

où E est le module d'Young du matériau considéré et G le module de cisaillement s'exprimant en fonction de E et du coefficient de Poisson ν par la relation $G = E/2(1 + \nu)$.

A.2.4 Expressions des déformations non linéaires

Nous donnons ci-dessous les expressions des déformations non linéaires en utilisant les hypothèses simplificatrices compatibles avec une formulation incrémentale de type FLAI. Le tenseur des déformations non linéaires de Green-Lagrange est donné par :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij} + \eta_{ij} \quad (\text{A.2.15})$$

L'hypothèse (A.2.3) de non déformation de la section limite à trois le nombre de composantes de ce tenseur. Les déformations de Green-Lagrange non nulles s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix} E_{xx} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{,x} \\ U_{,y} + V_{,x} \\ U_{,z} + W_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{(U_{,x}^2 + V_{,x}^2 + W_{,x}^2)}/2} \\ \underline{\underline{U_{,x} \cdot U_{,y} + V_{,x} \cdot V_{,y} + W_{,x} \cdot W_{,y}}} \\ \underline{\underline{U_{,x} \cdot U_{,z} + V_{,x} \cdot V_{,z} + W_{,x} \cdot W_{,z}}} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.16})$$

Le champ de déplacements (A.2.8) montre que V ne dépend pas de y et que W ne dépend pas de z , ce qui permet de supprimer les termes soulignés ($V_{,y} = W_{,z} = 0$). De plus, l'hypothèse des rotations modérées compatible avec la FLAI permet de négliger les termes quadratiques soulignés de deux traits (Guo, 1987) ; cette simplification constitue l'hypothèse de Von Karman ($U_{,x} \ll 1$). Les expressions simplifiées des déformations de Green-Lagrange sont alors :

$$\begin{Bmatrix} E_{xx} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{,x} \\ U_{,y} + V_{,x} \\ U_{,z} + W_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (V_{,x}^2 + W_{,x}^2)/2 \\ W_{,x} \cdot W_{,y} \\ V_{,x} \cdot V_{,z} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.17})$$

En substituant les expressions (A.2.34) du champ de déplacements dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ 2\varepsilon_{xy}(x, y, z) \\ 2\varepsilon_{xz}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' - y.v'' - z.w'' \\ -z.\omega'_x \\ y.\omega'_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - y.K_z + z.K_y \\ -z.K_x \\ y.K_x \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2.18})$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{xx}(x, y, z) \\ 2\eta_{xy}(x, y, z) \\ 2\eta_{xz}(x, y, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (v'^2 + w'^2 + (y^2 + z^2)\omega_x'^2 + 2y.w'.\omega_x' - 2z.v'.\omega_x')/2 \\ \omega_x'(w' + y.\omega_x') \\ -\omega_x'(v' - z.\omega_x') \end{array} \right\} \quad (\text{A.2.19})$$

où les primes désignent les dérivées par rapport à x de variables généralisées ne dépendant que de x .

Dans la FLAI, la partie linéaire des déformations ε sert à construire la matrice de rigidité des petits déplacements et à calculer les contraintes de Cauchy (pour le calcul des forces nodales internes) ; la partie non linéaire η sert à construire la matrice de rigidité des précontraintes.

A.2.5 Efforts internes généralisés

Le principe d'équivalence permet d'exprimer le torseur des efforts internes en fonction des contraintes dans une section droite. Les efforts internes généralisés (Fig. A.2.2) sont alors définis par :

$$N_x(x) = \int_S \sigma_{xx}(x, y, z).dS \quad \text{effort normal selon } x \quad (\text{A.2.20})$$

$$M_z(x) = -\int_S y.\sigma_{xx}(x, y, z).dS \quad \text{moment de flexion autour de } z \quad (\text{A.2.21})$$

$$M_y(x) = \int_S z.\sigma_{xx}(x, y, z).dS \quad \text{moment de flexion autour de } y \quad (\text{A.2.22})$$

$$M_x(x) = \int_S (y.\sigma_{xz}(x, y, z) - z.\sigma_{xy}(x, y, z)).dS \quad \text{moment de torsion autour de } x \quad (\text{A.2.23})$$

A ces efforts il convient de rajouter les efforts tranchants $V_y(x)$ et $V_z(x)$ qui n'accomplissent aucun travail puisque l'on néglige les déformations de cisaillement transverse. Ils sont donnés par les relations suivantes :

$$V_y(x) = \int_S \sigma_{xy}(x, y, z).dS \quad \text{et} \quad V_z(x) = \int_S \sigma_{xz}(x, y, z).dS \quad (\text{A.2.24})$$

Relations efforts généralisés – déformations généralisées

En intégrant les relations (A.2.20) à (A.2.23), on aboutit aux expressions des relations efforts généralisés – déformations généralisées données par :

$$\begin{cases} N_x(x) = E.S.\varepsilon_x(x) \\ M_z(x) = E.I_z.K_z(x) \\ M_y(x) = E.I_y.K_y(x) \\ M_x(x) = G.J.K_x(x) \end{cases} \quad (\text{A.2.25})$$

où les moments quadratiques de la section droite S par rapport aux axes de référence y , z et x de la poutre sont respectivement définis par les relations :

$$I_y = \int_S z^2 .dS \quad I_z = \int_S y^2 .dS \quad J = \int_S (y^2 + z^2) .dS \quad (\text{A.2.26})$$

On définit les quantités suivantes :

$$\begin{cases} H_n = E.S & \text{rigidité de traction} \\ H_z = E.I_z \\ H_y = E.I_y \end{cases} \text{ rigidités principales de flexion} \quad (\text{A.2.27})$$

$$H_t = G.J \quad \text{rigidité de torsion}$$

La matrice de rigidité des modes de déformation est alors donnée par :

$$H = \begin{bmatrix} H_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.28})$$

Matriciellement, les relations efforts généralisés – déformations généralisées (A.2.25) s'écrivent alors :

$$M_g(x) = H.\varepsilon_g(x) \quad (\text{A.2.29})$$

avec :

$$M_g(x) = \langle N_x(x) \quad M_z(x) \quad M_y(x) \quad M_x(x) \rangle^t \quad (\text{A.2.30})$$

A.2.6 Equations différentielles fondamentales

Nous allons établir les équations différentielles fondamentales de la théorie des poutres droites 3D pour le modèle de Bernoulli. Sachant que les inconnues du problème sont au nombre de douze, à savoir six déplacements généralisés et six efforts généralisés (ou efforts internes), il nous faut donc en établir douze. A cette fin, on isole un volume

élémentaire de poutre compris entre les abscisses x et $x+dx$, et on écrit son équilibre. Cet élément de poutre est représenté par la figure (A.2.2) avec l'ensemble des sollicitations qui lui sont appliquées.

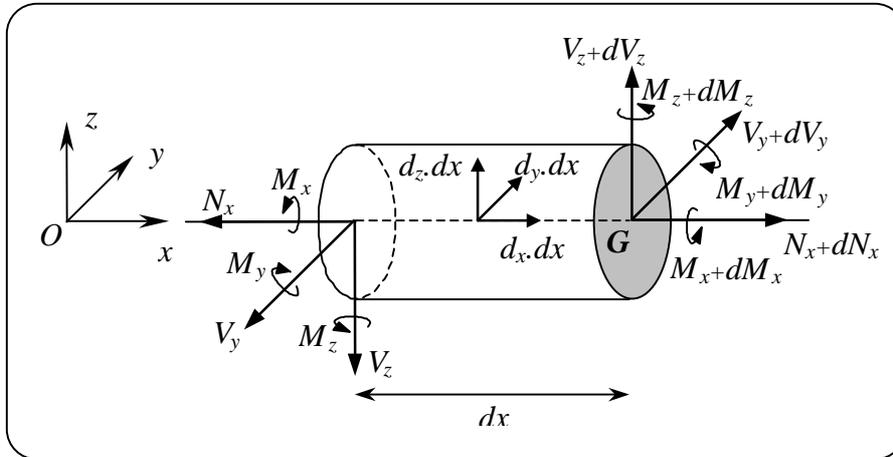


FIGURE A.2.2 – Efforts appliqués sur un volume élémentaire de poutre 3D de longueur dx .

Les sollicitations extérieures appliquées au tronçon de poutre sont définies par :

- une densité linéique de charge, $d_x(x)$, positive suivant la direction \overrightarrow{Ox} ,
- une densité linéique de charge, $d_y(x)$, positive suivant la direction \overrightarrow{Oy} ,
- une densité linéique de charge, $d_z(x)$, positive suivant la direction \overrightarrow{Oz} .

Les efforts internes, appliqués sur les deux faces du tronçon de poutre, sont les efforts qu'exercent les parties manquantes de la poutre (d'abscisses inférieures à x et supérieures à $x+dx$) sur ce dernier. Il résulte de ceci que ces efforts, dit internes pour la poutre, sont donc à considérer comme extérieurs pour le tronçon isolé. Prenons le cas de l'effort normal N_x compté positif dans la direction \overrightarrow{Ox} . Cet effort, qui s'applique au centre géométrique d'une section droite, désigne une action exercée sur cette section par la partie de la poutre pointée par la normale sortante, \overrightarrow{Ox} , de la dite section. Ceci revient à dire que cet effort est exercé par la partie située à droite de la section sur la partie située à sa gauche. Ainsi, $N_x(x)$ est l'effort normal exercé par la partie à droite de x sur la partie à gauche de x , et de cette façon, $-N_x(x)$ est l'effort normal exercé sur le tronçon par la partie manquante à sa gauche. En raisonnant de même pour les autres efforts internes, on montre que les efforts représentés négativement sur la figure (A.2.2) pour la section d'abscisse x correspondent bien à des efforts extérieurs au tronçon isolé.

Le Principe Fondamental de la Statique traduit l'équilibre du tronçon de poutre isolé. En projection sur les axes du repère local associé, il s'écrit alors :

– pour les forces :

$$\square \text{ selon } \overrightarrow{Ox} : \quad -N_x(x) + (N_x(x) + dN_x(x)) + d_x(x).dx = 0 \quad (\text{A.2.31})$$

$$\square \text{ selon } \overrightarrow{Oy} : \quad -V_y(x) + (V_y(x) + dV_y(x)) + d_y(x).dx = 0 \quad (\text{A.2.32})$$

$$\square \text{ selon } \overrightarrow{Oz} : \quad -V_z(x) + (V_z(x) + dV_z(x)) + d_z(x).dx = 0 \quad (\text{A.2.33})$$

– pour les moments :

$$\square \text{ en G selon } \overrightarrow{Ox} : \quad -M_x(x) + (M_x(x) + dM_x(x)) = 0 \quad (\text{A.2.34})$$

$$\square \text{ en G selon } \overrightarrow{Oy} : \quad -M_y(x) + (M_y(x) + dM_y(x)) - V_z(x).dx = 0 \quad (\text{A.2.35})$$

$$\square \text{ en G selon } \overrightarrow{Oz} : \quad -M_z(x) + (M_z(x) + dM_z(x)) + V_y(x).dx = 0 \quad (\text{A.2.36})$$

Les équations d'équilibre (A.2.31) à (A.2.36) fournissent une première série de six équations différentielles, dites équations de la statique, qui définissent les efforts internes en fonction des densités linéiques de charge externes. Elles sont données par :

$$\begin{cases} N'_x(x) = -d_x(x) & V'_y(x) = -d_y(x) & V'_z(x) = -d_z(x) \\ M'_x(x) = 0 & M'_y(x) = V_z(x) & M'_z(x) = -V_y(x) \end{cases} \quad (\text{A.2.37})$$

Enfin, en reportant les relations (A.2.9) dans les relations (A.2.25), nous obtenons une deuxième série de six équations différentielles qui définissent les déplacements généralisés en fonction des efforts internes. Elles sont données par :

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{N_x(x)}{E.S} & v'(x) = \omega_z(x) & w'(x) = -\omega_y(x) \\ \omega'_x(x) = \frac{M_x(x)}{G.J} & \omega'_y(x) = \frac{M_y(x)}{E.I_y} & \omega'_z(x) = \frac{M_z(x)}{E.I_z} \end{cases} \quad (\text{A.2.38})$$

Nous avons ainsi obtenu les douze équations différentielles fondamentales qui permettent d'accéder aux douze inconnues d'un problème de poutre 3D de type Bernoulli. Les conditions aux limites, données par la nature des appuis sur lesquels repose la structure, permettent de résoudre les équations ci-dessus. Ces conditions, dont le nombre doit être égal au nombre d'inconnues (12 pour une poutre 3D), sont mécaniques ou géométriques selon que l'on impose une force ou un déplacement et servent à bloquer les mouvements d'ensemble de la structure. Si un déplacement est imposé, alors la force correspondante est inconnue (cas d'un encastrement, par exemple, où les déplacements imposés sont nuls), et on dit que c'est

une réaction d'équilibre ; inversement, le déplacement est inconnu si on impose la force (cas d'un bord libre, par exemple, où les forces imposées sont nulles). Un problème est dit isostatique lorsque qu'il comporte autant de conditions aux limites mécaniques que d'équations de la statique (six pour une poutre 3D). De cette façon, les équations de la statique permettent de déterminer les réactions d'équilibre associées aux conditions géométriques restantes. Lorsque le nombre de conditions mécaniques est inférieur à celui des équations de la statique, le problème est dit hyperstatique. Dans ce cas, ces équations ne suffisent plus pour déterminer les réactions d'équilibre dont le nombre, celui des conditions géométriques restantes, est supérieur à celui des équations (on a plus d'inconnues que d'équations). A l'inverse, on parle de mécanisme lorsque le nombre de conditions mécaniques est supérieur à celui des équations de la statique ; on a alors plus d'équations que de réactions inconnues à déterminer. Dans ce cas, les conditions aux limites sont mal définies et ne jouent plus leur rôle de bloquer les mouvements d'ensemble de la structure (il manque des réactions pour équilibrer certaines forces extérieures).

- ANNEXE 3 -

Discrétisation de l'élément fini de poutre 3D de type Bernoulli

La méthode des éléments finis repose sur la discrétisation du champ de déplacements. Cette discrétisation consiste à interpoler les déplacements en tout point d'un élément en fonction de ceux de ses nœuds. En utilisant les résultats de l'Annexe 2, nous donnons, pour l'élément fini de poutre 3D de type Bernoulli, l'interpolation des déplacements et en déduisons celle des déformations.

A.3.1 Interpolation des déplacements

Les relations déplacements – déplacements généralisés (A.2.8) peuvent se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$u^e(x, y, z) = G_u^e(y, z) u_g^e(x) \quad (\text{A.3.1})$$

avec :

$$\begin{aligned} u^e(x, y, z) &= \langle U \quad V \quad W \rangle^{e^t}(x, y, z) \\ u_g^e(x) &= \langle u \quad v \quad w \quad \omega_x \rangle^{e^t}(x) \end{aligned} \quad \text{et} \quad G_u^e(y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -y \frac{d}{dx} & z \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 1 & y \end{pmatrix}^e \quad (\text{A.3.2})$$

L'interpolation des déplacements consiste à introduire le vecteur élémentaire des déplacements nodaux. Ces déplacements nodaux sont appelés degrés de liberté de l'élément. La figure (A.3.1) montre l'élément de référence de poutre 3D à deux nœuds et douze degrés de liberté que nous décrivons.

La discrétisation du champ de déplacements élémentaire s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$u_g^e(x) = N^e(x) q^e \quad (\text{A.3.3})$$

où $u_g^e(x)$ est le vecteur des déplacements généralisés de l'élément e , et où :

$$q^e = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \omega_{x1} \quad \omega_{y1} \quad \omega_{z1} \quad / \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \omega_{x2} \quad \omega_{y2} \quad \omega_{z2} \rangle^{e^t} \quad (\text{A.3.4})$$

est le vecteur élémentaire des déplacements nodaux généralisés, vérifiant l'hypothèse de Bernoulli : $\omega_{yi} = -w'_i$ et $\omega_{zi} = v'_i$ pour $i = 1, 2$.

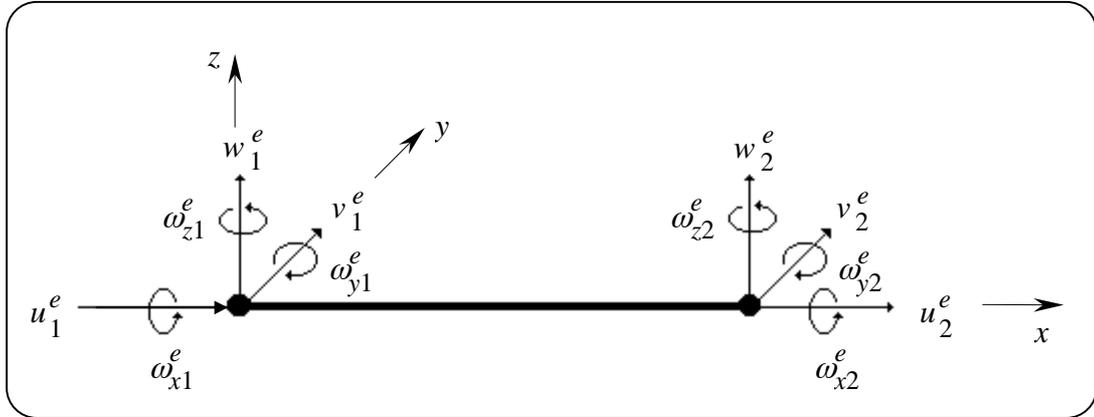


FIGURE A.3.1 – Élément de référence de poutre 3D à 12 degrés de liberté.

Les expressions des déformations (A.2.18) contiennent les dérivées premières des déplacements généralisés $u(x)$ et $\omega_x(x)$ et les dérivées secondes des déplacements généralisés $v(x)$ et $w(x)$. Ainsi, pour que l'élément soit conforme, nous utilisons donc les fonctions d'interpolation linéaires de Lagrange pour $u(x)$ et $\omega_x(x)$, et les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite pour $v(x)$ et $w(x)$. De cette façon, la matrice d'interpolation $N^e(x)$ s'écrit sous la forme :

$$N^e(x) = \begin{pmatrix} \langle N_{Lu} \rangle \\ \langle N_{Hv} \rangle \\ \langle N_{Hw} \rangle \\ \langle N_{L\omega} \rangle \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & H_2 & | & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & H_4 \\ 0 & 0 & H_1 & 0 & -H_2 & 0 & | & 0 & 0 & H_3 & 0 & -H_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^e \quad (\text{A.3.5})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} L_1^e(x) &= 1 - \frac{x}{L^e} \\ L_2^e(x) &= \frac{x}{L^e} \end{aligned} \right\} \text{polynômes d'interpolation de Lagrange} \quad (\text{A.3.6})$$

$$\left. \begin{aligned} H_1^e(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L^e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L^e}\right)^3 \\ H_2^e(x) &= x\left(\frac{x}{L^e} - 1\right)^2 \\ H_3^e(x) &= 3\left(\frac{x}{L^e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L^e}\right)^3 \\ H_4^e(x) &= -L^e\left(\left(\frac{x}{L^e}\right)^2 - \left(\frac{x}{L^e}\right)^3\right) \end{aligned} \right\} \text{polynômes d'interpolation d'Hermite} \quad (\text{A.3.7})$$

En utilisant les relations (A.3.1) et (A.3.3), on aboutit finalement à l'écriture matricielle des déplacements en fonction des déplacements nodaux élémentaires :

$$u^e(x, y, z) = N_u^e(x, y, z) \cdot q^e \quad (\text{A.3.8})$$

avec :

$$N_u^e(x, y, z) = G_u^e(y, z) \cdot N^e(x) \quad (\text{A.3.9})$$

Notons qu'aux douze déplacements généralisés élémentaires, on associe douze forces internes nodales généralisées données par le vecteur suivant :

$$M^e = \left\langle N_{x1} \ V_{y1} \ V_{z1} \ M_{x1} \ M_{y1} \ M_{z1} \ / \ N_{x2} \ V_{y2} \ M_{z2} \ M_{x2} \ M_{y2} \ M_{z2} \right\rangle^{e^t} \quad (\text{A.3.10})$$

Les degrés des fonctions polynomiales d'interpolation utilisées conduisent alors, compte tenu des relations efforts généralisés – déformations généralisées (A.2.25) et des relations déformations généralisées – déplacements généralisés (A.2.9), aux propriétés suivantes des efforts internes généralisés :

- l'effort axial N_x^e est constant suivant la longueur de l'élément,
- les efforts tranchants V_y^e et V_z^e sont constants,
- les moments de flexion M_y^e et M_z^e sont linéaires,
- le moment de torsion M_x^e est constant.

A.3.2 Interpolation des déformations

Cas des déformations infinitésimales

Les relations déformations linéaires – déformations généralisées (A.2.18) peuvent se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon^e(x, y, z) = G_\varepsilon^e(y, z) \cdot \varepsilon_g^e(x) \quad (\text{A.3.11})$$

avec :

$$\varepsilon^e(x, y, z) = \langle \varepsilon_{xx} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{xz} \rangle^{e^t}(x, y, z) \quad \text{et} \quad G_\varepsilon^e(y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -y & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}^e \quad (\text{A.3.12})$$

$$\varepsilon_g^e(x) = \langle \varepsilon_x \quad K_z \quad K_y \quad K_x \rangle^{e^t}(x)$$

L'écriture matricielle (A.2.10) des relations déformations généralisées – déplacements généralisés et l'interpolation des déplacements (A.3.3) permettent d'aboutir à l'interpolation des déformations généralisées de l'élément e en fonction de ses déplacements nodaux. Elle est alors donnée par :

$$\varepsilon_g^e(x) = B_l^e(x) \cdot q^e \quad (\text{A.3.13})$$

avec :

$$B_l^e(x) = D \cdot N^e(x) \quad (\text{A.3.14})$$

Si l'on utilise la définition de l'opérateur différentiel D donnée par l'équation (A.2.11), on peut symboliquement réécrire la matrice d'interpolation des déformations généralisées sous la forme suivante :

$$B_l^e(x) = \begin{pmatrix} \langle N'_{Lu} \rangle \\ \langle N''_{Hv} \rangle \\ -\langle N''_{Hw} \rangle \\ \langle N'_{L\omega} \rangle \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} L'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H''_1 & 0 & 0 & 0 & H''_2 & 0 & H''_3 & 0 & 0 & 0 & H''_4 \\ 0 & 0 & -H''_1 & 0 & H''_2 & 0 & 0 & 0 & -H''_3 & 0 & H''_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^e \quad (\text{A.3.15})$$

En utilisant les relations (A.3.11) et (A.3.13), on aboutit finalement à l'écriture matricielle des déformations linéaires en fonction des déplacements nodaux élémentaires :

$$\varepsilon^e(x, y, z) = B_{lin}^e(x, y, z) \cdot q^e \quad (\text{A.3.16})$$

avec :

$$B_{lin}^e(x, y, z) = G_\varepsilon^e(y, z) \cdot B_l^e(x) \quad (\text{A.3.17})$$

Cas des déformations non linéaires

Les relations déformations non linéaires – déplacements généralisés (A.2.19) peuvent se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\eta^e(x, y, z) = \frac{1}{2} G_\eta^e(y, z, \lambda_g^e) \lambda_g^e(x) \quad (\text{A.3.18})$$

avec :

$$\begin{aligned} \eta^e(x, y, z) &= \langle \eta_{xx} \quad 2\eta_{xy} \quad 2\eta_{xz} \rangle^{e^t}(x, y, z) \\ \lambda_g^e(x) &= \langle \omega_x \quad v' \quad w' \quad \omega_x' \rangle^{e^t}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

et :

$$G_\eta^e(y, z, \lambda_g^e) = \begin{pmatrix} 0 & v' - z\omega_x' & w' + y\omega_x' & (y^2 + z^2)\omega_x' + yw' - zv' \\ w' + y\omega_x' & 0 & \omega_x & y\omega_x \\ -v' + z\omega_x' & -\omega_x & 0 & z\omega_x \end{pmatrix}^e \quad (\text{A.3.20})$$

Soit le vecteur suivant contenant les trois derniers déplacements généralisés et noté :

$$\varphi_g^e(x) = \langle v \quad w \quad \omega_x \rangle^{e^t}(x) \quad (\text{A.3.21})$$

On a alors la relation matricielle suivante :

$$\lambda_g^e(x) = D_\sigma \cdot \varphi_g^e(x) \quad (\text{A.3.22})$$

avec :

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.23})$$

L'interpolation utilisée pour les déformations non linéaires peut être différente de celle utilisée pour les déformations linéaires. Dans ses travaux de thèse, Guo (1987) signale que, dans ce cas, les expériences numériques montrent que l'adoption d'une interpolation linéaire pour tous les déplacements généralisés, et donc en particulier pour v et w , est sans conséquence sur la précision des résultats. On écrit alors :

$$\varphi_g^e(x) = N_\sigma^e(x) \cdot q^e \quad (\text{A.3.24})$$

avec :

$$N_{\sigma}^e(x) = \begin{pmatrix} \langle N_{Lv} \rangle \\ \langle N_{Lw} \rangle \\ \langle N_{L\omega} \rangle \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^e \quad (\text{A.3.25})$$

La relation matricielle (A.3.22) et l'interpolation (A.3.24) fournissent donc la relation suivante :

$$\lambda_g^e(x) = B_{\sigma}^e(x).q^e \quad (\text{A.3.26})$$

avec :

$$B_{\sigma}^e(x) = D_{\sigma}.N_{\sigma}^e(x) \quad (\text{A.3.27})$$

soit :

$$B_{\sigma}^e(x) = \begin{pmatrix} \langle N_{L\omega} \rangle \\ \langle N'_{Lv} \rangle \\ -\langle N'_{Lw} \rangle \\ \langle N'_{L\omega} \rangle \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & L'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^e \quad (\text{A.3.28})$$

En utilisant les relations (A.3.18) et (A.3.26), on aboutit finalement à l'écriture matricielle des déformations linéaires en fonction des déplacements nodaux élémentaires :

$$\eta^e(x, y, z) = \frac{1}{2} B_{nlin}^e(x, y, z, q^e).q^e \quad (\text{A.3.29})$$

avec :

$$B_{nlin}^e(x, y, z, q^e) = G_{\eta}^e(y, z, \lambda_g^e(q^e)).B_{\sigma}^e(x) \quad (\text{A.3.30})$$

- ANNEXE 4 -

Transformation du PTV par la Méthode des Eléments Finis

En prenant comme point de départ la formulation incrémentale (I.1.9) du Principe des Travaux Virtuels de la Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération, nous utilisons les résultats de l'Annexe 3, issus de l'interpolation du champ de déplacements d'un élément fini de poutre 3D de type Bernoulli, pour obtenir une formulation incrémentale du PTV en déplacements. Ce travail permet alors d'identifier des matrices et des vecteurs élémentaires que les techniques d'assemblage permettent de sommer pour finalement obtenir la formulation globale sous la forme d'un système linéaire.

A.4.1 Interpolation et formulation en déplacements

Lorsque l'on introduit la discrétisation géométrique de la structure en éléments finis et que l'on traduit, dans le cas d'un arbre, l'existence de déformations de maturation, la formulation incrémentale du PTV de la FLAI est alors donnée par :

$$\sum_{e \in \mathbb{N}^{t+1}E} \left\{ \int_{V^e} \left(\Delta^i \varepsilon^{e^t} \cdot C^e \cdot \delta^i \varepsilon^e + {}^i \sigma^{e^t} \cdot \Delta \delta^i \eta^e \right) dV \right\} = \sum_{e \in \mathbb{N}^{t+1}E} \left\{ \int_{V^e} {}^i \rho^{e^t} \cdot \delta^i u^e \cdot dV \right. \\ \left. + \int_{V^e} {}^i \mu^{e^t} \cdot C^e \cdot \delta^i \varepsilon^e \cdot dV - \int_{V^e} {}^i \sigma^{e^t} \cdot \delta^i \varepsilon^e \cdot dV \right\} \quad (\text{A.4.1})$$

En utilisant les relations établies dans l'Annexe 3, nous introduisons l'interpolation des déplacements sur chaque élément de poutre de manière à discrétiser chacun des cinq termes de la formulation (A.4.1). De façon à alléger les notations, les exposants i et e , faisant respectivement référence à l'itération d'équilibre et à l'élément courants, sont abandonnés dans les développements suivants.

Interpolation de $\Delta \varepsilon^t \cdot C \cdot \delta \varepsilon$:

La relation (A.3.16) permet d'écrire :

$$\Delta \varepsilon = B_{lin} \cdot \Delta q \quad (\text{A.4.2})$$

$$\delta \varepsilon = B_{lin} \cdot \delta q \quad (\text{A.4.3})$$

soit :

$$\Delta \varepsilon^t . C . \delta \varepsilon = \Delta q . B_{lin}^t . C . B_{lin} . \delta q \quad (\text{A.4.4})$$

En utilisant la relation (A.3.17), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon^t . C . \delta \varepsilon &= \Delta q . B_1^t . G_\varepsilon^t . C . G_\varepsilon . B_1 . \delta q \\ &= \Delta q . B_1^t . h . B_1 . \delta q \end{aligned} \quad (\text{A.4.5})$$

avec :

$$h = h(y, z) = G_\varepsilon^t . C . G_\varepsilon = E . \begin{pmatrix} 1 & -y & z & 0 \\ -y & y^2 & -yz & 0 \\ z & -yz & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(y^2 + z^2)}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.6})$$

Interpolation de $\sigma^t . \Delta \delta \eta$:

La relation (A.3.29) exprime les déformations non linéaires en fonction des déplacements nodaux élémentaires. Sous une forme simplifiée, elle devient :

$$\eta = \frac{1}{2} B_{nlm}(q) . q \quad (\text{A.4.7})$$

Nous voyons que, dans ce cas, la matrice d'interpolation dépend des déplacements. Cette dépendance reste explicite dans les calculs qui suivent. Elle permet de visualiser les termes mis en jeu dans les variations (virtuelles ou non, mais considérées comme des différentielles totales par rapport aux déplacements) que nous allons effectuer. Ainsi, la variation virtuelle des déformations non linéaires s'exprime par :

$$\delta \eta = \frac{1}{2} \delta (B_{nlm}(q) . q) = \frac{1}{2} \delta (G_\eta(q) . \lambda_g(q)) \quad (\text{A.4.8})$$

soit :

$$\delta (B_{nlm}(q) . q) = \delta G_\eta(q) . \lambda_g(q) + G_\eta(q) . \delta \lambda_g(q) \quad (\text{A.4.9})$$

On vérifie aisément par le calcul que l'on a :

$$\delta G_\eta(q) . \lambda_g(q) = G_\eta(q) . \delta \lambda_g(q) \quad (\text{A.4.10})$$

Cette dernière égalité conduit donc au résultat suivant :

$$\delta(B_{nlm}(q).q) = 2.G_{\eta}(q).\delta\lambda_g(q) = 2.B_{nlm}(q).\delta q \quad (\text{A.4.11})$$

soit finalement :

$$\delta\eta = B_{nlm}(q).\delta q \quad (\text{A.4.12})$$

L'expression de $\delta\eta$ permet de calculer $\Delta\delta\eta$ et ainsi de procéder à l'interpolation du terme $\sigma^t.\Delta\delta\eta$. En utilisant la relation (A.3.30), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma^t.\Delta\delta\eta &= \sigma^t.\Delta(B_{nlm}(q).\delta q) = \sigma^t.\Delta(G_{\eta}(q).B_{\sigma}.\delta q) \\ &= \sigma^t.\Delta G_{\eta}(q).B_{\sigma}.\delta q = (B_{\sigma}^t.\Delta G_{\eta}^t(q).\sigma)^t.\delta q \end{aligned} \quad (\text{A.4.13})$$

en remarquant que :

$$\Delta G_{\eta}^t(q).\sigma = \Delta(G_{\eta}^t(q).\sigma) \quad (\text{A.4.14})$$

On utilise alors la propriété suivante :

$$G_{\eta}^t(q).\sigma = \Sigma.\lambda_g(q) = \Sigma.B_{\sigma}.q \quad (\text{A.4.15})$$

où :

$$\sigma = \sigma(x, y, z) = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \rangle^t(x, y, z) \quad (\text{A.4.16})$$

et avec :

$$\Sigma = \Sigma(y, z, \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_{xz} & \sigma_{xy} & y\sigma_{xy} + z\sigma_{xz} \\ -\sigma_{xz} & \sigma_{xx} & 0 & -z\sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} & 0 & \sigma_{xx} & y\sigma_{xx} \\ y\sigma_{xy} + z\sigma_{xz} & -z\sigma_{xx} & y\sigma_{xx} & (y^2 + z^2)\sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4.17})$$

La matrice Σ contient les précontraintes σ de l'élément e issues du cumul des incréments de contraintes jusqu'à l'itération courante. En reportant (A.4.15) dans (A.4.14), on obtient donc :

$$\Delta G_{\eta}^t(q).\sigma = \Delta(\Sigma.B_{\sigma}.q) = \Sigma.B_{\sigma}.\Delta q \quad (\text{A.4.18})$$

A l'aide (A.4.18), la relation (A.4.13) devient finalement :

$$\begin{aligned} \sigma^t.\Delta\delta\eta &= (B_{\sigma}^t.\Sigma.B_{\sigma}.\Delta q)^t.\delta q \\ &= \Delta q^t.B_{\sigma}^t.\Sigma.B_{\sigma}.\delta q \end{aligned} \quad (\text{A.4.19})$$

Interpolation de $\rho^t \cdot \delta u$:

La relation (A.3.8) permet d'écrire :

$$\delta u = N_u \cdot \delta q \quad (\text{A.4.20})$$

soit :

$$\rho^t \cdot \delta u = p^t \cdot N_u \cdot \delta q \quad (\text{A.4.21})$$

En utilisant la relation (A.3.9), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \rho^t \cdot \delta u &= \rho^t \cdot G_u \cdot N \cdot \delta q \\ &= p^t \cdot N \cdot \delta q^e \end{aligned} \quad (\text{A.4.22})$$

où :

$$\rho^t = \rho^t(x, y, z) = \langle \rho_x \quad \rho_y \quad \rho_z \rangle (x, y, z) \quad (\text{A.4.23})$$

et avec :

$$p^t = p^t(x, y, z) = \rho^t \cdot G_u = \langle \rho_x \quad \rho_y \quad \rho_z \quad y\rho_z - y\rho_y \rangle \quad (\text{A.4.24})$$

Interpolation de $\mu^t \cdot C \cdot \delta \varepsilon$:

La relation (A.4.3) permet directement d'écrire :

$$\mu^t \cdot C \cdot \delta \varepsilon = \mu^t \cdot C \cdot B_{lin} \cdot \delta q \quad (\text{A.4.25})$$

En utilisant la relation (A.3.17), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mu^t \cdot C \cdot \delta \varepsilon &= \mu^t \cdot C \cdot G_\varepsilon \cdot B_l \cdot \delta q \\ &= \alpha^t \cdot B_l \cdot \delta q \end{aligned} \quad (\text{A.4.26})$$

où :

$$\mu^t = \mu^t(y, z) = \langle \mu_x \quad 0 \quad 0 \rangle (y, z) \quad (\text{A.4.27})$$

et avec :

$$\alpha^t = \alpha^t(y, z) = \mu^t \cdot C \cdot G_\varepsilon = E \cdot \langle \mu_x \quad -y\mu_x \quad z\mu_x \quad 0 \rangle \quad (\text{A.4.28})$$

Interpolation de $\sigma^t \cdot \delta \varepsilon$:

La relation (A.4.3) permet directement d'écrire :

$$\sigma^t \cdot \delta \varepsilon = \sigma^t \cdot B_{lin} \cdot \delta q \quad (\text{A.4.29})$$

soit avec (A.3.17) :

$$\begin{aligned}\sigma^t . \delta \varepsilon &= \sigma^t . G_\varepsilon . B_l . \delta q \\ &= m^t . B_l . \delta q\end{aligned}\quad (\text{A.4.30})$$

avec :

$$m^t = m^t(y, z, \sigma) = \sigma^t . G_\varepsilon = \left\langle \sigma_{xx} \quad -y\sigma_{xx} \quad z\sigma_{xx} \quad -z\sigma_{xy} + y\sigma_{xz} \right\rangle \quad (\text{A.4.31})$$

En reportant les interpolations (A.4.5), (A.4.19), (A.4.22), (A.4.26) et (A.4.30) dans l'équation (A.4.1), on aboutit finalement à la formulation incrémentale discrétisée en déplacements du Principe des Travaux Virtuels de la FLAI. Si l'on réintègre les exposants i et e , le PTV incrémental devient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{e \in \mathcal{E}^{n+1} E} \left\{ \Delta^i q^{e^t} \cdot \left(\int_{V^e} \left({}^i B_l^{e^t} \cdot {}^i h^e \cdot {}^i B_l^e + {}^i B_\sigma^{e^t} \cdot {}^i \Sigma^e \cdot {}^i B_\sigma^e \right) dV \right) \cdot \delta^i q^e \right\} &= \sum_{e \in \mathcal{E}^{n+1} E} \left\{ \left(\int_{V^e} {}^i p^{e^t} \cdot {}^i N^e \cdot dV \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{V^e} {}^i \alpha^{e^t} \cdot {}^i B_l^e \cdot dV - \int_{V^e} {}^i m^{e^t} \cdot {}^i B_l^e \cdot dV \right) \cdot \delta^i q^e \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.4.32})$$

A.4.2 Matrices et vecteurs élémentaires

Partant de la formulation (A.4.32), on définit alors dans le repère local de l'élément e :

– la matrice de rigidité élémentaire des petits déplacements, symétrique puisque la matrice h , donnée en (A.4.6), l'est aussi :

$${}^i k_l^{e^t} = \int_{V^e} {}^i B_l^{e^t} \cdot {}^i h^e \cdot {}^i B_l^e \cdot dV = {}^i k_l^{e^t} \quad (\text{A.4.33})$$

– la matrice de rigidité élémentaire des précontraintes, symétrique puisque la matrice Σ , donnée en (A.4.17), l'est aussi :

$${}^i k_\sigma^{e^t} = \int_{V^e} {}^i B_\sigma^{e^t} \cdot {}^i \Sigma^e \cdot {}^i B_\sigma^e \cdot dV = {}^i k_\sigma^{e^t} \quad (\text{A.4.34})$$

– le vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes au poids propre (plus généralement aux densités volumiques de charge), défini par son transposé :

$${}^i f_\rho^{e^t} = \int_{V^e} {}^i p^{e^t} \cdot {}^i N^e \cdot dV \quad (\text{A.4.35})$$

– le vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes aux déformations de maturation, défini par son transposé :

$${}^i f_{\mu}^{e^t} = \int_{V^e} {}^i \alpha^{e^t} \cdot {}^i B_l^e \cdot dV \quad (\text{A.4.36})$$

– le vecteur des forces nodales internes élémentaires équivalentes à l'état de précontraintes, défini par son transposé :

$${}^i f_{int}^{e^t} = \int_{V^e} {}^i m^{e^t} \cdot {}^i B_l^e \cdot dV \quad (\text{A.4.37})$$

Les relations (A.4.33) et (A.4.34) permettent de définir la matrice, symétrique, de rigidité élémentaire :

$${}^i k^e = {}^i k_l^e + {}^i k_{\sigma}^e \quad (\text{A.4.38})$$

Les relations (A.4.35) et (A.4.36) permettent de définir le vecteur des forces nodales externes élémentaires équivalentes aux chargements :

$${}^i f_{ext}^e = {}^i f_{\rho}^e + {}^i f_{\mu}^e \quad (\text{A.4.39})$$

Les relations (A.4.39) et (A.4.37) permettent de définir le vecteur résidu élémentaire, aussi appelé vecteur élémentaire des forces nodales hors équilibre :

$${}^i r^e = {}^i f_{ext}^e - {}^i f_{int}^e \quad (\text{A.4.40})$$

De cette façon, la formulation (A.4.33) devient alors :

$$\sum_{e \in {}^{i+1}E} \left\{ \Delta^i q^{e^t} \cdot {}^i k^e \cdot \delta^i q^e \right\} = \sum_{e \in {}^{i+1}E} \left\{ {}^i r^{e^t} \cdot \delta^i q^e \right\} \quad (\text{A.4.41})$$

A.4.3 Assemblage et formulation globale

Nous introduisons les notations suivantes concernant des quantités prises dans la configuration de la structure issue de l'itération d'équilibre i du processus de Newton-Raphson :

- ${}^i T^e$ Matrice de rotation élémentaire pour le passage du repère global au local.
- ${}^i Q^e$ Vecteur des déplacements nodaux élémentaire en repère global.
- ${}^i Q$ Vecteur des déplacements nodaux de la structure entière en repère global.

- ${}^i K^e$ Matrice de rigidité élémentaire en repère global (symétrique).
- ${}^i K$ Matrice de rigidité globale de la structure en repère global (symétrique).
- ${}^i R^e$ Vecteur résidu élémentaire en repère global.
- ${}^i R$ Vecteur résidu global de la structure en repère global.

Avec ces notations, on peut donc écrire :

$${}^i Q^e = {}^i T^{e^t} \cdot {}^i q^e \quad (\text{A.4.42})$$

$${}^i K^e = {}^i T^{e^t} \cdot {}^i k^e \cdot {}^i T^e \quad (\text{A.4.43})$$

$${}^i R^e = {}^i T^{e^t} \cdot {}^i r^e \quad (\text{A.4.44})$$

En notant que le produit d'une matrice de rotation par sa transposée donne la matrice identité, les trois relations précédentes permettent d'exprimer la formulation (A.4.41) dans le repère global par :

$$\sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ \Delta^i Q^{e^t} \cdot {}^i K^e \cdot \delta^i Q^e \right\} = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ {}^i R^{e^t} \cdot \delta^i Q^e \right\} \quad (\text{A.4.45})$$

On définit de plus la matrice de connexion M_C^e de l'élément e telle que la compatibilité des déplacements aux nœuds s'écrive symboliquement pour chaque élément :

$${}^i Q^e = M_C^e \cdot {}^i Q \quad (\text{A.4.46})$$

L'utilisation de cette écriture permet alors d'écrire la formulation (A.4.41) sous la forme suivante :

$$\Delta^i Q^t \cdot \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ M_C^{e^t} \cdot {}^i K^e \cdot M_C^e \right\} \delta^i Q = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ {}^i R^{e^t} \cdot M_C^e \right\} \delta^i Q \quad (\text{A.4.47})$$

avec :

$${}^i K = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ M_C^{e^t} \cdot {}^i K^e \cdot M_C^e \right\} \quad (\text{A.4.48})$$

et :

$${}^i R = \sum_{e \in {}^{n+1}E} \left\{ M_C^{e^t} \cdot {}^i R^e \right\} \quad (\text{A.4.49})$$

La formulation incrémentale globale du PTV de la FLAI est par conséquent donnée par le système linéaire suivant :

$$\Delta^i Q^t \cdot {}^i K \cdot \delta^i Q = {}^i R^t \cdot \delta^i Q \quad (\text{A.4.50})$$

soit finalement :

$${}^i K \cdot \Delta^i Q = {}^i R \quad (\text{A.4.51})$$

- ANNEXE 5 -

Outils de la Méthode des Matrices de Transfert de poutres

Parmi les méthodes d'analyse des structures, la plus facile à mettre en œuvre pour résoudre des problèmes de poutres courbes est la méthode des matrices de transfert. Comme dans la méthode des éléments finis, la poutre est tout d'abord discrétisée en éléments de longueur suffisamment petite pour approcher la géométrie de la poutre avec le minimum d'erreur. La méthode procède alors en écrivant successivement le transfert des efforts et des déplacements de l'origine à l'extrémité d'un élément, puis l'équilibre au nœud extrémité pour passer à l'élément suivant. Pour chaque élément de poutre, l'opération de transfert utilise les efforts et les déplacements exprimés dans le repère local associé. Les équations présentées ici sont écrites pour des éléments rectilignes. Elles permettent uniquement d'effectuer le transfert sur un élément, le passage à l'élément suivant se traitant généralement comme un changement de repère (si les nœuds ne supportent pas de charges ponctuelles).

A.5.1 Intégration des équations fondamentales des poutres

Nous considérons un élément de poutre droite 3D de type Bernoulli, soumis à un chargement linéique, orienté selon l'axe x de son repère local et dont l'origine se situe à l'abscisse $x = 0$ et l'extrémité en $x = L$. Nous nous plaçons dans l'hypothèse où les densités linéiques de charge ne dépendent pas de l'abscisse x ($d_\alpha(x) = d_\alpha$, pour $\alpha = x, y, z$), et nous considérons, de plus, que la section droite de la poutre est parfaitement circulaire. Cette dernière hypothèse entraîne alors les égalités suivantes pour les moments d'inertie :

$$I = I_y = I_z \quad \text{et} \quad J = 2I \quad (\text{A.5.1})$$

En intégrant, entre $x = 0$ et $x = L$, les équations différentielles fondamentales (A.2.37) et (A.2.38) données dans l'Annexe 2, nous obtenons les expressions des six efforts internes et des six déplacements de l'extrémité en fonction de leurs valeurs à l'origine et des densités linéiques de charge. Elles sont alors données par :

– pour les efforts internes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{xL} = N_{x0} - L.d_x \\ V_{yL} = V_{y0} - L.d_y \\ V_{zL} = V_{z0} - L.d_z \\ M_{xL} = M_{x0} \\ M_{yL} = M_{y0} + L.V_{z0} - \frac{L^2}{2}d_z \\ M_{zL} = M_{z0} - L.V_{y0} + \frac{L^2}{2}d_y \end{array} \right. \quad (\text{A.5.2})$$

– pour les déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_L = u_0 + \frac{L}{E.S}N_{x0} - \frac{L^2}{2.E.S}d_x \\ v_L = v_0 + L.\omega_{z0} + \frac{L^2}{2E.I}M_{z0} - \frac{L^3}{6E.I}V_{y0} + \frac{L^4}{24E.I}d_y \\ w_L = w_0 - L.\omega_{y0} - \frac{L^2}{2E.I}M_{y0} - \frac{L^3}{6E.I}V_{z0} + \frac{L^4}{24E.I}d_z \\ \omega_{xL} = \omega_{x0} + \frac{L}{2G.I}M_{x0} \\ \omega_{yL} = \omega_{y0} + \frac{L}{E.I}M_{y0} + \frac{L^2}{2E.I}V_{z0} - \frac{L^3}{6E.I}d_z \\ \omega_{zL} = \omega_{z0} + \frac{L}{E.I}M_{z0} - \frac{L^2}{2E.I}V_{y0} + \frac{L^3}{6E.I}d_y \end{array} \right. \quad (\text{A.5.3})$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = q(0) \quad \omega_{\alpha 0} = \omega_\alpha(0) \quad F_{\alpha 0} = r_\alpha(0) \quad M_{\alpha 0} = r_\alpha(0) \\ q_L = q(L) \quad \omega_{\alpha L} = \omega_\alpha(L) \quad F_{\alpha L} = r_\alpha(L) \quad M_{\alpha L} = r_\alpha(L) \\ \alpha = x, y, z \quad q = u, v, w \quad F = N, V \end{array} \right. \quad (\text{A.5.4})$$

A.5.2 Vecteurs d'état et matrice de transfert

Hormis les densités linéiques, les efforts extérieurs à l'élément de poutre $[0, L]$ sont donnés, en fonction des efforts généralisés, par le vecteur suivant dit vecteur des forces nodales de l'élément :

$$\left\langle \begin{array}{c} -N_{x0} \quad -V_{y0} \quad -V_{z0} \quad -M_{x0} \quad -M_{y0} \quad -M_{z0} \\ N_{xL} \quad V_{yL} \quad V_{zL} \quad M_{xL} \quad M_{yL} \quad M_{zL} \end{array} \right\rangle^t \quad (\text{A.5.5})$$

efforts en 0 de la gauche sur la droite *efforts en L de la droite sur la gauche*
= efforts du nœud origine sur l'élément *= efforts du nœud extrémité sur l'élément*

On appelle vecteurs d'état à l'origine et à l'extrémité de l'élément de poutre, respectivement notés E_0 et E_L , les vecteurs à douze composantes contenant les déplacements généralisés et les forces nodales respectivement des nœuds origine et extrémité de l'élément. Ces vecteurs d'état sont alors donnés par :

$$E_0 = \langle u_0 \ v_0 \ w_0 \ \omega_{x0} \ \omega_{y0} \ \omega_{z0} \ / \ -N_{x0} \ -V_{y0} \ -V_{z0} \ -M_{x0} \ -M_{y0} \ -M_{z0} \rangle^t \quad (\text{A.5.6})$$

$$E_L = \langle u_L \ v_L \ w_L \ \omega_{xL} \ \omega_{yL} \ \omega_{zL} \ / \ N_{xL} \ V_{yL} \ V_{zL} \ M_{xL} \ M_{yL} \ M_{zL} \rangle^t \quad (\text{A.5.7})$$

Nous donnons ci-après la relation matricielle permettant d'effectuer le transfert des efforts et des déplacements du nœud origine au nœud extrémité de l'élément. Cette relation exprime le vecteur d'état E_L en fonction du vecteur d'état E_0 et traduit les équations (A.5.2) et (A.5.3). Elle s'écrit alors :

$$E_L = G.E_0 + D \quad (\text{A.5.8})$$

où :

$$G = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{E.S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & \frac{L^3}{6E.I} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{2E.I} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -L & 0 & 0 & 0 & \frac{L^3}{6E.I} & 0 & \frac{L^2}{2E.I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{2G.I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{2E.I} & 0 & \frac{-L}{E.I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{L^2}{2E.I} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{E.I} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad (\text{A.5.9})$$

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-L^2}{2.E.s} d_x \\ \frac{L^4}{24E.I} d_y \\ \frac{L^4}{24E.I} d_z \\ 0 \\ \frac{-L^3}{6E.I} d_z \\ \frac{L^3}{6E.I} d_y \\ \hline -L.d_x \\ -L.d_y \\ -L.d_z \\ 0 \\ \frac{-L^2}{2} d_z \\ \frac{L^2}{2} d_y \end{array} \right\} \quad (\text{A.5.10})$$

La matrice G est la matrice de transfert de l'élément de poutre droite $[0, L]$. Le vecteur D est le vecteur d'état des densités linéiques de charge. Les composantes de ce vecteur sont les effets résultants en terme de déplacements et d'efforts, en $x = L$, dus aux densités linéiques de charge.

Pour analyser une structure que l'on a discrétisée en plusieurs éléments de poutre droite, il suffit alors de connaître le vecteur d'état en un de ces nœuds. La relation de transfert (A.5.8) et l'écriture de l'équilibre de chaque nœud permettent alors de déterminer de proche en proche l'ensemble des vecteurs d'état pour tous les nœuds de la structure.

- ANNEXE 6 -

Diagramme de Voronoï : définition et construction

La construction du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points compte parmi les problèmes classiques de la géométrie algorithmique. Descartes semble avoir adopté, le premier, ce type de représentation en 1644 (*in Okabe et al.*, 1992), pour analyser la disposition de la matière dans le système solaire. Mais ce sont Dirichlet, en 1850, puis Voronoï (1908) qui énoncent le cadre mathématique fondamental (définition et propriétés) de ces constructions géométriques. Elles furent ensuite redécouvertes, reprises et parfois renommées dans de nombreuses disciplines scientifiques telles que l'astronomie, la cristallographie, la géographie des populations, la géologie, la physiologie, la sociologie cellulaire, l'agronomie, l'imagerie médicale, l'écologie animale et l'écologie végétale ...

L'ouvrage de Okabe *et al.* (1992) sert de référence concernant les diagrammes de Voronoï ; il propose une synthèse des travaux menés sur, et avec, cet outil jusqu'à 1991. Dans cette annexe, nous définissons le diagramme de Voronoï de n points du plan et nous exposons rapidement trois méthodes pour le construire.

A.6.1 Diagramme de Voronoï de n points du plan

Soit $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un ensemble de n points distincts du plan. Dans la construction qui nous intéresse ces points se nomment les sites. Le diagramme de Voronoï de l'ensemble P est défini par la partition du plan en n polygones, un pour chaque site, ayant la propriété suivante : un point q du plan est contenu dans le polygone du site p_i si la distance entre q et p_i est inférieure à la distance entre q et p_j pour chaque point p_j de P avec $j \neq i$. Autrement dit, le polygone de Voronoï du site p_i contient l'ensemble des points du plan qui sont plus proches de ce site que de tous les autres. Le diagramme de Voronoï de P est noté $Vor(P)$ et le polygone de Voronoï correspondant au site p_i est noté $V(p_i)$. La médiatrice du segment reliant p_i à p_j partage le plan en deux demi-plans. Nous notons $\pi(p_i, p_j)$ le demi-plan contenant le point p_i et $\pi(p_j, p_i)$ celui contenant le point p_j . Ainsi, le point q appartient à $\pi(p_i, p_j)$ si q est plus proche de p_i que de p_j . De cette observation découle la définition suivante du polygone de p_i :

$$V(p_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \pi(p_i, p_j) \quad (\text{A.6.1})$$

Nous donnons la complexité de chacune des méthodes de construction du diagramme de Voronoï présentée. La complexité, notée $O(f(n))$ où n désigne le nombre de points, indique

qu'une méthode permet de résoudre le problème en un temps qui varie comme la fonction $f(n)$. Rendre la complexité d'un problème toujours plus petite est un des principaux objets de la géométrie algorithmique.

A.6.2 Construction par intersection de demi-plans

La relation (A.6.1) fournit une première méthode pour construire le diagramme de Voronoï de l'ensemble P dans laquelle les polygones de Voronoï des sites peuvent être déterminés un à un. En effet, chaque polygone peut être construit comme étant l'intersection de $n-1$ demi-plans (Fig. A.6.1). Si on considère que les sites les plus éloignés du site courant fournissent des demi-plans qui correspondent à des contraintes redondantes, et que le procédé doit être répété n fois, on voit alors que calculer chaque polygone intersection en traitant ses $n-1$ contraintes une à une constitue une des méthodes les plus lourdes pour construire le diagramme de Voronoï des sites de P . La complexité de l'intersection des $n-1$ demi-plans est alors $O(n^2)$ et celle du diagramme complet est donc $O(n^3)$ (Laszlo, 1996).

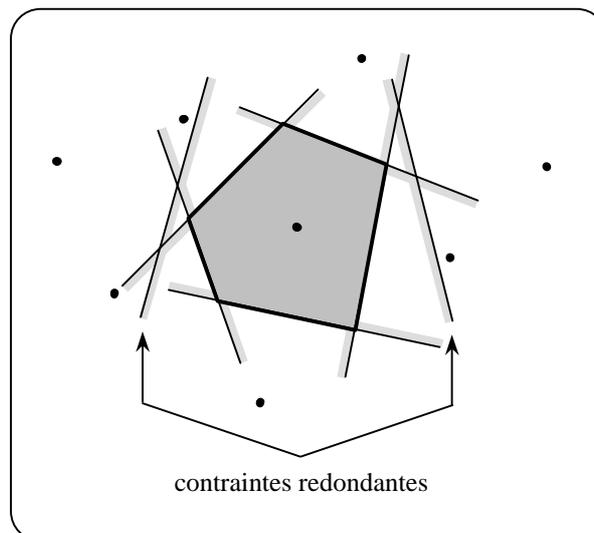


FIGURE A.6.1 – Construction d'un polygone de Voronoï par intersection de demi-plans.

Une approche du type *divide and conquer* permet de calculer l'intersection de l'ensemble des demi-plans avec une complexité optimale $O(n \log n)$ (Laszlo, 1996). Elle repose sur l'associativité de l'intersection et consiste à séparer l'ensemble des demi-plans en deux sous ensembles de taille équivalente et à chercher l'intersection de chacun d'eux. On obtient ainsi deux régions polygonales convexes (pouvant être ouvertes) dont il suffit

finaleme nt de chercher l'intersection. Chacune de ces deux régions est formée par le même procédé en décomposant chaque sous ensemble en deux nouveaux, et la méthode est ainsi dite récursive. La recherche d'un polygone de Voronoï $V(p_i)$ est alors détaillée par les trois étapes suivantes, où $\Pi = \{\pi(p_i, p_j), 1 \leq j \leq n, j \neq i\}$ est l'ensemble des demi-plans de départ :

- 1/ Faire une partition de Π en deux sous ensembles Π_1 et Π_2 approximativement de même taille.
- 2/ Former, de manière récursive, les régions polygonales V_1 et V_2 intersections des demi-plans de Π_1 et Π_2 .
- 3/ Fusionner les deux régions V_1 et V_2 en cherchant leur intersection pour former le polygone convexe $V(p_i)$.

En utilisant cette méthode récursive pour calculer chaque polygone, le diagramme de Voronoï des n sites de P peut donc être trouvé avec une complexité $O(n^2 \log n)$. Si sa complexité n'est pas optimale pour construire le diagramme complet, cette méthode a néanmoins l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et permet une implémentation relativement claire. Les deux méthodes présentées ci-après, de complexité optimale $O(n \log n)$, sont nettement plus rapides. En effet, cela signifie que, de façon asymptotique, construire le diagramme de Voronoï en les utilisant n'est pas plus coûteux que de former un seul de ses polygones par la méthode que nous venons de décrire. Ces deux méthodes sont cependant bien plus difficiles et lourdes à mettre en œuvre.

A.6.3 Construction par la méthode Divide and Conquer

La première méthode permettant de construire le diagramme de Voronoï de n points avec une complexité $O(n \log n)$ date de 1975 et utilise une approche du type *divide and conquer* appliquée à la construction complète du diagramme. Une présentation détaillée de cette méthode figure dans Preparata & Shamos (1985).

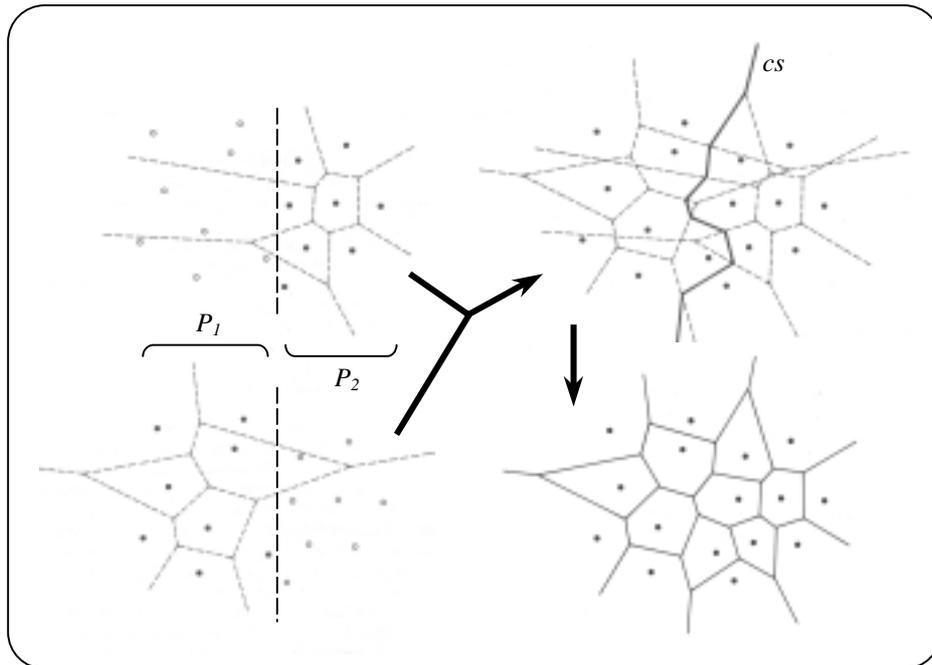


FIGURE A.6.2 – Construction du diagramme de Voronoï par la méthode *Divide and Conquer*.

Construire le diagramme de Voronoï des n sites de l'ensemble P par la méthode *divide and conquer* consiste à séparer les points de P en deux sous ensembles de taille équivalente et à chercher le diagramme de Voronoï de chacun d'eux. La partition de P ne s'effectue pas seulement en nombre et doit aboutir à deux sous ensembles de points appartenant à des demi-plans distincts. Le diagramme complet est alors obtenu en fusionnant les diagrammes des deux sous problèmes. Cette opération nécessite la construction d'une chaîne de segments, construction que nous ne détaillons pas ici, permettant de corriger le chevauchement des deux diagrammes et de tenir compte de leur interaction mutuelle. Chacun de ces deux diagrammes de Voronoï est formé par le même procédé en décomposant chaque sous ensemble de points en deux nouveaux. Comme précédemment, la méthode possède donc un caractère récursif. La construction du diagramme de Voronoï $Vor(P)$, illustrée par la figure (A.6.2), est alors détaillée par les trois étapes suivantes :

- 1/ Faire une partition de P en deux sous ensembles P_1 et P_2 approximativement de même taille.
- 2/ Construire, de manière récursive, les diagrammes de Voronoï $Vor(P_1)$ et $Vor(P_2)$ des ensembles de points P_1 et P_2 .

3/ Fusionner les deux diagrammes $Vor(P_1)$ et $Vor(P_2)$: construire la chaîne de segments cs , puis éliminer la partie de $Vor(P_1)$ située à droite de cs et la partie de $Vor(P_2)$ située à sa gauche. Le résultat est $Vor(P)$.

La construction de la chaîne de segments séparant les diagrammes des deux sous ensembles de points constitue la partie difficile de cette méthode. Son implémentation est compliquée et nécessite l'utilisation d'une structure de données particulière.

A.6.4 Construction par la méthode de Fortune

En 1985, Fortune présente une nouvelle méthode permettant de construire le diagramme de Voronoï de n points avec une complexité $O(n \log n)$ et plus élégante que l'approche du type *divide and conquer*. Cette méthode, illustrée par la figure (A.6.3) et décrite en détails dans Berg (de) *et al.* (1997), utilise la stratégie de balayage du plan sur laquelle reposent de nombreux procédés de la géométrie algorithmique.

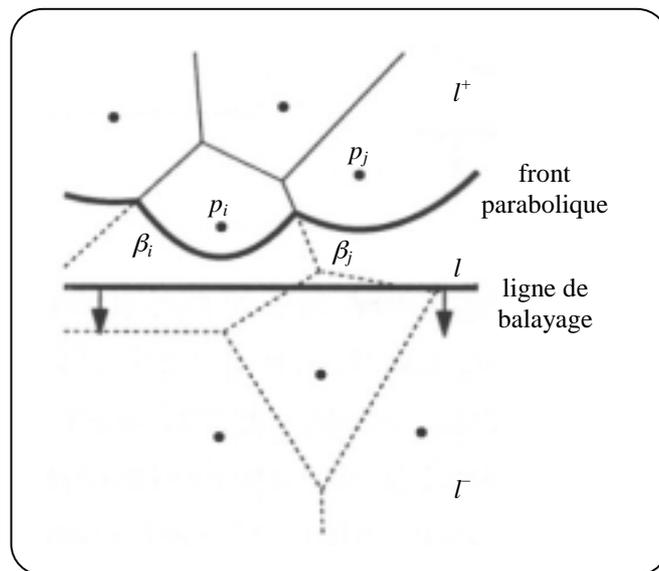


FIGURE A.6.3 – Construction du diagramme de Voronoï par la méthode de Fortune.

La stratégie utilisée dans cette méthode consiste à balayer le plan en déplaçant une ligne de balayage, notée l , du haut vers le bas et à calculer et conserver les informations sur l'intersection de cette ligne avec le diagramme de Voronoï cherché. La difficulté réside dans le fait que la partie de $Vor(P)$ située dans le demi-plan au dessus de l , noté l^+ , ne dépend pas

que des sites appartenant à l^+ mais aussi des sites appartenant au demi-plan au dessous de l , noté l^- . Ainsi, lorsque la ligne de balayage atteint le plus haut sommet du polygone $V(p_i)$, elle n'a toujours pas rencontré le site p_i correspondant et on ne dispose donc pas de toutes les informations nécessaires pour calculer ce sommet. Dans sa méthode, Fortune propose de calculer et de conserver les informations concernant la partie de $Vor(P)$ des sites de l^+ qui ne pourra plus être modifiée par les sites de l^- . La question est alors de savoir quelle partie du diagramme de Voronoï de l^+ ne sera plus modifiée par le balayage de l . En d'autres termes, pour quels points q de l^+ connaît-on le site dont ils sont les plus proches ? En remarquant que la distance d'un point q de l^+ à un site de l^- est plus grande que la distance de q à l , on voit alors immédiatement que le site le plus proche de q n'est pas situé sous l si q est au moins plus proche d'un site de l^+ qu'il ne l'est de l . En outre, le lieu des points du plan qui sont plus proches d'un site p_i de l^+ que de l est borné par une parabole. Cette parabole, que l'on note β_i , est le lieu des points équidistants de p_i et de l , et a pour équation :

$$\beta_i : y = \frac{1}{2(y_i - y_l)}(x^2 - 2x_i x + x_i^2 + y_i^2 - y_l^2) \quad (\text{A.6.2})$$

où x_i et y_i sont les coordonnées du site p_i et y_l l'ordonnée de la ligne de balayage.

De ce qui précède, on déduit que le lieu des points qui sont plus proches de n'importe quel site de l^+ que de l est alors borné par une séquence d'arcs de paraboles appelée le front parabolique. Les points d'intersection des arcs de ce front parabolique sont situés sur les segments du diagramme de Voronoï (figure A.6.3) et les tracent lorsque l balaye le plan du haut vers le bas. L'algorithme de Fortune consiste à calculer l'évolution de la structure du front parabolique en fonction du balayage du plan. Cette évolution structurale est événementielle et correspond à deux types d'événements : ceux du type *point* et ceux du type *cercle*. Les événements du type *point* surviennent lorsque l rencontre un nouveau site : un nouvel arc apparaît alors dans le front parabolique. Les événements de type *cercle* proviennent de la présence de trois sites cocirculaires : lors du balayage, un des trois arcs correspondants du front parabolique va alors disparaître en étant réduit au point d'intersection des deux restants.

La méthode de Fortune est très séduisante et c'est à juste titre qu'elle est une des plus utilisées de nos jours. Néanmoins, elle nécessite une structure de données bien particulière pour stocker le diagramme de Voronoï en cours de calcul et pour gérer et traiter la pile d'événements qui modifie la structure du front parabolique. De ce fait, cette méthode n'est pas la plus simple à mettre en œuvre pour les non spécialistes de l'algorithmique.

- BIBLIOGRAPHIE -

Alteyrac J., Fourcaud T., Castera P., Stokes A., 1999. Analysis and simulation of stem righting movements in Maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.). Proc. *Connection between silviculture and wood quality through modelling approaches and simulation software*, Third Workshop of IUFRO WP S5.01-04, La Londe-Les-Maures, France, September 5-12, 1999, pp. 105-112.

Ancelin P., Fourcaud T., Lac P., 1999. Non-linear structure analysis to investigate tree biomechanics. Proc. *Connection between silviculture and wood quality through modelling approaches and simulation software*, Third Workshop of IUFRO WP S5.01-04, La Londe-Les-Maures, France, September 5-12, 1999, pp. 95-104.

Ancelin P., 1997. *Modélisation des contraintes de croissance dans un tronc d'arbre par la Méthode des Eléments Finis*. Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I, France, 25 p.

Archer R.R., 1986. *Growth Stresses and Strains in Trees*. Springer Verlag Series in Wood Science, ed. by T.E. Timell, 240 p.

Archer R.R., 1987. On the origin of growth stresses in trees; part 1: micromechanics of the developing cambial cell wall. *Wood Sci. Technol.*, 21, pp. 139-154.

Bella I.E., 1971. A new competition model for individual trees. *Forest Science*, 17, pp. 364-372.

Berg (de) M., Kreveld (de) M., Overmars M., Schwarzkopf O., 1997. *Computational geometry, algorithms and applications*. Springer Verlag, 377 p.

Biging G.S., Dobbertin M., 1992. A comparison of distance-dependent competition measures for height and basal area growth of individual conifer trees. *Forest Science*, 38, 3, pp. 695-720.

Biging G.S., Dobbertin M., 1995. Evaluation of competition indices in individual tree growth models. *Forest Science*, 41, 2, pp. 360-377.

Blaise F., 1991. *Simulation du parallélisme dans la croissance des plantes et applications*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 186p.

Boots B.N., 1973. Some models of the random subdivision of space. *Geografiska Annaler*, 55B, pp. 34-48.

Boots B.N., 1980. Weighting Thiessen polygons. *Economic Geography*, 56, pp. 248-259.

Boyd J.D., 1973. Compression wood : force generation and functional mechanics. *New Zeland Journal of Forest Science*, 3, pp.240-258.

Brown G.S., 1965. Point density in stems per acre. *New Zeland Forestry Service Research Notes*, 38, pp. 1-11.

Castéra P., 1992. Histoire de l'arbre, coulées de bois de réaction et qualité des produits chez *Pinus pinaster* Ait. 5^{ème} Séminaire Interne *Architecture, Structure, Mécanique de l'Arbre*, Paris, 1^{er} décembre, 1992, 5, pp. 92-107.

Chanson B., 1992. Dynamique de l'élaboration du bois : nature et disposition dans la structure arborée. 5^{ème} Séminaire Interne *Architecture, Structure, Mécanique de l'Arbre*, Paris, 1^{er} décembre, 1992, 5, pp. 40-55.

Chertov O.G., Komarov A.S., Karev G.P., 1999. *Modern Approaches in Forest Ecosystem Modelling*. Koninklijke Brill NV, Leiden (European Forest Institute research report n°8), 116 p.

Combes J.G., Sassus F., Bailleres H., Chanson B., Fournier M., 1996. Les bois de réaction : relations entre la déformation longitudinale de maturation et les principales caractéristiques physico-mécaniques, anatomiques et chimiques. *Colloque Sciences et Industries du Bois*, septembre 1996, Nancy, France, pp. 75-82.

Combes J.G., 1994. *Etude des relations entre la morphologie de l'arbre et les propriétés mécaniques, physiques et chimiques du bois chez le pin maritime (Pinus pinaster Ait.)*. Rapport de DEA Sciences du Bois, Université Bordeaux I, 31 p.

Constant Th., Ancelin Ph., Fourcaud Th., Fournier M., Jaeger M., 1999. The French project SICRODEF : a chain of simulators from the tree growth to the distortion of boards due to the release of growth stresses during sawing : First results. Proc. *Connection between silviculture and wood quality through modelling approaches and simulation software*, Third Workshop of IUFRO WP S5.01-04, La Londe-Les-Maures, France, September 5-12, 1999, pp. 377-386.

Costes E., 1994. Importance de l'arcure dans l'architecture et la production d'espèces fruitières tempérées : perspectives de recherches. 7^{ème} Séminaire Interne *Architecture, Structure, Mécanique de l'Arbre*, Montpellier, 5-7 avril, 1994, 7, pp. 168-173.

Courbaud B., 1997. *Modélisation de l'éclairement et de la croissance de l'épicéa (Picea abies L. Karst) en forêt irrégulière de montagne.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I / CEMAGREF S¹ Martin d'Herès, France, 244 p.

Crabbé J., 1975. Arcure et gravimorphisme chez le pommier. II. Effets de l'époque du traitement sur la forme de ramification suscitée par deux degrés d'arcure. *Bulletin des Recherches Agronomiques de Gembloux*, 10, 1, pp. 55-64.

Daniels R.F., Burkhart H.E., Clason T.R., 1986. A comparison of competition measures for predicting growth of loblolly pine trees. *Canadian Journal of Forest Research*, 16, pp. 1230-1237.

Dreyfus Ph., Bonnet F.R., 1995. CAPSIS : logiciel de simulation de conduites sylvicoles. *Revue Forestière Française XLVII – n° spécial 1995*, pp. 111-115.

Dumail J.F., 1995. *Caractéristiques physiques et mécaniques du bois juvénile de pin maritime.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 228 p.

Ferrand J.C., 1982. Etude des contraintes de croissance. 3^{ème} partie : *Eucalyptus delegatensis* et *Eucalyptus nitens* : influence de la sylviculture et de la station. *Annales des Sciences Forestières*, 39,4, pp. 355-378.

Firbank L.G., Watkinson A.R., 1987. On the analysis of competition at the level of the individual plant. *Oecologia*, 71, pp. 308-317.

Ford E.D., Sorrensen K.A., 1992. Theory and models of inter-plant competition as a spatial process. *Populations, Communities and Ecosystems, Individual-Based Models and Approaches in Ecology*, DeAngelis D.L. & Gross L. Eds, Chapman & Hall, New York, pp. 363-407.

Fourcaud Th., Lac P., 1996. Mechanical Analysis of the Form and Internal Stresses of a Growing Tree by the Finite Element Method. Proc. *Engineering Systems Design and Analysis*, ASME, Montpellier, France, July 1-4, 1996, 77, 5, pp. 213-220.

Fourcaud Th., Blaise F., Reffye (de) Ph., Lac P.,1998. Une approche fonctionnelle pour la simulation de la croissance d'arbres fruitiers : le logiciel AMAPpara. 11^{ème} Colloque INRA-Ctifl sur les Recherches Fruitières, *Architecture et Modélisation en Arboriculture Fruitière*, Montpellier, 5-6 mars, 1998, pp. 307-316.

Fourcaud Th., 1995. *Analyse du comportement mécanique d'une plante en croissance par la méthode des éléments finis.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, France, 148 p.

Fourcaud Th., 1999. Défauts de forme et structure interne du Pin maritime. Actes du 5^{ème} colloque "De la forêt cultivée à l'industrie de demain - Propriétés et usages du Pin maritime", ARBORA, 2-3 décembre 1999, Bordeaux, France, pp. 77-84.

Fournier M., Moulia B., 1992. Mécanique des structures évolutives et auto-adaptives, le cas des arbres. Partie 1 : Définitions Biomécaniques. 5^{ème} Séminaire Interne *Architecture, Structure, Mécanique de l'Arbre*, Paris, 1^{er} décembre, 1992, 5, pp. 56-76.

Fournier M., Chanson B., Guitard D., Thibaut B., 1991. Mécanique de l'arbre sur pied : modélisation d'une structure en croissance soumise à des chargements permanents et évolutifs. Partie 1 : Analyse des contraintes de support. Partie 2 : Analyse tridimensionnelle des contraintes de maturation – cas du feuillu standard. *Annales des Sciences Forestières*, 48,5, pp. 513-546.

Fournier M., Chanson B., Thibaut B., Guitard D., 1994. Mesures des déformations résiduelles de croissance à la surface des arbres, en relation avec leur morphologie. Observations sur différentes espèces. *Annales des Sciences Forestières*, 51, pp. 249-266.

Fournier M., 1989. *Mécanique de l'arbre sur pied : maturation, poids propre, contraintes climatiques dans la tige standard.* Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 257p.

Franç A., Picard N., 1997. *Quelques remarques sur la description et la modélisation des forêts homogènes et hétérogènes. Application aux "gap models".* Programme GIP Forêts hétérogènes, Seignosse, France, 4-6 juin, 1997, Rapport d'état d'avancement des tâches 3.1 & 3.2, 88 p.

Frey F., 1975. *Calcul des structures élastiques géométriquement non linéaires. Compléments et nouveautés.* Laboratoire de Mécanique des Matériaux et Statique des Constructions, Université de Liège, Belgique, rapport interne 65.

Gavrikov V.L., Grabarnik P.Y., Stoyan D., 1993. Trunk-top relations in a siberian pine forest. *Biometric Journal*, 35, 4, pp. 487-498.

Gérard J., 1992. Fentes d'abattage et déformations de sciage dues à la libération des contraintes de croissance : revue bibliographique. 5^{ème} Séminaire Interne *Architecture, Structure, Mécanique de l'Arbre*, Paris, 1^{er} décembre, 1992, 5, pp. 108-138.

Gillis P.P., 1973. Theory of growth stresses. *Holzforschung*, 27, pp. 197-207.

Godin C., Costes E., 1997. Mesures et digitalisation de la structure topologique et géométrique des plantes. *Document de travail de l'unité de modélisation des plantes*, 1-97, CIRAD, Montpellier, France.

Gourlet-Fleury S., 1997. *Modélisation individuelle spatialement explicite de la dynamique d'un peuplement de forêt dense tropicale humide (dispositif de Paracou – Guyane française)*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I, France, 274 p.

Guitard D., 1987. *Mécanique du matériau bois et composites*. Cepadues-Editions.

Guo Y.Q., 1987. *Analyse non linéaire statique et dynamique des poutres tridimensionnelles élasto-plastique*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 188 p.

Guyon D., Courrier G., 1994. Nezer, dendrométrie 1994. Evolution des protocoles de mesure et d'échantillonnage. *Document interne*, Laboratoire de Bioclimatologie, INRA, Bordeaux, France.

Hallé F., Oldemann R.A.A., 1970. *Essai sur l'architecture et la dynamique de croissance des arbres tropicaux*. Masson and Cie.

Hargoues C., 1997. *Analyse des déformations induites par les contraintes de croissance lors du sciage d'une grume*. Rapport de stage de fin d'étude, CIRAD-Forêt, 65 p.

Houllier F., Bouchon J., Birot Y., 1991. Modélisation de la dynamique des peuplements forestiers : état et perspectives. *Revue Forestière Française*, 43, pp. 87-107.

Jack W.H., 1967. Single tree sampling in even-aged plantations for survey and experimentation. Proc. 14th IUFRO Congress, Munich, Germany, pp. 379-403.

Kubler H., 1987. Growth Stresses in Trees and Related Wood Properties. *Forestry Abstracts*, 48,3, pp. 130-189.

Laszlo M.J., 1996. *Computational Geometry and Computer Graphics in C++*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 266 p.

Lemoine B., 1991. Growth and yield of maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) : the average dominant tree of the stand. *Annales des Sciences Forestières*, 48, pp. 593-611.

Liddle M.J., Budd C.S.J., Hutchings M.J., 1982. Population dynamics and neighbourhood effects in establishing swards of *Festuca rubra*. *Oikos*, 38, pp. 52-59.

Loup C., Fournier M., Chanson B., Moulia B., 1991. Redressements, contraintes de croissance et bois de réaction dans le bois d'un jeune *Pinus pinaster* artificiellement incliné. 3^{ème} Séminaire Interne *Architecture, Structure, Mécanique de l'Arbre*, Montpellier, février 1991.

Mack R.N., Harper J.L., 1977. Interference in dune annuals : spatial pattern and neighbourhood effects. *Journal of Ecology*, 65, pp. 345-363.

Matlack G.R., Harper J.L., 1986. Spatial distribution and the performance of individual plants in a natural population of *Silene dioica*. *Oecologia*, 70, pp. 121-127.

Mattheck C., Kubler H., 1995. *Wood - The Internal Optimization of Trees*. Springer Verlag Series in Wood Science, ed. by T.E. Timell.

Mattheck C., 1990. Why they growth, how they growth : the mechanics of trees. *Arboricultural Journal*, 14, pp. 1-17.

Mead R., 1966. A relationship between individual plant-spacing and yield. *Annals of Botany*, 30, 118, pp. 301-309.

Mercier F., 1997. *Analyse et modélisation de la dynamique forestière guyanaise à l'aide de diagrammes de Voronoï*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I, France, 181 p.

Mithen R., Harper J.L., Weiner J., 1984. Growth and mortality of individual plants as a function of "available area". *Oecologia*, 62, pp. 57-60.

Moore J.A., Budelsky C.A., Schlesinger R.C., 1973. A new index representing individual tree competitive status. *Canadian Journal of Forest Research*, 3, pp. 495-500.

Moravie M.A., Pascal J.P., Auger P., 1997. Investigating canopy regeneration processes through individual-based spatial models : application to a tropical rain forest. *Ecological Modelling*, 104, 2-3, pp. 241-260.

Nicholson J.E., 1971. A rapid method for estimating longitudinal growth stresses in logs. *Wood Science and Technology*, 5, pp. 40-48.

Okabe A., Boots B., Sugihara K., 1992. *Spatial tessellations concepts and applications of Voronoi diagrams*. John Wiley & Sons (New York).

Opie J.E., 1968. Predictability of individual tree growth using various definitions of competing basal area. *Forest Science*, 14, pp. 314-323.

Ottorini J.M., 1988. Aspects de la notion de densité et croissance des arbres en peuplement. *Annales des Sciences Forestières*, 35, 4, pp. 299-320.

Pardé J., Bouchon J., 1988. *Dendrométrie*. 2^{ème} édition, ENGREF Nancy, 328 p.

Pavé A., 1995. Modélisation des écosystèmes forestiers : enjeux, problèmes et approches. *Revue d'Écologie (Terre & Vie)*, 50, pp. 193-197.

Pelz D.R., 1978. Estimating individual tree growth with tree polygons. *Growth models for long term forecasting of timber yields*, ed.by J. Fries et al., VPI & SU, School of For. And Wildl. Resour., FWS-1-78, pp. 172-178.

Picard N., 1999. *Passage d'un modèle individuel à un modèle de distribution de la dynamique forestière. Application à une forêt dense tropicale humide de Guyane française*. Thèse de doctorat, ENGREF, France, 457 p.

Polge H., Illy G., 1967. Observations sur l'anisotropie du Pin maritime des Landes. *Annales des Sciences Forestières*, 24, 3, pp. 205-231.

Polge H., 1981. Influence des éclaircies sur les contraintes de croissance du hêtre. *Annales des Sciences Forestières*, 38, 4, pp. 407-423.

Preparata F.P., Shamos M.I., 1985. *Computational geometry : an introduction*. Texts and Monographs in Computer Science, Springer Verlag, 390 p.

Pukkala T., 1989. Methods to describe the competition process in a tree stand. *Scandinavian Journal of Forest Research*, 4, pp. 187-202.

Radi M., 1992. *Analyse morphologique de l'arbre en vue de sa modélisation mécanique*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 143 p.

Reffye (de) Ph., Edelin C., Jaeger M., 1989. Modélisation de la croissance des plantes. *La Recherche*, 20, 207, pp. 158-168.

Reffye (de) Ph., Houllier F., Blaise F., Fourcaud Th., 1997. Essai sur les relations entre l'architecture d'un arbre et la grosseur de ses axes végétatifs. *Modélisation et Simulation de l'architecture des végétaux*, INRA éd., Sciences Update, pp. 255-423.

Shakourzadeh H., Guo Y.Q., Batoz J.L., 1993. On the non-linear elasto-plastic analysis of space frames undergoing large displacements. *International Congress on Computational Methods in Engineering*, Shiraz University, 2-6 May, 1993, pp. 165-174.

Sorrensen-Cothorn K.A., Ford E.D., Sprugel D.G., 1993. A model of competition incorporating plasticity through modular foliage and crown development. *Ecological Monographs*, 63, 3, pp. 277-304.

Stokes A., Berthier S., Sacriste S., Martin F., 1998. Variations in maturation strains and root shape in root systems of maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.). *Trees*, Springer-Verlag, 12, pp. 334-339.

Thibault B., 1992. Bilan de quatre années du programme "ASMA". 5^{ème} Séminaire Interne *Architecture, Structure, Mécanique de l'Arbre*, Paris, 1^{er} décembre, 1992, 5, pp. 4-20.

Thomas S.C., Weiner J., 1989. Including competitive asymmetry in measures of local interference in plant populations. *Oecologia*, 80, pp. 349-355.

Timell T.E., 1986. *Compression Wood in Gymnosperms*. Springer Series in Wood Science, Springer-Verlag Berlin, 3 vol., 2150 p.

Tomé M., Burkhardt H.E., 1989. Distance-dependent competition measures for predicting growth of individual trees. *Forest Science*, 35, 3, pp. 816-831.

Umeki K., 1995. Modelling the relationship between the asymmetry in crown display and local environment. *Ecological Modelling*, 82, pp. 11-20.

Voronoi G., 1908. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *Journal für die Reine und angewandte Mathematik*, 134, pp. 198-287.

Wilson B.F., Archer R.R., 1979. Tree design: some biological solutions to mechanical problems. *Bioscience*, 29,5, pp. 293-298.

Yamamoto H., Okuyama T., 1988. Analysis of the Generation Process of Growth stresses in cell walls, *Mokuzai Gakkaishi*, 34, pp. 788-793.

- TABLE DES MATIERES -

COMPORTEMENT BIOMECHANIQUE A L'ECHELLE DE L'ARBRE :

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS ET ANALYSE NON LINEAIRE

Introduction	9
1.1 Description et résolution du problème incrémental	11
1.1.1 L'arbre : une structure en croissance et des phénomènes biologiques.....	11
<i>Déformations des cellules de bois dues à la maturation</i>	11
<i>Le Pin maritime et le bois de compression</i>	13
1.1.2 Discrétisation du temps et de la structure.....	14
1.1.3 Formulation en analyse linéaire.....	17
<i>Notations du Principe des Travaux Virtuels</i>	17
<i>Prise en compte des déformations de maturation</i>	19
1.2 Analyse non linéaire d'une structure en croissance	22
1.2.1 Introduction à l'analyse non linéaire.....	22
1.2.2 Discrétisation géométrique du PTV incrémental de la FLAI.....	25
1.2.3 Interpolation et calcul des grandeurs élémentaires.....	27
<i>Matrice de rigidité élémentaire des petits déplacements</i>	28
<i>Matrice de rigidité élémentaire des précontraintes</i>	29
<i>Vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes au poids propre</i>	31
<i>Vecteur des forces nodales élémentaires équivalentes aux déformations de maturation</i>	32
<i>Vecteur des forces nodales internes élémentaires équivalentes à l'état de précontraintes</i>	33
1.2.4 Algorithme d'analyse non linéaire de la FLAI.....	34
Discussion	36
Conclusion	40

MODELISATION DU COMPORTEMENT A L'ECHELLE DU PEUPEMENT :

BIOMECHANIQUE DU TRONC ET COMPETITION SPATIALE ENTRE HOUPPIERS.

Introduction	43
2.1 Analyse biomécanique du tronc par Matrices de Transfert	47
2.1.1 Présentation des hypothèses de la méthode d'analyse.....	47
<i>Description de la structure interne du tronc</i>	48
2.1.2 Vecteurs d'état et matrice de transfert des poutres 3D.....	49
<i>Relation de transfert incrémentale</i>	51

2.1.3	Prise en compte des déformations de maturation.....	52
	<i>Effets mécaniques des déformations de maturation</i>	53
	<i>Modélisation des déformations de maturation</i>	55
2.1.4	Méthode et outils pour le calcul de la structure.....	56
	<i>Discrétisation du tronc</i>	56
	<i>Vecteurs d'état aux nœuds</i>	56
	<i>Changement d'élément au nœud i</i>	58
	<i>Transfert sur l'élément i</i>	59
2.1.5	Procédure d'analyse du tronc par matrices de transfert	59
	<i>Parcours des éléments et résolution</i>	60
	<i>Cas d'une poutre encastree – libre</i>	62
	<i>Procédure liée à la croissance</i>	64
2.2	Gestion de la compétition spatiale et impact sur la structure	66
2.2.1	Compétition entre individus et diagrammes de Voronoï.....	66
	<i>Définition du voisinage au sens de Voronoï</i>	68
	<i>Développement, compétition et diagrammes de Voronoï</i>	69
2.2.2	Espace vital et excentrement du houppier.....	70
	<i>Hypothèses pour l'étude de peuplements de Pins maritimes</i>	71
	<i>Interprétation de la notion d'espace vital et développement du houppier</i>	72
	<i>Mécanisme de l'excentrement du houppier : notion de timidité</i>	74
	<i>Détermination du point d'application de l'incrément de poids du houppier</i>	75
2.2.3	Stratégies de construction des surfaces de croissance.....	76
	<i>Réglage des effets de bord par le tore</i>	77
	<i>Construction de cellules évolutives dans le temps</i>	78
	<i>Pondération des cellules par la taille des individus</i>	80
	Discussion	83
	Conclusion	86

TROISIEME CHAPITRE **87**

PREMIERES EVALUATIONS DES MODELES PEUPLEMENT DE CAPSIS :

COMPARAISONS AVEC AMAP ET PROTOCOLE DE MESURES SUR UNE PLACETTE DE PINS MARITIMES.

Introduction	89	
3.1 Simulations comparatives AMAP – CAPSIS	90	
3.1.1 Objectif de la comparaison.....	90	
3.1.2 Simulations de la croissance d'un axe.....	90	
	<i>Flexion d'un axe en croissance sous l'action de son poids propre</i>	90
	<i>Redressement d'un axe en croissance selon deux stratégies</i>	92

3.1.3	Prise en compte du poids du houppier à l'échelle de l'arbre.....	93
	<i>Comportement du tronc sans redressement.....</i>	<i>94</i>
	<i>Etude de l'influence des mécanismes de redressement.....</i>	<i>95</i>
3.2	Protocole de mesures en vue de l'évaluation des modèles	101
3.2.1	Présentation du dispositif expérimental de Nezer	101
3.2.2	Mesure de la forme des troncs par la méthode des trois piquets	104
3.2.3	Mesure de la projection au sol des houppiers.....	107
	<i>Descriptif du protocole de mesure et résultat.....</i>	<i>107</i>
	<i>Approximation de la mesure pour la modélisation.....</i>	<i>109</i>
3.2.4	Evaluation des stratégies du modèle 2D de compétition entre houppiers	110
	<i>Mise en garde sur la méthode d'évaluation</i>	<i>113</i>
	Discussion.....	114
	Conclusion.....	116

CONCLUSION GENERALE ***117***

ANNEXES ***123***

Annexe 1 : Formulation incrémentale du PTV en FLAI	127	
A.1.1	Choix de la formulation et notations	127
A.1.2	Principe incrémental des Travaux Virtuels en FLAI.....	128
Annexe 2 : Description d'un modèle de poutre tridimensionnelle.....	131	
A.2.1	Déplacements généralisés et déformations généralisées	131
A.2.2	Modèle de Bernoulli.....	133
A.2.3	Loi de comportement	134
A.2.4	Expressions des déformations non linéaires.....	135
A.2.5	Efforts internes généralisés	136
A.2.6	Equations différentielles fondamentales	137
Annexe 3 : Discrétisation de l'élément fini de poutre 3D de type Bernoulli	141	
A.3.1	Interpolation des déplacements	141
A.3.2	Interpolation des déformations.....	144
Annexe 4 : Transformation du PTV par la Méthode des Eléments Finis	147	
A.4.1	Interpolation et formulation en déplacements	147
A.4.2	Matrices et vecteurs élémentaires	151
A.4.3	Assemblage et formulation globale.....	152

Annexe 5 : Outils de la Méthode des Matrices de Transfert de poutres	155
A.5.1 Intégration des équations fondamentales des poutres	155
A.5.2 Vecteurs d'état et matrice de transfert.....	156
Annexe 6 : Diagramme de Voronoï : définition et construction	159
A.6.1 Diagramme de Voronoï de n points du plan.....	159
A.6.2 Construction par intersection de demi-plans	160
A.6.3 Construction par la méthode Divide and Conquer	161
A.6.4 Construction par la méthode de Fortune	163

BIBLIOGRAPHIE

165

Résumé

Le module AMAPméca permet de simuler le comportement biomécanique d'un arbre isolé dont l'architecture est entièrement décrite et utilise la Méthode des Eléments Finis en analyse linéaire. Le souci d'une meilleure prise en compte des grands déplacements, pouvant intervenir lors d'un cycle de croissance, nous a conduit à développer les outils permettant de modéliser le comportement biomécanique de l'arbre en analyse non linéaire. Il apparaît que ce type d'analyse ne se justifie que dans certains cas de chargements élevés. De plus, l'important coût de calcul qu'elle occasionne s'avère déjà pénalisant pour la simulation d'un seul arbre.

La prise en compte de l'environnement forestier ouvre la voie à l'étude des effets d'un scénario sylvicole sur la forme future des arbres. A l'échelle spatiale du peuplement, on limite la description de l'arbre à celle du tronc et du houppier. Deux modèles ont été implantés dans la plate-forme logicielle CAPSIS avec pour objectif d'intégrer les aspects "forme" dans les modèles spatialisés de croissance des peuplements forestiers. D'une part, un modèle de régulation de la forme des troncs, soumis à des sollicitations internes et externes, a été développé. Il utilise les Matrices de Transfert des poutres dans l'hypothèse des petits déplacements. D'autre part, un premier modèle de dissymétrie de la croissance des houppiers a été proposé. Il repose sur l'utilisation des diagrammes de Voronoï pour traduire les effets de la compétition spatiale entre arbres voisins sur le développement des houppiers. L'utilisation conjointe de ces deux modèles ouvre la voie à l'étude des relations existant entre l'excentrement des houppiers et la mise en place progressive de la forme des tiges.

Le problème de l'évaluation des modèles d'un point de vue numérique puis expérimental est abordé. Il ressort alors que cette phase reste suspendue à la connaissance parfaite de l'historique des individus étudiés.

Mots clés : modélisation, biomécanique, déformations de maturation, bois de compression, peuplement forestier, compétition spatiale, qualité du bois.

Summary

The AMAPmeca module allows the biomechanical behaviour of a single tree, architecture of which is completely described, to be simulated. It is based on the Finite Element Method in linear analysis. A model of trees biomechanical behaviour has been developed in non linear analysis. It allows the large displacements which can occur during a cycle of growth to be taken into account. It seems that this type of analysis is only justified in certain cases of high loads. Furthermore, important cost of calculation that it causes already turns out punishing for the simulation of a single tree.

The consideration of forested environment opens the way in study of the effects of the silviculture on the future shape of trees. In spatial scale of the stand, we limit the description of a tree to the trunk and the crown. Two models were implanted in the software platform CAPSIS with the aim to integrate "shape" aspects into spatially explicit models of stand growth. A model of trunks shape regulation, subjected to internal and external loads, was developed. It uses the Transfer Matrix Method of beams in hypothesis of small displacements. A first model of asymmetry of the crown growth was proposed. It is based on use of Voronoï diagrams to translate the effects of the spatial competition between trees on the crown development. Joint use of these two models opens the way in study of the existing relations between crown eccentricity and progressive evolution of trunks shape.

The problem of the models evaluation is approached in numerical and experimental point of view. It appears that this work remains suspended from the perfect knowledge of the studied individuals history.



Laboratoire de Rhéologie du Bois de Bordeaux
Domaine de l'Hermitage, BP n°10 – Pierroton
33610 CESTAS-GAZINET