

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par M. Fabien CASTANG

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

**SYNTHESE ROBUSTE DE FILTRES DE DIAGNOSTIC POUR LA SURVEILLANCE
A BASE DE MODELE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES ET INCERTAINS.**

Soutenue le : 24 janvier 2003

Après avis de :

MM. P. COIRAULT, Professeur, Université de Poitiers. **Rapporteur**
D. SAUTER, Professeur, Université Nancy I.

Devant la commission d'examen formée de :

MM. M. VERGE, Professeur à l'ENSAM **Président**
D. HENRY, Maître de Conférence à l'Université Bordeaux I **Rapporteur**
P. COIRAULT, Professeur à l'Université de Poitiers. **Examineurs**
M. MONSION, Professeur à l'Université Bordeaux I.
D. SAUTER, Professeur à l'Université Nancy I.
A. ZOLGHADRI, Maître de Conférence, Université Bordeaux I.

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué au sein de l'équipe Approche Robuste et Intégrée de l'Automatique, du Laboratoire d'Automatique et de Productique de l'Université Bordeaux I.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Michel Monsion, Professeur à l'Université Bordeaux I, directeur de thèse, pour m'avoir accueilli dans son équipe et pour m'avoir encadré et encouragé tout au long de ce travail.

Je remercie également Monsieur Ali Zolghadri, Maître de conférence à l'Université Bordeaux I, codirecteur de thèse, pour son encadrement et la confiance qu'il m'a accordée durant ces années. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour son soutien à l'élaboration de ce travail. Je me permets de saluer sa compétence dans les différents domaines de l'Automatique.

Je remercie chaleureusement Monsieur David, Henry Maître de conférence à l'Université Bordeaux I, pour son encadrement et pour les nombreuses discussions que nous avons eues tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Messieurs Benoît Bergeon, Professeur à l'Université Bordeaux I, Franck Cazaurang, Maître de conférence à l'Université Bordeaux I, ainsi que Stéphane Ygorra, Maître de conférence à l'Université Bordeaux I, pour m'avoir aidé à améliorer mes connaissances en automatique robuste et pour avoir instauré un climat de confiance et une ambiance conviviale.

Je remercie vivement Monsieur Patrick Coirault, Professeur à l'Université de Poitiers, tout comme Monsieur Dominique Sauter, Professeur à l'Université Nancy I, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter sur ce travail. J'adresse également mes plus sincères remerciements à Monsieur Michel Vergé, Professeur des Universités à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Paris qui m'honore de sa présence comme membre de Jury.

Enfin, je remercie très sincèrement Loïc Lavigne, qui fut durant toutes ces années un collègue et ami, dont la bonne humeur a contribué à ce travail.

Je terminerai en remerciant tous mes amis et ma famille, tout particulièrement mes deux sœurs, Samantha et Charlotte auxquelles je dédie ce mémoire.

"Une opinion n'est choquante que lorsqu'elle est une conviction."

Remy de Gourmont.

"l'expérience est le nom que chacun donne à ses erreurs."

Oscar Wilde.

"La vérité de demain se nourrit de l'erreur d'hier."

Antoine de Saint-Exupéry.

Sommaire

Introduction générale	1
------------------------------	----------

Chapitre 1

Problématique de la détection et localisation robustes de défaut.	5
1.1 - Introduction.	6
1.2 - Position du problème de surveillance à base de modèle.	6
1.3 - Formulation min/max des problèmes de DLRD.	10
1.4 - Génération de résidus sous critère d'optimisation min/max.	13
1.4.1 - Approche par projection dans l'espace de parité.	14
1.4.2 - Observateur de diagnostic.	16
1.4.2.1 - Techniques de synthèse.	17
1.4.2.2 - Limitations.	19
1.4.3 - Synthèse directe de filtres DLRD.	20
1.4.3.1 - Modélisation des systèmes incertains sous forme LFT.	20
1.4.3.2 - Schéma général de synthèse directe de filtres DLRD.	21
1.4.3.3 - Estimation robuste dans un contexte H_∞/μ .	22
1.4.3.4 - Filtre H_∞/H .	24
1.4.3.5 - Limitations de ces approches.	26
1.4.4 - Equivalence Filtre de DLRD/Observateur de diagnostic.	27
1.5 - Conclusion.	30

Chapitre 2

Synthèse de filtres DLRD par affinement itératif.	33
2.1 - Introduction.	34
2.2 - La valeur singulière structurée généralisée μ_g .	35
2.2.1 - Définition de la fonction μ_g .	37
2.2.2 - μ_g -analyse pour le diagnostic hors-ligne.	40
2.3 - Synthèse de filtres de DLRD par affinement itératif.	41
2.3.1 - 1 ^{er} étape: Estimation robuste.	43
2.3.1.1 - Résolution du problème d'estimation robuste par μ -synthèse.	43
2.3.1.2 - Résolution du problème d'estimation robuste par des techniques LMIs.	46
2.3.2 - 2 ^{ème} étape: Analyse des performances robustes en DLRD.	48
2.3.3 - Résumé de l'approche itérative	51
2.4 - Exemple	53
2.5 - Conclusion	64

Chapitre 3

Synthèse directe de filtres DLRD.	65
3.1 - Introduction	66
3.2 - Filtre de détection H_∞/H sur un procédé en boucle ouverte.	67
3.2.1 - Formulation du problème mixte H_∞/H .	67

3.2.2 - Résolution du problème à l'aide des techniques LMIs.	70
3.2.3 - Exemple	74
3.3 - Cas des systèmes commandés en boucle fermée.	81
3.3.1 - Analyse du problème de la DLRD pour les systèmes bouclés.	82
3.3.1.1 - DLRD en boucle fermée: cas nominal	83
3.3.1.2 - DLRD en boucle fermée: cas incertain.	84
3.3.2 - Résolution du problème de synthèse du filtre DLRD en boucle fermée.	85
3.3.3 - Exemple : procédé hydraulique 3 Tanks	89
3.4 - Conclusion	98
Chapitre 4	
Mise en œuvre, application au benchmark RCAM.	101
4.1 - Introduction	102
4.2 - Environnement RCAM	103
4.2.1 - Bloc "Aircraft"	104
4.2.2 - Blocs "Actuators" et "Wind & Turbulence"	106
4.2.2.1 - Définition du bloc "Actuators"	107
4.2.2.2 - Définition du bloc "Wind & Turbulence".	108
4.2.3 - Bloc "Controlleur".	109
4.2.4 - Bloc "Reference"	111
4.3 - Modélisation du mode longitudinal	112
4.4 - Synthèse d'un filtre de détection H_∞/H .	113
4.5 - Simulations temporelles	120
4.6 - Conclusion	122
Conclusions générales et perspectives	123
ANNEXE	
Transformations linéaires fractionnaires	128
AI.1 - Définition	128
AI.2 - Algèbre des LFTs	130
Définitions et propriétés des normes H_∞ et H.	132
AII.1 - Définitions	132
AII.2 - Propriétés	133
Compléments sur la modélisation RCAM	134
AIII.1 - Définitions des repères aérodynamiques	134
AIII.2 - Modèle d'état du mode longitudinal	135
AIII.3 - Correcteur Longitudinal de RCAM	138
Bibliographie	143

Table des figures

figure 1.1: Schéma général de génération de signaux indicateurs de défauts.....	7
figure 1.2: Schéma de principe à base d'observateur.....	16
figure 1.3: Représentation LFT du système incertain.....	21
figure 1.4: Schéma d'interconnexion standard pour la synthèse directe de filtre DLRD.....	21
figure 1.5: Schéma de synthèse d'une estimation robuste.....	23
figure 1.6: Schéma de synthèse d'un filtre H_∞/H	25
figure 1.7: Schéma d'analyse de performances en DLRD.....	25
figure 1.8: Structure observateur équivalente.....	27
figure 2.1 : Structure M- Δ	35
figure 2. 2: Analyse des performances robustes.....	37
figure 2.3: Structure $\tilde{M} - \tilde{\Delta}$	38
figure 2.4: Schéma d'analyse des performances robustes en DLRD.....	39
figure 2.5: Schéma d'interconnexion $\tilde{M} - \tilde{\Delta}_j$	39
figure 2.6: Problème de synthèse du filtre de détection.....	41
figure 2.7: Schéma associé au problème d'estimation robuste.....	43
figure 2.8: Schéma d'analyse des performances robustes.....	49
figure 2.9: Analyse des performances robustes en DLRD.....	50
figure 2.10: Organigramme de l'approche itérative.....	52
figure 2.11: Filtres formeurs H_d (-) et H_f (- -).....	54
figure 2.12: Profil fréquentiel du filtre de détection, itération I.....	55
figure 2.13: Valeur singulière max du transfert entre e et w_1 , itération I.....	56
figure 2.14: Analyse de la robustesse, itération I.....	56
figure 2.15: Valeur singulière min du transfert entre e et w_2 , itération I.....	57
figure 2.16: Analyse de la sensibilité robuste, itération I.....	57
figure 2.17: Profil fréquentiel du filtre de détection, itération II.....	58
figure 2.18: Valeur singulière max du transfert entre e et w_1 , itération II.....	58
figure 2.19: Analyse de la robustesse, itération II.....	59
figure 2.20: Valeur singulière min du transfert entre e et w_2 , itération II.....	59
figure 2.21: Analyse de la sensibilité robuste, itération II.....	60
figure 2.22: Profil fréquentiel du filtre de détection, itération III.....	61
figure 2.23: Valeur singulière max du transfert entre e et w_1 , itération III.....	61
figure 2.24: Analyse de la robustesse, itération III.....	61
figure 2.25: Valeur singulière min du transfert entre e et w_2 , itération III.....	62
figure 2.26: Analyse de la sensibilité robuste, itération III.....	62
figure 2.27: Simulations temporelles.....	63
figure 3. 1: Problème de synthèse fictif.....	68
figure 3.2: Schéma bloc du problème de synthèse fictif.....	71
figure 3.3: Profils fréquentiels de $\underline{\sigma}(T_{f_y}(j\omega))$ (-) et $\overline{\sigma}(T_{d_y}(j\omega))$ (- -).....	75

figure 3.4: Profils fréquentiels de $W_d(s)$ (en haut) et de $W_F(s)$ (en bas).	76
figure 3.5: Profil fréquentiel du filtre de détection.....	77
figure 3.6: Evolution de $\bar{\sigma}(T_{w_1e}(j\omega))$ (-) et $\bar{\sigma}(W_d(j\omega))$ (--)	77
figure 3.7: Evolution de la fonction μ	78
figure 3.8: Evolution de $\underline{\sigma}(T_{w_2e}(j\omega))$ (-) et de $\underline{\sigma}(W_f(j\omega))$ (--)	78
figure 3.9: Analyses de la sensibilité robuste.....	79
figure 3.10: Comparaison des résidus $e_3(t)$ (haut) et $e_4(t)$ (bas)	80
figure 3.11: Implantation d'un observateur de diagnostic dans un système bouclé.	81
figure 3.12: Problématique de DLRD pour les systèmes commandés en BF.	83
figure 3.13: Problème de synthèse de F(s): cas des systèmes commandés.	86
figure 3. 14: Problème de synthèse fictif, cas des systèmes commandés en boucle fermée. ...	87
figure 3.15: Procédé expérimental.	89
figure 3.16: Profils fréquentiels de W_{f_1} (-), W_{f_2} (.) et W_{f_3} (- -).....	93
figure 3.17: Profil fréquentiel de $F_1(s)$	94
figure 3.18: Profil fréquentiel de $F_2(s)$	95
figure 3.19: Profil fréquentiel de $F_3(s)$	95
figure 3.20: Analyse des objectifs de robustesse par la fonction μ : en haut F_1 , au centre F_2 , en bas F_3	96
figure 3.21: Analyse des performances robustes par la fonction μ_g : en haut F_1 , au centre F_2 , en bas F_3	97
figure 3.22: Comportement temporel des résidus en présence des défauts. En haut $e_1(t)$; au centre $e_2(t)$, en bas $e_3(t)$	98
figure 4.1: Système de surveillance appliqué au simulateur RCAM.	103
figure 4.2: Correcteur longitudinal $K_L(s)$	110
figure 4.3: $\bar{\sigma}(T_{q \rightarrow \delta_T})$ (.), $\bar{\sigma}(T_{W_V \rightarrow \delta_T})$ (--) et $\bar{\sigma}(T_{V_A \rightarrow \delta_T})$ (-).....	110
figure 4. 4: $\bar{\sigma}(T_{q \rightarrow \delta_{thi}})$ (.), $\bar{\sigma}(T_{W_V \rightarrow \delta_{thi}})$ (--) et $\bar{\sigma}(T_{V_A \rightarrow \delta_{thi}})$ (-)	111
figure 4.5: Trajectoire simulée sur RCAM.....	111
figure 4.6: Schéma d'interconnexion du mode longitudinal.....	113
figure 4.7: $\bar{\sigma}(T_{d \rightarrow V_A})$ (-) et $\bar{\sigma}(T_{f \rightarrow V_A})$ (--).....	114
figure 4.8: $\bar{\sigma}(T_{d \rightarrow u})$ (-) et $\bar{\sigma}(T_{f \rightarrow u})$ (--).....	115
figure 4.9 : Valeurs singulières du transfert entre \hat{z} et y	116
figure 4.10: Valeurs singulières du transfert entre \hat{z} et le u	116
figure 4.11: $\bar{\sigma}(T_{W_E \rightarrow e})$ en haut, et $\bar{\sigma}(T_{W_Z \rightarrow e})$ en bas.	117
figure 4.12: $\bar{\sigma}(T_{u_g \rightarrow e})$ en haut, et $\bar{\sigma}(T_{w_g \rightarrow e})$ en bas.....	118
figure 4.13: Analyses de la robustesse	119
figure 4.14: $\underline{\sigma}(T_{f_e})$ (-) et $\underline{\sigma}(W_f)$ (--).....	119
figure 4.15: Analyse de la sensibilité robuste	120
figure 4.16: Comportement du résidu, fonctionnement normal.	121
figure 4.17: Comportement du résidu, fonctionnement normal, variations paramétriques....	121
figure 4.18: Comportement du résidu, fonctionnement défaillant.	121

Liste des tables

table 2.1: Etude de la variance	63
table 3.1: Etude de la variance	80
table 4.1: Définitions des états	105
table 4.2: Définitions des sorties	105
table 4.3: Définitions des entrées	105
table 4. 4: Définitions des variations des paramètres de RCAM	106
table 4.5: Valeurs numériques de saturation des commandes	107

Introduction générale

Dans les méthodes modernes de conception des systèmes industriels automatisés, la maîtrise de la sûreté de fonctionnement, dès les premières phases de conception, occupe une place de plus en plus importante. La sûreté de fonctionnement pouvant être définie comme l'aptitude du système à effectuer les tâches pour lesquelles il a été conçu. Cette capacité peut être entravée par les défaillances ou les défauts sur le fonctionnement du système.

Les enjeux de la sûreté de fonctionnement sont essentiellement liés aux impératifs de sécurité au sens large (qui englobent la sécurité des hommes, de l'outil de travail et le respect de l'environnement) et aux gains de productivité résultant de l'accroissement de la disponibilité du système de production et de l'amélioration de la qualité de production. La problématique de la sûreté de fonctionnement des systèmes couvre un domaine très large et a fait l'objet d'un intérêt croissant de la part de la communauté scientifique depuis quelques années. Dans ce travail, nous nous intéressons à un sous-ensemble des tâches, destinées à assurer la sûreté de fonctionnement, qui constituent la fonction de surveillance. La surveillance est définie comme l'ensemble des actions mises en œuvre afin de détecter, de localiser et de diagnostiquer tout phénomène anormal. Ces actions sont élaborées à partir des techniques dites de DLD (Détection et Localisation de Défauts) ou FDI (Fault Detection and Isolation).

La problématique associée à la tâche de détection est relative à la mise en évidence d'événements qui affectent l'évolution d'un système surveillé ainsi qu'à la prise de décision quant à leur caractère normal ou anormal. La tâche de localisation consiste à analyser les événements de façon à pouvoir déterminer le où les composants défectueux du système (instruments de mesures, actionneurs, composants physiques...).

Ces dernières années, diverses méthodologies ont été développées pour répondre aux objectifs de la DLD. Les méthodes analytiques sont les plus répandues pour répondre à ces objectifs. Elles font appel à une connaissance du système constituée par la formulation explicite d'un modèle analytique du système à surveiller. Le principe de base est fondé sur la

prise d'informations, par le biais de capteurs, sur le processus à surveiller dont on dispose un modèle analytique. La comparaison entre le comportement réel du processus et le comportement prédit par le modèle, fournit des informations contenues dans un ensemble de signaux indicateurs de défauts (résidus). L'analyse (temporelle ou fréquentielle) de ces signaux permet de détecter et d'interpréter tout comportement anormal du système et de localiser son origine.

Le problème important qui se pose lors de la synthèse d'un système de surveillance à base de modèle, est de garantir la robustesse du vecteur de résidus vis-à-vis des erreurs de modélisation, et ceci afin de minimiser le taux de fausses alarmes et le taux de "non détection". Il s'agit du problème de DLRD (Détection et Localisation Robustes de Défauts). D'autre part, les performances d'un tel système se mesurent par sa sensibilité vis-à-vis des phénomènes dont l'effet peut être interprété comme un défaut, tout en minimisant le taux de "non-détection" ainsi que le "retard à la détection".

Cette thèse porte sur la synthèse directe de filtres DLRD développées pour les systèmes LTI (Linear Time Invariant), en se fondant sur la modélisation sous forme LFT (Linear Fractional Transformation) et les outils modernes de synthèse robuste. Nous proposons une méthodologie générale pour l'intégration simultanée des contraintes de robustesse (portant sur une classe générale d'incertitudes) et les spécifications de performances en termes de sensibilité pour la synthèse d'un système DLRD. On montre alors que les objectifs de synthèse peuvent être formulés dans un contexte standard H_∞/H . et que l'utilisation conjointe des techniques d'optimisation LMIs (Linear Matrix Inequalities) et de la valeur singulière structurée généralisée μ_g permet de résoudre le problème de synthèse. Dans un deuxième temps, nous montrons comment la méthodologie de synthèse proposée peut être étendue au cas des systèmes bouclés. On montre ainsi que l'intégration de la loi de commande dans le problème de DLD conduit à un problème d'ordre plus élevé et qui peut être encore résolu à l'aide des outils LMI/ μ_g . Ces travaux constituent une suite logique des travaux reportés dans (Henry, 1999) qui ont permis de poser les fondements d'une méthodologie générale en analyse (μ_g -analyse ou DLRD hors ligne) pour la surveillance robuste à base de modèle LFT.

La contribution de ce travail, centré sur la génération de vecteur de résidus, réside d'une part dans le développement de nouvelles techniques de synthèse robuste, et d'autre part, dans l'intégration de tests à base de μ_g au sein de la procédure de synthèse.

Le mémoire est structuré de la façon suivante:

Le premier chapitre est consacré à la formulation de la problématique de DLD. Notre attention se porte tout particulièrement sur les approches à base de modèle qui permettent aux résidus synthétisés d'avoir des propriétés de robustesse et de sensibilité. Nous nous attacherons à comparer et à mettre en évidence les limitations des approches à base d'observateur de diagnostic et à base de filtre DLD. Pour conclure ce chapitre, une structure équivalente entre un observateur de diagnostic et un filtre de détection est proposée. La méthode met en jeu la paramétrisation de Youla-Kucera.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié à une approche itérative permettant de réaliser, dans un contexte H_∞ , un filtre de détection dont l'erreur de filtrage vérifie les propriétés de robustesse et de sensibilité. Dans un premier temps, le problème de synthèse est résolu en incluant les contraintes de robustesse. Puis, dans un second temps les performances robustes sont testées à l'aide d'un test à base de μ_g . Si les objectifs de robustesse ou de sensibilité ne sont pas atteints, alors une nouvelle synthèse est effectuée. Un relâchement des contraintes de robustesse est alors réalisé, sur la zone de fréquence où l'effet du défaut apparaît, puis une nouvelle μ_g -analyse teste les performances du signal indicateur. Ainsi des itérations successives sont réalisées jusqu'à l'obtention d'un compromis acceptable robustesse/sensibilité.

La troisième partie est consacrée à une approche plus générale où les objectifs de sensibilité sont inclus dans l'étape même de la synthèse. On montre que si certaines contraintes de type H_∞ sont satisfaites, il est alors possible de synthétiser un filtre DLRD garantissant un niveau donné de performance. Le problème de synthèse est alors résolu à l'aide des techniques d'optimisation LMI (Linear Matrix Inequalities). Enfin, les tests basés sur les fonctions μ et μ_g sont utilisés pour conclure sur les performances robustes du signal indicateur de défaut. Cette approche est ensuite étendue au cas des systèmes commandés en boucle fermée. Il s'agit d'un problème difficile et souvent délaissé par la communauté FDI. Ainsi, nous montrons que l'utilisation du formalisme LFT, nous permet de résoudre le problème de diagnostic dans les systèmes bouclés à l'aide des mêmes outils (LMI/ μ_g) en intégrant le régulateur dans le schéma de synthèse. Un exemple basé sur un procédé hydraulique de laboratoire illustrera ce paragraphe.

Le quatrième chapitre, est consacré à l'application de ces méthodes sur le simulateur RCAM (Research Civil Aircraft Model) développé par le groupe GARTEUR (Group for

Aeronautical Research and Technology in EUROpe). La synthèse d'un filtre DLRD est effectuée après avoir intégré le régulateur (Autopilote) dans le schéma de synthèse, puis en appliquant la méthodologie développée dans le chapitre trois. Les résultats obtenus montrent que l'erreur de filtrage, prise comme résidu, permet de diagnostiquer un défaut "engine", tout en restant robuste vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations atmosphériques.

Chapitre 1

Problématique de la détection et localisation robustes de défaut.

1.1 - Introduction.

Les méthodes de surveillance à base de modèle ont considérablement évoluées au cours de ces dernières années. Ces techniques utilisent un modèle pour représenter le système à surveiller et pour générer des signaux indicateurs de défauts. Le vecteur de résidus généré par l'une de ces approches devra être non seulement sensible vis-à-vis des défauts à détecter mais aussi robuste vis-à-vis des perturbations exogènes et des écarts entre le modèle utilisé et le système physique.

La première partie de ce chapitre sera consacrée à la définition du problème DLRD, où l'on introduira les propriétés de robustesse et de sensibilité que doit posséder le vecteur de résidus pour permettre la détection et l'isolation des phénomènes considérés comme anormaux. Nous formulerons le problème général de la DLRD comme un problème de découplage approximatif, résultant d'un critère d'optimisation min/max.

Par la suite, une liste non exhaustive d'approches à base de modèle (espace de parité, observateurs de diagnostic, filtres de détections), qui tentent de résoudre cette problématique, sera présentée ainsi que leurs limitations spécifiques. Deux grandes familles de méthodes seront en particulier analysées: il s'agit des méthodes récentes de synthèse directe de filtre DLRD et des méthodes de synthèse d'observateur H_∞/H_2 . Enfin, nous présenterons un formalisme basé sur l'utilisation d'un paramètre libre de Youla, permettant d'unifier et montrer l'équivalence de ces deux familles.

1.2 - Position du problème de surveillance à base de modèle.

Ce paragraphe est dédié à la problématique de détection et localisation robustes de défauts dans un cadre général. Considérons le schéma de la figure 1.1, où d et f sont respectivement les vecteurs représentant les perturbations externes et les défauts, u et y sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie du système ; e étant le signal indicateur de défaut ou résidu obtenu par filtrage linéaire des signaux de commande et de sortie.

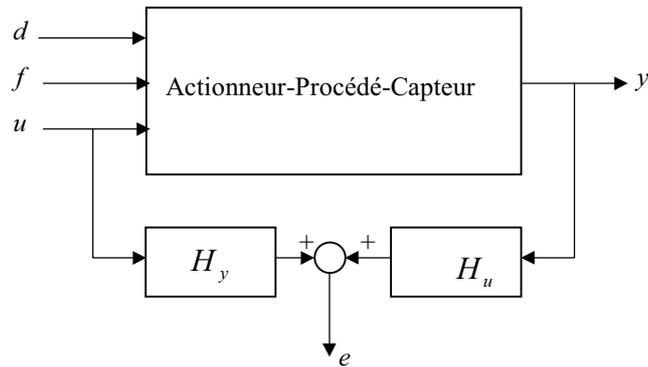


figure 1.1: Schéma général de génération de signaux indicateurs de défauts.

Le vecteur d contient l'ensemble des entrées inconnues, c'est à dire les signaux exogènes non maîtrisables. Le vecteur f représente les phénomènes considérés comme anormaux et entraînant une dégradation inacceptable de la performance du système.

Les terminologies " défaut " ou " défaillance " sont utilisées pour désigner " toute déviation non permise d'au moins une propriété ou d'un paramètre caractéristique " du système surveillé (voir par exemple Ploix, 1998). Les mauvais fonctionnements peuvent affecter les sous-systèmes ou des unités fonctionnelles constituant le système global. Ainsi la conception d'un système de DLD est non seulement basée sur un modèle du système à surveiller, mais aussi sur les informations concernant les "canaux d'action" des défauts.

Trois familles de défaillances sont couramment considérées :

- ✓ Les défauts capteurs qui affectent les sorties mesurées du système. Ils sont représentés comme une entrée additive dans l'espace des sorties.
- ✓ Les défauts actionneurs qui affectent, de façon additive ou multiplicative, les signaux de commande du système.
- ✓ Les défauts agissant sur le procédé, qui se traduisent par une variation anormale d'un ou de plusieurs composants du système. Ces défauts sont le plus souvent de type multiplicatif et dégradent le comportement dynamique du système.

La problématique générale de DLRD est de générer un vecteur de résidus qui soient à la fois :

- ✓ *Robustes* vis-à-vis des perturbations internes (variations paramétriques, dynamiques négligées) et externes (perturbations exogènes).
- ✓ *Sensibles* vis-à-vis des phénomènes dont l'effet peut être interprété comme un défaut.

Dans le cas des systèmes linéaires, le vecteur de résidus $e(t)$ peut s'exprimer comme :

$$e(t) = H_y y(t) + H_u u(t) \quad (1.1)$$

Les matrices de transfert H_y et H_u supposées stables (appartenant à l'ensemble des matrices de transfert rationnelles strictement propre, espace RH^∞), sont synthétisées de façon à minimiser l'effet de l'ensemble des perturbations sur le résidu tout en maximisant l'effet des défaillances sur ce même résidu.

On montre que, toutes les approches linéaires de génération de résidus sont des paramétrisations particulières de la relation (1.1) (voir (Frank et Ding, 1997) pour de plus amples détails). Dans le cas où il n'y a pas d'erreur de modélisation, la dynamique de tout générateur linéaire de résidus peut être décrite par:

$$e(s) = R(s)M(s)\left(G_d(s)d(s) + G_f(s)f(s)\right)N^{-1}(s) \quad (1.2)$$

où $G_d(s)$ et $G_f(s)$ sont les matrices de transfert respectives de d vers y et de f vers y , $R(s)$ est un filtre (le "post filter") et $(M(s), N(s))$ est une factorisation coprime à droite du modèle de transfert entre u et y , $G_u(s)$, telle que:

$$\begin{aligned} M(s) &= I - C(sI - A + HC)^{-1}H \\ N(s) &= D + C(sI - A + HC)^{-1}(B - HD) \end{aligned} \quad (1.3)$$

où (A, B, C, D) est une réalisation d'état correspondant à $G_u(s)$ et H est une matrice de gain telle que $A-HC$ soit stable.

En définissant $G_{rd}(s)$ et $G_{rf}(s)$ comme:

$$\begin{aligned} G_{rd}(s) &= M(s)G_d(s)N^{-1}(s) = D_d + C(sI - A + HC)^{-1}(B_d - HD_d) \\ G_{rf}(s) &= M(s)G_f(s)N^{-1}(s) = D_f + C(sI - A + HC)^{-1}(B_f - HD_f) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où (A_d, B_d, C_d, D_d) et (A_f, B_f, C_f, D_f) sont les réalisations d'état respectives de $G_d(s)$ et $G_f(s)$, le vecteur de résidus peut alors s'exprimer comme:

$$e(s) = R(s)(G_{rd}(s)d(s) + G_{rf}(s)f(s)) \quad (1.5)$$

Ainsi le problème général de synthèse de filtre DLD linéaire peut être formulé comme la recherche d'une matrice de transfert $R(s)$ stable et d'un gain H telle que $A-HC$ soit stable, de façon à satisfaire aux spécifications de robustesse et de sensibilité (Frank et Ding, 1997).

A la fin de ce chapitre, dans un contexte plus général puisque prenant en compte les erreurs de modélisation, nous établirons un résultat plus général pour la paramétrisation d'un filtre DLRD en termes d'un gain d'observateur H , et d'un paramètre de Youla $Q(s)$.

Soulignons que lorsque sont prises en compte les incertitudes de modélisation, le vecteur de résidus e est aussi fonction du vecteur de commande u . Ce qui nous amènera à distinguer deux cas, selon que le système surveillé est commandé en boucle ouverte ou en boucle fermée. En boucle ouverte u est parfaitement connu alors qu'en boucle fermée u est synthétisé par la loi de commande de façon à minimiser l'influence, sur les sorties à contrôler, des variations du système qu'elles soient normales ou anormales. Les objectifs de commande et de DLD étant de natures contradictoires, les objectifs de performances en DLD sont alors plus difficiles à atteindre si le système à surveiller est commandé en boucle fermée. Or, dans la littérature, les travaux en DLD prenant en compte l'existence du système de commande lors de la synthèse du système DLD, sont assez rares. Ce problème sera abordé au troisième chapitre de ce mémoire. Dans ce chapitre nous considérerons que le signal de commande u , est parfaitement connu.

Dans le cas des systèmes linéaires, quatre grandes méthodologies s'appuyant sur un modèle analytique ont été développées (voir par exemple Frank, 1990 ; Chen et Patton, 1999 ; Mangoubi, 1998 ; Ding et al. 2000b ; Edelmayer et Bokor, 2000 ; Frank, 2000) :

- ✓ L'approche à base de modèles paramétriques.
- ✓ L'approche par projection dans l'espace de parité.

- ✓ Les approches à base d'observateurs de diagnostic.
- ✓ Les approches basées sur la synthèse directe de filtres DLRD.

L'approche à base de modèles paramétriques est fondée sur une estimation des paramètres d'un modèle de représentation ou de comportement du système. La variation, à l'extérieur d'une zone de confiance de ces paramètres, est interprétée comme la manifestation d'une défaillance qui peut être détectée, avec un indice de confiance donné, par un test de décision (Iserman, 1984 ; Zolghadri, 1993).

Dans l'approche à base de vecteur de parité, le résidu est généré en projetant les données mesurées dans un espace tel que le résidu soit nul en l'absence de défaillance. (Voir par exemple Staroswiecki et Guerchouh, 1999 ; Gertler, 1997 ; Patton, 1997 ; Frank, 1997 ; Medvedev, 1995).

Dans une approche par observateur (voir par exemple Chen *et al.*, 1996 ; Ding et Guo, 1996 ; Louis Rambeau, 2001 ; Frank, 1990) tout comme dans une approche par synthèse directe de filtre DLRD (voir par exemple Niemann et Stoustrup, 1996 ; Mangoubi, 1998 ; Rank et Niemann, 1999 ; Ding *et al.*, 2000a ; Zolghadri *et al.*, 2001 ; Henry *et al.*, 2001), le résidu est défini comme étant la différence entre une combinaison linéaire des sorties ou des états et leurs estimations respectives.

De plus, dans certains cas, des relations d'équivalences fonctionnelles entre ces différentes approches ont été établies (voir par exemple Cocquempot, 1992 ; Nunigen *et al.*, 1996, 1997 ; Delmaire *et al.*, 1999).

1.3 - Formulation min/max des problèmes de DLRD.

Idéalement, le vecteur de résidus doit être nul en fonctionnement normal et significatif en présence d'une défaillance. Autrement dit, l'ensemble des perturbations d ne doit pas, contrairement à un défaut, perturber le résidu.

Si l'on considère que le système à surveiller est commandé en boucle ouverte, le signal de commande $u(t)$ est donc parfaitement connu et n'influe pas sur les propriétés du signal indicateur de défauts. Aussi, on admettra que le résidu $e(t)$ ne dépend que des vecteurs de perturbations d et de défaillances f , via une fonction vectorielle Ψ :

$$e(t) = \Psi(d(t), f(t)) \quad (1.6)$$

Les objectifs du problème de DLRD peuvent alors s'exprimer comme :

$$\begin{cases} \Psi(d(t), 0) = 0 \\ \Psi(d(t), f(t)) \neq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Ces objectifs expriment un parfait découplage entre les effets de d et de f . Structurellement, il est rare que l'on puisse atteindre cet objectif de découplage parfait, pour un système donné. C'est pourquoi la problématique de DLRD est redéfinie comme un problème de découplage approximatif :

$$\begin{cases} \Psi(d(t), 0) < \alpha \\ \Psi(d(t), f(t)) > \beta \end{cases} \quad (1.8)$$

où α et β sont les niveaux respectifs de robustesse vis-à-vis de d et de sensibilité vis-à-vis de f .

Autrement dit, d'un point de vue synthèse, le problème de DLRD consiste à construire des signaux indicateurs de défauts qui soient le plus robuste possible vis-à-vis des entrées inconnues (minimisation sous contraintes de type "gain max") et le plus sensible possible vis-à-vis de tout phénomène dont l'effet peut être interprété comme un défaut agissant sur le système (maximisation sous contraintes de type "gain min"). Il s'agit donc typiquement d'un problème d'optimisation min/max qui est équivalent à la minimisation du critère suivant :

$$J_{+/-} = \frac{\text{effet de } d \text{ sur } e}{\text{effet de } f \text{ sur } e} \quad (1.9)$$

Le problème de robustesse se traduit par la génération d'un vecteur de résidus e de telle sorte que le "pire cas" du rapport entre l'énergie de e et l'énergie bornée du vecteur des entrées inconnues soit minimisé :

$$\min \sup_{\|d\| \neq 0} \frac{\|e\|_2}{\|d\|_2} \quad (1.10)$$

Cette relation est équivalente à un problème de minimisation de norme H_∞ :

$$\min \|T_{de}(s)\|_\infty \quad (1.11)$$

ou encore :

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{de}(j\omega)) < \alpha \quad (1.12)$$

où $T_{de}(s)$ est la matrice de transfert entre le signal indicateur de défauts e et le vecteur des entrées inconnues d . De même, on peut considérer que la contrainte de sensibilité revient à générer un vecteur de résidus de telle sorte que le "meilleur cas" du rapport entre l'énergie de l'erreur d'estimation $\|e\|_2$ et l'énergie bornée du vecteur défaut $\|f\|_2$ soit maximisé :

$$\max \inf_{\|f\| \neq 0} \frac{\|e\|_2}{\|f\|_2} \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (1.13)$$

où Ω_f est une zone de fréquence spécifiée sur laquelle la sensibilité de e vis-à-vis de f doit être atteinte. Sous cette définition, l'équation (1.13) se traduit en un problème de maximisation de norme H . (un complément sur la définition de cette "norme" est proposé dans l'*Annexe II*) :

$$\max \|T_{fe}(s)\|_- \quad (1.14)$$

où $T_{fe}(s)$ est la matrice de transfert entre le signal indicateur de défauts e et le vecteur f . Le problème sous optimal H consiste à générer un résidu tel que la plus petite valeur singulière de T_{fe} soit maximisée sur une zone de fréquence finie :

$$\inf_{\omega} \underline{\sigma}(T_{fe}(j\omega)) > \beta \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (1.15)$$

Idéalement, pour obtenir un bon niveau de détection, le niveau de robustesse α doit être le plus petit possible. A l'inverse, le niveau de sensibilité β (qui assure une sensibilité minimale), doit être le plus grand possible. Ceci conduit à minimiser le critère suivant pour résoudre le problème de détection robuste :

$$J_{+/-} = \frac{\|T_{de}(s)\|_{\infty}}{\|T_{fe}(s)\|_-} \quad (1.16)$$

Le problème d'isolation robuste peut également être résolu par le critère (1.16) en redéfinissant le vecteur des entrées inconnues d . Pour ce faire, deux stratégies sont possibles :

- ✓ Stratégie de type GOS telle que les matrices de transferts $T_{de}(s)$ et $T_{fe}(s)$ sont partitionnées pour que le résidu soit insensible au $i^{ème}$ défaut et à l'ensemble des perturbations, tout en étant sensible aux autres défauts.
- ✓ Stratégie de type DOS où le partitionnement des matrices de transferts $T_{de}(s)$ et $T_{fe}(s)$ est tel que le résidu soit sensible au $i^{ème}$ défaut tout en étant insensible aux autres défauts et à l'ensemble des perturbations.

L'utilisation d'une technique GOS dans une logique de localisation est limitée au cas où un seul défaut survient (pas d'apparition simultanée de défauts). Seule une technique DOS peut localiser une apparition simultanée de plusieurs défauts (Frank, 1990).

1.4 - Génération de résidus sous critère d'optimisation min/max.

Les approches analytiques qui ont été développées pour minimiser le critère $J_{+/-}$ se basent souvent sur une utilisation des normes H_{∞} et H_1 afin de minimiser la plus grande valeur singulière de la transfert de transfert $T_{de}(s)$ tout en maximisant la plus petite valeur singulière de la matrice de transfert $T_{fe}(s)$. La minimisation de la norme H_{∞} est un problème bien maîtrisé dans le cadre des méthodes modernes de commande robuste (voir par exemple (Maciejowski, 1989 ; Zhou et al., 1995) pour plus de détails). La maximisation de la norme H_1 n'a été abordée que récemment (voir par exemple Chen et Patton, 1999 ; Louis Rambeau, 2001). Notons l'utilisation du vocable "norme H_1 " n'a de sens que si elle est définie sur un espace de fréquences fini (voir *Annexe II*).

Dans ce contexte, seul un outil de type valeur singulière structurée généralisée (μ_g) permettrait d'apporter une solution globale et directe pour la résolution de ce problème d'optimisation. Cet aspect novateur sera abordé au second chapitre. Les solutions mentionnées dans ce paragraphe ne permettent pas de résoudre directement un tel problème. La méthode la plus classique est de transformer le problème de gain min en un problème de gain max, pouvant être résolu dans un contexte H_{∞}/μ . Dans ce cadre, nous rappellerons les différentes approches qui ont été développées afin de résoudre la problématique de la DLRD sous le critère $J_{+/-}$ précédemment établi.

1.4.1 - Approche par projection dans l'espace de parité.

Ce concept est basé sur l'exploitation de la redondance analytique présente dans les équations d'états lorsque celles-ci sont écrites sur un horizon d'observation s (voir par exemple Staroswiecki et Guerchouh, 1999 ; Gertler, 1997; Frank,1990).

Considérons le modèle d'état discret :

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + E_1d(t) + K_1f(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + E_2d(t) + K_2f(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

où E_1 , E_2 , K_1 et K_2 sont des matrices de distribution de dimensions appropriées.

Dans ce modèle, les variations paramétriques sont approximées par des perturbations exogènes additives. En effet, considérons le modèle d'état du système en fonctionnement normal et non perturbé:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) &= C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $x \in R^n$, $u \in R^q$, $y \in R^m$ et le vecteur de paramètres $\theta \in R^p$. Il est toujours possible, en utilisant une décomposition en séries de Taylor au 1^{er} ordre, de séparer le modèle nominal et les perturbations paramétriques (Zolghadri et al., 1998):

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \left[A_0 + \sum_{j=1}^p A^j \delta\theta_j \right] x(t) + \left[B_0 + \sum_{j=1}^p B^j \delta\theta_j \right] u(t) \\ y(t) &= \left[C_0 + \sum_{j=1}^p C^j \delta\theta_j \right] x(t) + \left[D_0 + \sum_{j=1}^p D^j \delta\theta_j \right] u(t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

où $R^j = \frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta_j}$ pour $R = A, B, C, D$ et $j = 1 \dots p$, est calculé à $\theta = \theta_{\text{nominal}}$.

Les relations ci-dessus peuvent être transformées comme:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_0x(t) + B_0u(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_i^j \delta\theta_j x_i(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_i^j \delta\theta_j u_i(t) \\ y(t) &= C_0x(t) + D_0u(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n c_i^j \delta\theta_j x_i(t) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n d_i^j \delta\theta_j u_i(t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

où r_i^j est la i ème colonne de R^j pour $R = A, B, C, D$.

Les incertitudes paramétriques non pathologiques sont donc modélisées comme des entrées inconnues supplémentaires (augmentation de la dimension de d) avec les matrices de distribution connues. Notons que la matrice de transfert entre ce groupe d'entrées inconnues et la sortie y devient alors non stationnaire, ce qui rend ce type d'approximation inacceptable si les variations paramétriques surviennent avec une dynamique rapide.

Sur un horizon d'observation s , les équations d'état peuvent être mises sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(t-s) \\ y(t-s+1) \\ \vdots \\ y(t) \end{pmatrix}}_{y(t-s,t)} = OBSx(t) + COM_u \underbrace{\begin{pmatrix} u(t-s) \\ u(t-s+1) \\ \vdots \\ u(t) \end{pmatrix}}_{u(t-s,t)} + COM_d \underbrace{\begin{pmatrix} d(t-s) \\ d(t-s+1) \\ \vdots \\ d(t) \end{pmatrix}}_{d(t-s,t)} + COM_f \underbrace{\begin{pmatrix} f(t-s) \\ f(t-s+1) \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}}_{f(t-s,t)} \quad (1.21)$$

où OBS est la matrice d'observabilité d'ordre s , COM_u , COM_d et COM_f sont respectivement les matrices de commandabilité des quadruplés (A, B, C, D) , (A, E_1, C, E_2) et (A, K_1, C, K_2) . Le résidu est alors défini par :

$$r(t) = v^T (y(t-s, t) - COM_u u(t-s, t)) \quad (1.22)$$

où le vecteur de parité v est construit de telle sorte que :

$$\begin{cases} v^T COM_d = 0 \\ v^T COM_f \neq 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Les conditions issues de (1.23) impliquent un découplage parfait avec les perturbations. Il est plus réaliste de considérer un critère de découplage approximatif et de chercher à minimiser le critère $J_{+/-}$ défini par :

$$J_{+/-} = \frac{\|v^T COM_d\|_2^2}{\|v^T COM_f\|_2^2} \quad (1.24)$$

On montre que ce problème d'optimisation peut être formulé comme un problème de valeurs propres-vecteurs propres généralisé qui peut être résolu à l'aide du théorème de Gantmacher (voir par exemple Frank, 1990).

Les limitations d'une telle approche proviennent de la modélisation utilisée, qui ne permet pas de considérer les dynamiques négligées liées aux erreurs de modélisation, ni d'intégrer dans le critère $J_{+/-}$ des objectifs sur la dynamique d'évolution du vecteur de résidus. Certains travaux tentent de contourner le problème des dynamiques mal connues et/ou inconnues en utilisant des seuils adaptatifs dans la phase d'évolution des signaux indicateurs de défauts (voir Patton, 1997).

1.4.2 - Observateur de diagnostic.

L'idée de base est d'estimer une combinaison linéaire des sorties à partir d'un modèle du procédé. L'erreur d'estimation (directe ou pondérée) est alors prise comme résidu. Ce principe est illustré sur la figure 1.2, où le modèle du procédé est défini par le modèle d'état continu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_1d(t) + K_1f(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + E_2d(t) + K_2f(t) \end{cases} \quad (1.25)$$

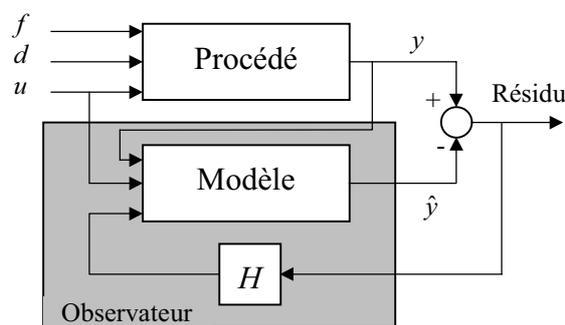


figure 1.2: Schéma de principe à base d'observateur.

Les équations de l'observateur sont alors :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Hy(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.26)$$

où H est le gain de l'observateur. En notant $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et $e(t) = Q(y(t) - \hat{y}(t))$, où Q est une matrice de structuration choisie suivant une stratégie de localisation, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A - HC)\tilde{x}(t) - HDu(t) + (E_1 - HE_2)d(t) + (K_1 - HK_2)f(t) \\ e(t) = Q(C\tilde{x}(t) + E_2d(t) + K_2f(t)) \end{cases} \quad (1.27)$$

Dans le cas où $D = 0$, l'erreur d'estimation de sortie est dépendante des vecteurs de perturbations et de défauts, et indépendante de la commande nominale du système u .

$$\begin{aligned} e(t) = Q & \left(C(sI - A + HC)^{-1} (E_1 - HE_2) + E_2 \right) d(t) \\ & + Q \left(C(sI - A + HC)^{-1} (K_1 - HK_2) + K_2 \right) f(t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dans le paragraphe suivant, nous présenterons deux approches récentes à base d'observateur permettant de déterminer le gain d'observateur H tout en minimisant le critère (1.9).

1.4.2.1 - Techniques de synthèse.

Une des premières approches décrite dans (Hou et Patton, 1996), consiste à exprimer le critère (1.9) à l'aide des normes H_∞/H et à utiliser des techniques d'optimisation LMIs (Linear Matrix Inequalities) pour sa résolution.

Dans (Hou et Patton, 1996), la norme $\| \cdot \|_-$ est définie comme:

$$\| T_{fe} \|_- = \underline{\sigma}(T_{fe}(0)) \quad (1.29)$$

Cette définition est différente de la définition donnée en *Annexe II*, qui est la définition communément admise dans la communauté FDI.

Cette approche résout donc le problème de DLRD en garantissant un niveau de sensibilité minimal à $\omega = 0$, ce qui permet de maximiser le gain statique de $T_{fe}(s)$. En revanche, elle ne permet pas d'imposer une contrainte sur la dynamique de $T_{fe}(s)$, ce qui constitue un handicap majeur.

L'observateur H_∞/H développé par (Louis Rambeaux, 2001), permet de minimiser la norme H_∞ du transfert T_{de} et de maximiser la norme H du transfert $T_{fe}(s)$ sur un espace fréquentiel fini. Cette approche comprend deux étapes: la première consiste à synthétiser un observateur robuste permettant de générer un résidu robuste vis-à-vis des perturbations, tout en maximisant la sensibilité vis-à-vis des défaillances. La seconde consiste à construire un seuillage optimum du résidu qui prend en compte les incertitudes de type paramétrique. Le

gain d'observateur H est alors la solution de deux LMIs. Une première associée aux contraintes de robustesse (1.12) et une seconde associée à la contrainte de sensibilité minimale (1.15). L'existence d'une matrice P symétrique définie positive ainsi que d'une matrice L solution des LMIs (1.30) et (1.31) ci-dessous, permet de déduire le gain de l'observateur.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - (QC)^T L^T - LQC + (QC)^T (QC) & PE_1 - LQE_2 + (QC)^T (QE_2) \\ (PE_1 - LQE_2 + (QC)^T (QE_2))^T & (QE_2)^T (QE_2) - \alpha^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.30)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - (QC)^T L^T - LQC - (QC)^T (QC) & PK_1 - LQK_2 - (QC)^T (QK_2) \\ (PK_1 - LQK_2 - (QC)^T (QK_2))^T & \beta^2 I - (QK_2)^T (QK_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.31)$$

Ce gain, qui est donné par $H=P^{-1}L$, garantit les niveaux de performances nominales prédéfinis en robustesse et en sensibilité. Pour optimiser cette méthode, des pondérations sur T_{dy} et T_{fy} (matrices de transfert respectives entre les entrées perturbatrices et les défaillances, et la sortie y) peuvent être introduites de façon à spécifier l'espace des fréquences sur lequel les performances doivent être optimum.

L'approche développée par (Chen et *al.*, 1996, Chen et Patton, 1999) propose de synthétiser le gain d'observateur H dans un contexte H_∞ , comme la solution d'un problème d'optimisation multi-objectifs en empilant toutes les contraintes de robustesse et tous les objectifs de performances; par exemple :

✓ Contrainte de sensibilité :

$$J_1 = \max_H \inf_{\omega \in [\omega_1 \ \omega_2]} \underline{\sigma} \left(QC(j\omega I - A + HC)^{-1} (K_1 - HK_2) + QK_2 \right) \quad (1.32)$$

Cet objectif qui est un problème de maximisation est transformé en un problème de minimisation en utilisant la propriété sur les valeurs singulières : $\bar{\sigma}(A^{-1}) = \underline{\sigma}(A)$. Le critère J_1 devient alors :

$$J_1 = \min_H \sup_{\omega \in [\omega_1 \ \omega_2]} \bar{\sigma} \left(\left[QC(j\omega I - A + HC)^{-1} (K_1 - HK_2) + QK_2 \right]^{\dagger} \right) \quad (1.33)$$

✓ Contrainte de robustesse :

$$J_2 = \min_H \sup_{\omega \in [\omega_1 \ \omega_2]} \bar{\sigma} \left(QC(j\omega I - A + HC)^{-1} (E_1 - HE_2) + QE_2 \right) \quad (1.34)$$

- ✓ Contrainte de maximisation du gain statique entre le résidu et les défauts :

$$J_3 = \min_H \|A - HC\|_\infty \quad (1.35)$$

- ✓ Contrainte de placement de pôles afin d'imposer la dynamique du résidu.
- ✓ Contrainte sur la localisation des défauts.

Tout comme dans le paragraphe précédent, des matrices de pondérations sont attribuées à chaque contrainte de façon à optimiser les performances du résidu. La technique de résolution qui est proposée s'appuie sur un algorithme génétique.

1.4.2.2 - Limitations.

Les techniques de synthèse à base d'observateur décrites plus haut (et de façon plus générale dans les références citées), proposent des solutions pour minimiser le critère (1.9). Chacune de ces approches comporte des limitations spécifiques.

La limitation principale de l'approche développées par (Louis Rambeaux, 2001) est principalement liée au fait qu'une synthèse dans un contexte H_∞ se révèle souvent conservatrice. Une analyse *a posteriori* serait donc nécessaire pour quantifier le degré de conservatisme et pour tester les performances robustes de l'observateur de diagnostic synthétisé. De plus, aucune contrainte sur la dynamique d'évolution du vecteur de résidus n'est intégrée dans la procédure de synthèse. Les limitations de l'approche (Chen et Patton, 1999) qui construit un observateur H_∞/H tout en introduisant une contrainte sur la dynamique de reconstruction du résidu, peut ainsi se révéler conservatrice vu le nombre élevé de contraintes. Tout comme l'approche de (Louis Rambeaux, 2001), aucune analyse n'est effectuée pour tester les performances robustes du résidu. Il est à noter également que de façon générale, seule une classe restreinte d'incertitudes, les incertitudes dites structurées, peuvent être prises en compte dans la phase de génération des résidus. Toutes les approches à base d'observateurs (ou d'espace de parité), utilisant un mécanisme de découplage approximatif, supposent que les matrices de distribution des entrées inconnues sont "connues" ou bien qu'elles peuvent être estimées.

Il faut également souligner que dans le cas des systèmes incertains, l'observateur de diagnostic synthétisé verra ses performances modifiées si le système surveillé est commandé

en boucle fermée par un régulateur. En effet comme nous l'avons déjà mentionné, la boucle de commande a pour effet de minimiser l'influence des défauts sur le vecteur de résidus.

1.4.3 - Synthèse directe de filtres DLRD.

En s'appuyant sur le formalisme LFT, la conception d'un estimateur robuste dans un contexte H_∞ a été introduite par plusieurs auteurs (voir par exemple Appleby, 1991a, 1991b ; Mangoubi et al., 1992, 1995 ; Grigoriadis et Watson, 1997). Mais ce n'est que récemment que des techniques d'estimation robuste ont été utilisées dans un cadre DLRD. Il s'agit, le plus souvent, d'intégrer des contraintes de sensibilité au sein de ces techniques, afin que l'erreur (pondérée) d'estimation puisse bénéficier d'une sensibilité nominale vis-à-vis des défaillances (Niemann et Stoustrup, 1998, 2000 ; Rank et Niemann, 1999).

1.4.3.1 - Modélisation des systèmes incertains sous forme LFT.

Dans ce formalisme, la modélisation de l'écart dynamique entre le système et son modèle nominal est basée sur la notion de feed-back. La famille de modèles peut alors se représenter comme le modèle nominal bouclé par des incertitudes de modèle. Ces incertitudes de modèle se décomposent habituellement en deux catégories. Les incertitudes non structurées, pour lesquelles on ne connaît qu'une borne supérieure dans le domaine fréquentiel et les incertitudes structurées qui modélisent principalement les incertitudes sur les paramètres du modèle nominal. Le formalisme LFT permet d'exprimer le système incertain comme une LFT d'une matrice $P(s)$ bouclée sur un bloc d'incertitude Δ (figure 1.3). Ce bloc d'incertitude pourra être soit une matrice quelconque dans le cas d'une approche non structurée, soit une matrice diagonale par bloc dans le cas d'une approche structurée. Cette matrice est construite à l'aide de blocs diagonaux traduisant une ou plusieurs incertitudes :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \text{blocdiag} \left(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+1}}, \Delta_1^c, \dots, \Delta_{m_c}^c \right) \right\} \quad (1.36)$$

où $\delta_i^r \in \mathbb{R}$ et $\delta_i^c \in \mathbb{C}$ définissent les ensembles scalaires répétés réels et complexes et $\Delta_i^c \in \mathbb{C}$ constituent l'ensemble des matrices pleines complexes.

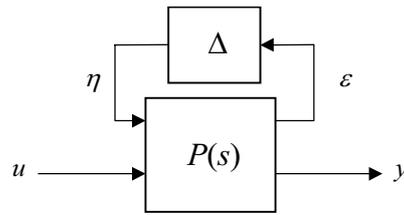


figure 1.3: Représentation LFT du système incertain.

La matrice de transfert $P(s)$ est partitionnée de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

avec $P_{22}(s) = G_0(s)$, où $G_0(s)$ est le modèle nominal du procédé.

L'expression analytique de la LFT haute de la matrice de transfert $P(s)$ et du bloc Δ est alors:

$$F_u(P(s), \Delta) = P_{21}(s)\Delta(I - P_{11}(s)\Delta)^{-1}P_{12}(s) + P_{22}(s) \quad (1.38)$$

Un complément sur le formalisme LFT est donné dans l'Annexe I.

1.4.3.2 - Schéma général de synthèse directe de filtres DLRD.

Le problème de synthèse du filtre DLRD, $F(s)$, peut être représenté par le schéma bloc suivant :

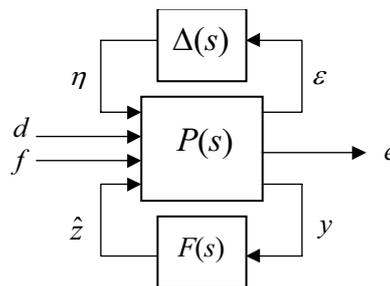


figure 1.4: Schéma d'interconnexion standard pour la synthèse directe de filtre DLRD

$P(s)$ est un modèle augmenté comprenant le modèle nominal ainsi que des pondérations dynamiques associées aux incertitudes. $y \in R^m$ est la mesure de sortie, Δ est un bloc structuré

diagonal représentant l'ensemble des erreurs de modélisation (incertitudes paramétriques et dynamiques négligées), tel que :

$$\Delta \in \underline{\Delta} \quad (1.39)$$

d et f représentent respectivement l'ensemble des perturbations exogènes et des défauts additifs. $z \in R^p$ est une combinaison linéaire des états mesurables $x(t)$, telle que :

$$z(t) = Mx(t) \quad (1.40)$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état du système augmenté $P(s)$.

L'erreur d'estimation e , prise comme résidu, est définie par :

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t) \quad (1.41)$$

où \hat{z} représente une estimation de z .

Le modèle augmenté $P(s)$ peut être représenté par les équations d'états :

$$P := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\eta(t) + E_1d(t) + K_1f(t) \\ \varepsilon(t) = C_1x(t) + D_{11}\eta(t) + T_d d(t) + T_f f(t) \\ e(t) = Mx(t) - \hat{z}(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}\eta(t) + E_2d(t) + K_2f(t) \end{cases} \quad (1.42)$$

où toutes les matrices de distribution sont supposées connues et de dimension appropriées.

L'objectif consiste à synthétiser un filtre DLRD $F(s)$, tel que l'erreur d'estimation e soit robuste vis-à-vis des perturbations d , tout en étant sensible vis-à-vis des défauts f . Ces objectifs devront être atteints pour tout bloc Δ borné :

$$\begin{cases} \|T_{de}(j\omega)\|_{\infty} < \alpha \\ \|T_{fe}(j\omega)\|_{-} > \beta \end{cases} \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad \forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (1.43)$$

1.4.3.3 - Estimation robuste dans un contexte H_{∞}/μ .

Considérons dans un premier temps, le problème d'estimation robuste de z , sans aucun objectif de DLD. L'estimation robuste consiste à reconstruire une combinaison linéaire des

états ou des sorties. Minimiser l'erreur d'estimation dans un contexte H_∞ revient à minimiser la plus grande valeur singulière du transfert entre l'erreur d'estimation et les perturbations internes et externes.

Considérons les équations (1.42) avec $f = 0$. L'objectif est donc de synthétiser un filtre $F(s)$, stable, de telle façon que l'erreur d'estimation, $z - \hat{z}$, soit robuste vis-à-vis des entrées inconnues d , et ceci $\forall \Delta \in \underline{\Delta}$.

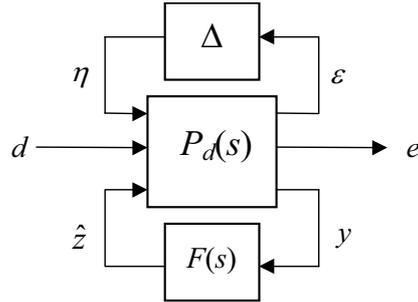


figure 1.5: Schéma de synthèse d'une estimation robuste

Ce problème d'estimation peut être résolu, soit à l'aide de l'algorithme de Glover-Doyle, par D - F itération (procédure analogue à D - K itération en commande), soit à l'aide des techniques LMIs (voir par exemple Huaizhong et Minyue, 1997 ; Henry et *al.*, 2001).

L'application du théorème sur la valeur singulière structurée μ au schéma de la figure 1.5, permet ensuite de tester si les performances robustes sont effectivement atteintes. En effet, si la valeur singulière structurée est inférieure à α , alors les conditions de robustesse (1.12)

$\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$ sont respectées :

$$\sup_{\omega} \mu_{\hat{\Delta} \in \underline{\Delta}}(T_{de}(j\omega)) \leq \alpha \Rightarrow \|F_l(\hat{\Delta}, T_{de})\|_\infty \leq \alpha \quad (1.44)$$

avec:

$$\begin{cases} T_{de} = F_l(P_d, F) \\ \hat{\Delta} = \text{diag}(\Delta, \Delta_d) \\ \Delta_d \in \mathbb{C}^{\dim(e) \times \dim(d)} \end{cases} \quad (1.45)$$

$F_l(P_d, F)$ désigne la LFT basse de la matrice de transfert $P_d(s)$ et du filtre de détection $F(s)$.

La valeur singulière structurée est donc bien adaptée pour tester la robustesse de l'erreur d'estimation vis-à-vis du vecteur de perturbations d . De plus, il est également possible de l'utiliser lors de la procédure de synthèse (μ -synthèse) (voir par exemple Appleby, 1991a, 1991b ; Grigoriadis et Watson, 1997 ; Zolghadri et *al.*, 2001) afin de réduire le conservatisme du filtre synthétisé.

Seule la problématique de l'estimation robuste vient d'être abordée dans ce paragraphe. Une extension de ces résultats est nécessaire afin de résoudre, dans son intégralité, le problème DLRD, qui contient en plus des contraintes de robustesse, des objectifs de DLD.

1.4.3.4 - Filtre H_∞/H_- .

L'objectif de cette approche est donc de compléter la méthodologie précédente afin d'intégrer dans la synthèse une contrainte de sensibilité. Dans (Niemann et Stoustrup, 1998 ; Rank et Niemann, 1999), les auteurs proposent une estimation du vecteur de défauts, \hat{f} , qui est prise comme signal indicateur de défauts. Le filtre DLRD, $F(s)$, est synthétisé de façon à :

- ✓ maximiser la plus petite valeur singulière du transfert entre f et \hat{f} (contrainte de sensibilité).
- ✓ minimiser la plus grande valeur singulière du transfert entre d et \hat{f} (contrainte de robustesse).

L'objectif de sensibilité revient à assurer $f \approx \hat{f}$ sur une large bande de fréquence.

Afin de générer une estimation du signal f sous les contraintes de maximisation et minimisation définies ci-dessus, (Niemann et Stoustrup, 1998) ont proposé le schéma de synthèse suivant:

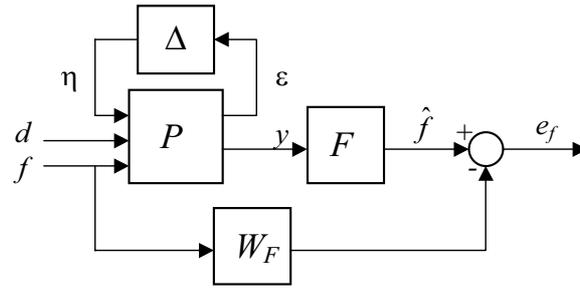


figure 1.6: Schéma de synthèse d'un filtre H_∞/H .

où W_F est une matrice de pondération définissant un objectif sur la sensibilité de \hat{f} vis-à-vis de f .

(Rank et Niemann, 1999) ont montré que minimiser la fonction de transfert entre e_f et f , est une condition suffisante pour maximiser le transfert entre \hat{f} et f :

$$\sup_{\omega} \overline{\sigma}(T_{fe_f}(j\omega)) \leq \lambda - \beta \Rightarrow \inf_{\omega} \underline{\sigma}(T_{\hat{f}f}(j\omega)) \geq \beta \quad (1.46)$$

λ et β étant des scalaires, avec:

$$\inf_{\omega} \underline{\sigma}(W_F(j\omega)) \geq \lambda \quad (1.47)$$

Le filtre de DLRD est donc synthétisé pour que les contraintes sur la robustesse (1.12) et sur la sensibilité (1.15) soient atteintes $\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$. Les techniques usuelles de résolution d'un problème de minimisation avec des contraintes de type "gain max" sont alors appliquées à ce problème et une μ -analyse, *a posteriori*, sur le schéma de la figure 1.7, permet d'évaluer la robustesse des performances obtenues.

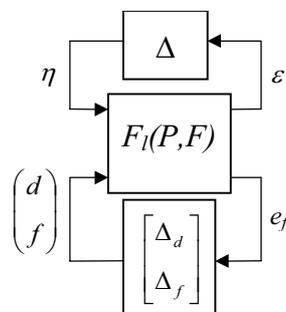


figure 1.7: Schéma d'analyse de performances en DLRD

L'utilisation de la valeur singulière structurée, μ indique, après normalisation du problème, que les objectifs de sensibilité et de robustesse sont atteints pour une famille de modèles bornés :

$$\sup_{\omega} \mu_{\tilde{\Delta} \in \underline{\Delta}}(T(j\omega)) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \|T_{de_f}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \\ \|T_{fe_f}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \end{cases} \quad \forall \Delta \in \underline{\Delta}, \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (1.48)$$

où

$$\begin{cases} T = F_l(P, F) \\ \tilde{\Delta} = \text{diag}\left(\Delta, \begin{bmatrix} \Delta_d^T & \Delta_f^T \end{bmatrix}^T\right) \\ \Delta_f \in \mathbb{C}^{\dim(e) \times \dim(f)} \end{cases} \quad (1.49)$$

Dans (Kilsgaards et *al.*, 1996 ; Stoustrup et Grimble, 1997 ; Stoustrup et *al.*, 1997 ; Niemann et Stoustrup, 1998 ; Stoustrup et Niemann, 1999), ce principe a été étendu à la synthèse simultanée d'un système de commande/diagnostic. Cependant, une telle approche risque de s'avérer très conservatrice en raison de l'accumulation des contraintes de commande et de DLD, souvent contradictoires.

1.4.3.5 - Limitations de ces approches.

La synthèse directe de filtres DLRD par résolution du critère d'optimisation (1.16), décrites dans le paragraphe précédent, a pour principal avantage de considérer une large classe d'incertitudes. Mais, dans le cas où le système est incertain et commandé en boucle fermée, cette méthodologie ne peut pas prendre en compte l'effet des signaux de commande sur le vecteur de résidus. De plus, ces approches n'incluent aucune contraintes sur le régime dynamique du vecteur de résidus lors de la synthèse. Cette dernière contrainte peut être introduite dans la synthèse via la construction de régions LMIs comme dans (Henry et *al.*, 2001). Notons que la condition qui permet de transformer la contrainte de gain min en une contrainte de gain max (1.46) est une condition suffisante, ce qui a pour inconvénient d'augmenter le conservatisme de la solution dans la mesure où elle n'est pas nécessaire. En effet, si le test de la valeur singulière structurée μ (1.48) est supérieur à 1 (en supposant que

les contraintes sur la robustesse sont atteintes), alors à la vue de la condition suffisante (1.45), on ne peut conclure quant à la faisabilité de la contrainte de sensibilité. En effet :

$$\begin{cases} \|T_{de}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \\ \sup_{\omega} \mu_{\tilde{\Delta} \in \Delta}(T(j\omega)) > 1 \end{cases} \Rightarrow \|T_{f \rightarrow e_f}(j\omega)\|_{\infty} > 1 \quad (1.50)$$

Cependant le fait que $\|T_{f \rightarrow e_f}(j\omega)\|_{\infty} > 1$ n'implique pas systématiquement que $\|T_{\hat{f}}(j\omega)\|_{-} < 1$.

1.4.4 - Equivalence Filtre de DLRD/Observateur de diagnostic.

Dans ce paragraphe, nous établissons le lien entre les deux grandes familles de synthèse exposées aux paragraphes 1.4.2 et 1.4.3. Il s'agit d'un lien qui permet d'établir l'équivalence fonctionnelle entre un filtre DLRD obtenu à partir d'une synthèse directe et un observateur de diagnostic.

Ce résultat est basé sur un résultat bien connu en commande qui stipule que tout régulateur stabilisant a une structure équivalente "Observateur/Régulateur". Plus récemment, il est montré dans (Alazard et Apakarian, 1999) que tout compensateur d'ordre quelconque a une équivalence LQG.

Partant de ces résultats, nous montrons que "tout filtre DLRD a une structure d'observateur avec un paramètre de Youla".

Considérons la structure illustrée sur la figure 1.8:

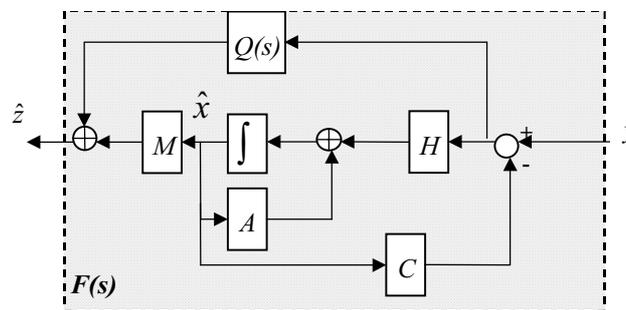


figure 1.8: Structure observateur équivalente

où A , B , C sont respectivement les matrices d'évolution, de commande et de sortie d'une réalisation d'état d'un modèle nominal du système et M une matrice de structuration définie dans (1.40). $Q(s)$ est le paramètre de Youla et H est la matrice de gain de l'observateur.

L'objectif est de déterminer le gain H et une réalisation (A_q, B_q, C_q, D_q) de $Q(s)$ en fonction des matrices d'état du filtre F , définies comme :

$$F : \begin{cases} \dot{x}_F(t) = A_F x_F(t) + B_F y(t) \\ \hat{z}(t) = C_F x_F(t) + D_F y(t) \end{cases} \quad (1.51)$$

La structure présentée sur le schéma de la figure 1.8, admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_q & -B_q C \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_q \\ H \end{bmatrix} y \\ \hat{z} = \begin{bmatrix} C_q & M - D_q C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ \hat{x} \end{bmatrix} + D_q y \end{cases} \quad (1.52)$$

Soit T une transformation linéaire non singulière de l'état telle que :

$$x_F = T\hat{x} \quad (1.53)$$

En injectant cette égalité dans (1.51), on a :

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1} A_F T \hat{x} + T^{-1} B_F y \quad (1.54)$$

En identifiant terme à terme les coefficients de (1.52) et de (1.51), on trouve :

$$\begin{cases} T^{-1} A_F T = (A - HC) \\ T^{-1} B_F = H \end{cases} \quad (1.55)$$

Ce qui conduit à une équation de Sylvester dont la résolution permet de déterminer la matrice T :

$$A_F T - T A + B_F C = 0 \quad (1.56)$$

Soit

$$A_F = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

la décomposition de Schur de la matrice A_F , où $F_{11} \in C^{(m-n) \times (m-n)}$ et $F_{22} \in C^{n \times n}$, n est la dimension de l'état du système et m la dimension de l'état du filtre. Introduisons le changement de variable suivant :

$$x_F = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} T \quad (1.58)$$

En injectant (1.58) dans les équations (1.51) et (1.56), on obtient :

$$\dot{w}_1 = F_{11}w_1 + F_{12}w_2 + V_1^* B_F y \quad (1.59)$$

$$\dot{w}_2 = F_{22}w_2 + V_2^* B_F y \quad (1.60)$$

$$T_1 A - F_{11}T_1 - F_{12}T_2 = V_1^* B_F C \quad (1.61)$$

$$T_2 A - F_{22}T_2 = V_2^* B_F C \quad (1.62)$$

Si l'on pose

$$w_2 = T_2 \hat{x} \quad (1.63)$$

alors, il vient avec (1.60) et (1.62)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + T_2^{-1}V_2^* B_F (y - C\hat{x}) \quad (1.64)$$

De façon similaire, on établit à partir de (1.59) et (1.61), le résultat suivant:

$$\dot{w}_1 = F_{11}(w_1 - T_1 \hat{x}) + V_1^* B_F (y - C\hat{x}) + T_1 A \hat{x} \quad (1.65)$$

Posons à présent le changement de variable suivant

$$x_q = w_1 - T_1 \hat{x} \quad (1.66)$$

il vient, en utilisant les relations (1.65) et (1.66):

$$\dot{x}_q = F_{11}x_q + (V_1^* B_F - T_1 T_2^{-1} V_2^* B_F)(y - C\hat{x}) \quad (1.67)$$

Les équations (1.51), (1.63) et (1.66) impliquent alors:

$$x_F = [V_1 \quad T] \begin{bmatrix} x_q \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Les équations (1.52), (1.64) et (1.46), permettent de déterminer le gain H de l'observateur ainsi que la réalisation (A_q, B_q, C_q, D_q) du paramètre de Youla:

$$\begin{cases} H = (V_2^* T)^{-1} V_2^* B_F \\ C_F T = M - D_q C \\ A_Q = V_1^* A_F V_1 \\ B_Q = V_1^* (I_{m \times m} - T (V_2^* T)^{-1} V_2^*) B_F \\ C_Q = C_F V_1 \\ D_Q = D_F \end{cases} \quad (1.69)$$

Remarque: Dans le cas très particulier où l'ordre du système considéré est égal à l'ordre du filtre F ($m=n$), le paramètre de Youla est nul. On cherche alors simplement la solution de l'équation de Sylvester (1.56) sous la contrainte $C_F T = M$.

Cette équivalence entre un filtre de DLRD et une structure d'observateur, complète, en l'étendant au cas des systèmes incertains, celle proposée par (Frank et Ding, 1997) où les auteurs ont montré que la dynamique de tout générateur linéaire de résidus pouvait être paramétrisée à l'aide d'un gain d'observateur H et d'une matrice de transfert $R(s)$ stable tel que $A-HC$ soit stable.

1.5 - Conclusion.

Dans ce chapitre, le problème général de la DLRD a été formulé comme un problème de découplage approximatif, conduisant à un critère d'optimisation min/max. Nous avons présenté dans ce contexte les principales approches pour résoudre ce problème et nous avons souligné les limitations de chacune. Nous avons également montré l'équivalence entre "un filtre de DLRD" et "une structure d'observateur".

Les méthodes récentes de synthèse directe de filtres de DLRD, basées sur les techniques H_∞/μ et LMI, offrent un cadre général et standard pour intégrer l'ensemble des

objectifs de DLRD, aussi bien en robustesse qu'en performances. De plus, elles permettent d'intégrer une large classe d'incertitudes à l'aide du formalisme LFT.

Cependant, en matière d'analyse et de "validation" des résultats de synthèse, ces approches souffrent d'un manque de cadre général. En effet, la valeur singulière structurée μ peut être utilisée pour tester la robustesse du vecteur de résidus, mais elle ne permet pas de tester la sensibilité robuste de ce même résidu sans introduire un conservatisme, qui peut rendre le résultat inutilisable d'un point de vue pratique.

Ce cycle synthèse-analyse implique la mise en œuvre d'outils appropriés, propres au problème de diagnostic robuste, et qui permettent de retoucher le filtre DLRD à la vue des critères de validation.

Dans le chapitre 2, une procédure de test et d'analyse est intégrée à la démarche de synthèse de filtres DLRD. L'élément central de tests de validation est basé sur le concept de valeur singulière structurée généralisée μ_g .

Chapitre 2

Synthèse de filtres DLRD par affinement itératif.

2.1 - Introduction.

Les théories récentes de commande robuste fournissent de nombreux résultats (en stabilité et en performances robustes), établis pour différents types d'incertitudes qui peuvent être prises en compte par le formalisme LFT. Dans ce travail, nous utiliserons ce formalisme afin de modéliser le système incertain et de synthétiser un filtre DLRD. Les procédures de synthèse que nous proposerons dans ce chapitre et dans le chapitre suivant s'appliquent à un modèle augmenté qui contient le modèle nominal et une description des erreurs de modèle pour le diagnostic, ainsi que les différentes fonctions de pondération. La détermination de l'ensemble de ces éléments est déduite d'une démarche de modélisation orientée diagnostic. En effet, bien que le formalisme LFT s'applique aussi bien en commande qu'en diagnostic, l'intégration des objectifs de diagnostic ou de commande dans la démarche de modélisation conduit à des modèles LFT différents. En effet, un régulateur influence l'état du système à commander et affecte donc la stabilité du système bouclé. Ainsi, la prise en compte des incertitudes de modélisation en commande via le formalisme LFT, a pour objectif principal d'assurer la stabilité robuste. Dans un deuxième temps, il s'agit également, si possible, d'assurer des performances robustes pour le système commandé. D'autre part, si la synthèse du régulateur est faite à partir du modèle nominal, les dynamiques inconnues et/ou mal connues peuvent déstabiliser le système bouclé. La situation est différente pour la synthèse d'un système DLRD. Le système DLRD est en boucle ouverte par rapport au système à surveiller et donc n'a aucun effet sur la stabilité de celui-ci. C'est donc essentiellement pour les objectif "performances robustes" que le modèle LFT est utilisé.

L'analyse et la validation du système DLRD consiste à décider si les spécifications de performances en terme de sensibilité pour l'ensemble des dynamiques mal connues et/ou inconnues sont satisfaites. C'est à cet aspect primordial, qui manque dans la quasi-totalité des travaux récents publiés dans la littérature, que nous allons apporter une solution générale dans les deux chapitres suivants.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter la valeur singulière structurée généralisée μ_g qui permet de résoudre un problème d'optimisation min-max. Cet outil sera utilisé pour construire un test qui permet de conclure sur les performances robustes du vecteur de résidus. La démarche de synthèse proposée correspond à une procédure d'affinement itératif, effectuée en deux étapes. Dans la première étape, nous proposerons de résoudre le

problème d'estimation robuste par μ -synthèse et à l'aide des techniques LMIs. La seconde étape consiste à analyser les performances robustes du filtre DLRD synthétisé à l'aide d'un test développé à base de μ_g . Un affinement itératif entre l'étape de synthèse et l'étape d'analyse robuste permet alors de construire un vecteur de résidus respectant les contraintes de robustesse et de sensibilité. Un exemple de simulation didactique (masse-ressort-amortisseur) illustrera cette approche itérative.

2.2 - La valeur singulière structurée généralisée μ_g .

La valeur singulière structurée généralisée μ_g introduite par (Newlin et Smith, 1998) a été initialement formulée pour résoudre le problème d'invalidation de modèle. Cet outil permet de résoudre un problème d'optimisation min-max, problème que l'on rencontre naturellement, comme on l'a vu, dans la synthèse d'un filtre de DLRD: on cherche à minimiser l'effet des entrées inconnues sur le vecteur de résidus tout en maximisant l'effet des défauts sur ce même vecteur, et ceci pour l'ensemble des incertitudes dynamiques modélisées par le bloc Δ .

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons la définition de la valeur singulière μ et ensuite la généralisation de celle-ci, μ_g , ainsi que ses propriétés les plus importantes. Il s'agit d'un outil fondamental qui sera utilisé tout au long de ce chapitre et du chapitre suivant.

La notion de valeur singulière structurée μ a été introduite initialement par (Doyle, 1982) pour analyser la stabilité robuste des systèmes multivariables incertains (μ -analyse).

Définition 2.1: *La valeur singulière structurée μ*

Considérons une matrice M constante bouclée avec un bloc $\Delta \in \underline{\Delta}$:

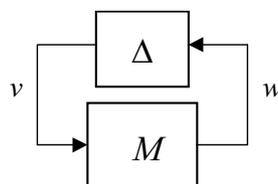


figure 2.1 : Structure $M-\Delta$

La valeur singulière structurée μ est définie comme étant l'inverse de la valeur minimale de la norme de la matrice complexe et constante Δ appartenant à $\underline{\Delta}$ qui rend $(I-M\Delta)$ singulière soit :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) = \left(\min_{\Delta \in \underline{\Delta}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0 \} \right)^{-1} \quad (2.1)$$

$\mu_{\underline{\Delta}}(M) = 0$ s'il n'existe pas de matrice $\Delta \in \underline{\Delta}$ telle que $I - M\Delta$ soit singulière. ◆

(Fan *et al.*, 1991) donnent une définition équivalente de la μ :

Définition 2.2: (Fan *et al.*, 1991)

La valeur singulière structurée $\mu_{\underline{\Delta}}(M)$ d'une matrice M constante sur la structure $\underline{\Delta}$ est égale à:

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) = \max_{\|v\|=1} \left\{ \gamma : \|v_i\| \gamma \leq \|w_i\|, \quad \forall i \in I_{mr+mc+mc}, \quad mC \neq 0 \right\} \quad (2.2)$$

◆

L'association de ces définitions avec le théorème du petit gain, conduit au théorème suivant sur la stabilité robuste structurée :

Théorème 2.1: (Petit gain structuré).

Soit la famille de systèmes bouclés (M, Δ) de la figure 2.1, où M est à présent une matrice de transfert stable et $\Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1/\gamma$. La famille de systèmes bouclés (M, Δ) est stable si et seulement si $\forall \omega, \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \gamma$. ◆

Ce théorème s'applique également au cas des performances robustes. Dans ce cas, le bloc Δ contient des blocs fictifs représentant les spécifications de performances pour le système bouclé. En effet, si l'on considère le schéma suivant:

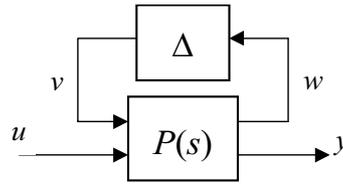


figure 2. 2: Analyse des performances robustes.

où la partition de $P(s)$ est donnée dans (1.36).

Alors, $F_u(P, \Delta)$ est stable et $\sup_{\omega} \bar{\sigma}(F_u(P, \Delta)) < 1$ si et seulement si $\sup_{\omega} \mu_{\tilde{\Delta}}(P(j\omega)) < 1$, où $\tilde{\Delta} = \text{diag}(\Delta, \Delta_F)$, et où Δ_F est un bloc fictif complexe plein bouclant les signaux u et y .

Toutes normalisations faites, si la quantité $\mu_{\text{stabilité}}$ (ou $\mu_{\text{performance}}$) est supérieure à 1 pour une ou plusieurs fréquences spécifiées, on peut conclure, pour ces fréquences, à la singularité du système $M-\Delta$ (par abus de langage, on parle de l'instabilité du système $M-\Delta$). Ceci signifie, dans le contexte "stabilité robuste", qu'il existe une perturbation appartenant à la structure $\underline{\Delta}$ qui peut déstabiliser le système bouclé $P_{11}(s)$. Dans le contexte "performances robustes", cela signifie que le critère de performance robuste est violé pour ces fréquences.

Remarque: La mesure de la fonction μ peut être vue comme étant l'inverse de la taille du plus petit bloc $\Delta \in \underline{\Delta}$ pour laquelle le système (M, Δ) est déstabilisé et/ou les performances robustes ne sont plus atteintes. Le filtre DLRD n'a aucun effet sur la stabilité robuste du système. Par la suite, les tests de robustesse ne concernent qu'un problème de performance robuste.

2.2.1 - Définition de la fonction μ_g .

Nous avons vu que la valeur singulière structurée μ est une mesure du plus petit bloc d'incertitude Δ , telle qu'il existe une solution non triviale aux équations de bouclage du système $M-\Delta$ (figure 2.1). Essentiellement, il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes de type gain max (i.e. $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1/\gamma$).

Dans un problème μ_g , on cherche à résoudre un problème d'optimisation où certains éléments de Δ (notés $\tilde{\Delta}_J$) satisfont une contrainte de gain max (i.e. $\bar{\sigma}(\tilde{\Delta}_J) \leq 1/\gamma$) et où le reste des éléments (notés $\tilde{\Delta}_K$) satisfont une contrainte de gain min (i.e. $\bar{\sigma}(\tilde{\Delta}_K) \geq \gamma$).

Soit une matrice constante \tilde{M} bouclée par un bloc $\tilde{\Delta}$, tous deux partitionnés comme l'illustre la figure 2.2 :

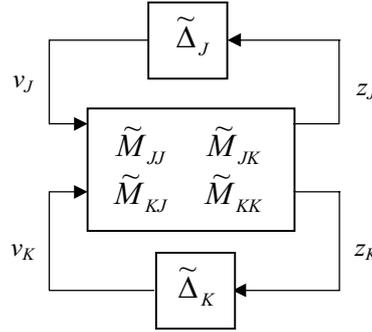


figure 2.3: Structure $\tilde{M} - \tilde{\Delta}$

où $\tilde{\Delta}$ appartient à la structure $\tilde{\Delta} = \text{diag}(\tilde{\Delta}_J, \tilde{\Delta}_K)$, telle que :

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_J = \text{blocdiag} \left(\delta_1^r I_{k_1}, \dots, \delta_{m_{rJ}}^r I_{k_{m_{rJ}}}, \delta_1^c I_{k_{m_{rJ}+1}}, \dots, \delta_{m_{cJ}}^c I_{k_{m_{rJ}+m_{cJ}}}, \Delta_{J1}^c, \dots, \Delta_{Jm_{cJ}}^c \right) \\ \tilde{\Delta}_K = \text{blocdiag} \left(\Delta_{K1}^c, \dots, \Delta_{K m_{cK}}^c \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Définition 2.3: La valeur singulière structurée généralisée μ_g :

$\mu_{g\tilde{\Delta}}(\tilde{M})$ est une fonction à valeur réelle positive de la matrice \tilde{M} par rapport à la structure $\tilde{\Delta} = \text{diag}(\tilde{\Delta}_J, \tilde{\Delta}_K)$ définie de la façon suivante :

$$\mu_{g\tilde{\Delta}}(M) := \max_{\|v\|=1} \left\{ \gamma : \begin{cases} \|v_j\| \gamma \leq \|z_j\|, & j = 1, \dots, m_{\tilde{\Delta}_J}, m_{cJ} \neq 0 \\ \|z_k\| \gamma \leq \|v_k\|, & k = 1, \dots, m_{cK} \end{cases} \right\} \quad (2.4)$$

$\mu_{g\tilde{\Delta}}(\tilde{M})$ est définie sur le domaine (μ_g) donné par :

$$\tilde{M} \in \text{dom}(\mu_g) \Leftrightarrow \tilde{M}_{KK} v_K = 0 \Rightarrow v_K = 0 \quad (2.5)$$

autrement dit $\tilde{M} \in \text{dom}(\mu_g)$ si et seulement si $v_K \in \text{Ker}\{\tilde{M}_{KK}\}$ alors $v_K = 0$. \blacklozenge

La valeur singulière structurée généralisée μ_g peut être interprétée comme étant une mesure du plus petit bloc $\tilde{\Delta}_J$ et du plus grand bloc $\tilde{\Delta}_K$ telles qu'il existe une solution aux équations de bouclage associée à la structure $\tilde{M} - \tilde{\Delta}$ (figure 2.3).

Fondamentalement, le problème de synthèse de filtres DLRD peut donc être formulé à l'aide de l'outil μ_g . Il s'agit de trouver une solution au schéma augmenté de la figure 2.4, où Δ représente l'ensemble des incertitudes, et Δ_f est un bloc représentant les objectifs de performances en DLRD.

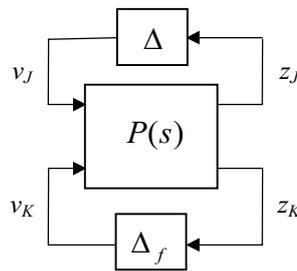


figure 2.4: Schéma d'analyse des performances robustes en DLRD.

Nous proposerons une procédure de synthèse itérative pour résoudre ce problème au paragraphe (2.3.2).

Une propriété intéressante de la μ_g , qui sera appliquée par la suite au problème de diagnostic est donnée par le théorème suivant:

Théorème 2.2: (Newlin et Smith, 1998)

On considère le schéma d'analyse suivant:

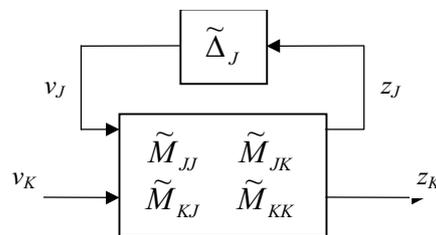


figure 2.5: Schéma d'interconnexion $\tilde{M} - \tilde{\Delta}_J$

On suppose que $\mu_{\tilde{\Delta}_J}(\tilde{M}_{JJ}) < 1/\beta$ où β est un scalaire positif tel que $\bar{\sigma}(\tilde{\Delta}_J) \leq 1/\beta$ et où $\tilde{\Delta}_J$ est la structure associée à $\tilde{\Delta}_J$. De plus, nous supposons que $\tilde{M} \in \text{dom}(\mu_g)$. Alors:

$$\min_{\substack{\tilde{\Delta}_J \in \tilde{\Delta}_J \\ \bar{\sigma}(\tilde{\Delta}_J) \leq 1/\beta}} \underline{\sigma}(F_u(\tilde{M}, \tilde{\Delta})) > 1/\beta \text{ si et seulement si } \mu_{g_{\tilde{\Delta}}}(\tilde{M}) < \beta \quad \blacklozenge$$

La définition de la valeur singulière structurée généralisée (2.4) ne permet pas de calculer facilement sa valeur numérique (en effet, comme dans le cas de la μ , le calcul de μ_g est un problème "NP-hard"). On cherche alors à approcher la valeur de $\mu_{g_{\tilde{\Delta}}}(\tilde{M})$ en l'encadrant par une borne inférieure γ_{lb} et une borne supérieure γ_{ub} , soit:

$$\gamma_{lb} \leq \mu_{g_{\tilde{\Delta}}}(\tilde{M}) \leq \gamma_{ub} \quad (2.6)$$

La borne inférieure, γ_{lb} , est obtenue à l'aide d'un algorithme de la famille des "Power Algorithm" dont la convergence n'est pas garantie pour toutes structures $\tilde{\Delta}$. La borne supérieure, γ_{ub} , est la solution d'un problème d'optimisation convexe, que l'on résout à l'aide des techniques LMIs. Comme nous le verrons par la suite, nous nous intéresserons aux cas où la fonction μ_g est inférieure à un scalaire. Le calcul de la borne supérieure sera donc suffisant.

Le lecteur intéressé pourra trouver un complément sur le calcul de l'indicateur μ_g dans (Newlin et Smith, 1998; Henry, 1999).

Avant de présenter cette démarche, nous rappelons les résultats établis en μ_g -analyse dans le cadre du diagnostic hors ligne des systèmes multivariables incertains. Pour de plus amples détails sur ce sujet, se référer à (Henry et al., 2002a).

2.2.2 - μ_g -analyse pour le diagnostic hors-ligne.

Dans (Henry, 1999 ; Henry et al., 2002a), le problème de contrôle de diagnostic hors-ligne a été posé comme un problème d'analyse de cohérence entre la famille de modèles mise sous forme LFT, et un jeu de données expérimentales prélevées sur le système lors d'un cycle de fonctionnement. L'analyse repose sur l'évaluation de la valeur singulière structurée généralisée, μ_g , en incorporant simultanément une contrainte de gain max et une contrainte de gain min. Le calcul de μ_g fournit une réponse en termes d'existence d'un modèle appartenant à

la famille LFT, et d'une source de perturbations exogènes correspondant aux hypothèses du modèle, tels que le jeu de données réelles mesurées soit "explicable". Une analyse fréquentielle *a posteriori* de la fonction μ_g où le calcul de la fonction μ_g -sensibilité permet de localiser la défaillance et de fournir une aide au diagnostic. En résumé, les résultats établis dans (Henry, 1999; Henry et al., 2002) se traduisent par la mise en œuvre de tests à base de μ_g pour la détectabilité (sensibilité), d'une procédure " μ_g -analyse" pour la détection robuste et du calcul des fonctions de μ_g -sensibilité pour l'isolation robuste. De plus, ces résultats relatifs à la problématique de DLRD, ont permis d'établir une analogie avec certains théorèmes généraux sur les performances robustes, bien connus dans le cadre de l'analyse des systèmes bouclés en commande robuste (Henry et al., 2002a).

2.3 - Synthèse de filtres de DLRD par affinement itératif.

La méthodologie, qui est développée dans ce paragraphe, est basée sur une succession d'itérations entre une procédure d'estimation robuste et une μ_g -analyse, jusqu'à l'obtention des performances requises.

Pour cela, considérons à nouveau le modèle augmentée $P(s)$. Toutes les incertitudes de modélisation sont représentées par la matrice $\Delta \in \underline{\Delta}$ (voir l'équation 1.36). Les contenus fréquentiels des perturbations et des défauts sont modélisés par des filtres formeurs et intégrés dans le modèle, ainsi que toutes les fonctions de pondération associées aux diverses incertitudes :

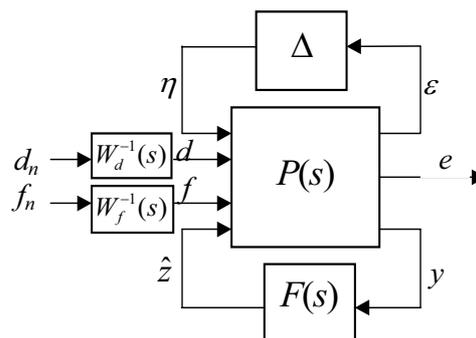


figure 2.6: Problème de synthèse du filtre de détection.

Les signaux d_n et f_n sont des signaux normalisés. W_d et W_f sont des fonctions de pondération stables et à inverse stables représentant respectivement, les *objectifs* de robustesse vis-à-vis

des perturbations exogènes et de sensibilité vis-à-vis des défauts. On rappelle les équations d'état associées au modèle augmenté $P(s)$:

$$P := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\eta(t) + E_1d(t) + K_1f(t) \\ \varepsilon(t) = C_1x(t) + D_{11}\eta(t) + T_d d(t) + T_f f(t) \\ e(t) = My(t) - \hat{z}(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}\eta(t) + E_2d(t) + K_2f(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Le problème que l'on cherche à résoudre consiste à synthétiser un filtre DLRD stable $F(s)$ tel que:

$$F : \begin{cases} \dot{x}_F(t) = A_F x_F(t) + B_F y(t) \\ \hat{z}(t) = C_F x_F(t) + D_F y(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.9)$$

$$\|T_{de}(j\omega)\|_{\infty} < \|W_d(j\omega)\|_{\infty} \quad (2.10)$$

$$\|T_{fe}(j\omega)\|_{-} > \|W_f(j\omega)\|_{-} \quad (2.11)$$

De plus, on suppose que la condition de détectabilité suivante est satisfaite (voir chapitre I):

Soit e une fonction vectorielle de d et f : $e = \Psi(d, f)$. Pour tout scalaire $\nu > 0$, $\exists \rho > \nu$ tel que $\|\Psi(d, 0)\|_2 \leq \rho \|d\|_2 \quad \forall d$ et $\|\Psi(d, f)\|_2 \geq \nu \|f\|_2 \quad \forall d$ et $\forall f$.

La réalisation de la contrainte (2.10) sous la condition (2.9) est un problème classique d'estimation robuste. Tandis que la réalisation de la contrainte (2.11) sous les conditions (2.10) et (2.9) est un problème de gain min.

La méthodologie de synthèse proposée dans ce chapitre est la suivante :

- ✓ Dans un premier temps, on détermine une réalisation du filtre $F(s)$ en résolvant un problème d'estimation robuste.
- ✓ Dans un deuxième temps, les performances robustes sont analysées à l'aide d'un test à base de μ_g .

Ces deux étapes sont effectuées itérativement jusqu'à l'obtention d'un filtre de détection $F(s)$ satisfaisant l'ensemble des contraintes (2.9) à (2.11).

2.3.1 - 1^{er} étape: Estimation robuste.

Le problème d'estimation robuste consiste à estimer une combinaison linéaire des sorties mesurables du procédé. L'erreur d'estimation doit être robuste vis-à-vis des perturbations externes et pour l'ensemble des incertitudes de modèle $\Delta \in \underline{\Delta}$.

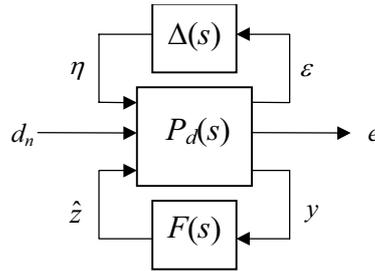


figure 2.7: Schéma associé au problème d'estimation robuste

Le but est donc de synthétiser un filtre de d'estimation $F(s)$ stable pour que la contrainte de robustesse (2.10) soit satisfaite $\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$.

2.3.1.1 - Résolution du problème d'estimation robuste par μ -synthèse.

La technique de μ -synthèse employée pour la synthèse de $F(s)$ peut être comparée à la procédure de "D-K" itération employée dans le cadre de la synthèse de régulateur H_{∞} (nous appellerons cette procédure "D-F" itération par analogie à la "D-K" itération).

Soit la réalisation d'état suivante associée à $P_d(s)$:

$$P_d = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\eta(t) + E_1d_n(t) \\ \varepsilon(t) = C_1x(t) + D_{11}\eta(t) + T_d d_n(t) \\ e(t) = z(t) - \hat{z}(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}\eta(t) + E_2d_n(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

où $z = My$.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- H_1 : La paire (A, C_2) est détectable.
- H_2 : $\forall \omega \in \mathfrak{R}$, $\begin{bmatrix} A - j\omega I_n & E_1 \\ C_2 & E_2 \end{bmatrix}$ est de plein rang colonne.
- H_3 : Pour simplifier les résultats théoriques présentés ici, on suppose que $\begin{pmatrix} D_{11} & T_d \\ MD_{21} & ME_2 \end{pmatrix} = D_{d11} = 0$.

L'hypothèse H_3 n'est pas restrictive (Doyle, 1982) il existe toujours un changement de variable applicable à la réalisation (2.12) permettant de se ramener au cas $\begin{pmatrix} D_{11} & T_d \\ MD_{21} & ME_2 \end{pmatrix} = 0$. Ce changement de variable définit alors une nouvelle réalisation de $P_d(s)$, mais, par abus de notation, nous continuerons à noter ses matrices d'états de façon identique.

Sous ces conditions, il existe un filtre $F(s)$ tel que $\|F_l(P_d, F)\|_\infty < \gamma \quad \forall \Delta : \|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ si et seulement s'il existe une matrice Y symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati suivante (voir Doyle, 1982, Doyle *et al.*, 1989):

$$Y = RIC \begin{bmatrix} (A - B_d D_{d21}^T C_2)^T & \gamma^2 C_d^T C_d - C_2^T C_2 \\ -\tilde{B}\tilde{B}^T & -(A - B_d D_{d21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

où γ est un scalaire, et :

$$\begin{cases} B_d = [B_1 & E_1] \\ \tilde{B} = B_d (I_n - D_{d21}^T D_{d21}) \\ C_d = [C_1^T & C_2^T M^T]^T \\ D_{d11} = \begin{bmatrix} D_{11} & T_d \\ MD_{11} & ME_2 \end{bmatrix} \\ D_{d21} = [D_{21} & E_2] \\ D_{d12} = [0 & -I] \\ L_\infty = -(B_d D_{d21}^T + Y C_2^T) \end{cases} \quad (2.14)$$

Le filtre $F(s)$ s'écrit alors:

$$F = F_l(J, Q) = J_{11} + J_{12}Q(I_n - J_{22}Q)^{-1}J_{21} \quad (2.15)$$

où $Q(s)$ est une matrice de transfert stable et strictement propre, satisfaisant la contrainte :

$$\|Q(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad (2.16)$$

et $J(s) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$ est une matrice de transfert dont la réalisation d'état est donnée par:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_J & B_J \\ \hline C_J & D_J \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A + L_\infty C_2 & -L_\infty & \gamma^{-2} Y C_d^T D_{d12} \\ \hline -D_{d12}^T C_d & 0 & I \\ C_2 & I & 0 \end{array} \right] \quad (2.17)$$

Il paraît alors évident que si $\gamma \leq 1$, le filtre de détection synthétisé satisfait les contraintes (2.9) et (2.10).

Notons que dans la famille des estimateurs robustes que l'on peut concevoir (correspondant à des choix différents de $Q(s)$), rien n'indique que l'estimateur central ($Q(s)=0$) (voir Doyle *et al.*, 1989) qui est la solution que l'on retient généralement est le meilleur choix. Cependant, il n'existe pas de procédures systématiques pour le choix de $Q(s)$.

Comme nous l'avons déjà souligné, cette procédure de synthèse ne tient pas compte de la structure et de la nature de Δ , d'où un caractère conservateur de l'approche. Pour remédier à ce problème, on introduit des matrices (inversibles) de mise à l'échelle, D_L et D_R , dans le schéma de synthèse de façon à minimiser $\|D_L F_l(P_d, F) D_R\|_\infty$ (voir Appleby, 1991a).

La procédure de μ -synthèse consiste alors à effectuer des itérations successives entre la synthèse du filtre $F(s)$ et la détermination des matrices de mise à l'échelle D_L et D_R pour un ensemble de pulsations donné Ω . Pour un $\omega \in \Omega$, il vient :

$$\begin{array}{c} \min_F \bar{\sigma}(D_L F_l(P_d, F) D_R) \leq \gamma \\ \min_{D_L, D_R} \bar{\sigma}(D_L F_l(P_d, F) D_R) \leq \gamma \end{array} \quad (2.18)$$

Ces itérations sont réalisées pour chaque $\omega \in \Omega$, jusqu'à l'obtention de la condition suivante :

$$\sup_\omega \mu_\Delta(D_L F_l(P_d, F) D_R) < \gamma \quad (2.19)$$

où γ doit être inférieur à 1 pour que le filtre DLRD, $F(s)$, soit une solution au problème d'estimation robuste normalisé.

A l'issue des itérations, on obtient un ensemble de points fréquentiels caractérisant le filtre $F(s)$. Le filtre final est alors obtenu par "fitting" sur ces points.

L'inconvénient majeur d'une telle synthèse provient de l'ordre élevé du filtre obtenu. En effet, l'utilisation des matrices de mise à l'échelle peut augmenter considérablement l'ordre du filtre. De plus, aucune garantie de convergence de l'algorithme ne peut être donnée. En règle générale, si la solution fournie par la résolution de l'équation de Riccati est "proche" de la solution optimale, l'expérience montre que la procédure de μ -synthèse converge.

2.3.1.2 - Résolution du problème d'estimation robuste par des techniques LMIs.

Sous l'hypothèse que la paire (A, C_2) soit détectable, le Lemme Réel Borné permet de conclure sur la résolution du problème d'estimation robuste.

Théorème 2.3: (Boyd et al., 1994)

Soit $(A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl})$ les matrices d'état d'un système $F_l(P_d, F)$. Alors $\|F_l(P_d, F)\|_\infty < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive X telle que :

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^T X + X A_{cl} & X B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.20)$$

◆

En reprenant les notations utilisées dans le paragraphe précédent, les matrices d'état de $F_l(P_d, F)$ sont données par :

$$F_l(P_d, F) = \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & B_d & \\ B_F C_2 & A_F & B_F D_{d21} & \\ \hline C_d + D_{d12} D_F C_2 & D_{d12} C_F & D_{d11} + D_{d12} D_F D_{d21} & \end{array} \right] \quad (2.21)$$

Sous cette forme, les paramètres à synthétiser n'apparaissent pas de façon linéaire, ce qui pose un problème de "faisabilité" de la LMI (2.20). De façon à rendre ces paramètres de synthèse linéaires entre eux, les changements de variables suivants sont effectués.

Partitionnons la matrice X de la façon suivante :

$$X = \begin{bmatrix} R & N \\ N^T & X_1 \end{bmatrix} \text{ et } X^{-1} = \begin{bmatrix} S & M \\ M^T & X_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

tel que $MN^T = I - RS$, et où X_1 et X_2 sont des matrices vérifiant l'équation $N^T M + X_1 X_2 = I$.

Et considérons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \hat{A} = NA_F M^T + NB_F C_2 S + RAS \\ \hat{B} = NB_F \\ \hat{C} = C_F M^T + D_F C_2 R \\ \hat{D} = D_F \end{cases} \quad (2.23)$$

Ce changement de variables permet d'exprimer l'inégalité (2.20) linéaire en les matrices \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} et \hat{D} (voir aussi Scherer et *al.*, 1997).

Tout calcul fait, on aboutit aux deux LMI suivantes:

$$\begin{pmatrix} AS + SA^T & \hat{A}^T + A & B_d & (C_d S + D_{d12} \hat{C})^T \\ (\hat{A}^T + A)^T & A^T R + RA + \hat{B} C_2 + (\hat{B} C_2)^T & RB_d + \hat{B}_d D_{d21} & (C_d + D_{d12} \hat{D} C_2)^T \\ B_d^T & (RB_d + \hat{B}_d D_{d21})^T & -\gamma I_n & (D_{d11} + D_{d12} \hat{D} D_{d21})^T \\ C_d S + D_{d12} \hat{C} & C_d + D_{d12} \hat{D} C_2 & D_{d11} + D_{d12} \hat{D} D_{d21} & -\gamma I_n \end{pmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

$$\begin{pmatrix} S & I_n \\ I_n & R \end{pmatrix} > 0 \quad (2.25)$$

En appliquant le théorème 2.3, il vient :

$\|F_l(P_d, F)\|_\infty < 1$ si et seulement s'il existe deux matrices R et S définies positives telles que les inégalités (2.24) et (2.25) soient faisables. De plus, d'après le théorème du petit gain,

$\|T_{d_{ne}}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad \forall \Delta : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$ si $\gamma \leq 1$. Les matrices d'état de $F(s)$ sont alors déduites du changement de variable (2.23) de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_F = N^{-1}(\hat{A} - RAS - \hat{B}C_2S)M^{-T} \\ B_F = N^{-1}\hat{B} \\ C_F = (\hat{C} - \hat{D}C_2R)M^{-T} \\ D_F = \hat{D} \end{cases} \quad (2.26)$$

Notons que le caractère conservateur de cette technique est le même que précédemment (la structure et la nature de Δ n'ont pas été prises en compte). Les performances robustes du filtre $F(s)$ sont donc testées et analysées à l'aide d'une procédure μ -analyse.

L'avantage majeur de cette démarche réside dans le fait, qu'il est possible d'empiler dans la procédure de synthèse, des contraintes de nature différentes telles que, des contraintes de type H_{∞} , H_2 , $H_{2\text{généralisé}}$, placement de pôles (voir par exemple , Chilali *et al.*, 1999; Henry *et al.*, 2001, 2002b).

2.3.2 - 2^{ème} étape: Analyse des performances robustes en DLRD.

Le résidu (erreur d'estimation) a été synthétisé de façon à minimiser l'influence des perturbations pour la classe des erreurs de modèle considérée. Aucune contrainte sur la sensibilité de celui-ci vis-à-vis des défaillances n'a encore été prise en compte lors de la synthèse. Une analyse *a posteriori* de la sensibilité est donc indispensable afin de vérifier si le niveau de sensibilité satisfait la contrainte (2.11). Nous allons voir comment l'utilisation de la fonction μ_g permet de résoudre ce dernier problème.

L'idée générale consiste à transformer le problème d'analyse des performances robustes formulé par la contrainte (2.11) en un problème μ_g fictif. Pour ce, reprenons le schéma de la figure 2.6 et incluons le filtre $F(s)$ dans $P(s)$ (voir figure 2.8). Soit $R(s) = F_l(P, F)$.

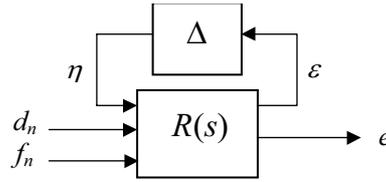


figure 2.8: Schéma d'analyse des performances robustes

Le problème d'analyse des performances robustes en sensibilité est équivalent à (voir contraintes (2.9) à (2.11)):

$$\inf_{\omega \in \Omega_f} \underline{\sigma}(T_{f_n e}(j\omega)) > 1 \quad \forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{et tel que} \quad \sup_{\omega} \overline{\sigma}(T_{d_n e}(j\omega)) < 1 \quad (2.27)$$

où $T_{f_n e}$ est le transfert bouclé de f_n vers e .

Introduisons un bloc d'incertitude fictif complexe plein Δ_d tel que $\Delta_d \in C^{\dim(e) \times \dim(d)} : \|\Delta_d\|_{\infty} \leq 1$. En bouclant les signaux d_n et e par le bloc Δ_d , le problème d'analyse des performances robustes est alors équivalent à:

$$\inf_{\omega \in \Omega_f} \underline{\sigma}(F_u(R, \tilde{\Delta}_J)) > 1 \quad \forall \tilde{\Delta}_J \in \tilde{\underline{\Delta}}_J : \|\tilde{\Delta}_J\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.28)$$

où $\tilde{\underline{\Delta}}_J$ est la structure associée à $\tilde{\Delta}_J = \text{diag}(\Delta, \Delta_d)$.

Pour une pulsation donnée, il apparaît alors que ce problème est équivalent à un problème de type gain min sur une matrice constante qui peut être résolu en utilisant le théorème 2.2. Le problème d'analyse des performances robustes est donc résolu à l'aide du théorème suivant, qui constitue une généralisation du théorème 2.2. Ce théorème sera appliqué sur tout l'espace des pulsations Ω_f , où les objectifs de sensibilité doivent être atteints.

Théorème 2.4: Soit la structure de la figure 2.3 et soit le bloc $\tilde{\Delta}_J$ précédemment défini. Soit $\tilde{\Delta}_K$ un bloc fictif complexe plein tel que $\tilde{\Delta}_K \in C^{\dim(e) \times \dim(f)} : \|\tilde{\Delta}_K\|_\infty \geq 1$. Bouclons les signaux η , d_n , f_n , ε et e par les blocs $\tilde{\Delta}_J$ et $\tilde{\Delta}_K$ tel que:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \eta \\ d_n \end{pmatrix} = \tilde{\Delta}_J \begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \end{pmatrix} \\ f_n = \tilde{\Delta}_K e \end{cases} \quad (2.29)$$

Soit:

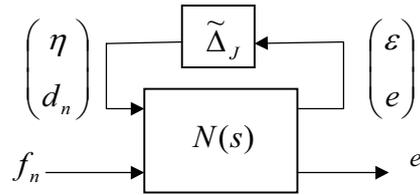


figure 2.9: Analyse des performances robustes en DLRD

où la matrice de transfert $N(s)$ est définie comme:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ d_n \\ f_n \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Supposons que $\sup_{\omega} \mu_{\tilde{\Delta}_J}(N_{11}(j\omega)) < 1$ et que $N \in \text{dom}(\mu_g)$. Alors:

$$\inf_{\omega \in \Omega_f} \underline{\sigma}(F_u(N, \tilde{\Delta}_J)) > 1 \quad \forall \tilde{\Delta}_J \in \tilde{\underline{\Delta}}_J : \|\tilde{\Delta}_J\| \leq 1 \Leftrightarrow \sup_{\omega \in \Omega_f} \mu_{g\tilde{\Delta}}(F_l(F_u(N, \tilde{\Delta}_J), \tilde{\Delta}_K)) < 1$$

◆

Preuve:

Au regard de l'équation (2.4), on a l'équivalence suivante:

$$\mu_g(N) > \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \|\Delta_J\|_\infty \leq 1/\gamma \\ \|\Delta_K\|_\infty \geq \gamma \end{cases} \quad (2.31)$$

La condition $\mu(N_{11}) < \gamma$ implique que $\|\Delta_J\|_\infty \leq 1/\gamma$.

Sous cette condition, dire que $\mu_g(N) < \gamma$ est équivalent à dire que $\|\Delta_K\|_\infty < \gamma$.

D'après la propriété sur les valeurs singulières, $\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$, ceci implique:

$$\underline{\sigma}(\Delta_K^{-1}) > 1/\gamma \quad (2.32)$$

Or $e = \Delta_K^{-1} f_n$, soit $\Delta_K^{-1} = F_u(N, \Delta_J)$ (voir schéma 2.9).

En remplaçant cette expression dans l'équation (2.31), on a:

$$\underline{\sigma}(F_u(N, \Delta_J)) > 1/\gamma \quad (2.33)$$

Le problème de l'analyse des performances robustes est donc équivalent à un problème μ_g fictif sur un ensemble fini de pulsations. ◆

Remarque: La contrainte $\sup_{\omega \in \Omega_f} \mu_{g\tilde{\Delta}}(N_{11}(j\omega)) < 1$ est équivalente aux contraintes de robustesse (2.9) et (2.10).

Ce théorème joue un rôle important par la suite, il permet d'évaluer systématiquement les niveaux de performances robustes du vecteur de résidus obtenu.

2.3.3 - Résumé de l'approche itérative

En résumé, l'approche proposée dans ce paragraphe est constituée d'itérations successives entre une estimation robuste et une analyse des performances robustes. L'estimation robuste ne contient pas de contrainte de sensibilité vis-à-vis des défauts, celle-ci est testée *a posteriori* à l'aide d'un test à base de μ_g . Si la contrainte sur la sensibilité (2.11)

n'est pas atteinte, une nouvelle estimation robuste est réalisée en relâchant les contraintes de robustesse sur la bande de fréquence où l'énergie des défaillances est concentrée ou après avoir modifié la matrice de structuration M .

Ces itérations successives sont réalisées jusqu'à l'obtention d'un compromis acceptable entre les propriétés de robustesse et de sensibilité du le vecteur de résidus. La démarche générale de la méthodologie est représentée par l'organigramme de la figure 2.10 :

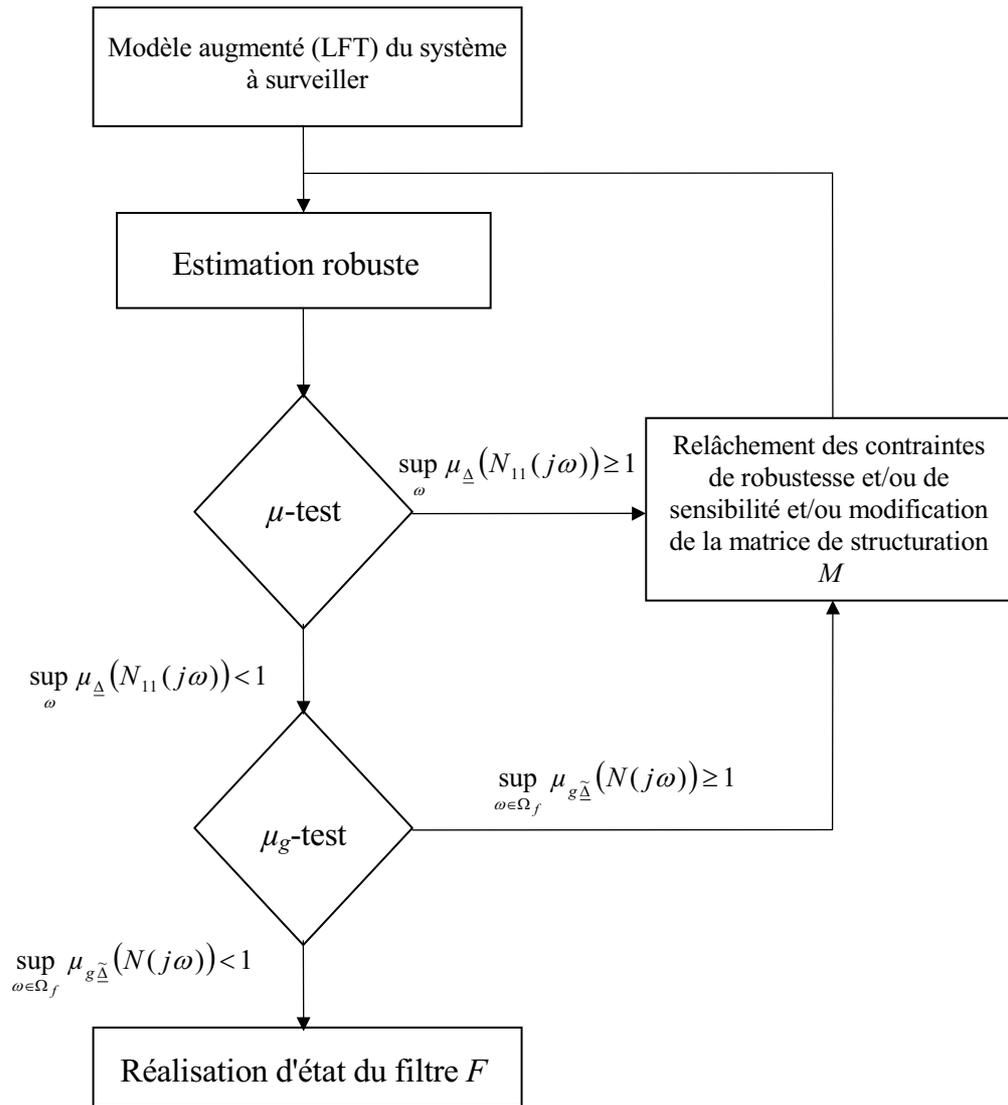


figure 2.10: Organigramme de l'approche itérative.

Remarque: Dans la première étape de la méthodologie proposée, on synthétise le filtre $F(s)$ à l'aide des techniques LMIs. Comme nous l'avons déjà signalé, dans cette approche la structure et la nature du bloc d'incertitude Δ sont ignorées, d'où le caractère conservateur de l'approche. En effet, dans ce cas si $\gamma > 1$ (voir paragraphe 2.3.1.2), ceci n'implique pas forcément que le filtre $F(s)$ déterminé, ne satisfait pas les contraintes de robustesse imposées. C'est pourquoi on applique une μ -analyse qui représente une condition nécessaire et suffisante de robustesse. Ainsi, d'un point de vue pratique, on tolère souvent lors de l'étape de synthèse un $\gamma > 1$. Une autre approche, beaucoup plus pragmatique, consiste à effectuer une synthèse dans un cadre certain, i.e. en absence de toutes incertitudes de modélisation, puis de tester les performances robustes à l'aide des fonctions μ et μ_g en considérant les incertitudes ($\Delta \neq 0$). Pour cela on tolère $\gamma \ll 1$ lors de l'étape de synthèse du filtre $F(s)$

2.4 - Exemple

Afin d'illustrer l'approche proposée dans ce chapitre, considérons un système masse-ressort-amortisseur de masse m , de coefficient d'amortissement ζ et dont le coefficient de raideur k incertain $k = k_0 + \delta_k$. Ce système peut être modélisé par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(k)x(t) + Bu(t) + E_1d(t) + K_1f(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.34)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\zeta}{m} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les matrices de distribution E_1 et K_1 , sont

fixées arbitrairement à $E_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $K_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Le modèle augmenté (P, Δ) , associé au modèle d'état (2.34) est donné par :

$$P = \left[\begin{array}{c|cccc} A(k_0) & B_1 & B & E_1 & K_1 \\ \hline C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{w_k}{m} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

où $k_0 = \frac{\bar{k} + \underline{k}}{2}$ représente la valeur nominale de la constante de raideur du ressort, \bar{k} et \underline{k} sont respectivement la valeur maximale et la valeur minimale de k . $w_k = \frac{\bar{k} - \underline{k}}{2k_0}$ est la pondération telle que :

$$k = k_0 + \delta_k w_k, \quad |\delta_k| \leq 1 \Rightarrow \Delta = \delta_k \quad (2.36)$$

Les signaux d et f représentent respectivement les vecteurs de perturbations et de défaillances. Ils sont modélisés par des filtres formeurs suivants :

$$\begin{cases} d = H_d w_1 \\ f = H_f w_2 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$H_d(s) = \frac{(\omega_d^2 - \omega_d^1)s}{s^2 + (\omega_d^2 - \omega_d^1)s + \omega_d^1 \omega_d^2} \quad \text{et} \quad H_f(s) = \frac{(\omega_f^2 - \omega_f^1)s}{s^2 + (\omega_f^2 - \omega_f^1)s + \omega_f^1 \omega_f^2} \quad (2.38)$$

où w_1 et w_2 sont des signaux irréductibles.

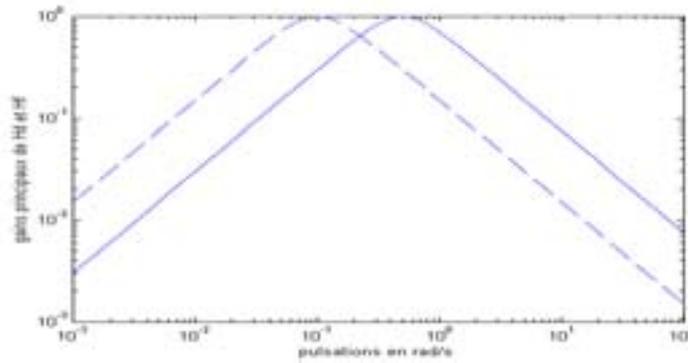


figure 2.11: Filtres formeurs H_d (-) et H_f (- -)

Les valeurs numériques qui sont utilisées pour cet exemple sont :

$$m=1 \text{ kg}, \quad \zeta = 1, \quad 0.4 \text{ N/m} < k < 0.6 \text{ N/m}, \quad \omega_d = 0.5 \text{ rd/s}, \quad \omega_f = 0.1 \text{ rd/s}, \quad \omega_d^1 = \omega_d / 2, \\ \omega_d^2 = 2\omega_d, \quad \omega_f^1 = \omega_f / 2, \quad \omega_f^2 = 2\omega_f.$$

L'objectif est de synthétiser un filtre de détection de telle sorte que :

$$\begin{cases} \|T_{w_1e}(j\omega)\|_\infty < \|W_d(j\omega)\|_\infty \\ \|T_{w_2e}(j\omega)\|_- > \|W_f(j\omega)\|_- \end{cases} \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad \forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1 \quad (2.39)$$

où T_{w_1e} et T_{w_2e} sont les transferts respectifs entre l'erreur d'estimation e et les signaux irréductibles w_1 et w_2 . Sur cet exemple, la contrainte de robustesse est formulée de telle façon que $\|T_{w_1e}(j\omega)\|_\infty < 0.1$ autour de la pulsation 0.5 rd/s (zone de fréquence où le taux d'amplification de d vers e est maximum). La contrainte de sensibilité est fixée à 0.25 sur la zone de fréquence $\Omega_f = [0.01 \quad 0.1]$ rd/s. Trois itérations successives ont été nécessaires afin de remplir ce cahier des charges. Les trois filtres DLRD ont été obtenus sur un modèle nominal du procédé (en considérant $\Delta = 0$), puis une analyse des performances robustes a été effectuée.

Itération I :

Durant cette itération, la contrainte sur la robustesse W_d est fixée à 0.1 sur tout l'espace des fréquences et la matrice de structuration M est égal à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($z(t) = y_2(t)$). Le profil fréquentiel du filtre de détection obtenu est représenté sur la figure 2.12:

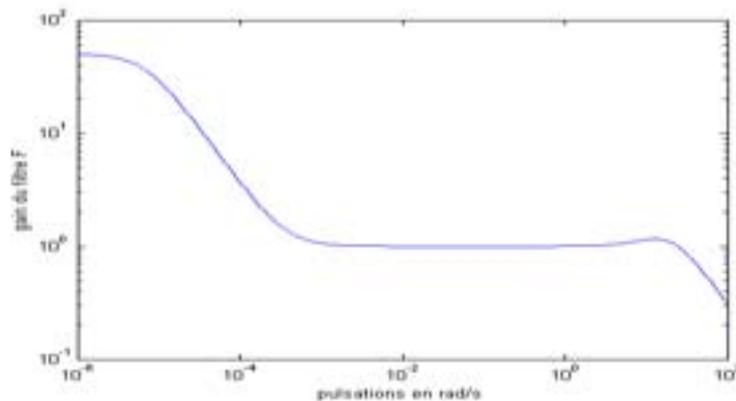


figure 2.12: Profil fréquentiel du filtre de détection, itération I

L'estimation, \hat{z} , de z est alors "parfaite" sur une large bande de fréquence (où le gain du filtre est égal à un), ce qui induit des performances, en terme de robustesse, largement supérieures à celles spécifiées dans le cahier des charges ($W_d = 0.1$).

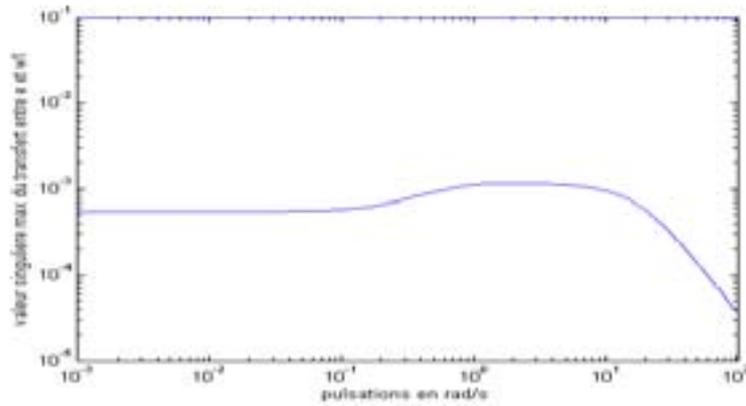


figure 2.13: Valeur singulière max du transfert entre e et w_1 , itération 1

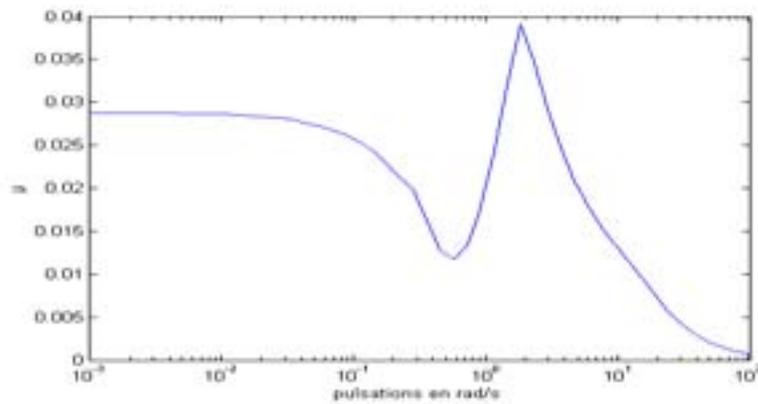


figure 2.14: Analyse de la robustesse, itération 1

L'évolution de la valeur singulière max $\bar{\sigma}(T_{w_1 e}(j\omega))$ est représentée sur la figure 2.13. On constate que celle-ci est nettement inférieure à la contrainte que l'on a fixée précédemment. Une analyse à l'aide de la valeur singulière structurée μ (figure 2.14) montre que la contrainte sur la robustesse est atteinte pour tout $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$. On constate également que $\mu_{\Delta}(N_{11}(j\omega))$ est très inférieure à 1, ce qui donne une information qualitative sur le degré de conservatisme du filtre synthétisé. En effet, si $\mu_{\Delta}(N_{11}(j\omega))$ est très inférieur à 1, les objectifs de robustesse sont largement atteints pour tout $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$.

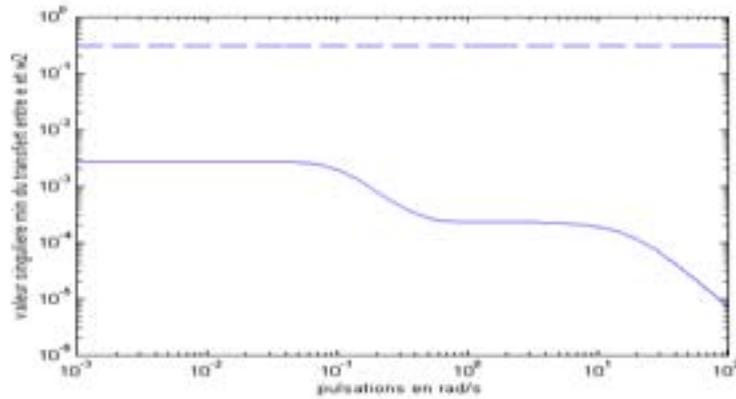


figure 2.15: Valeur singulière min du transfert entre e et w_2 , itération I

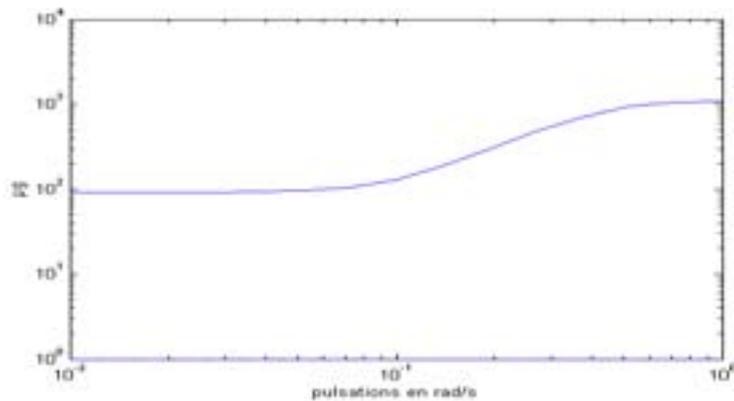


figure 2.16: Analyse de la sensibilité robuste, itération I

La figure 2.15 montre que la valeur singulière min $\underline{\sigma}(T_{w_2e}(j\omega))$ n'est pas supérieure au niveau de performance en sensibilité (fixé à 0.25 dans le cahier des charges) sur la zone de fréquence Ω_f lorsque $\Delta = 0$. Le niveau de sensibilité spécifié n'est donc pas atteint pour $\Delta = 0$. La μ_g -analyse pour tout $\omega \in \Omega_f$ (figure 2.16) confirme que les performances robustes (avec $\Delta \neq 0$) ne sont pas non pas atteintes. Une nouvelle itération est donc nécessaire.

Itération II :

Une nouvelle synthèse est réalisée en gardant un niveau de robustesse identique à l'itération I, mais en modifiant la matrice de structuration M de façon à réduire le conservatisme de la solution ($\mu_{\Delta}(N_{11}(j\omega))$ doit être proche de 1 par valeur inférieure). Après plusieurs itérations entre l'étape d'estimation robuste et l'étape d'analyse (μ -analyse), la

matrice de structuration retenue est $M = \begin{bmatrix} 0.125 & 1 \end{bmatrix}$. Le filtre de détection obtenu est alors le suivant :

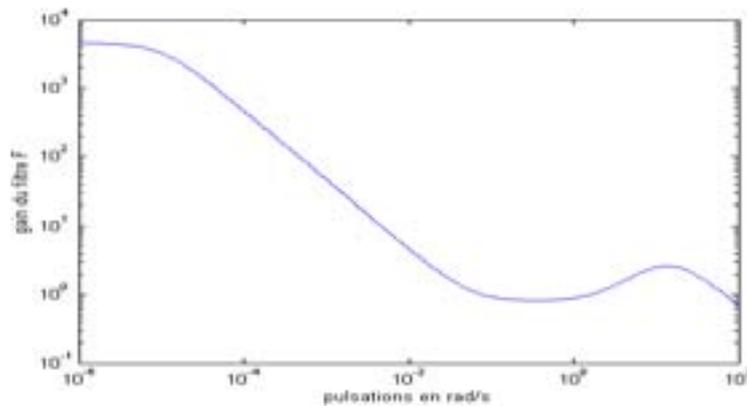


figure 2.17: Profil fréquentiel du filtre de détection, itération II

Si l'on compare ce filtre de détection avec celui de l'itération précédente, on peut voir que l'on a réduit la zone de fréquence où le gain du filtre est égal à un, les performances en terme de robustesse ont donc été dégradées, bien que rentrant néanmoins dans le cahier des charges comme le montrent les figures 2.18 et 2.19 ci-dessous :

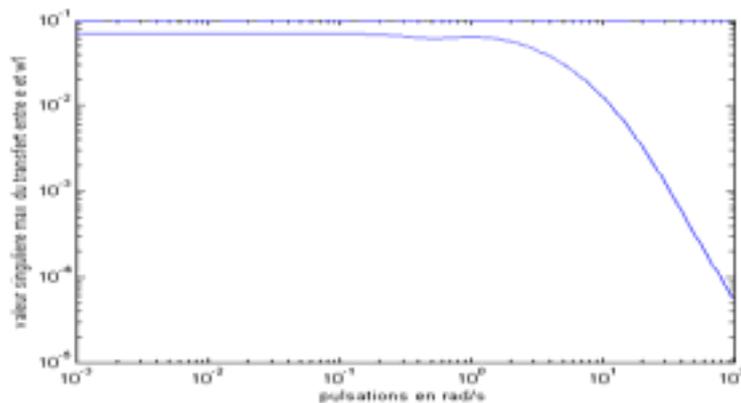


figure 2.18: Valeur singulière max du transfert entre e et w_1 , itération II

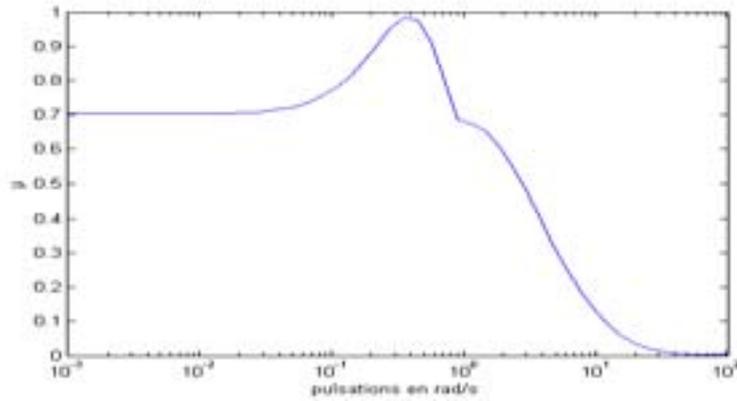


figure 2.19: Analyse de la robustesse, itération II

En effet, le gain de la valeur singulière max $\bar{\sigma}(T_{w_1e}(j\omega))$ est inférieure à 0.1 , mais sur cette synthèse la valeur structurée μ est très proche de 1 par valeur inférieure. Les contraintes de robustesses sont donc atteintes et le conservatisme de ce filtre est donc faible.

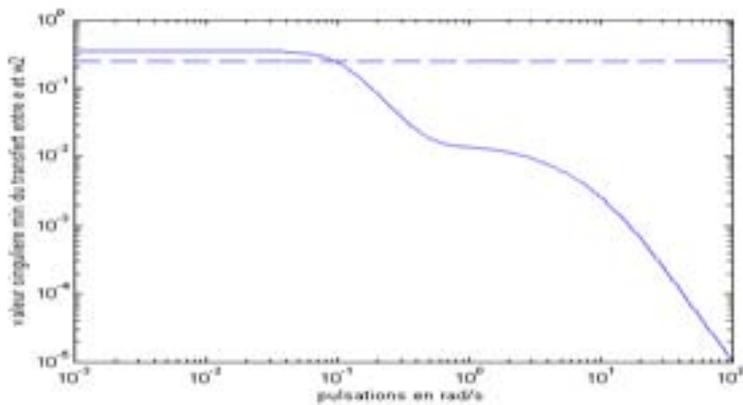


figure 2.20: Valeur singulière min du transfert entre e et w_2 , itération II

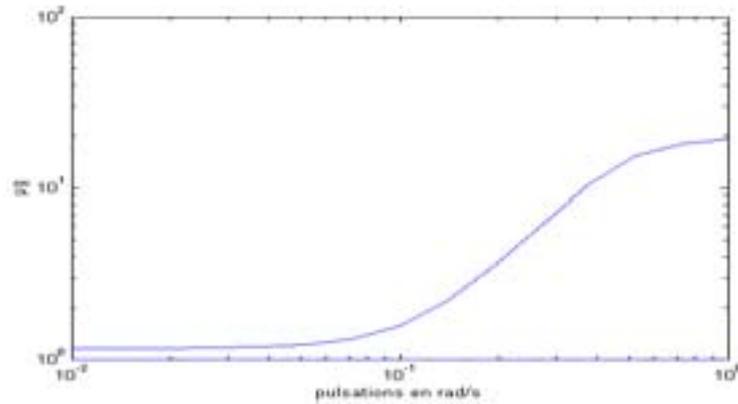


figure 2.21: Analyse de la sensibilité robuste, itération II.

Contrairement à l'itération I, la valeur singulière $\min \sigma(T_{w_2e}(j\omega))$ est supérieure à 0.25 (figure 2.20) sur la zone de fréquence Ω_f . La contrainte sur la sensibilité a donc été atteinte pour $\Delta=0$. Malheureusement, lorsque $\Delta \neq 0$ la valeur singulière structurée généralisée μ_g , est supérieure à un (figure 2.21) sur Ω_f . La contrainte de sensibilité robuste fixée dans le cahier des charges n'est donc pas atteinte. Une nouvelle itération est donc nécessaire.

Itération III :

Afin d'augmenter la sensibilité du signal indicateur sur Ω_f , on choisit W_d comme étant une pondération dynamique qui permet de relâcher la contrainte sur la robustesse sur Ω_f , soit $W_d = 0.1 \frac{s+0.3}{s+0.2}$. Identiquement à l'itération précédente la matrice de structuration M est obtenue après quelques itérations, la nouvelle matrice de structuration retenue est $M = [0.146 \quad 1]$, on obtient le filtre de détection suivant :

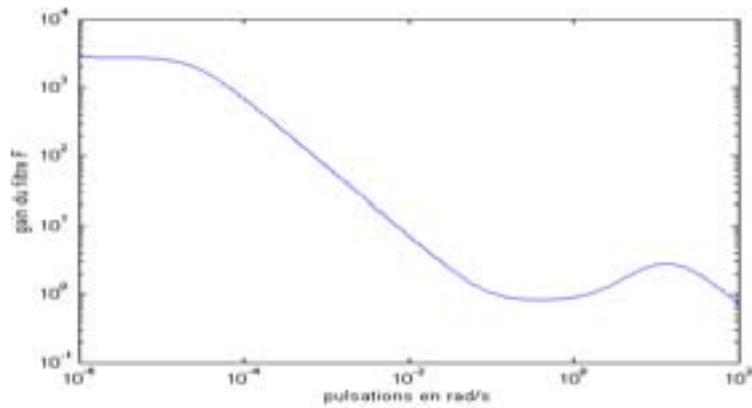


figure 2.22: Profil fréquentiel du filtre de détection, itération III

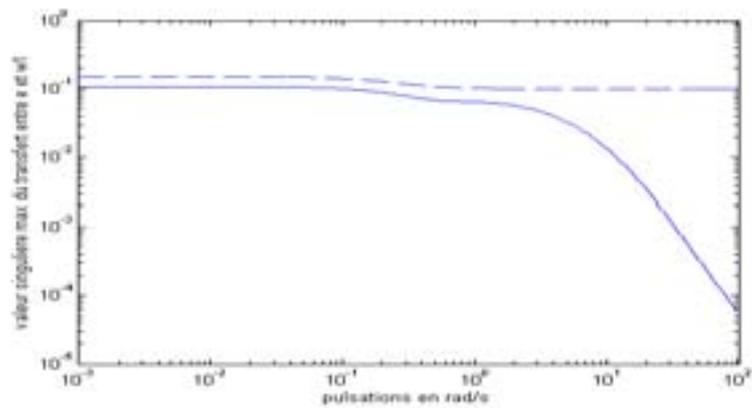


figure 2.23: Valeur singulière max du transfert entre e et w_1 , itération III

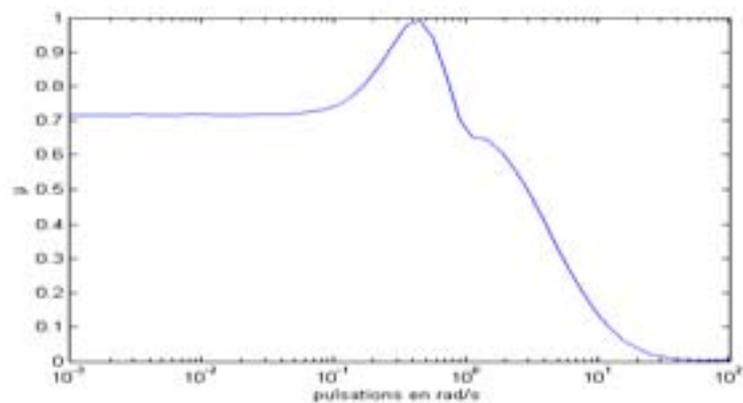


figure 2.24: Analyse de la robustesse, itération III

Avec la nouvelle pondération dynamique, la valeur singulière max $\bar{\sigma}(T_{w_1 e}(j\omega))$ est inférieure à W_d (figure 2.23). La valeur singulière structurée μ est très proche de un par valeurs inférieures. Les contraintes sur la robustesse sont donc atteintes : $\mu_{\Delta}(T_{w_1 e}(j\omega)) < 1 \Leftrightarrow \|T_{w_1 e}(j\omega)\|_{\infty} < 0.1$ pour tout $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$ (figure 2.24).

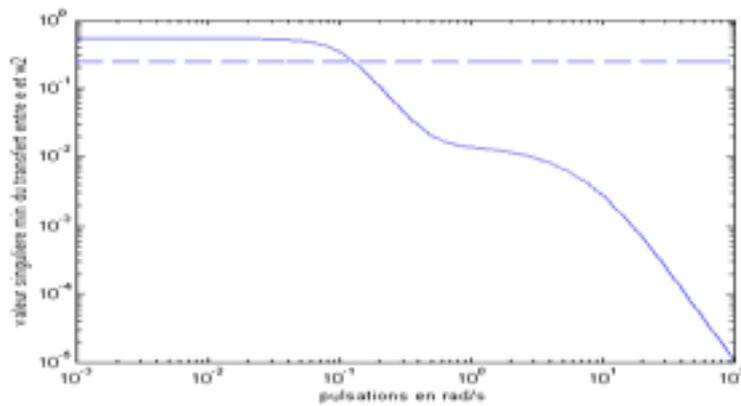


figure 2.25: Valeur singulière min du transfert entre e et w_2 , itération III

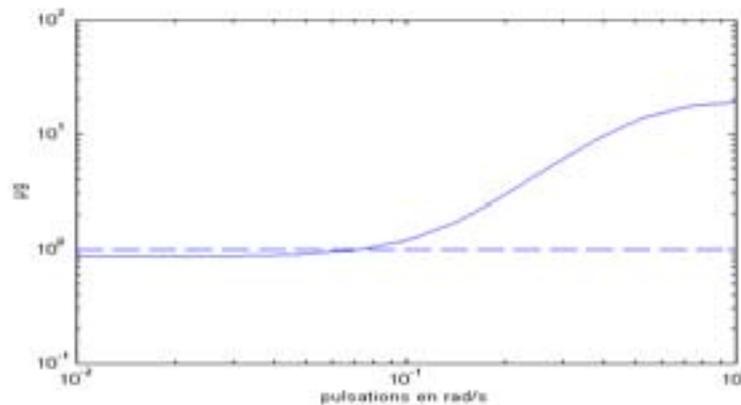


figure 2.26: Analyse de la sensibilité robuste, itération III

Cette dernière itération conduit à une fonction μ_g qui est inférieure à un pour tout $\omega \in \Omega_f$, la contrainte sur la sensibilité robuste est donc atteinte : $\|T_{w_2 e}\|_{-} > 0.25$ pour tout $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$ et quel que soit w_2 tel que $\bar{\sigma}(T_{w_1 e}(j\omega)) < 0.1$.

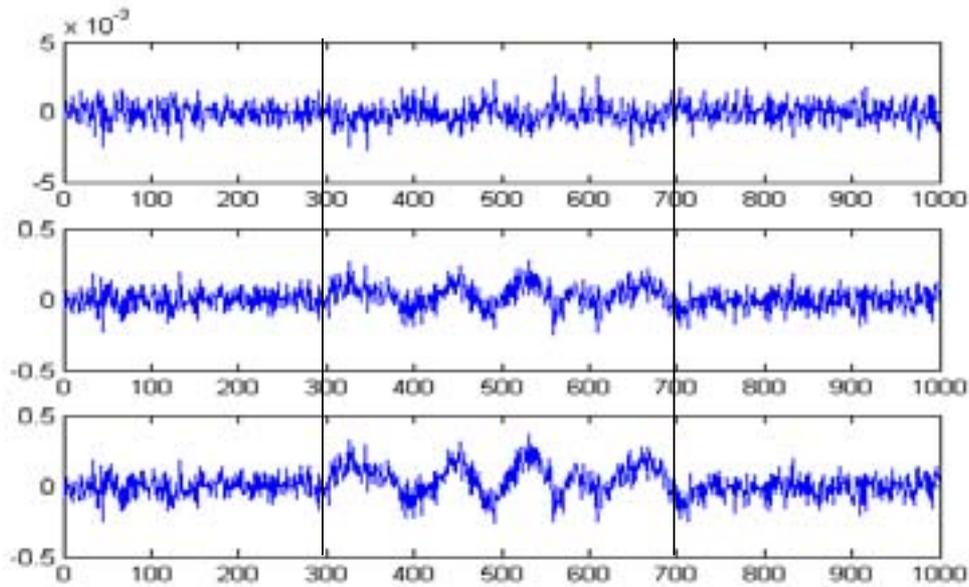


figure 2.27: Simulations temporelles

Des simulations temporelles ont été effectuées pour chacune des trois itérations. Ces simulations sont obtenues avec un défaut ayant une variance de 0.86, et une perturbation dont la variance est 1.06. Les résultats obtenus sont donnés sur la figure 2.27 où l'évolution temporelle du résidu est illustrée lorsqu'un défaut survient entre $t=300$ secondes et $t=700$ secondes. Une étude de la variance de ces différents résidus avec et sans défaut nous montre que la sensibilité du résidu a sensiblement augmentée au fil des itérations.

	V_d : variance du résidu avec $f = 0$	V_f : variance du résidu avec $f \neq 0$	$\frac{V_f - V_d}{V_d}$
Itération I	$4.71e-7$	$5.77e-7$	0.178
Itération II	$4.27e-3$	$7.44e-3$	0.678
Itération III	$4.94e-3$	$1.26e-2$	1.46

table 2.1: Etude de la variance

Il apparaît évident qu'un test de décision sera plus sensible vis-à-vis du résidu issu de la troisième itération, ce qui se traduira par un taux de fausses alarme et un taux de non-détection plus faible.

2.5 - Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche itérative pour la synthèse de filtres DLRD. Dans cette approche, l'étape "estimation robuste" est suivie d'un test à base de μ_g pour analyser les performances robustes en DLRD. Ce test est appliqué à un schéma augmenté qui comporte à la fois des contraintes de robustesse (de type gain max) et de performances (de type gain min).

La procédure d'affinement itératif se termine lorsque l'on juge qu'un compromis acceptable en terme de détection/localisation/robustesse est obtenu. Il est vrai que cette procédure itérative ne converge pas toujours vers une solution acceptable qui satisfait l'ensemble des spécifications du cahier des charges de surveillance. En particulier, lors de la 1^{er} itération, le filtre $F(s)$ calculé peut être assez loin de la solution recherchée.

De plus, il s'agit essentiellement d'une démarche empirique de synthèse itérative, dans la mesure où la modification des paramètres de réglage entre deux itérations dépend beaucoup du "savoir faire" du concepteur.

C'est pourquoi, dans le chapitre suivant, nous proposons une méthodologie de synthèse plus systématique et plus générale avec prise en compte effective des objectifs de performances en DLRD dans la procédure de synthèse.

Chapitre 3

Synthèse directe de filtres DLRD.

3.1 - Introduction

L'approche itérative présentée dans le chapitre précédent consiste à répéter le cycle "estimation robuste du filtre $F(s)$, et "analyse des performances" jusqu'à l'obtention, si possible, des objectifs souhaités. On parle alors de processus d'affinement itératif pour améliorer les performances en détection, en relâchant les contraintes de robustesse dans la bande de fréquence où l'énergie du défaut est concentrée et/ou en modifiant la matrice de structuration M .

Il arrive souvent, même dans des cas simples, que le concepteur soit obligé de relâcher les contraintes de robustesse au profit des spécifications de performances en détection et/ou en isolation. Autrement dit, une procédure d'affinement itératif dont l'objectif final est le meilleur compromis "robustesse/performances en détection localisation/performances en isolation" est souvent incontournable. Cependant, dans certains cas, la modification de ces deux paramètres peut s'avérer insuffisante pour améliorer la sensibilité du vecteur de résidus. C'est pourquoi, une méthodologie plus générale est proposée dans ce chapitre où les objectifs de sensibilités nominales sont intégrés dans l'étape même de synthèse.

De plus, comme dans la plupart des approches de synthèse DLRD, la méthode développée au chapitre précédent ignore l'existence du système de commande en boucle fermée. Comme nous l'avons déjà souligné, les performances d'un filtre DLRD peuvent se dégrader de façon significative lorsqu'il est implanté pour surveiller le système commandé en boucle fermée. Cette dégradation est d'autant plus importante en présence des incertitudes non structurées.

La démarche proposée dans ce chapitre consiste à reformuler le problème de synthèse en incluant les contraintes de robustesse et les spécifications de sensibilité nominale en DLRD. Les performances robustes en DLRD sont ensuite testées a posteriori à l'aide d'une procédure à base de μ_g -analyse. On montrera que l'on peut résoudre ce problème mixte H_∞/H à l'aide d'un problème fictif H_∞ , après avoir transformé la contrainte de type "gain min" en une contrainte de type "gain max". On montre alors que le problème de synthèse peut être résolu à l'aide des techniques d'optimisation LMI.

3.2 - Filtre de détection H_∞/H - sur un procédé en boucle ouverte.

Rappelons la problématique de DLRD. On cherche à déterminer une réalisation (A_F, B_F, C_F, D_F) du filtre de détection $F(s)$ telle que le vecteur de résidus synthétisé possède des propriétés de robustesse et de sensibilité traduites par:

$$\|T_{de}(j\omega)\|_\infty < \|W_d(j\omega)\|_\infty \quad (3.1)$$

$$\|T_{fe}(j\omega)\|_- > \|W_f(j\omega)\|_- \quad (3.2)$$

pour tout $\Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$.

Les matrices de pondération $W_d(s)$ et $W_f(s)$, de dimensions appropriées, définissent des objectifs dynamiques associés aux contraintes respectives de robustesse et de sensibilité. Elles sont choisies comme étant stables, à inverse stables, de façon à pouvoir normaliser le problème DLRD avec l'introduction de $W_d^{-1}(s)$ et $W_f^{-1}(s)$ (voir figure 2.4).

3.2.1 - Formulation du problème mixte H_∞/H .

L'idée consiste à transformer le problème H_∞/H en un problème fictif H_∞ qui pourra alors être résolu à l'aide des techniques d'optimisation LMIs.

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent, que si le filtre $F(s)$ est déterminé tel que $\|T_{de}(j\omega)W_d^{-1}(j\omega)\|_\infty < 1$, alors la contrainte de robustesse (3.1) est vérifiée $\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$.

En ce qui concerne la contrainte de sensibilité (3.2), nous proposons d'utiliser les propriétés des valeurs singulières pour transformer la contrainte de gain min en une contrainte de gain max (voir aussi Niemann et Stoustrup, 1998 ; Rank et Niemann, 1999 ; Louis Rambeaux, 2001; Castang *et al.*, 2002a, 2002b). La propriété utilisée est la suivante :

Soient $M_1(j\omega)$ et $M_2(j\omega)$ deux matrices complexes, de dimensions appropriées, dépendantes de ω , vérifiant:

$$\inf_{\omega \in \Omega} \underline{\sigma}(M_1(j\omega)) - \sup_{\omega \in \Omega} \overline{\sigma}(M_2(j\omega)) \leq \inf_{\omega \in \Omega} \underline{\sigma}(M_1(j\omega) + M_2(j\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.3)$$

Considérons à présent le schéma bloc suivant:

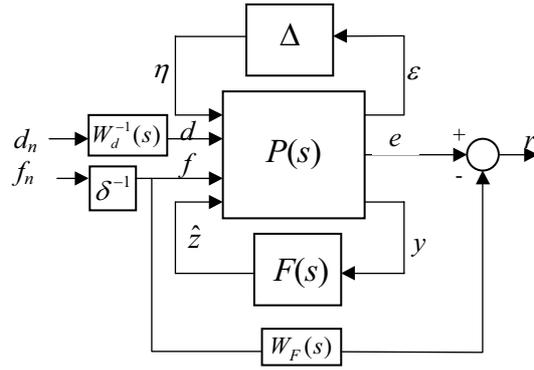


figure 3. 1: Problème de synthèse fictif

où W_F est une pondération dynamique, stable, de dimension appropriée, associée à la contrainte de sensibilité telle que $\|W_F(j\omega)\|_- \geq \lambda \quad \forall \omega \in \Omega_f$, λ et δ sont des scalaires strictement positifs. On introduit un signal fictif r comme illustré sur la figure 3.1 tel que:

$$r(s) = e(s) - W_F(s)f(s) \quad (3.4)$$

En utilisant la propriété (3.3), il vient:

$$\inf_{\omega} \underline{\sigma}(W_F(j\omega)) - \sup_{\omega} \overline{\sigma}(T_{fe}(j\omega) - W_F(j\omega)) \leq \inf_{\omega} \underline{\sigma}(T_{fe}(j\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (3.5)$$

que l'on peut encore noter d'après les définitions des normes H_{∞} et H . (voir annexe II):

$$\|W_F(s)\|_- - \|T_{fe}(s) - W_F(s)\|_{\infty} \leq \|T_{fe}(s)\|_- \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (3.6)$$

où Ω_f est la zone de fréquence où la sensibilité du filtre DLRD doit être assurée et où $T_{fe}(s)$ représente le transfert bouclé de f vers e .

Proposition 3.1:

Soit $\|W_f\|_- = \frac{\beta}{\lambda} \|W_F\|_-$ où $\beta < \lambda$ est un scalaire positif. Considérons le schéma de synthèse

3.1. Une condition suffisante pour que la contrainte de sensibilité (3.2) soit vérifiée est:

$$\|T_{fe}(j\omega) - W_F(j\omega)\|_{\infty} < \lambda - \beta \quad (3.7)$$

◆

Preuve:

Considérons l'expression (3.6). En factorisant par $\|W_F\|_-$, il vient:

$$\left(1 - \|T_{fe} - W_F\|_\infty \|W_F\|_-^{-1}\right) \|W_F\|_- \leq \|T_{fe}\|_- \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (3.8)$$

sachant que $\|W_F\|_-^{-1} = \|W_F^+\|_\infty$, où W_F^+ est le pseudo inverse à droite de W_F (voir *Annexe II*), il vient:

$$\left(1 - \|T_{fe} - W_F\|_\infty \|W_F^+\|_\infty\right) \|W_F\|_- \leq \|T_{fe}\|_- \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (3.9)$$

De plus, on a défini $\|W_F\|_- \geq \lambda$, ce qui implique $\|W_F^+\|_\infty \leq \lambda^{-1}$.

Si $\|T_{fe} - W_F\|_\infty < \lambda - \beta$ alors:

$$\|T_{fe} - W_F\|_\infty \|W_F^+\|_\infty \leq \frac{\lambda - \beta}{\lambda} \quad (3.10)$$

En injectant cette inégalité dans (3.9), on obtient:

$$\left(1 - \frac{\lambda - \beta}{\lambda}\right) \|W_F\|_- < \|T_{fe}\|_- \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\lambda} \|W_F\|_- < \|T_{fe}\|_- \quad (3.12)$$

Sachant que $W_f = \frac{\beta}{\lambda} W_F$, il vient que si $\|T_{fe} - W_F\|_\infty < \lambda - \beta$ alors $\|W_f\|_- < \|T_{fe}\|_-$. Ce qui termine la démonstration. ◆

Notons que le choix de W_F tel que $\|W_F\|_- = \frac{\lambda}{\beta} \|W_f\|_-$ implique que W_F soit stable et à inverse stable.

En résumé, une condition suffisante pour qu'il existe un filtre DLRD $F(s)$ tel que les contraintes (3.1) et (3.2) soient vérifiées $\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$, est qu'il existe une solution au problème de synthèse fictif suivant:

$$\begin{cases} \|T_{de}(j\omega)W_d^{-1}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \\ \|T_{fe}(j\omega) - W_F(j\omega)\|_{\infty} < \lambda - \beta \quad \forall \omega \in \Omega_f \end{cases} \quad (3.13)$$

En introduisant $\delta = \lambda - \beta$, ce problème est équivalent au problème normalisé suivant:

Déterminer le filtre $F(s)$ tel que, $\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$:

$$\|T_{d_{ne}}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad (3.14)$$

$$\|T_{f_{nr}}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad (3.15)$$

où $T_{d_{ne}}$ et $T_{f_{nr}}$ sont les transferts bouclés des signaux d_n vers e et f_n vers r .

La condition d'équivalence entre le problème fictif H_{∞} et le problème H_{∞}/H_{∞} étant seulement suffisante, la synthèse peut s'avérer conservatrice, d'où l'intérêt d'une analyse, *a posteriori*, des performances robustes à l'aide de la fonction μ_g et du théorème 2.4 énoncé dans le chapitre 2. En effet, ce théorème constitue une condition nécessaire et suffisante qui permet de conclure sur les performances robustes obtenues.

Remarque: *Il est clair que le choix des paramètres λ et β conditionne les performances du filtre DLRD. Il existe une infinité de couple $\{\lambda, \beta\}$ tel que $\|T_{fe}(j\omega) - W_F(j\omega)\|_{\infty} < \delta$ où $\delta = \lambda - \beta$. D'un point de vue pratique, on choisira $\lambda = 1$. Ce qui implique, par définition $\|W_f(j\omega)\|_{\infty} \geq \beta$. Maximiser β permettra alors de minimiser δ .*

3.2.2 - Résolution du problème à l'aide des techniques LMIs.

Dans ce paragraphe, on propose de résoudre le problème de synthèse de $F(s)$ formulé au paragraphe précédent à l'aide des techniques LMIs.

Considérons tout d'abord le schéma de la figure 3.1. en incluant les pondérations $W_d(s)$ et $W_F(s)$ dans le modèle augmenté $P(s)$. On obtient un nouveau modèle augmenté, noté $\tilde{P}(s)$, comme illustré par la figure 3.2:

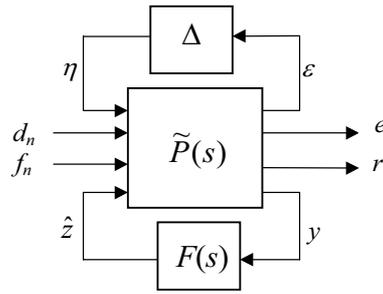


figure 3.2: Schéma bloc du problème de synthèse fictif.

où $\tilde{P}(s)$ admet la réalisation suivante :

$$\tilde{P}(s) := \begin{cases} \dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{B}U \\ Y = \tilde{C}X + \tilde{D}U \end{cases} \quad (3.16)$$

X représente le vecteur d'état du système augmenté incluant en particulier les états de $P(s)$, $W_d^{-1}(s)$ et $W_F(s)$. $Y = (\varepsilon \ e \ r \ y)^T$ représente le vecteur de sortie et $U = (\eta \ d_n \ f_n \ \hat{z})^T$ le vecteur d'entrée.

Soit
$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & B_{11} & E_1 & K_1 & 0 \\ \hline C_1 & D_1 & T_d & T_f & 0 \\ MC_2 & MD_{21} & ME_2 & MK_2 & -I \\ C_2 & D_{21} & E_2 & K_2 & 0 \end{array} \right]$$
 la réalisation d'état associée au modèle $P(s)$ (voir

paragraphes 2.3, équation (2.7)).

Soient $\left[\begin{array}{c|c} A_{wd^{-1}} & B_{wd^{-1}} \\ \hline C_{wd^{-1}} & D_{wd^{-1}} \end{array} \right]$ et $\left[\begin{array}{c|c} A_{w_F} & B_{w_F} \\ \hline C_{w_F} & D_{w_F} \end{array} \right]$ les réalisations respectives des matrices de pondérations $W_d^{-1}(s)$ et $W_F(s)$.

Les matrices d'état \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} et \tilde{D} de $\tilde{P}(s)$ sont alors définies de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & E_1 C_{wd^{-1}} & 0 & B_1 & E_1 D_{wd^{-1}} & \delta^{-1} K_1 & 0 \\ 0 & A_{wd^{-1}} & 0 & 0 & B_{wd^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{w_F} & 0 & 0 & \delta^{-1} B_{w_F} & 0 \\ \hline C_1 & T_d C_{wd^{-1}} & 0 & D_{11} & T_d D_{wd^{-1}} & \delta^{-1} T_f & 0 \\ MC_2 & ME_2 C_{wd^{-1}} & 0 & MD_{21} & ME_2 D_{wd^{-1}} & \delta^{-1} MK_2 & -I \\ MC_2 & ME_2 C_{wd^{-1}} & -C_{w_F} & MD_{21} & ME_2 D_{wd^{-1}} & \delta^{-1} (MK_2 - D_{w_F}) & -I \\ C_2 & E_2 C_{wd^{-1}} & 0 & D_{21} & E_2 D_{wd^{-1}} & \delta^{-1} K_2 & 0 \end{array} \right] \quad (3.17)$$

En vertu du lemme réel borné, rappelé au paragraphe 2.3.1.2 du chapitre 2, $\|F_l(\tilde{P}, F)\|_\infty < \gamma$, si et seulement si il existe une matrice symétrique $X > 0$ telle que:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{cl}^T X + X \tilde{A}_{cl} & X \tilde{B}_{cl} & \tilde{C}_{cl}^T \\ \tilde{B}_{cl}^T X & -\gamma I & \tilde{D}_{cl}^T \\ \tilde{C}_{cl} & \tilde{D}_{cl} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

où $(\tilde{A}_{cl}, \tilde{B}_{cl}, \tilde{C}_{cl}, \tilde{D}_{cl})$ est la réalisation d'état de $F_l(\tilde{P}, F)$. De plus, d'après le théorème du petit gain:

$$\text{si } \gamma < 1 \Rightarrow \left\| \begin{array}{c} T_{d_{ne}}(j\omega) \\ T_{f_{nr}}(j\omega) \end{array} \right\|_\infty < 1, \quad \forall \Delta : \|\Delta\|_\infty < 1 \quad (3.19)$$

D'après la propriété

$$\max \left\{ \left\| T_{d_{ne}}(j\omega) \right\|_\infty, \left\| T_{f_{nr}}(j\omega) \right\|_\infty \right\} \leq \left\| \begin{array}{c} T_{d_{ne}}(j\omega) \\ T_{f_{nr}}(j\omega) \end{array} \right\|_\infty \quad (3.20)$$

il apparaît que le filtre $F(s)$ satisfait les objectifs de synthèse (contraintes de robustesse et de sensibilité), s'il est solution de l'inégalité (3.18) pour $\gamma \leq 1$.

En d'autres termes, le problème de synthèse peut être réécrit de la façon suivante:

Déterminer (A_F, B_F, C_F, D_F) , une réalisation du filtre $F(s)$, telle que:

$$\left\| F_l(\tilde{P}_R, F) \right\|_\infty < 1 \quad (3.21)$$

$$\|F_l(\tilde{P}_S, F)\|_\infty < 1 \quad (3.22)$$

où \tilde{P}_R et \tilde{P}_S sont les matrices de transferts liant respectivement les vecteurs $\begin{pmatrix} \eta \\ d_n \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ y \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} f_n \\ \hat{z} \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix}$. Elles sont déduites de (3.17) de la façon suivante:

$$\tilde{P}_R(s) := \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_R \\ \tilde{C}_R & \tilde{D}_R \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & E_1 C_{wd^{-1}} & 0 & B_1 & E_1 D_{wd^{-1}} & 0 \\ 0 & A_{wd^{-1}} & 0 & 0 & B_{wd^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & A_{wF} & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_1 & T_d C_{wd^{-1}} & 0 & D_{11} & T_d D_{wd^{-1}} & 0 \\ MC_2 & ME_2 C_{wd^{-1}} & 0 & MD_{21} & ME_2 D_{wd^{-1}} & -I \\ C_2 & E_2 C_{wd^{-1}} & 0 & D_{21} & E_2 D_{wd^{-1}} & 0 \end{array} \right] \quad (3.23)$$

$$\tilde{P}_S(s) := \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_S \\ \tilde{C}_S & \tilde{D}_S \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A & E_1 C_{wd^{-1}} & 0 & \delta^{-1} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{wd^{-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{wF} & \delta^{-1} B_{wF} & 0 & 0 \\ \hline MC_2 & ME_2 C_{wd^{-1}} & -C_{wF} & \delta^{-1} (MK_2 - D_{wF}) & -I & 0 \\ C_2 & E_2 C_{wd^{-1}} & 0 & \delta^{-1} K_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.24)$$

L'utilisation du lemme réel borné appliqué à chacun des modèles augmentés permet alors de résoudre le problème de synthèse:

$\|F_l(\tilde{P}_R, F)\|_\infty < \gamma_r$ et $\|F_l(\tilde{P}_S, F)\|_\infty < \gamma_s$ si et seulement s'il existe une matrice $X = X^T > 0$

telle que:

$$\begin{pmatrix} A_{dcl}^T X + X A_{dcl} & X B_{dcl} & C_{dcl}^T \\ B_{dcl}^T X & -\gamma_r \cdot I & D_{dcl}^T \\ C_{dcl} & D_{dcl} & -\gamma_r \cdot I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.25)$$

$$\begin{pmatrix} A_{fcl}^T X + X A_{fcl} & X B_{fcl} & C_{fcl}^T \\ B_{fcl}^T X & -\gamma_s \cdot I & D_{fcl}^T \\ C_{fcl} & D_{fcl} & -\gamma_s \cdot I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.26)$$

où $\left[\begin{array}{c|c} A_{dcl} & B_{dcl} \\ \hline C_{dcl} & D_{dcl} \end{array} \right]$ et $\left[\begin{array}{c|c} A_{fcl} & B_{fcl} \\ \hline C_{fcl} & D_{fcl} \end{array} \right]$ sont des réalisations respectives des LFT basses $F_l(\tilde{P}_R, F)$ et $F_l(\tilde{P}_S, F)$.

Si $\gamma_r \leq 1$ alors les performances en robustesse sont atteintes. De même, si $\gamma_s \leq 1$, les objectifs de sensibilités nominales sont atteints. Notons que cette formulation permet d'introduire un degré de liberté supplémentaire avec l'apparition de deux paramètres γ_r et γ_s qui peuvent être choisis inégaux.

Remarques:

✓ *L'inégalité (3.18) ne permet pas de déterminer la réalisation (A_F, B_F, C_F, D_F) du filtre $F(s)$. En effet l'inégalité (3.18) n'est pas conjointement linéaire en X et en les matrices d'état de $F(s)$. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser encore les changements de variables (2.22) et (2.23).*

✓ *Afin d'éviter de traiter un problème de dimension trop élevé, et d'un point de vue pratique, la synthèse de ce problème peut être résolue dans un cadre nominal, puis en analysant les performances (dans un cadre incertain) à l'aide des tests à bases de μ et μ_g .*

3.2.3 - Exemple

Afin d'illustrer la méthodologie développée, considérons le système masse-ressort-amortisseur défini dans le chapitre 2.

Les gains principaux des matrices de transfert $T_{dy}(j\omega)$ et $T_{fy}(j\omega)$ sont donnés sur la figure 3.3:

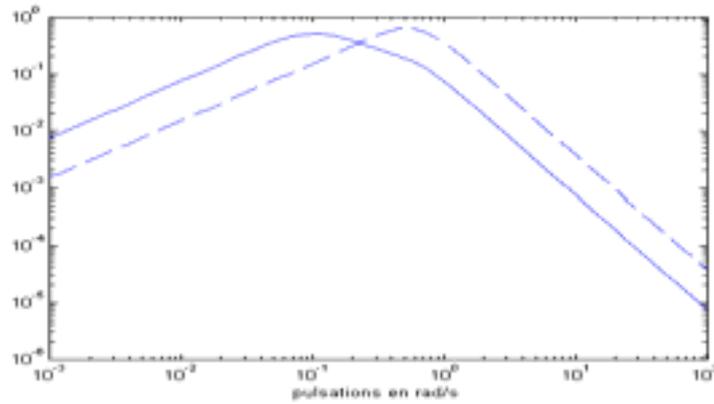


figure 3.3: Profils fréquentiels de $\underline{\sigma}(T_{fy}(j\omega))$ (-) et $\overline{\sigma}(T_{dy}(j\omega))$ (--)

Dans un premier temps, le niveau de robustesse est fixé à une valeur faible (ici 0.05), dans la zone où l'énergie de la perturbation est concentrée (autour de la pulsation centrale de 0.5 rd/s).

La pondération dynamique $W_d(s)$ est alors choisie de telle façon que le niveau de robustesse soit de 0.05 autour de cette pulsation, et que le niveau de robustesse soit relâché là où l'énergie du défaut est concentrée (autour de 0.1 rd/s).

Le choix de $W_F(s)$ est effectué de façon à maximiser l'effet du défaut sur le résidu sur une bande de fréquence comprise entre 0.001 rd/s et 0.1 rd/s sans pour autant sensibiliser le résidu à la perturbation. Ces deux pondérations sont alors choisies comme:

$$W_d(s) = 0.05 \frac{(s + 0.33)(s/1000 + 1)}{(s + 0.1)(s/15 + 1)} \quad (3.27)$$

$$W_F(s) = \frac{(s + 0.0001)^2 (s/1000 + 1)^2}{(s + 0.001)^2 (s/0.1 + 1)^2} \quad (3.28)$$

où des zéros ont été ajoutés en hautes fréquences afin de rendre les inverses de $W_d(s)$ et $W_F(s)$ réalisables.

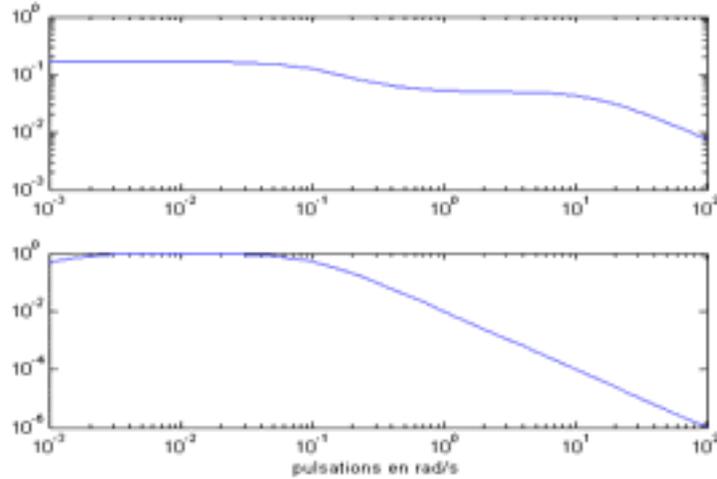


figure 3.4: Profils fréquentiels de $W_d(s)$ (en haut) et de $W_F(s)$ (en bas).

La bande de fréquence Ω_f où la sensibilité doit être maximisée est alors $\Omega_f = [0.001 \ 0.1] \text{ rad/s}$. La matrice de structuration M est choisie égale à $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Enfin, W_F est choisi tel que $\|W_F(j\omega)\|_- \geq \lambda = 1$.

On détermine alors la pondération $W_f(s)$ telle que β soit maximisé (ce qui revient à maximiser $\|W_f(j\omega)\|_-$, voir la remarque 3.1). La valeur numérique obtenue est $\beta = 0.35$, d'où :

$$\|W_F(s)\|_- = \frac{1}{0.35} \|W_f(s)\|_- \quad (3.29)$$

Le problème H_∞/H est transformé en un problème H_∞ , et la synthèse est effectuée pour que les objectifs (3.14) et (3.15) soient atteints.

On utilise pour cette synthèse les changements de variables (2.22) et (2.23). Dans un premier temps on synthétise un filtre à l'aide de la résolution des LMIs (3.25) et (3.26) qui conduit à un filtre de détection (d'ordre 10) dont le comportement fréquentiel est donné sur la figure 3.5.

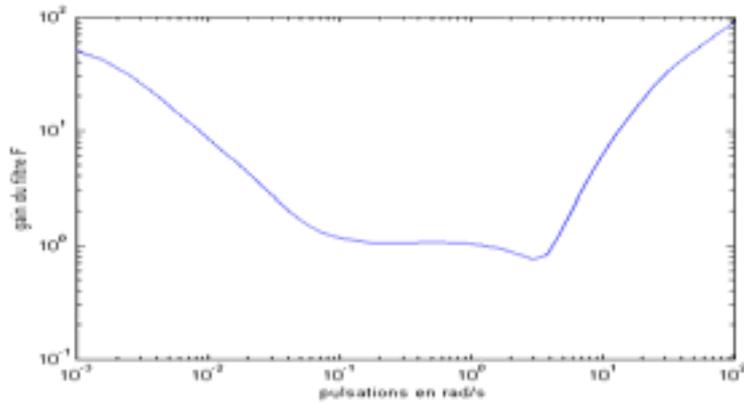


figure 3.5: Profil fréquentiel du filtre de détection

La seconde étape consiste à analyser les performances de ce filtre. Dans un premier, temps on vérifie que $\|T_{de}(j\omega)\|_{\infty} < \|W_d(j\omega)\|_{\infty}$ dans un cadre nominal (avec $\Delta = 0$). La figure 3.6 illustre les comportements fréquentiels de $\bar{\sigma}(T_{w_1e}(j\omega))$ et $\bar{\sigma}(W_d(j\omega))$:

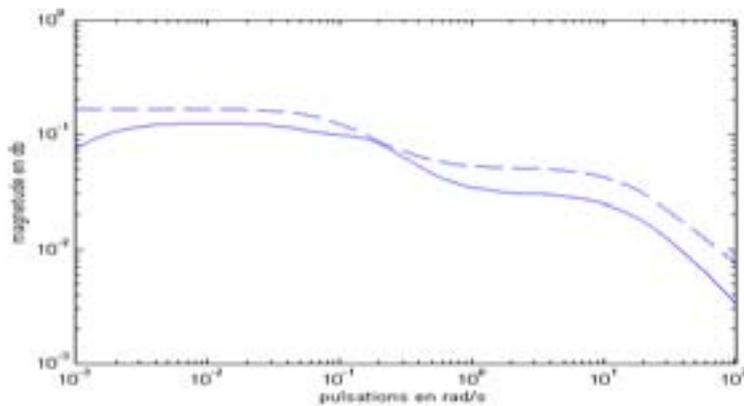


figure 3.6: Evolution de $\bar{\sigma}(T_{w_1e}(j\omega))$ (-) et $\bar{\sigma}(W_d(j\omega))$ (--)

Puis, une analyse a posteriori de la robustesse montre (figure 3.7) que la contrainte $\|T_{w_1e}(j\omega)\|_{\infty} < \|W_d(j\omega)\|_{\infty}$ est vérifiée $\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$ avec un conservatisme minimum, vu que $\sup_{\omega} \mu_{\underline{\Delta}}(T_{w_1e}(j\omega))$ est proche de 1 par valeurs inférieures.

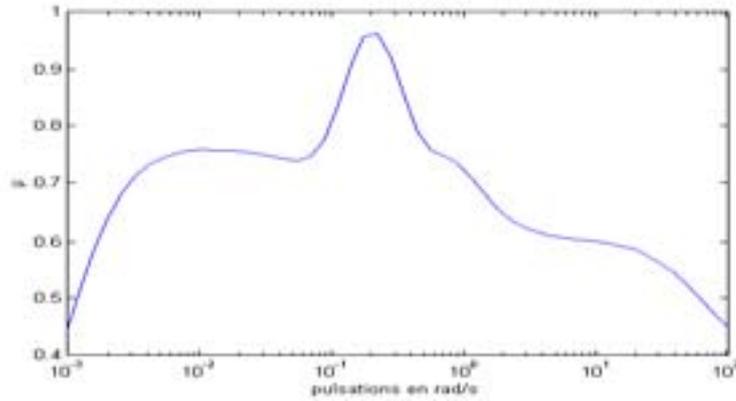


figure 3.7: Evolution de la fonction μ .

Dans un second temps, on analyse les performances en sensibilité. La figure 3.8 montre que la contrainte de sensibilité, $\|T_{w_2e}(j\omega)\|_- > \|W_f(j\omega)\|_- \quad \forall \omega \in \Omega_f$, où $\Omega_f = [0 \ 1]$ rd/s, est satisfaite dans un cadre nominal.

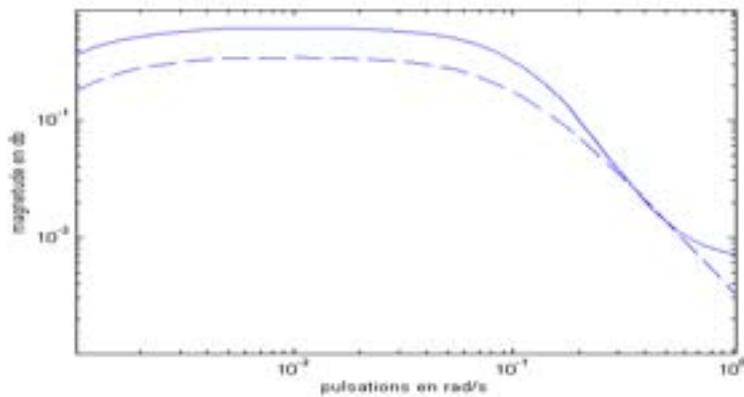


figure 3.8: Evolution de $\underline{\sigma}(T_{w_2e}(j\omega))$ (-) et de $\underline{\sigma}(W_f(j\omega))$ (--)

Les performances robustes du filtre DLRD sont ensuite testées à l'aide d'un test à base de μ_g . La figure 3.9 illustre le comportement de la fonction μ_g . Clairement, la valeur singulière structurée généralisée μ_g , est inférieure à 1 sur Ω_f et, d'après le théorème 2.4, les performances robustes sont donc atteintes. De plus, étant donné que sur cette zone de fréquence, μ_g est légèrement inférieure à 1, le conservatisme de la solution est faible

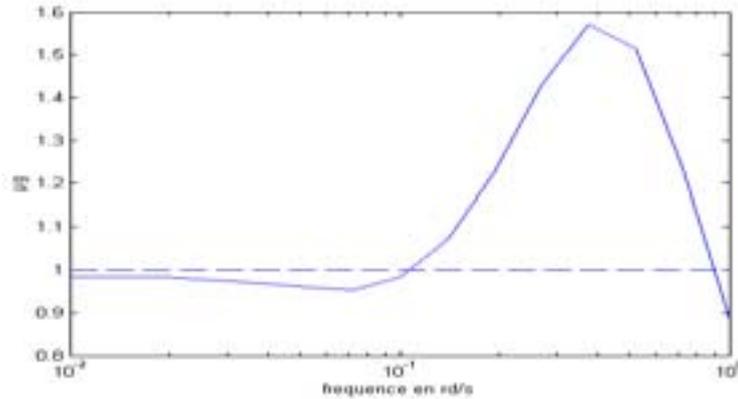


figure 3.9: Analyses de la sensibilité robuste

On pourra constater que les performances atteintes avec la méthodologie développée dans ce chapitre sont supérieures à celles obtenues avec l'approche présentée dans le chapitre II. En effet, dans le chapitre II, le niveau de sensibilité obtenu était de 0.25 pour un niveau de robustesse de 0.1, soit un rapport $J_{+/-} = 0.4$.

L'introduction d'une contrainte de sensibilité dans l'étape même de synthèse du filtre a amélioré sensiblement le critère $J_{+/-}$. En effet, le niveau de sensibilité est maintenant de 0.35 pour un niveau de robustesse de 0.05, soit $J_{+/-} = 0.1429$.

Cette amélioration se traduit également dans le domaine temporel où le défaut survient toujours entre 300s et 700s (figure 3.10). La figure 3.10 compare l'évolution du résidu e_3 du chapitre précédent (issu de la troisième itération) et le résidu e_4 provenant de la méthodologie développée dans ce chapitre. En comparaison avec les résultats obtenus dans le chapitre précédent, la sensibilité du résidu vis-à-vis des défauts est améliorée et dans le même temps, l'influence des perturbations sur ce même résidu est réduite.

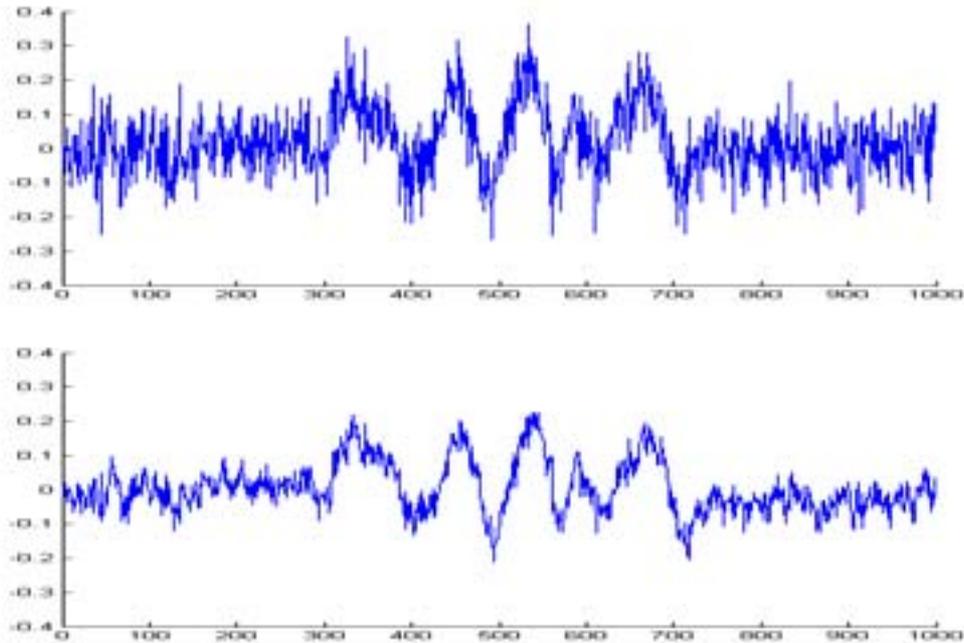


figure 3.10: Comparaison des résidus $e_3(t)$ (haut) et $e_4(t)$ (bas)

Une étude comparative de l'évolution de la variance de ce résidu, en présence ou non de défaut, est donnée dans le tableau ci-dessous:

	V_d : variance du résidu avec $f = 0$	V_f : variance du résidu avec $f \neq 0$	$\frac{V_f - V_d}{V_d}$
e_3	$4.94e-3$	$1.26e-2$	1.46
e_4	$1.44e-3$	$8.46e-3$	4.66

table 3.1: Etude de la variance

La comparaison de l'évolution de la variance des résidus e_3 et e_4 montre que qu'un test de décision sera plus sensible vis-à-vis du résidu e_4 . En effet, ce dernier a un saut de variance relatif $\frac{V_f - V_d}{V_d}$ beaucoup plus important que celui obtenu avec le résidu e_3 , ce qui diminuera les taux de fausse alarme et de non-détection.

3.3 - Cas des systèmes commandés en boucle fermée.

Nous allons d'abord analyser, en prenant l'exemple d'un observateur de diagnostic, l'influence du bouclage sur la sensibilité du résidu.

Considérons une boucle de commande élémentaire (voir figure 3.11), où le procédé représenté par le transfert $G(s)$, fonctionne en boucle fermée sous l'action d'un régulateur $K(s)$.

Outre les entrées inconnues (perturbation physique d et bruits de mesures b), différents types de défauts f (actionneur, composant ou capteur) peuvent agir sur ce système. Soit $G_0(s)$ un modèle nominal du procédé: $G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Supposons que le générateur de résidus soit un observateur de diagnostic:

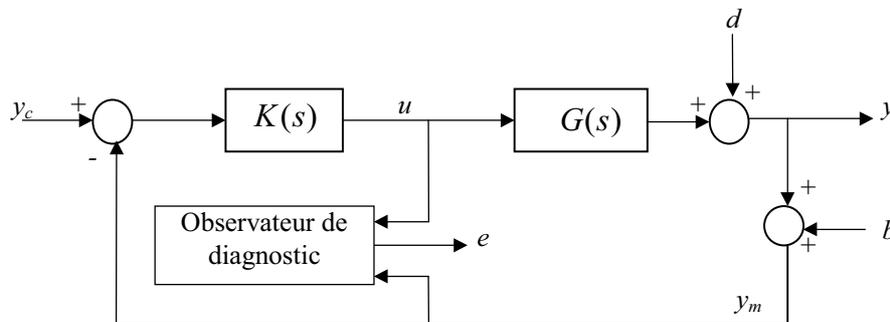


figure 3.11: Implantation d'un observateur de diagnostic dans un système bouclé.

Le résidu indiquant l'écart entre le comportement observé du système et le comportement de référence en fonctionnement normal est $e = y_m - \hat{y}$, soit:

$$e = S_{obs} \left((G(s) - G_0(s))u + d + b \right) \quad (3.30)$$

où $S_{obs} = \left(I + C(sI - A)^{-1}H \right)^{-1}$ est la fonction de sensibilité de l'observateur, et H le gain de l'observateur.

Il est évident que la contribution du terme dynamique $(G - G_0)u$, où $u = K(s)(y_c - y_m)$ peut masquer l'effet d'un éventuel défaut sur le résidu, et ce phénomène dépend du régulateur utilisé.

En effet,

$$u = K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}(y_c - d - b) \quad (3.31)$$

en définissant la fonction de sensibilité (du système commandé), $S_{BF}(s)$, comme:

$$S_{BF}(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} \quad (3.32)$$

et en injectant l'équation (3.32) dans (3.30), on a:

$$e = S_{obs}(s)((G(s) - G_0(s))K(s)S_{BF}(s)(y_c - d - b) + d + b) \quad (3.33)$$

Cette dernière relation, montre clairement que les fonctions de sensibilité, $S_{obs}(s)$ et $S_{BF}(s)$, influent sur le comportement du vecteur de résidus. Ces deux fonctions ont des objectifs contradictoires:

- ✓ $S_{obs}(s)$ résulte des objectifs de DLD, de façon à sensibiliser le vecteur de résidus aux défauts.
- ✓ $S_{BF}(s)$ est synthétisée suivant des objectifs de régulation. Ce qui minimise les effets dus, non seulement aux erreurs de modélisation et aux perturbations, mais aussi aux défauts.

3.3.1 - Analyse du problème de la DLRD pour les systèmes bouclés.

Dans ce paragraphe, on compare les expressions du vecteur de résidus des systèmes multivariables incertains et nominaux d'une part, en boucle ouverte et d'autre part, en boucle fermée.

Considérons le schéma bloc de la figure 3.12, pour la synthèse d'un filtre DLRD par filtre de détection pour un système multivariable incertain et commandé en boucle fermée.

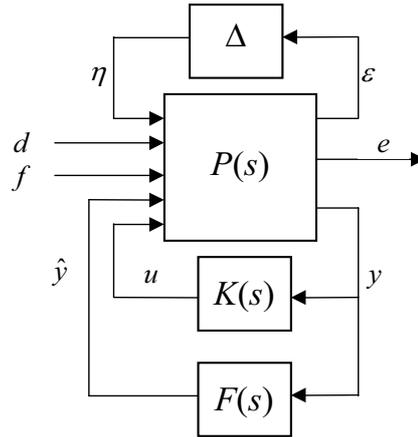


figure 3.12: Problématique de DLRD pour les systèmes commandés en BF.

où $K(s)$ représente le régulateur et $F(s)$ représente le filtre DLRD.

La matrice de transfert $P(s)$ est partitionnée de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\eta\varepsilon} & P_{d\varepsilon} & P_{f\varepsilon} & 0 & P_{u\varepsilon} \\ P_{\eta y} & P_{d y} & P_{f y} & -I & 0 \\ P_{\eta y} & P_{d y} & P_{f y} & 0 & P_{u y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ d \\ f \\ \hat{y} \\ u \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

On définit alors l'erreur d'estimation, e , prise comme signal indicateur de défaut, et pour simplifier l'analyse, on suppose $M = I$:

$$e = (I - F(s))y - P_{uy}(s)u \quad (3.35)$$

3.3.1.1 - DLRD en boucle fermée: cas nominal

En boucle ouverte ($K(s) = 0$), le vecteur de résidus s'exprime uniquement en fonction du vecteur de perturbations et du vecteur de défauts.

$$e_{BO} = (I - F(s))(P_{dy}(s)d + P_{fy}(s)f) \quad (3.36)$$

En bouclant le système par un régulateur, $u = -K(s)y$, l'expression du vecteur de résidus devient:

$$\begin{aligned} e_{BF} &= (I - F(s))(I + G(s)K(s))^{-1}(P_{dy}(s)d + P_{fy}(s)f) \\ &= (I - F(s))S_{BF}(s)(P_{dy}(s)d + P_{fy}(s)f) \end{aligned} \quad (3.37)$$

La différence notable entre l'expression (3.36) du vecteur de résidus en boucle ouverte et (3.37) en boucle fermée, provient de l'apparition de la fonction de sensibilité, $S_{BF}(s)$, dans (3.37) qui peut altérer les performances en détection. Pour s'affranchir de ce problème, une solution simple consiste à implanter un filtre de détection $F_{BF}(s)$ telle que:

$$F_{BF}(s) = I - (I - F(s))S_{BF}^{-1}(s) \quad (3.38)$$

Une seconde solution consiste à trouver une structure d'observateur équivalente comme le propose l'approche décrite dans le paragraphe 1.4.3.6.

3.3.1.2 - DLRD en boucle fermée: cas incertain.

Reprenons la même démarche d'analyse qu'au paragraphe précédent, mais en considérant cette fois le cas où $\Delta \neq 0$.

D'après la figure 3.12, en boucle ouverte, le vecteur de sorties y , a pour expression:

$$\begin{aligned} y &= \begin{pmatrix} P_{\eta y} \Delta S_{\Delta} P_{d\epsilon} + P_{dy} & P_{\eta y} \Delta S_{\Delta} P_{f\epsilon} + P_{fy} & P_{\eta y} \Delta S_{\Delta} P_{u\epsilon} + P_{uy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ f \\ u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{P}_{dy} & \bar{P}_{fy} & \bar{P}_{uy} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

où $S_{\Delta}(s) = (I - P_{\eta\epsilon}(s)\Delta)^{-1}$.

Le vecteur de résidus s'écrit alors:

$$e_{BO} = (I - F(s)) \begin{pmatrix} P_{\eta y}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{d\epsilon}(s) + P_{dy}(s) & P_{\eta y}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{f\epsilon}(s) + P_{fy}(s) & P_{\eta y}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{u\epsilon}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ f \\ u \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

En comparaison avec le cas nominal, trois termes additifs, dus à la prise en compte des incertitudes, apparaissent dans l'expression du vecteur de résidus.

A présent, si l'on considère le bouclage $u = -K(s)y$, l'expression de y devient:

$$y = \left(I + \bar{P}_{uy} K \right)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{P}_{dy} & \bar{P}_{fy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Cette dernière relation, conduit à l'expression du vecteur de résidus suivante:

$$e_{BF} = \left(I - F(s) \right) \left(I + \bar{P}_{uy}(s) K(s) \right)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{P}_{dy}(s) d + \bar{P}_{fy}(s) f \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Soit

$$\begin{aligned} e_{BF} = & \left(I - F(s) \right) \left(I + \left(P_{\eta\varepsilon}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{u\varepsilon}(s) + P_{uy}(s) \right) K(s) \right)^{-1} \left(P_{\eta\varepsilon}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{d\varepsilon}(s) + P_{dy}(s) \right) d \\ & + \left(I - F(s) \right) \left(I + \left(P_{\eta\varepsilon}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{u\varepsilon}(s) + P_{uy}(s) \right) K(s) \right)^{-1} \left(P_{\eta\varepsilon}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{f\varepsilon}(s) + P_{fy}(s) \right) f \\ & + \left(I - F(s) \right) \left(I + \left(P_{\eta\varepsilon}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{u\varepsilon}(s) + P_{uy}(s) \right) K(s) \right)^{-1} \left(P_{\eta\varepsilon}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{u\varepsilon}(s) \right) u \end{aligned} \quad (3.43)$$

Contrairement au cas des systèmes nominaux, la problématique de DLRD appliquée au cas des systèmes incertains et commandés en boucle fermée, s'avère plus complexe. En effet, au vu des équations (3.40) et (3.43), il est impossible de déduire une expression de $F_{BF}(s)$, qui permettrait d'exprimer le vecteur de résidus indépendamment de la fonction de sensibilité du système, qui est incertaine:

$$S_{BFinc}(s) = \left(I + \left(P_{\eta\varepsilon}(s) \Delta S_{\Delta}(s) P_{u\varepsilon}(s) + P_{uy}(s) \right) K(s) \right)^{-1} \quad (3.44)$$

Dans le paragraphe suivant, nous abordons le problème de synthèse de filtres DLRD, dans le cas général des systèmes multivariables, incertains et commandés en boucle fermée.

3.3.2 - Résolution du problème de synthèse du filtre DLRD en boucle fermée.

La solution proposée consiste à intégrer le correcteur $K(s)$ dans le schéma (2.3), comme illustré sur la figure (3.13). Dans le cas des systèmes commandés en boucle fermée, le signal de commande u est sensible à tous les phénomènes (normaux ou anormaux) agissant sur le procédé de façon à désensibiliser les sorties contrôlées. Dans ce cas, un filtrage du vecteurs d'entrées en plus du vecteur de sorties, comme le montre la figure (3.13), est une solution pour concevoir un filtre DLRD:

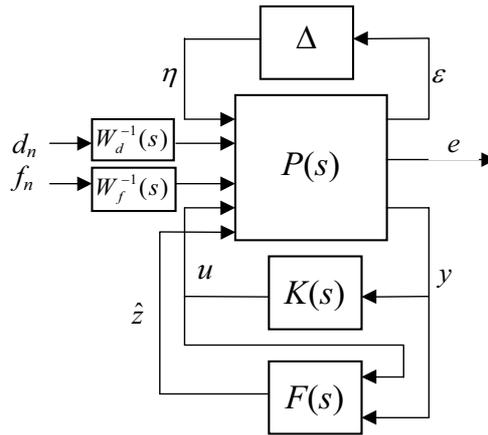


figure 3.13: Problème de synthèse de $F(s)$: cas des systèmes commandés.

Dans ce contexte, le résidu est alors donné par :

$$e = \begin{bmatrix} M_y & M_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - \hat{z} \quad (3.45)$$

où M_y et M_u sont les matrices de structuration relatives aux vecteurs de sortie y et de commande u .

Le problème que l'on cherche à résoudre peut être formulé comme suit:

Déterminer la réalisation (A_F, B_F, C_F, D_F) du filtre $F(s)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = A_F x_F(t) + B_F \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \\ \hat{z}(t) = C_F x_F(t) + D_F \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.46)$$

telle que $\|T_{de}(j\omega)\|_\infty < \|W_d(j\omega)\|_\infty$ et $\|T_{fe}(j\omega)\|_- > \|W_f(j\omega)\|_- \quad \forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$.

En utilisant le formalisme LFT, ce problème peut être posé de la même façon que le problème du paragraphe 3.3 où le modèle augmenté $P(s)$ est remplacé par $F_l(P, K)$ et où y est remplacé

par le vecteur $\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$.

De même, comme dans le cas des systèmes non commandés, le problème min-max peut être transformé en un problème fictif de minimisation (voir figure(3.1)).

En effet, en considérant le schéma 3.13, on peut définir un nouveau modèle augmenté $\tilde{P}_{BF}(s)$ comprenant le modèle augmenté $P(s)$, les objectifs de robustesse et de sensibilité ainsi que le régulateur, comme l'illustre la figure 3.14:

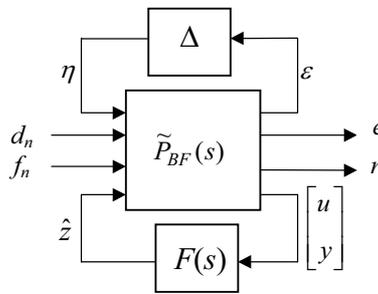


figure 3. 14: Problème de synthèse fictif, cas des systèmes commandés en boucle fermée.

Si la réalisation de $P(s)$ est définie de la façon suivante:

$$\left[\begin{array}{c|ccc|cc} A & B_1 & E_1 & K_1 & B_2 & 0 \\ \hline C_1 & D_{11} & T_d & T_f & D_{12} & 0 \\ M_y C_2 & M_y D_{21} & M_y E_2 & M_y K_2 & M_y D_{22} + M_u & -I \\ \hline C_2 & D_{21} & E_2 & K_2 & D_{22} & 0 \end{array} \right] \quad (3.47)$$

Alors, $\tilde{P}_{BF}(s)$ admet la réalisation $(\tilde{A}_{BF}, \tilde{B}_{BF}, \tilde{C}_{BF}, \tilde{D}_{BF})$, avec:

$$\tilde{A}_{BF} = \left[\begin{array}{ccc|c} A + B_2 \tilde{D} \tilde{D}_K C_2 & B_2 \tilde{D} C_K & (E_1 + B_2 \tilde{D} \tilde{D}_K E_2) C_{wd^{-1}} & 0 \\ B_K \bar{D} C_2 & A_K + B_K \bar{D} D_{22} C_K & B_K \bar{D} E_2 C_{wd^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & A_{wd^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{wF} \end{array} \right] \quad (3.48)$$

$$\tilde{B}_{BF} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 \tilde{D} D_K D_{21} & (E_1 + B_2 \tilde{D} D_K E_2) D_{wd}^{-1} & \delta^{-1} (K_1 + B_2 \tilde{D} D_K K_2) & 0 \\ B_K \bar{D} D_{21} & B_K \bar{D} E_2 D_{wd}^{-1} & \delta^{-1} B_K \bar{D} K_2 & 0 \\ 0 & B_{wd}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-1} B_{wF} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\tilde{C}_{BF} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} \tilde{D} D_K C_2 & D_{12} \tilde{D} C_K & (T_d + D_{12} \tilde{D} D_K E_2) C_{wd}^{-1} & 0 \\ (M_y + M_u D_K) \bar{D} C_2 & (M_y + M_u D_K) \bar{D} C_K + M_u C_2 & (M_y + M_u D_K) \bar{D} E_2 C_{wd}^{-1} & 0 \\ (M_y + M_u D_K) \bar{D} C_2 & (M_y + M_u D_K) \bar{D} C_K + M_u C_2 & (M_y + M_u D_K) \bar{D} E_2 C_{wd}^{-1} & -C_{wF} \\ \tilde{D} D_K C_2 & \tilde{D} C_K & \tilde{D} D_K E_2 C_{wd}^{-1} & 0 \\ \bar{D} C_2 & D_{22} \tilde{D} C_K & \bar{D} D_K E_2 C_{wd}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\tilde{D}_{BF} = \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} \tilde{D} D_K D_{21} & (T_d + D_{12} \tilde{D} D_K E_2) D_{wd}^{-1} & \delta^{-1} (T_f + D_{12} \tilde{D} D_K K_2) & 0 \\ (M_y + M_u) \bar{D} D_{21} & (M_y + M_u) \bar{D} E_2 D_{wd}^{-1} & \delta^{-1} (M_y + M_u) \bar{D} K_2 & -I \\ (M_y + M_u) \bar{D} D_{21} & (M_y + M_u) \bar{D} E_2 D_{wd}^{-1} & \delta^{-1} (M_y + M_u) \bar{D} K_2 & -I \\ \tilde{D} D_K D_{21} & \tilde{D} D_K E_2 D_{wd}^{-1} & \delta^{-1} \tilde{D} D_K K_2 & 0 \\ \bar{D} D_{21} & \bar{D} E_2 D_{wd}^{-1} & \delta^{-1} \bar{D} K_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

où $\tilde{D} = (I - D_K D_{22})^{-1}$, $\bar{D} = (I - D_{22} D_K)^{-1}$ et où (A_K, B_K, C_K, D_K) est une réalisation du régulateur $K(s)$.

Pour résoudre ce problème d'optimisation DLRD, deux matrices de transfert, $\tilde{P}_{BF_R}(s)$ et $\tilde{P}_{BF_S}(s)$, liant respectivement $(\eta \ d_n \ \hat{z})^T$ à $(\varepsilon \ e \ u \ y)^T$ et $(f_n \ \hat{z})^T$ à $(r \ u \ y)^T$, sont déduites de la réalisation d'état de $\tilde{P}_{BF}(s)$.

Puis, tout comme en boucle ouverte, l'utilisation du lemme réel borné, pour minimiser les normes $\|F_l(\tilde{P}_{BF_R}, F)\|_\infty$ (contrainte de robustesse) et $\|F_l(\tilde{P}_{BF_S}, F)\|_\infty$ (contrainte de sensibilité) par les scalaires respectifs γ_r et γ_s , permet de résoudre le problème de synthèse (voir les équations (3.25) et (3.26)).

Pour terminer, rappelons que la condition d'équivalence entre le problème fictif H_∞ et H_∞/H est seulement suffisante. Seule une analyse *a posteriori*, à l'aide d'un test à base de μ_g (voir théorème 2.4), permet de conclure sur les performances robustes obtenue.

3.3.3 - Exemple : procédé hydraulique 3 Tanks

L'étude expérimentale est basée sur un procédé hydraulique de laboratoire. La figure suivante montre la structure du procédé. Ce système est constitué de trois cylindres T_1 , T_2 , T_3 ayant une section S . Ils sont interconnectés par des conduits cylindriques de section S_n . Le liquide (de l'eau distillée) qui s'écoule est collectée dans un réservoir qui approvisionne deux pompes P_1 et P_2 . Ces deux pompes sont commandées par des moteurs à courant continu et ont un débit Q_1 et Q_2 . Les cuves sont équipées de capteurs de pression différentielle pour mesurer le niveau de liquide (h_1 , h_2 et h_3). Trois vannes de section S_{li} , $i=1,2,3$ ajustables manuellement, permettent de créer des fuites.

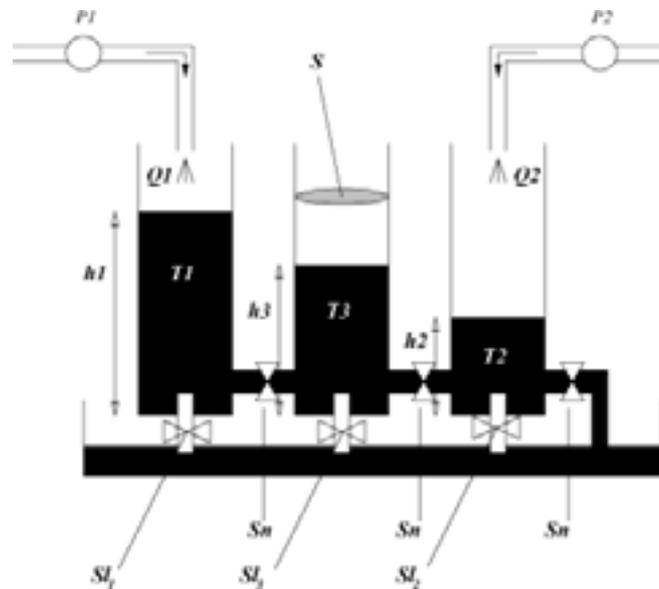


figure 3.15: Procédé expérimental.

La contrainte de DLRD que l'on s'impose, est de détecter et de localiser les trois fuites que l'on déclenchera par l'ouverture des vannes S_{li} , $i=1,2,3$. La stratégie de localisation que nous allons utiliser est de type DOS (voir chapitre 1).

La loi de commande présente dans ce procédé, correspond à un régulateur diagonal de type proportionnel Intégral. :

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{C_1(\tau_1 s + 1)}{\tau_1 s} & 0 \\ 0 & \frac{C_2(\tau_2 s + 1)}{\tau_2 s} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

avec $C_1 = 81$, $C_2 = 122.64$, $\tau_1 = 11.5$ et $\tau_2 = 12.5$.

Cette loi de commande a été calculée de façon à satisfaire aux spécifications du cahier des charges suivant:

✓ *Régulation*: si le système subit une perturbation de débit (vanne ouverte à 50%), l'écart statique doit s'annuler en moins de 30s et la réponse du système bouclé ne doit pas présenter un dépassement supérieur à 0.5cm. De plus, ces performances doivent être obtenues sans saturer le débit des pompes (débit max=92ml/s)

✓ *Asservissement*: lors d'un changement de consigne d'amplitude 10cm, le régime transitoire est jugé adapté si l'on enregistre un dépassement inférieur à 10% et si l'écart de statisme s'annule en moins de 50s.

Modèle LFT du procédé hydraulique :

Pour ce système, un modèle non linéaire est défini par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} S\dot{h}_1 &= -a_1 S_n \sqrt{[2g(h_1 - h_3)]} + Q_1 \\ S\dot{h}_3 &= a_1 S_n \sqrt{[2g(h_1 - h_3)]} - a_3 S_n \sqrt{[2g(h_3 - h_2)]} \\ S\dot{h}_2 &= a_3 S_n \sqrt{[2g(h_3 - h_2)]} - a_2 S_n \sqrt{(2gh_2)} + Q_2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ici on considère $h_1 > h_3 > h_2$. Les coefficients d'écoulement a_i , $i=1, 2, 3$ sont des paramètres incertains évoluant entre une borne inférieure \underline{a}_i et une borne supérieure \bar{a}_i . Le modèle suivant est retenu pour décrire ces variations paramétriques :

$$a_i = a_{i0} + \omega_i \delta_i, \text{ avec } |\delta_i| \leq 1, i = 1, 2, 3 \quad (3.55)$$

Sur la base de ce modèle non-linéaire, un modèle d'état linéarisé autour du point d'équilibre $(h_1^*, h_2^*, h_3^*, Q_1^*, Q_2^*)$ est calculé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.56)$$

où $x(t) = (\delta h_1 \quad \delta h_2 \quad \delta h_3)^T$, $u(t)$ est le vecteur commande formé des variations de débit Q_1 , Q_2 et où $y(t)$ est le vecteur de sortie formé des niveaux d'eau h_1 , h_2 et h_3 . Les matrices A , B et C sont données par :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -k_1 a_1 & 0 & k_1 a_1 \\ 0 & -k_3 a_3 - k_2 a_2 & k_3 a_3 \\ k_1 a_1 & k_3 a_3 & -k_1 a_1 - k_3 a_3 \end{pmatrix} \\ B &= \frac{1}{S} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C &= I_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (3.57)$$

où $k_1 = \frac{S_n \sqrt{2g}}{2S \sqrt{h_1^* - h_3^*}}$, $k_2 = \frac{S_n \sqrt{2g}}{2S \sqrt{h_2^*}}$, $k_3 = \frac{S_n \sqrt{2g}}{2S \sqrt{h_3^* - h_2^*}}$ et où g est la constante de gravité.

Afin d'intégrer les incertitudes dues aux coefficients d'écoulement, on calcule la LFT haute (P, Δ) définie de façon à obtenir un modèle incertain :

$$\underline{\Delta} = \{diag(\delta_1, \delta_2, \delta_3), \|\Delta\|_\infty < 1\} \quad (3.58)$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} (B_1 \quad B_2) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -k_1 a_{10} & 0 & k_1 a_{10} \\ 0 & -k_3 a_{30} - k_2 a_{20} & k_3 a_{30} \\ k_1 a_{10} & k_3 a_{30} & -k_1 a_{10} - k_3 a_{30} \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ -\omega_1 & 0 & -\omega_3 \end{pmatrix} \\ C_1 &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \\ B_2 &= B, C_2 = C, D_{11} = D_{12} = D_{21} = D_{22} = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Les bruits de mesures sont considérés comme étant des bruits blancs filtrés par un filtre formeur: $n = W_n(s)d$. Ce filtre est déterminé par analyse spectrale des signaux de sortie lors d'un cycle de fonctionnement normal du système en boucle ouverte :

$$W_n = 0.05 \frac{1+0.2s}{1+0.125s} \mathbf{I}_3 \quad (3.61)$$

Les résultats qui suivent ont été obtenus avec les valeurs numériques :

$$h_1^* = 40cm, \quad h_2^* = 20cm, \quad h_3^* = 30cm, \quad S=0.0154m^2, \quad S_n=5.10^{-5}m^2, \quad S_l \frac{S_n}{2}, \quad g=9.81s.m^{-2},$$

$$a_{10} = 0.6, \quad a_{20} = 0.8, \quad a_{30} = 0.6, \quad \omega_1 = 0.4, \quad \omega_2 = 0.2, \quad \omega_3 = 0.4.$$

Les fuites f_i , $i=1, 2, 3$, pouvant intervenir sur les cuves T_i sont modélisées par les variations paramétriques affectant la matrice d'état A . On note A_f la matrice d'évolution en présence des trois défaillances:

$$A_f = \begin{pmatrix} -k_1 a_{10} - k_{f_1} & 0 & k_1 a_{10} \\ 0 & -k_3 a_{30} - k_2 a_{20} - k_{f_2} & k_3 a_{30} \\ k_1 a_{10} & k_3 a_{30} & -k_1 a_{10} - k_3 a_{30} - k_{f_3} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

$$\text{où } k_{f_i} = \frac{S_l \sqrt{2g}}{2S \sqrt{h_i^*}} a_{i0}, \quad i=1, 2, 3.$$

La matrice A_f est composée d'une somme entre la matrice d'évolution A en fonctionnement normal, et une matrice K_f :

$$A_f = A + K_f \quad (3.63)$$

$$\text{où } K_f = \begin{bmatrix} -k_{f_1} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{f_2} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{f_3} \end{bmatrix}.$$

Ce qui permet de construire aisément le schéma augmenté conformément à la figure 3.2 :

$$P: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\eta(t) + B_2u(t) + K_f f(t) \\ \varepsilon(t) = C_1(t)\eta(t) \\ y(t) = C_2x(t) + n \end{cases} \quad (3.64)$$

n représente les bruits de mesures modélisés conformément à (3.61) et $f = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T$ représente le vecteur de défauts.

Pour localiser les trois fuites, on utilise une structure DOS. Il s'agit d'augmenter le vecteur des perturbations d d'un sous-ensemble de f contenant deux éléments. On synthétise alors 3 filtres de détection $F_i(s)$, $i = 1,2,3$, tels que la sortie de chaque filtre soit sensible à une seule fuite. Les fonctions de pondérations W_{f_i} relatives aux objectifs de sensibilité sont déterminées de façon à maximiser les effets du défaut f_i sur le résidu e_i tout en étant robuste vis-à-vis des deux autres défaillances et des bruits exogènes. Après quelques itérations, les objectifs W_{f_i} obtenus sont représentés sur la figure 3.16:

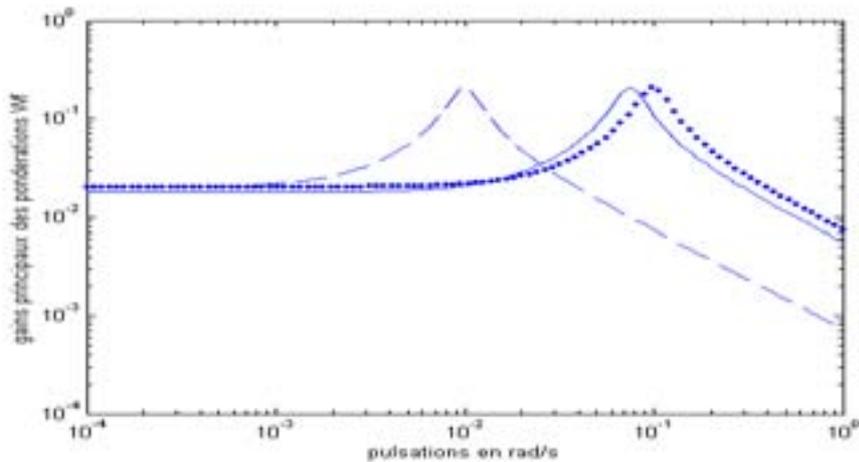


figure 3.16: Profils fréquentiels de W_{f_1} (-), W_{f_2} (..) et W_{f_3} (- -)

Résultats expérimentaux :

Ce procédé étant commandé en boucle fermée, les trois filtres F_i , $i=1,2,3$ sont synthétisés suivant la méthode exposée dans le paragraphe 3.3.2, en incluant l'expression du régulateur dans le modèle augmenté.

Les matrices de structuration M_y et M_u sont choisies expérimentalement. La sortie y_1 ainsi que la commande u_1 sont naturellement sensible au défaut f_1 , tout en étant robustes vis à vis de f_2 et f_3 (à un degrés moindre). Afin de détecter le défaut f_1 , on choisit donc les matrices de structuration comme $M_{y_1} = [1 \ 0 \ 0]$ et $M_{u_1} = [1 \ 0]$.

Une démarche identique est utilisée pour détecter les deux autres défaillance, ce qui conduit aux matrices de structuration suivantes: $M_{y_2} = [0 \ 1 \ 0]$, $M_{u_2} = [0 \ 1]$, $M_{y_3} = [0 \ 0 \ 1]$, $M_{u_3} = [1 \ 1]$.

Les figures 3.17, 3.18 et 3.19 donnent les gabarits fréquentiels des filtres obtenus (les transferts $T_{y_1 \rightarrow \hat{z}}$ (-), $T_{y_2 \rightarrow \hat{z}}$ (--), $T_{y_3 \rightarrow \hat{z}}$ (..), $T_{u_1 \rightarrow \hat{z}}$ (o) et $T_{u_2 \rightarrow \hat{z}}$ (*) :

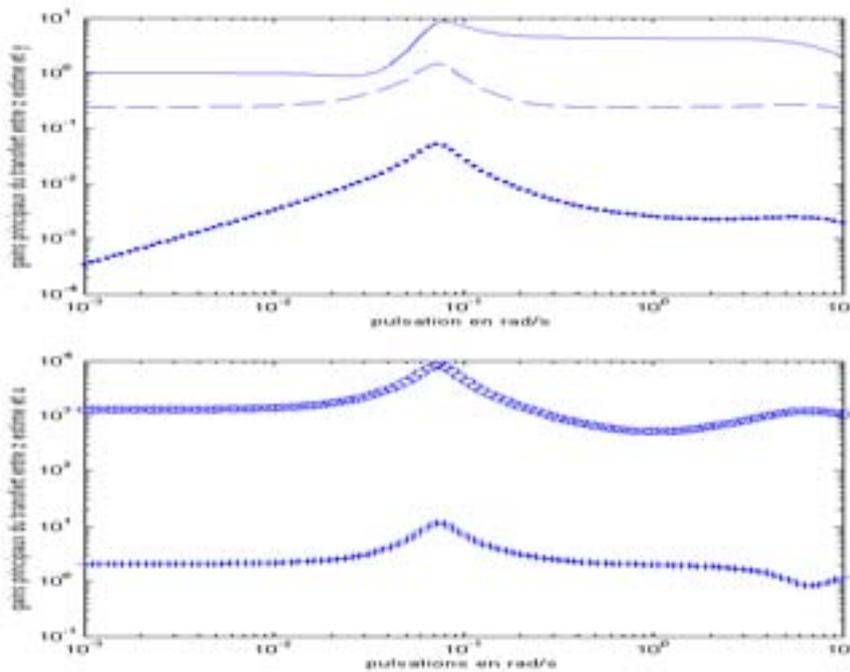


figure 3.17: Profil fréquentiel de $F_1(s)$

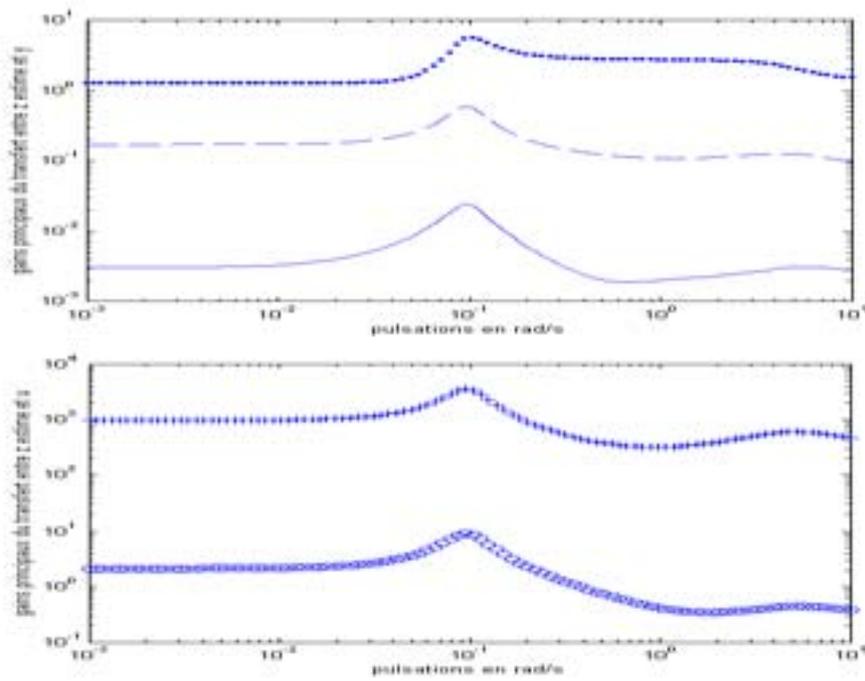


figure 3.18: Profil fréquentiel de $F_2(s)$

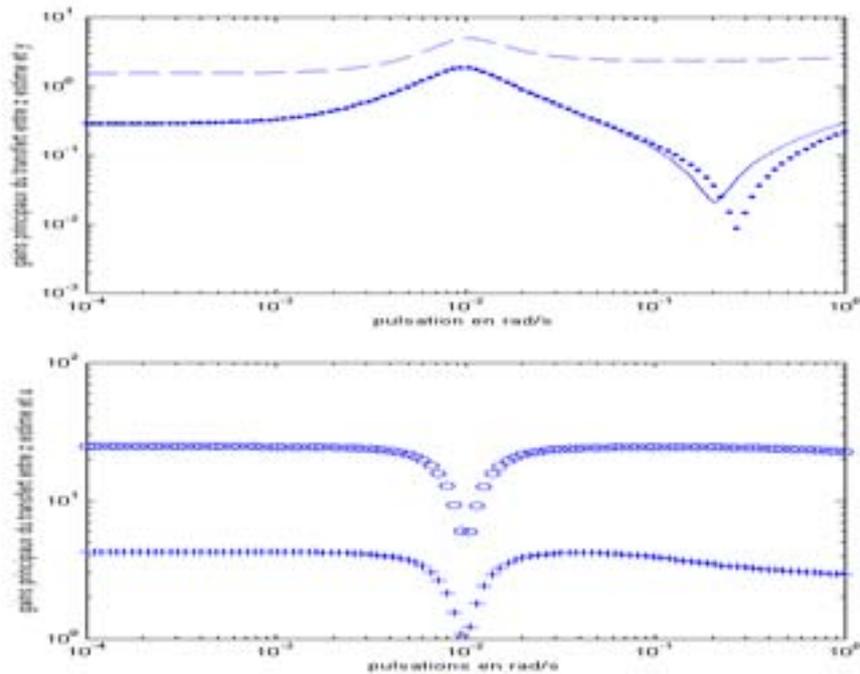


figure 3.19: Profil fréquentiel de $F_3(s)$

Sur cette application, les objectifs de robustesse et de localisation, obtenues après quelques itérations sont les suivants:

- ✓ Pour le filtre F_1 : $\|T_{d_1e}(j\omega)\|_\infty < 0.45$ où $d_1 = (n_1 \ n_2 \ n_3 \ f_2 \ f_3)^T$.
- ✓ Pour le filtre F_2 : $\|T_{d_2e}(j\omega)\|_\infty < 0.22$ où $d_2 = (n_1 \ n_2 \ n_3 \ f_1 \ f_3)^T$.
- ✓ Pour le filtre F_3 : $\|T_{d_3e}(j\omega)\|_\infty < 0.19$ où $d_3 = (n_1 \ n_2 \ n_3 \ f_1 \ f_2)^T$.

La figure 3.20 représente le comportement de la fonction μ pour chacun des trois filtres. Comme on peut le constater, dans chacun des cas, la valeur singulière structurée μ est voisine de 1 par valeurs inférieures. Ces résultats montrent que les contraintes de robustesse sont satisfaites $\forall \Delta \in \underline{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$.

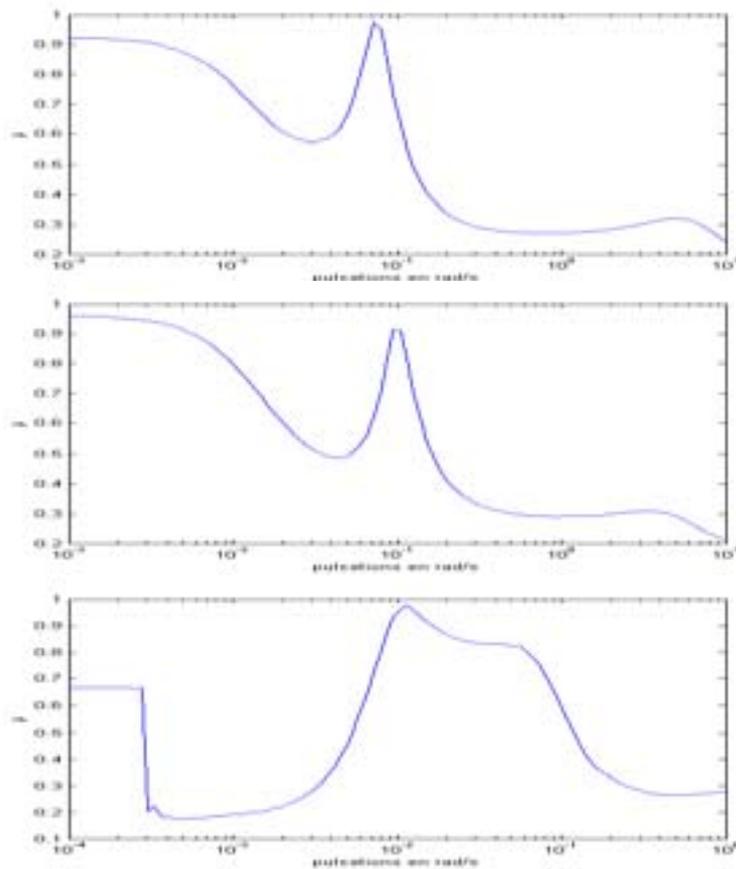


figure 3.20: Analyse des objectifs de robustesse par la fonction μ : en haut F_1 , au centre F_2 , en bas F_3

Sur la figure 3.20, le comportement de la μ_g montre que les performances robustes sont aussi satisfaites. En effet, la fonction μ_g reste inférieure à 1 sur les zones de fréquences spécifiées (voir théorème 2.3).

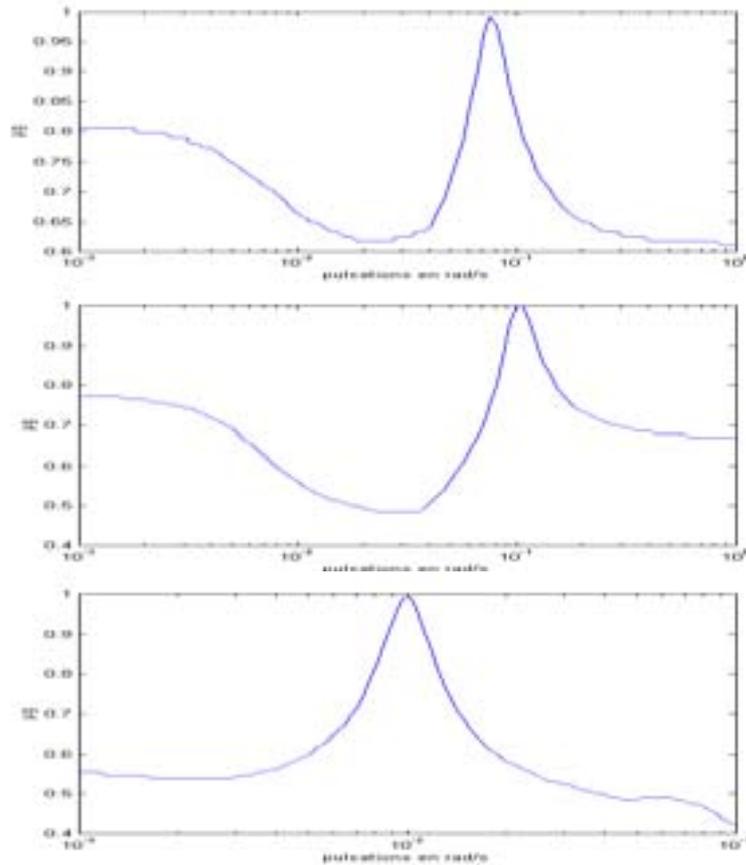


figure 3.21: Analyse des performances robustes par la fonction μ_g : en haut F_1 , au centre F_2 , en bas F_3 .

La figure 3.22 illustre le comportement temporel des trois résidus. Les résultats montrent que, comme attendu, le résidu e_i , $i=1,2,3$ est sensible uniquement au défaut f_i . En utilisant une simple logique de détection à seuil, il est aisé de détecter et de localiser chaque fuite.

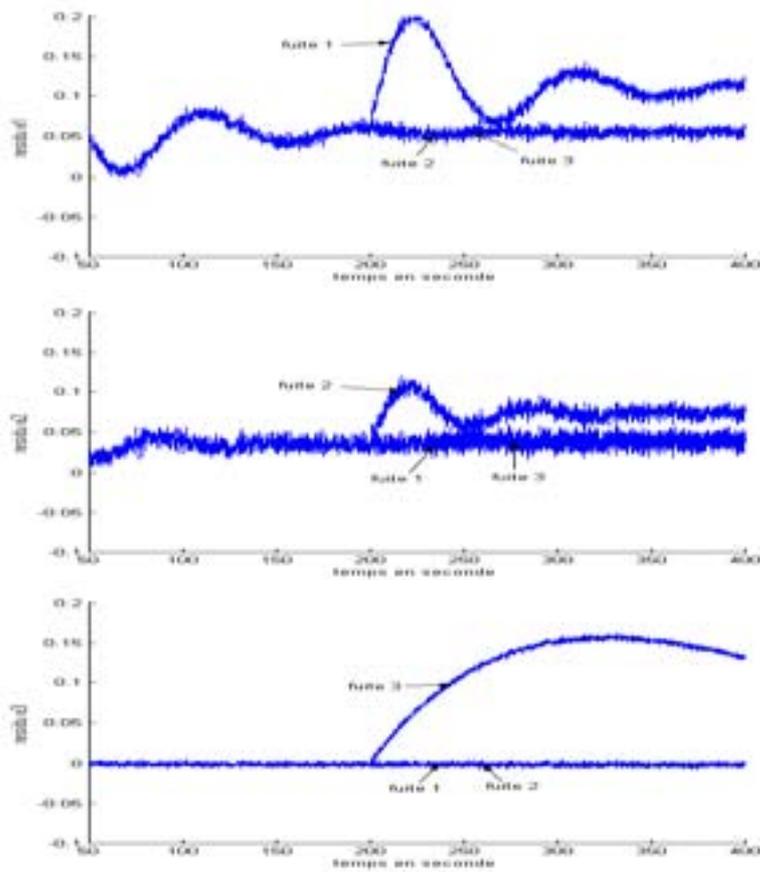


figure 3.22: Comportement temporel des résidus en présence des défauts. En haut $e_1(t)$; au centre $e_2(t)$, en bas $e_3(t)$.

3.4 - Conclusion

Dans ce chapitre nous avons considéré le problème de DLRD dans le cas des systèmes multivariables et incertains, en intégrant dans les spécifications de synthèse du filtre DLRD, des objectifs de sensibilité.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au cas des systèmes fonctionnant en boucle ouverte. La méthodologie développée est basée sur une procédure à deux étapes. La première consiste à synthétiser un filtre de DLRD suivant des contraintes de robustesse exprimées dans un contexte H_∞ et des contraintes de sensibilité formulées en terme de spécification H . Nous avons établi une condition suffisante pour que le problème mixte H_∞/H puisse être transformé en un problème fictif H_∞ , en transformant la contrainte de type gain min en une contrainte de type gain max. Ce dernier problème est alors résolu à l'aide des

techniques LMIs. La seconde étape consiste à analyser, sur la structure réelle du bloc d'incertitude, les performances obtenues à l'aide de tests basés sur les fonctions μ et μ_g .

Dans un deuxième temps, nous avons abordé le problème des systèmes multivariables incertains asservis. Nous avons alors montré, que l'utilisation du formalisme LFT permettait d'appréhender le problème de façon identique à celui des systèmes fonctionnant en boucle ouverte. L'approche a été validée sur un procédé expérimental de laboratoire.

La méthodologie développée dans ce chapitre complète donc celle du chapitre précédent, en intégrant un objectif de sensibilité dès l'étape de synthèse, et en généralisant l'approche au cas des systèmes commandés en boucle fermée. Dans le chapitre suivant, les techniques proposées seront mise en œuvre sur un benchmark aéronautique.

Chapitre 4

Mise en œuvre, application au benchmark RCAM.

4.1 - Introduction

Ce chapitre est dédié à la mise en œuvre des techniques de DLRD développées au chapitre précédent sur un simulateur de vol RCAM¹.

Le benchmark RCAM est un simulateur de comportement dynamique d'un avion civil. Il a été développé dans le cadre des travaux du groupe GARTEUR pour tester les performances des différentes lois de commande robuste. Ce simulateur est basé sur les équations non linéaires de la mécanique du vol et permet de simuler de façon réaliste, le comportement dynamique de l'appareil.

Les perturbations externes sont principalement des perturbations atmosphériques (turbulences, vents constants,...). Les incertitudes de modélisation sont des incertitudes de type paramétrique (masse, centre d'inertie,...).

Ce simulateur comporte une loi de commande (pilote automatique). Il s'agit d'un régulateur, avec des boucles internes et externes, représentant un système de contrôle conventionnel, embarqué sur les appareils de la famille Airbus.

Enfin, le simulateur permet de simuler une panne "moteur", lors d'une phase de vol.

Dans ce chapitre, nous utiliserons ce simulateur pour la mise en œuvre d'un système de surveillance, afin de détecter une défaillance "moteur" lors d'une phase d'approche. Le système étant commandé en boucle fermée, l'intégration du régulateur dans la synthèse d'un filtre de DLRD est donc nécessaire pour des raisons que nous avons déjà évoquées dans les chapitres précédents.

Le système de surveillance proposé est représenté par le schéma bloc suivant:

¹ Le simulateur RCAM (Research Civil Aircraft Model) a été développé par le groupe GARTEUR (Group for Aeronautical Research and Technology in EUROpe).

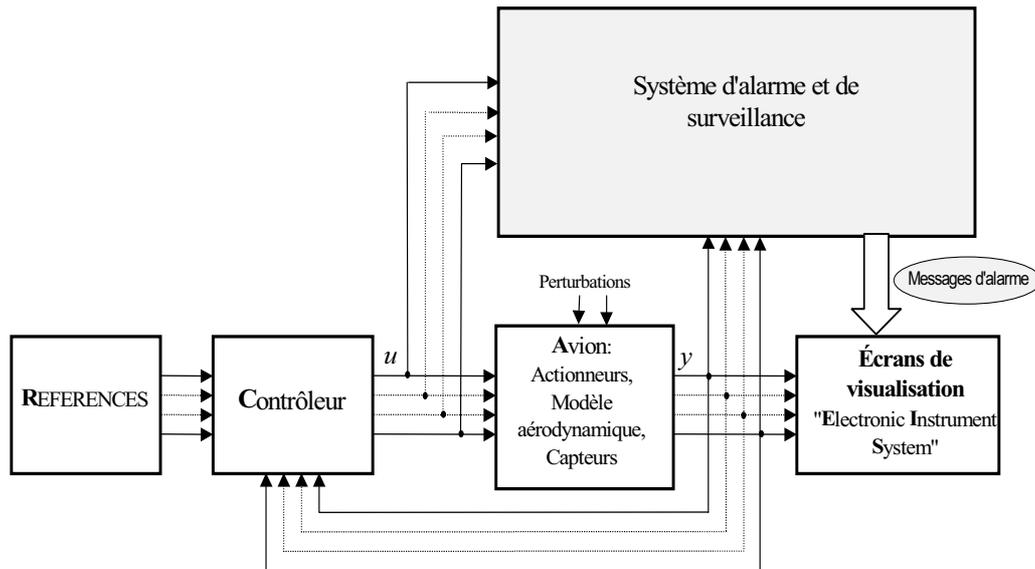


figure 4.1: Système de surveillance appliqué au simulateur RCAM.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de l'environnement du simulateur RCAM et les différents modules le constituant. Nous décrivons ensuite le cahier des charges en surveillance ainsi que la trajectoire de vol considérée. Enfin, les résultats de synthèse d'un système DLRD seront présentés et discutés.

4.2 - Environnement RCAM

En mécanique de vol classique, l'avion est considéré comme un corps solide soumis à trois types de forces extérieures: la pesanteur, les forces aérodynamiques et les forces de propulsion. L'application à ce corps des deux théorèmes fondamentaux de la mécanique rationnelle (quantité de mouvement et moment cinétique) fournit le système des équations dynamiques qui régissent les variations du vecteur vitesse et du vecteur rotation, auxquelles on associe les équations cinématiques de la trajectoire et de l'altitude.

Le simulateur RCAM, utilisé pour modéliser le comportement d'un avion civil, est basée sur un modèle mathématique à six degrés de liberté simulé sous Matlab/Simulink (Magni et *al.*, 1997). Dans ce modèle, sont inclus les modèles aérodynamiques de l'avion, des actionneurs et des perturbations atmosphériques. La dynamique de l'avion est décrite par le modèle d'état non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p) \quad (4.1)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), p) \quad (4.2)$$

où $x \in R^n$, $u \in R^q$ et $y \in R^m$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. p est un vecteur de paramètres incertains.

Quatre blocs majeurs composent le simulateur RCAM:

- ✓ "*Aircraft*": modélisant la dynamique non linéaire de l'avion.
- ✓ "*Actuators*" et "*Wind & Turbulence*": modélisant les dynamiques des actionneurs et des perturbations atmosphériques.
- ✓ "*Controller*": où sont implantés les correcteurs des modes longitudinal et latéral.
- ✓ "*References*": où l'on définit la trajectoire de l'avion.

4.2.1 - Bloc "*Aircraft*"

Ce bloc est basé sur la modélisation d'état non linéaire (4.1) et (4.2), où $u \in R^{11}$, $x \in R^{12}$ et $y \in R^{21}$. La définition précise de ces vecteurs est donnée sur les tables 4.1, 4.2 et 4.3.

Les repères aérodynamiques utilisés dans ce chapitre (F_E , F_V et F_B) sont définis dans l'*Annexe III*.

A noter que les sorties sont divisées en deux sous ensembles: sorties mesurées (modes longitudinal et latéral) et les sorties simulées. Ce dernier ensemble de sortie ne sera pas utilisé pour la mise en œuvre du système de DLRD.

Symbole	Nom	Unité
p	taux de roulis (dans F_o)	rad/s
q	taux de tangage (dans F_R)	rad/s
r	taux de lacet (dans F_R)	rad/s
ϕ	angle de roulis	rad
θ	angle de tangage	rad
ψ	cap	rad
u_B	composante en x de la vitesse sol dans F_R	m/s
v_B	composante en y de la vitesse sol dans F_R	m/s
w_B	composante en z de la vitesse sol dans F_R	m/s
x	position en x du centre de gravité CoG dans F_F	m
y	position en y du centre de gravité CoG dans F_F	m
z	position en z du centre de gravité CoG dans F_F	m

table 4.1: Définitions des états

Symbole	Nom	Unité
Mesurées		
q	taux de roulis (dans F_R)	rad/s
n_x	facteur de charge horizontal (dans F_R)	-
n_z	facteur de charge vertical (dans F_R)	-
w_V	composante en z de vitesse (dans F_V)	m/s
z	position en z du centre de gravité CoG dans F_F	m
V_A	vitesse air	m/s
V	vitesse sol	m/s
β	angle de glissement	rad
p	taux de roulis (dans F_R)	rad/s
r	taux de lacet (dans F_R)	rad/s
ϕ	angle de roulis	rad
u_V	composante en x de la vitesse (dans F_V)	m/s
v_V	composante en y de la vitesse (dans F_V)	m/s
y	position en y du centre de gravité CoG dans F_F	m
χ	azimut	rad
Simulées		
ψ	cap	rad
θ	angle de tangage	rad
α	angle d'attaque	rad
γ	angle d'inertie	m
x	position en x du centre de gravité CoG dans F_F	m
n_y	facteur de charge latéral (dans F_R)	-

table 4.2: Définitions des sorties

Symbole	Nom	Unité
δ_a	déflexions des ailerons	rad
δ_T	déflexion du plan horizontal	rad
δ_R	déflexion de la dérive	rad
δ_{th1}	position de la manette de gaz du moteur 1	rad
δ_{th2}	position de la manette de gaz du moteur 2	rad
W_{XF}	vitesse du vent, par rapport à l'axe x de F_F	m/s
W_{yF}	vitesse du vent, par rapport à l'axe y de F_F	m/s
W_{zF}	vitesse du vent, par rapport à l'axe z de F_F	m/s
W_{xR}	vitesse du vent, par rapport à l'axe x de F_R	m/s
W_{yR}	vitesse du vent, par rapport à l'axe y de F_R	m/s
W_{zR}	vitesse du vent, par rapport à l'axe z de F_R	m/s

table 4.3: Définitions des entrées

Le mode longitudinal est défini par le vecteur d'état $(q \ \theta \ u_B \ w_B)^T$, le vecteur d'entrée $(\delta_T \ \delta_{th1} \ \delta_{th2})^T$, le vecteur perturbation $(W_{XE} \ W_{ZE} \ W_{XB} \ W_{ZB})^T$ et le vecteur de sortie $(q \ n_x \ n_z \ w_v \ z \ V_A \ V)^T$.

Le mode latéral est constitué du vecteur d'état $(p \ r \ \phi \ v_B)$, du vecteur d'entrée $(\delta_A \ \delta_R)^T$, du vecteur de perturbation $(W_{YE} \ W_{YB})^T$ et enfin du vecteur de sortie $(\beta \ p \ r \ \phi \ u_v \ v_v \ y \ \chi)^T$.

Notons que les sorties simulées $(\theta \ \alpha \ \gamma \ x)$ et $(\psi \ n_y)$ sont calculées à l'aide des sorties longitudinales et latérales respectivement.

Avant le début de toutes simulations, une initialisation de certains paramètres de vol est nécessaire. Les paramètres incertains à initialiser dans RCAM ainsi que les plages admissibles sont données dans la table 4.4 :

Paramètres	Plage de variations	Nominal
m	$100\ 000 \text{ kg} < m < 150\ 000 \text{ kg}$	125.000 kg
x_{CG}	$0.15 \bar{c} < x_{CG} < 0.31 \bar{c}$	$0.23 \bar{c}$
y_{CG}	$-0.03 \bar{c} < y_{CG} < 0.03 \bar{c}$	$0 \bar{c}$
z_{CG}	$0 \bar{c} < z_{CG} < 0.21$	$0.1 \bar{c}$

table 4. 4: Définitions des variations des paramètres de RCAM

Dans la table 4.4, m est la masse de l'avion, $(x_{CG} \ y_{CG} \ z_{CG})$ sont les coordonnées du centre de gravité dans le repère F_B et \bar{c} est la corde moyenne de l'avion qui définit la longueur moyenne des ailes (ici 6.6 m).

4.2.2 - Blocs "Actuators" et "Wind & Turbulence"

Deux types d'entrées sont définis sur le simulateur, les signaux de commandes et les perturbations atmosphériques.

4.2.2.1 - Définition du bloc "Actuators"

Les commandes de l'avion, représentées par le vecteur $(\delta_A \ \delta_T \ \delta_R \ \delta_{th1} \ \delta_{th2})^T$, sont générées par la loi de commande. Les dynamiques des différents actionneurs sont modélisées par les transferts suivants :

$$\begin{cases} H_{\delta_T} = H_{\delta_A} = \frac{1}{0.15s + 1} \\ H_{\delta_R} = \frac{1}{0.3s + 1} \\ H_{\delta_{th1,2}} = \frac{1}{1.5s + 1} \end{cases} \quad (4.3)$$

Les déflexions maximales de chaque commande sont comprises dans les intervalles suivants :

entrée	min. sat.	max. sat.	unité	taux limite	unité
δ_A	-25	25	deg	25	deg/s
δ_T	-25	10	deg	15	deg/s
δ_R	-30	30	deg	25	deg/s
$\delta_{th1,2}$	0.5	10	deg	1.6	deg/s

table 4.5: Valeurs numériques de saturation des commandes

Lorsqu'une défaillance intervient sur un des deux moteurs, la commande du moteur défaillant tend vers sa limite inférieure. On modélise alors une défaillance moteur par une variation anormale de la commande:

$$f = \Delta\delta_{th1,2} \quad (4.4)$$

La dynamique de la perte de puissance du moteur est modélisée de la façon suivante:

$$H_f(s) = \frac{1}{3.3s + 1} \quad (4.5)$$

Par la suite, le défaut considéré sera une défaillance agissant sur le moteur gauche.

4.2.2.2 - Définition du bloc "Wind & Turbulence".

Deux types de perturbations atmosphériques sont susceptibles d'agir sur l'avion : les turbulences et le vent (considéré constant dans le benchmark). Ces perturbations affectent les composantes de la vitesse sol représentée par le vecteur $(u_B \quad v_B \quad w_B)^T$ ainsi que les sorties V_A , α et β , de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_B = u_{B0} - u_w \\ v_B = v_{B0} - v_w \\ w_B = w_{B0} - w_w \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} V_A = V - V_W \\ \alpha = \alpha_n - \alpha_W \\ \beta = \beta_n - \beta_W \end{cases} \quad (4.7)$$

où u_{B0} , v_{B0} et w_{B0} sont les composantes de la vitesse sol V sans perturbation dans le repère F_B et u_w , v_w et w_w sont les composantes des perturbations atmosphériques dans le repère F_B . Les termes V_W , α_W et β_W sont approximés respectivement par u_w , w_w/V_A et v_w/V_A . α_n et β_n sont les valeurs de l'angle d'attaque et de l'angle de glissement, sans perturbation.

Les turbulences sont modélisées par des filtres de Dryden (Magni *et al.*, 1997). Les spectres des turbulences u_g , v_g et w_g sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{u_g}(\omega) = \sigma_{u_g}^2 \frac{2L_{u_g}}{\pi V_A} \frac{1}{1 + (L_{u_g} \frac{\omega}{V_A})^2} \\ \Phi_{v_g}(\omega) = \sigma_{v_g}^2 \frac{2L_{v_g}}{\pi V_A} \frac{1 + 12(L_{v_g} \frac{\omega}{V_A})^2}{\left(1 + 4(L_{v_g} \frac{\omega}{V_A})^2\right)^2} \\ \Phi_{w_g}(\omega) = \sigma_{w_g}^2 \frac{2L_{w_g}}{\pi V_A} \frac{1 + 12(L_{w_g} \frac{\omega}{V_A})^2}{\left(1 + 4(L_{w_g} \frac{\omega}{V_A})^2\right)^2} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

où les " turbulences d'ascension " L_{u_g} , L_{v_g} et L_{w_g} et les " turbulences de déviation " σ_{u_g} , σ_{v_g} et σ_{w_g} dépendent de l'altitude et des conditions atmosphériques. Pour une altitude supérieure à 305m et pour des conditions atmosphériques normales, ces paramètres sont fixés à :

$$\begin{cases} L_{u_g} = L_{v_g} = L_{w_g} = 305 \text{ m} \\ \sigma_{u_g} = \sigma_{v_g} = \sigma_{w_g} = 0.1W_{20} \end{cases} \quad (4.9)$$

W_{20} étant un indicateur des conditions atmosphériques. Les conditions atmosphériques "normales" correspondent à $W_{20} = 15.4 \text{ m/s}$.

Les composantes des perturbations atmosphériques sont alors égales à :

$$\begin{cases} u_w = u_g + R_{BV}W_{XE} \\ v_w = v_g + R_{BV}W_{YE} \\ w_w = w_g + R_{BV}W_{ZE} \end{cases} \quad (4.10)$$

où R_{BV} est une matrice de passage entre deux repère aérodynamiques (voir l'*Annexe III*).

4.2.3 - Bloc "Controlleur".

Ce bloc représente le pilote automatique. On y trouve les correcteurs des modes longitudinal et latéral qui génèrent les commandes définies au paragraphe 4.2.2.1. Tous deux sont composés de bouclages interne et externe pour les commandes δ_T et δ_A , et d'un bouclage simple pour les commandes $\delta_{th1,2}$ et δ_R .

Le schéma qui suit présente la structure du correcteur longitudinal qui contrôle les sorties q , w_V , V_A et z .

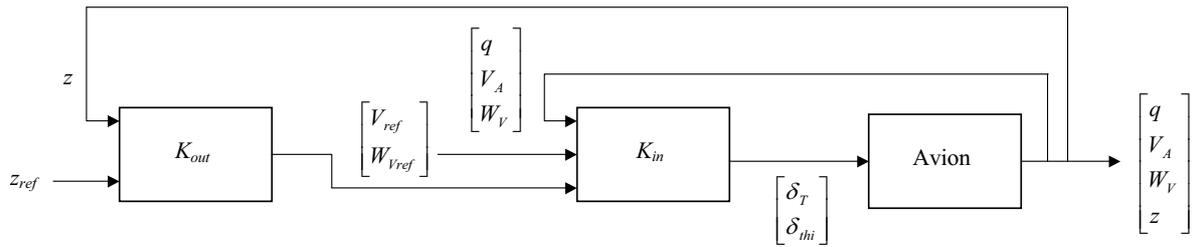


figure 4.2: Correcteur longitudinal $K_L(s)$

Le correcteur " K_{out} ", implanté dans le bouclage externe, corrige l'altitude z tandis que le correcteur " K_{in} ", implanté dans la boucle interne, permet de contrôler les sorties q , w_v et V_A . Les valeurs numériques des matrices d'état de ces deux correcteurs sont fournies dans l'Annexe III.

Le vecteur de sortie du régulateur $K_L(s)$ $(q \ w_v \ V_A \ z)^T$ et son vecteur d'entrée $(\delta_T \ \delta_{thi})^T$ $i=1,2$, sont représentées sur les figures 4.3 et 4.4. L'ordre du régulateur est de 14. Les valeurs singulières max liant le vecteur de sortie et le vecteur d'entrée sont représentées sur les figures 4.3 et 4.4.

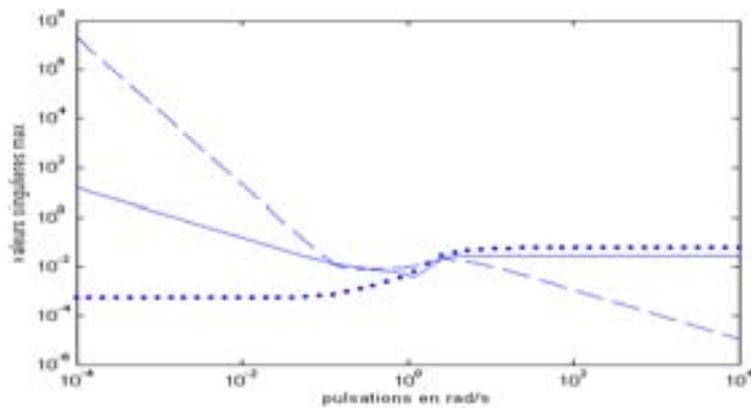


figure 4.3: $\bar{\sigma}(T_{q \rightarrow \delta_T})$ (.), $\bar{\sigma}(T_{W_V \rightarrow \delta_T})$ (--) et $\bar{\sigma}(T_{V_A \rightarrow \delta_T})$ (-)

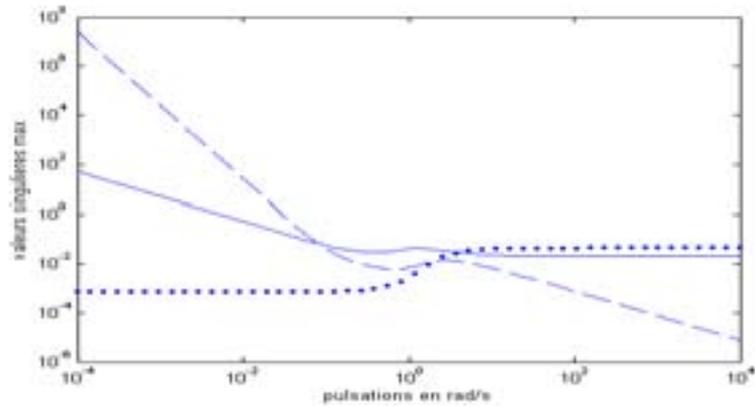


figure 4. 4: $\bar{\sigma}(T_{q \rightarrow \delta_{thi}})$ (.), $\bar{\sigma}(T_{W_V \rightarrow \delta_{thi}})$ (--) et $\bar{\sigma}(T_{V_A \rightarrow \delta_{thi}})$ (-)

4.2.4 - Bloc "Reference"

Ce bloc définit la trajectoire de vol imposée. Dans le cas du benchmark RCAM, cette trajectoire est illustrée sur la figure 4.5 :

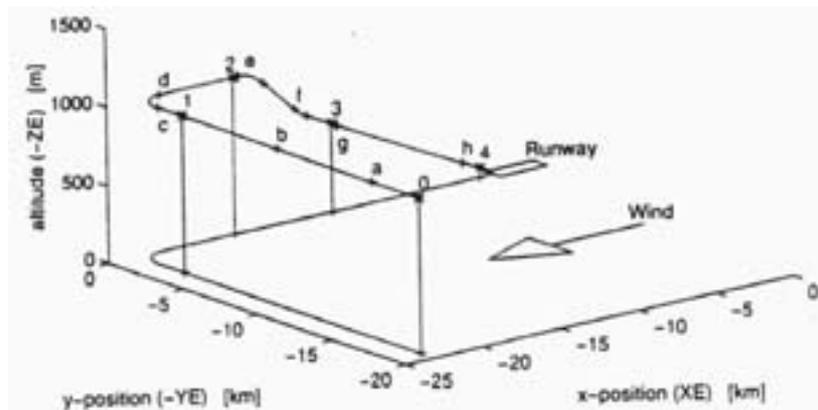


figure 4.5: Trajectoire simulée sur RCAM.

La mission démarre à une altitude de 1000 m avec un angle d'azimut de $\chi = -90$ deg. (270° Est, segment I, 0-1) suivie d'un virage avec une vitesse de cap de $\dot{\psi} = 3$ deg/sec (segment II, 1-2). La phase d'atterrissage est réalisée en deux temps avec un angle d'incidence $\gamma = -6$ deg et $\gamma = -3$ deg (segment III, 2-3 and IV, 3-4). La vitesse air est fixée à 70 m/s sur l'ensemble de la trajectoire.

Cette trajectoire dure 470 s. On considère qu'un défaut du moteur "1" (moteur de gauche) intervient durant cette approche (segment I). Le moteur commence à perdre de la puissance à $t = 80$ s avant de retrouver un fonctionnement normal à $t = 100$ s.

4.3 - Modélisation du mode longitudinal

En fonctionnement anormal, les modes longitudinal et latéral sont couplés. Néanmoins, les spécifications du benchmark RCAM définies dans (Magni *et al.*, 1997) minimise la déviation latérale lorsque une défaillance moteur apparaît, donc seul le mode longitudinal sera considéré par la suite.

Le modèle longitudinal de l'avion est déduit du modèle non-linéaire (4.1) et (4.2), suite à une linéarisation autour d'un point d'équilibre:

$$P_L(s) := \begin{cases} \dot{x}_L(t) = A_L(\bar{p})x_L(t) + B_L(\bar{p})u(t) + E_1(\bar{p})d(t) + K_1(\bar{p})f(t) \\ y_L(t) = C_L(\bar{p})x_L(t) + E_2(\bar{p})d(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

où $\bar{p} = (m \quad x_{CG})^T$.

Les expressions des matrices d'état du modèle longitudinal $P_L(s)$ sont données en *Annexe III*.

Dans cette représentation, les vecteurs d'état, de commande et de sortie sont définis respectivement de la façon suivante: $x_L = (q \quad \theta \quad u_B \quad w_B)^T$, $u = (\delta_T \quad \delta_{th1} \quad \delta_{th2})^T$, $y = (q \quad w_V \quad V_A)^T$. Les vecteurs de perturbation et de défaillance sont respectivement définis comme $d = (W_{XE} \quad W_{ZE} \quad u_g \quad w_g)^T$ et $f = H_f(s)f_n$, où f_n est un échelon. Les matrices d'état A_L , B_L , E_1 , K_1 , C_L et E_2 dépendent du vecteur de paramètres \bar{p} , les paramètres y_{CG} et z_{CG} sont fixés à leur valeurs nominales (voir table 4.4).

Finalement, la figure suivante présente l'interconnexion des différents blocs du modèle augmenté sur lequel sera synthétisé un filtre DLRD. Il est constitué du modèle longitudinal $P_L(s)$, du correcteur $K_L(s)$, et de la modélisation des perturbations atmosphériques et de la défaillance moteur "1".

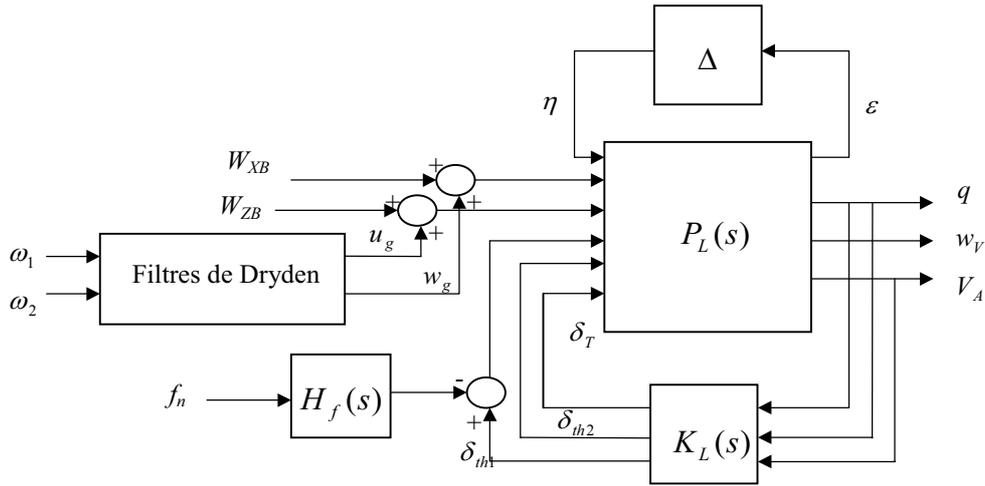


figure 4.6: Schéma d'interconnexion du mode longitudinal.

où ω_1 et ω_2 sont des bruits blancs.

4.4 - Synthèse d'un filtre de détection H_∞/H .

Dans ce paragraphe, un filtre de détection est synthétisé sur la base du modèle décrit précédemment. Ce filtre doit permettre de détecter une défaillance moteur (paragraphe 4.2.2.1) tout en étant robuste vis-à-vis des perturbations atmosphériques (vents constants et turbulences) et des erreurs de modélisation (variations des paramètres m et x_{CG}). La loi de commande étant générée par le pilote automatique, le filtre de détection est synthétisé suivant la méthodologie développée dans le chapitre 3 de ce mémoire.

Le signal indicateur a pour expression:

$$e = M_y y + M_u u - \hat{z} \quad (4.12)$$

Le premier point de la synthèse du filtre de détection $F(s)$ consiste à choisir les matrices de structuration M_y et M_u (voir relation 3.44). On rappelle que les vecteurs y et u sont donnés par:

$$y = (q \quad w_V \quad V_A)^T \quad (4.13)$$

$$u = (\delta_T \quad \delta_{th1} \quad \delta_{th2})^T \quad (4.14)$$

Les différentes commandes du mode longitudinal sont issues du pilote automatique. Elles sont donc naturellement sensibles à tous phénomènes, pathologiques ou non, qui perturbent le système. Une analyse de sensibilité ainsi que différentes simulations, montrent que la vitesse air V_A est la sortie la plus sensible à un défaut moteur. Les matrices de structuration M_y et M_u sont donc choisies égales à

$$\begin{cases} M_y = [0 & 0 & 1] \\ M_u = [1 & 1 & 1] \end{cases} \quad (4.15)$$

de façon à sélectionner la sortie V_A ainsi que les entrées δ_T et δ_{thi} pour former la combinaison linéaire de sorties z à estimer.

La seconde étape consiste à déterminer les fonctions de pondération $W_d(s)$ et $W_f(s)$ relatives respectivement aux objectifs de robustesse et de sensibilité (voir paragraphe 3.3.1 du chapitre 3). Pour cela, une analyse des effets des perturbations externes d et du défaut f sur les sorties y est nécessaire. Ici, on s'intéresse uniquement à la composante vitesse air V_A pour les raisons précédemment indiquées.

Les figures (4.7) et (4.8) présentent les valeurs singulières des transferts bouclés entre d et la vitesse air $T_{d \rightarrow V_A}$ et entre le défaut et la vitesse air $T_{f \rightarrow V_A}$, ainsi que les valeurs singulières des transferts entre d et le vecteur commande $T_{d \rightarrow u}$ et entre le défaut et le vecteur commande $T_{f \rightarrow u}$.

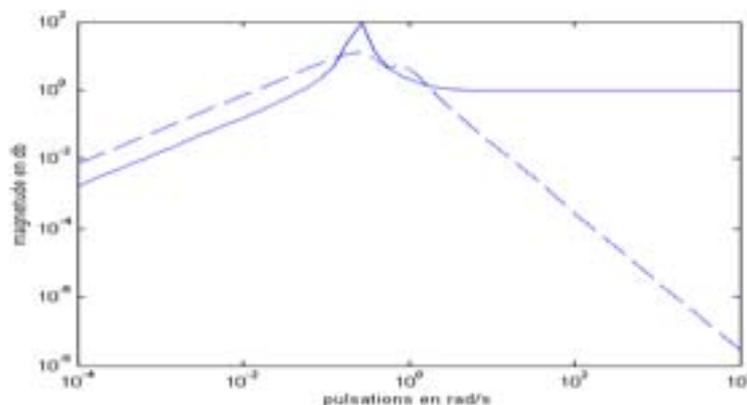


figure 4.7: $\bar{\sigma}(T_{d \rightarrow V_A})$ (-) et $\bar{\sigma}(T_{f \rightarrow V_A})$ (--).

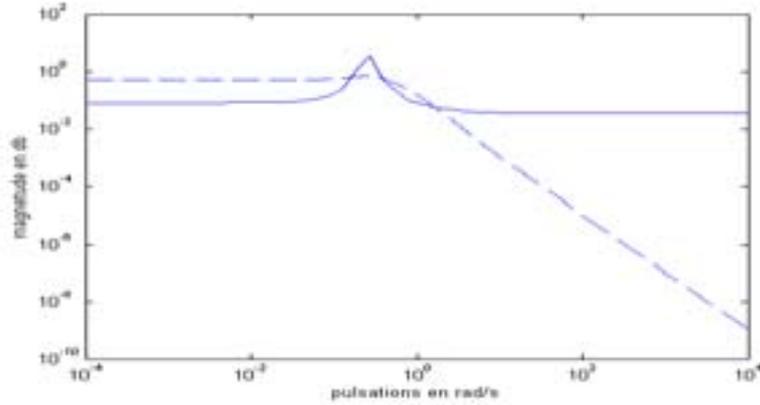


figure 4.8: $\bar{\sigma}(T_{d \rightarrow u})$ (-) et $\bar{\sigma}(T_{f \rightarrow u})$ (--).

On constate que l'effet des perturbations sur V_A est maximum autour de la pulsation 0.2 rd/s et reste important en haute fréquence. De plus, l'effet du défaut sur le vecteur de commande u reste plus important que celui des perturbations, en basse fréquence. Ces considérations conduisent au choix de $W_F(s)$ comme un filtre passe bas, permettant de sélectionner les fréquences où l'effet des perturbations sur V_A est faible et l'effet du défaut sur V_A est important :

$$W_F(s) = \frac{\lambda}{(s/0.06 + 1)^2} \quad (4.16)$$

La zone de fréquence Ω_f choisie est :

$$\Omega_f = [0 \quad 0.1] \text{rd/s} \quad (4.17)$$

Le niveau de performance β fixé est de 0,5. Pour la synthèse de $F(s)$ on choisira $\lambda = 1$. Après quelques itérations, la contrainte de robustesse W_d retenue, associée au vecteur perturbation d , est la suivante :

$$W_d = \text{diag}(0.12, 0.1, 0.08, 0.12) \quad (4.18)$$

La réalisation du filtre de détection $F(s)$ est alors déduite à l'aide des techniques LMIs (voir paragraphe 3.3.2). Pour cette application, la dimension du problème étant très grande (l'ordre du modèle augmenté est de 30), la résolution de la LMI (3.19) conduit à un degré de

conservatisme important. Nous avons donc déterminé une réalisation de $F(s)$ par résolution des LMIs (3.25) et (3.26).

Les figures 4.9 et 4.10 illustrent les gains principaux du filtre synthétisé. Sur la figure 4.9 sont tracées les valeurs singulières des transferts $T_{q \rightarrow \hat{z}}$ (.), $T_{w_B \rightarrow \hat{z}}$ (--) et $T_{V_A \rightarrow \hat{z}}$ (-).

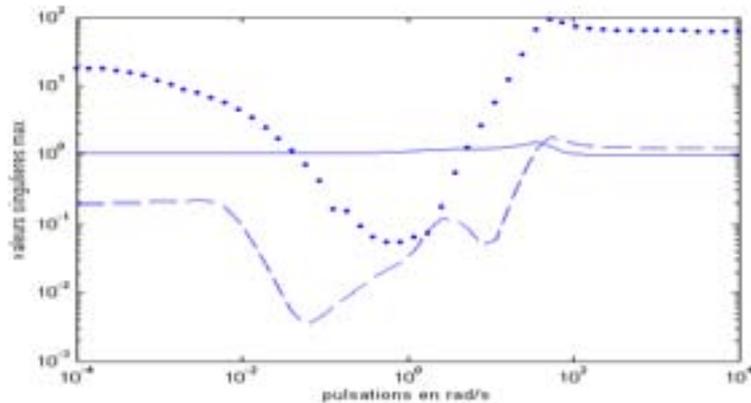


figure 4.9 : Valeurs singulières du transfert entre \hat{z} et y

La figure 4.10 représente les valeurs singulières des transferts entre \hat{z} et le vecteur de commandes, $T_{\delta_T \rightarrow \hat{z}}$ (.), $T_{\delta_{th1} \rightarrow \hat{z}}$ (--) et $T_{\delta_{th2} \rightarrow \hat{z}}$ (-) :

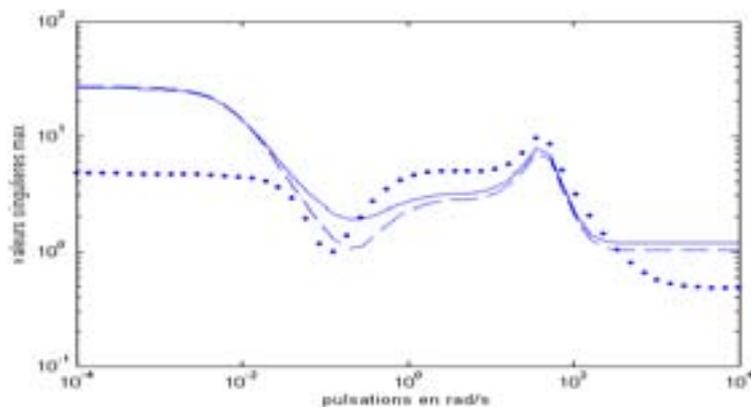


figure 4.10: Valeurs singulières du transfert entre \hat{z} et le u

Sur les figures 4.11 et 4.12 sont représentées les valeurs singulières max des transferts entre le résidu e et le vecteur perturbation d lorsque $\Delta = 0$. Les comparaisons entre les objectifs de

robustesse (--) (4.18) et les transferts $T_{W_{XE} \rightarrow e}$ et $T_{W_{ZE} \rightarrow e}$ sont illustrées respectivement en haut et en bas de la figure 4.11.

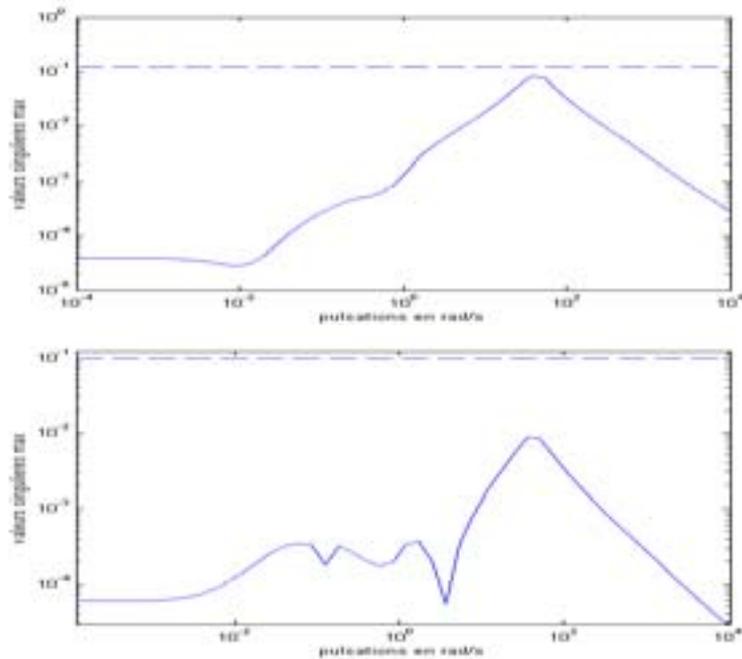


figure 4.11: $\bar{\sigma}(T_{W_{XE} \rightarrow e})$ en haut, et $\bar{\sigma}(T_{W_{ZE} \rightarrow e})$ en bas.

La figure 4.12 compare les valeurs singulières max des transferts entre le résidu et les turbulences (-) aux objectifs (4.17) lorsque $\Delta = 0$. En haut, la valeur singulière max entre le résidu et les turbulences en x et en bas entre le résidu et les turbulences en z.

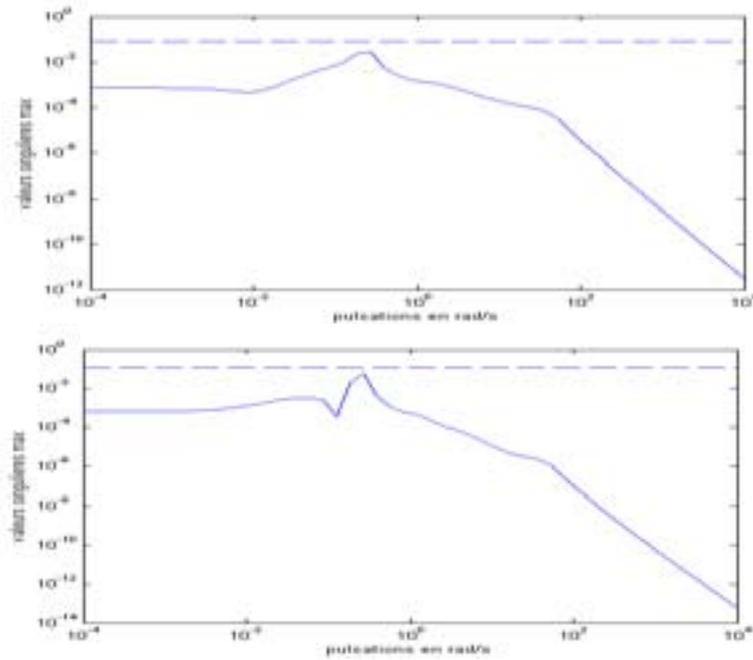


figure 4.12: $\bar{\sigma}(T_{u_g \rightarrow e})$ en haut, et $\bar{\sigma}(T_{w_g \rightarrow e})$ en bas.

Il apparaît clairement sur ces figures que pour $\Delta = 0$, $\|T_{W_E \rightarrow e}(j\omega)\|_{\infty} < 0.12$, $\|T_{W_Z \rightarrow e}(j\omega)\|_{\infty} < 0.1$, $\|T_{u_g \rightarrow e}(j\omega)\|_{\infty} < 0.08$ et $\|T_{w_g \rightarrow e}(j\omega)\|_{\infty} < 0.12$.

Ainsi, tous les objectifs de robustesse (4.18) sont donc atteints pour $\Delta = 0$.

Une μ -analyse, *a posteriori*, permet de conclure que les objectifs de robustesse sont également satisfaits, lorsque $\Delta \neq 0$.

On peut constater sur la figure 4.13 que la fonction μ est proche de 1 pour des pulsations $\approx 0,2$ rad/s et ≈ 80 rad/s. Ces pulsations sont celles pour lesquelles l'effet des perturbations atmosphériques (via les transferts bouclés) est maximal sur le signal indicateur.

En résumé, à l'issu de cette étape, les spécifications de robustesse vis-à-vis des perturbations externes sont respectées $\forall \Delta \in \underline{\Delta}$.

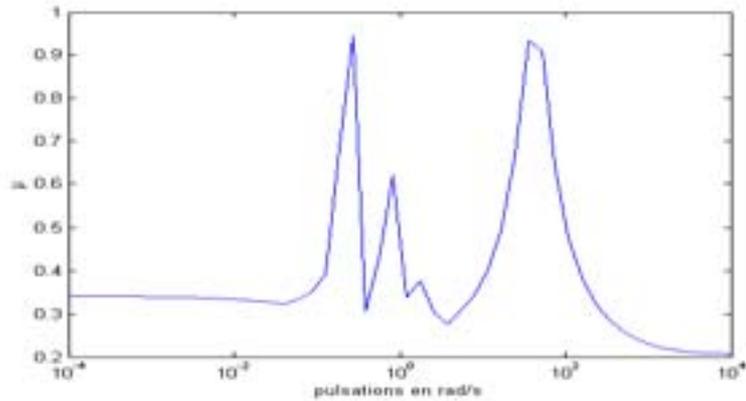


figure 4.13: Analyses de la robustesse

Identiquement à l'analyse sur la robustesse, les figures qui suivent permettent de conclure sur la sensibilité robuste du filtre obtenu $\forall \Delta \in \underline{\Delta}$.

La figure 4.14 montre que la sensibilité nominale est atteinte pour tout $\omega \in \Omega_f$ puisque

$$\|T_{fe}(j\omega)\|_- > \|W_f(j\omega)\|_- \quad \forall \omega \in \Omega_f.$$

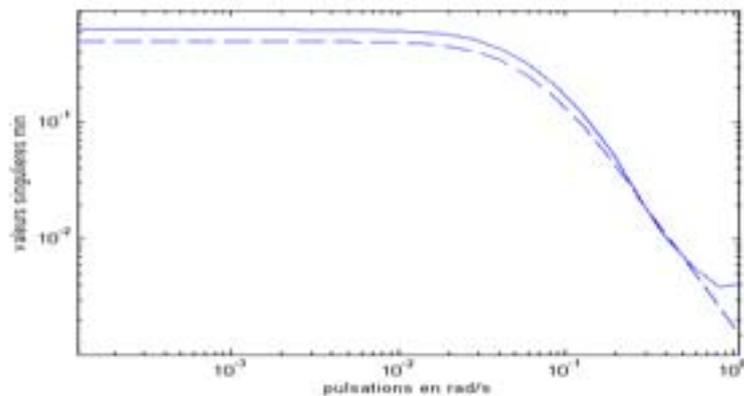


figure 4.14: $\underline{\sigma}(T_{fe})$ (-) et $\underline{\sigma}(W_f)$ (--)

La sensibilité robuste est finalement testée à l'aide de la procédure μ_g -analyse présentée dans le paragraphe 2.3.2. La fonction μ_g étant inférieure à 1 jusqu'à 0.1 rd/s (figure 4.15), l'objectif de performance en terme de sensibilité robuste est donc atteint pour tout $\Delta \in \underline{\Delta}$ et pour tout vecteur de perturbations tel que $\|T_{de}(s)\|_\infty < \|W_d\|_\infty$ (voir théorème 2.3 du chapitre 2).

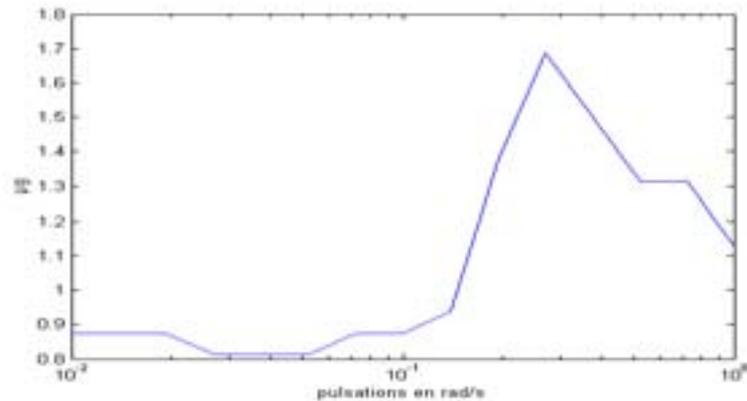


figure 4.15: Analyse de la sensibilité robuste

4.5 - Simulations temporelles

Pour illustrer les performances du filtre qui vient d'être synthétisé, trois simulations temporelles sont effectuées sur la trajectoire définie sur la figure 4.5.

La figure 4.16, illustre le comportement du signal résidu, en fonctionnement normal. Ce résultat a été obtenu avec les valeurs nominales de la masse et de x_{CG} ($m = 125.000 \text{ kg}$ et $x_{CG} = 0.23\bar{c}$).

Une seconde simulation (figure 4.17) est effectuée, pour un état paramétrique différent, à savoir $m = 140.000 \text{ kg}$ et $x_{CG} = 0.28\bar{c}$. On peut constater que le résidu reste robuste vis-à-vis de ce changement paramétrique.

La dernière simulation (figure 4.18) est réalisée avec les valeurs nominales de la masse et de la position du centre de gravité et en présence d'une défaillance "moteur" intervenant entre $t = 80 \text{ s}$ et $t = 100 \text{ s}$. L'effet de la défaillance est clairement visible, traduisant ainsi la sensibilité robuste du résidu, et ceci malgré l'existence des perturbations internes et externes.

Sur ces trois simulations des "pics" constatés à $t=290 \text{ s}$ et $t=360\text{s}$ sont dus à un changement de consigne sur le mode longitudinal (phase d'atterrissage).

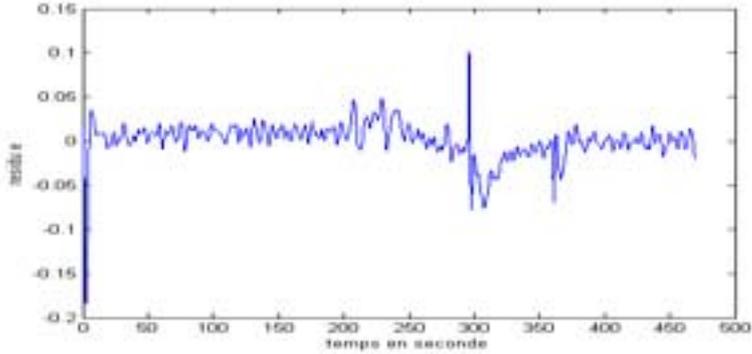


figure 4.16: Comportement du résidu, fonctionnement normal.

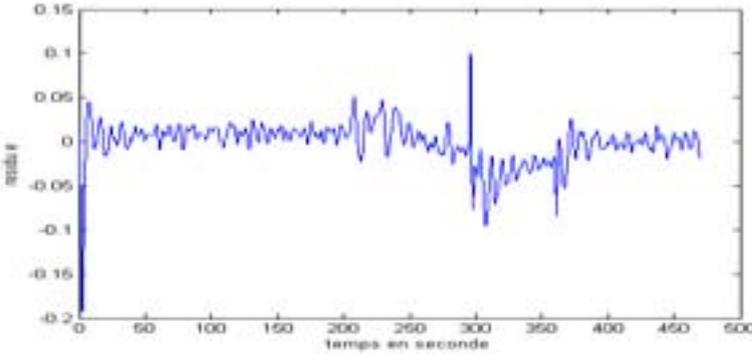


figure 4.17: Comportement du résidu, fonctionnement normal, variations paramétriques.

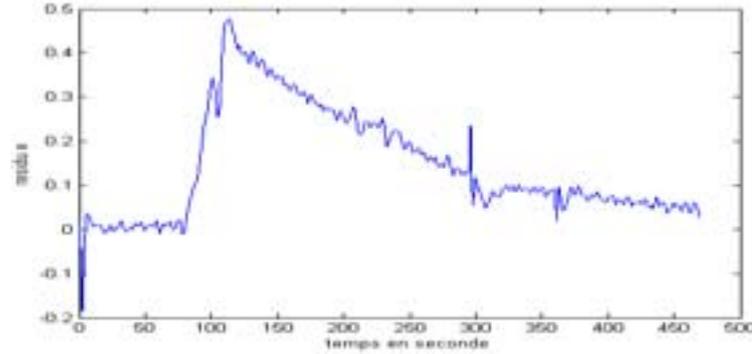


figure 4.18: Comportement du résidu, fonctionnement défaillant.

4.6 - Conclusion

Nous avons appliqué dans ce chapitre, la méthodologie de synthèse développée aux chapitres 2 et 3, à un système aéronautique.

Dans un premier temps, nous avons déterminé un modèle augmenté sous forme LFT, en intégrant les perturbations internes et externes. Dans un deuxième temps et à partir des spécifications du benchmark, nous avons synthétisé et mis en œuvre le filtre de DLRD. Le choix des différentes fonctions de pondérations, représentant les objectifs de robustesse et de sensibilité, a été discuté et justifié. Notons que toute tentative de synthèse de filtre de DLRD se solderait par une baisse significative de performances si le régulateur n'est pas pris en compte dans la procédure de synthèse.

Ce filtre a été ensuite validé à l'aide des tests de μ et de μ_g . Finalement, des simulations temporelles en fonctionnement normal et défaillant ont confirmé les performances attendues.

Conclusions générales et perspectives

Le travail effectué dans ce mémoire concerne la synthèse robuste de filtres DLRD pour la surveillance à base de modèle des systèmes multivariés et incertains. Il se fonde sur la modélisation sous forme LFT (Linear Fractional Transformation) qui permet de prendre en compte une large classe d'incertitudes, et sur les outils modernes de synthèse et d'analyse robustes (LMI, μ et μ_g).

Dans un premier temps, après avoir formulé le problème de DLRD en terme de découplage approximatif débouchant sur un critère min/max, une analyse critique des différents travaux récents dans la littérature a été effectuée de façon à mettre en évidence les limitations des approches existantes. En matière d'analyse et de "validation" des résultats de synthèse, ces approches souffrent d'un manque de cadre général. En effet, la valeur singulière structurée μ peut être utilisée pour tester la robustesse du vecteur de résidus, mais elle ne permet pas de tester la sensibilité robuste de ce même résidu sans introduire un conservatisme, qui peut rendre le résultat de validation inutilisable d'un point de vue pratique. De plus, rares sont celles qui prennent en compte le bouclage par un système de commande, qui induit inévitablement une altération des performances en DLRD.

Une première méthodologie de synthèse directe, centrée sur la valeur singulière structurée généralisée a été proposée dans le second chapitre. L'introduction de l'outil d'analyse μ_g permet de tester les performances robustes d'un filtre de DLRD. Une démarche d'affinement itérative entre l'étape d'estimation robuste et l'étape de validation par μ_g -analyse est alors proposée de façon à résoudre la problématique de DLRD.

Dans le troisième chapitre, la problématique de DLRD est reformulée en intégrant une contrainte sur la sensibilité dans l'étape de synthèse. Le problème d'optimisation H_∞/H_2 , associé aux contraintes de robustesse/sensibilité, est résolu à l'aide d'un problème fictif H_∞ après avoir transformé la contrainte de type "gain min" en une contrainte de type "gain max". On montre alors que le problème de synthèse peut être résolu à l'aide des techniques d'optimisation LMI. Une généralisation de cette approche au cas des systèmes commandés en

boucle fermée est proposée. L'utilisation du formalisme LFT permet d'appréhender le problème de façon identique à celui des systèmes fonctionnant en boucle ouverte.

Finalement, dans le dernier chapitre, l'ensemble de ces techniques a été testé et validé sur un benchmark aéronautique.

Les résultats obtenus dans ce mémoire offrent des perspectives intéressantes de développements ultérieurs. En particulier, les points suivants peuvent être envisagés.

- Les techniques proposées pour résoudre le problème général de la DLRD ont été développées pour les systèmes LTI. La méthodologie développée dans cette thèse, devrait pouvoir être étendue au cas des systèmes LPV (Linear Parameter Varying). En effet, il a été montré dans (Apkarian *et al.*, 1995) qu'une approche polytopique permet de résoudre le problème de commande pour les systèmes LPV. Dans cette démarche, les paramètres variant dans le temps sont supposés appartenir à un domaine polytopique (défini par n sommets). La solution consiste alors à rechercher un régulateur par sommet et en déduire le régulateur LPV (par une fonction d'interpolation convexe) permettant d'assurer les objectifs de commande pour le système LPV. Le problème de la DLRD pour les systèmes LPV peut être abordé selon la même démarche, le filtre de DLRD ainsi synthétisé serait également un filtre LPV.
- Certaines spécifications de performances en DLRD peuvent difficilement être formulées à l'aide des contraintes H_∞ . Or, la formulation par LMI du problème de synthèse offre l'avantage de pouvoir "empiler" des contraintes de natures différentes. Ainsi, par exemple, l'intégration des régions LMI dans la procédure de synthèse permettrait de maîtriser la dynamique d'évolution des résidus et donc de réduire le retard à la détection. De même, des contraintes de types H_2 généralisé permettraient de contrôler l'amplitude des pics apparaissant sur le signal indicateur et donc de réduire le taux de fausses alarmes, lors de la mise en œuvre d'un test de décision.
- Bien que les matrices de structuration M_y et M_u apparaissent comme paramètres de réglage dans la méthodologie de synthèse, leur détermination est effectuée de façon empirique. En effet, dans la formulation actuelle du problème, ces matrices ne peuvent pas être optimisées. Ceci vient du fait que les LMIs définies dans le chapitre III, ne sont pas linéaires en les matrices d'état du filtre DLRD et en ces matrices de structuration. Pour palier ce problème, une utilisation du théorème d'élimination en LMI est une solution pour rendre

les LMIs linéaires en ces paramètres. En effet, l'application de ce théorème permet de trouver un changement de base adéquat, de façon à rendre le problème d'optimisation linéaire et de pouvoir ainsi optimiser sur ces matrices.

ANNEXE

Annexe I

Transformations linéaires fractionnaires

A1.1 - Définition

La LFT (Linear Fractionnar Transformation) est un formalisme qui permet de boucler deux systèmes linéaires entre eux. Il est notamment utilisé dans des problèmes d'analyse et de synthèse. Ce formalisme résulte directement du produit étoile introduit par (Redheffer, 1960).

A1.1.1 - LFT basse

Soient les transferts matriciels P et K dont les réalisations d'état sont :

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A_1 & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A_1)^{-1} (B_1 \quad B_2) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A1.1})$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A_3 & B_3 \\ \hline C_3 & D_3 \end{array} \right] = C_3 (sI - A_3)^{-1} B_3 + D_3 \quad (\text{A1.2})$$

La représentation d'une LFT basse est :

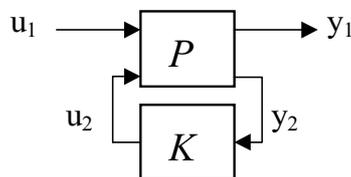


Figure A1.1: Schéma bloc d'une LFT basse

La représentation d'état du système équivalent notée $G_L = F_L(P, K)$ ou $G_L = (P * K)$ est alors :

$$G_L = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 + B_2FD_3C_2 & B_2FC_3 & B_1 + B_2FD_3D_{21} \\ B_3EC_2 & A_3 + B_3ED_{22}C_3 & B_3ED_{21} \\ \hline C_1 + D_{12}FD_3C_2 & D_{12}FC_3 & D_{11} + D_{12}FD_3D_{21} \end{array} \right] \quad (\text{AI.3})$$

où $E = (I - D_{22}D_3)^{-1}$ et $F = (I - D_3D_{22})^{-1}$.

En partitionnant $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ de la sorte, le transfert matriciel équivalent est :

$$\begin{cases} y_1 = P_{11}u_1 + P_{12}u_2 \\ y_2 = P_{21}u_1 + P_{22}u_2 \Rightarrow y_1 = (P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21})^{-1}u_1 \\ u_2 = Ky_2 \end{cases} \quad (\text{AI.4})$$

AI.1.2 - LFT haute

Considérons maintenant la fonction de transfert Δ dont la réalisation d'état est :

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_4 & B_4 \\ C_4 & D_4 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.5})$$

La représentation de la LFT haute est :

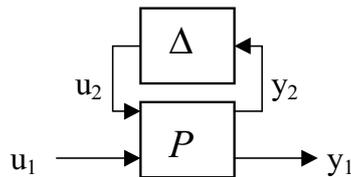


Figure AI.2: Schéma bloc d'une LFT haute

La représentation d'état du système équivalent notée $G_u = F_u(P, \Delta)$ ou $G_u = (\Delta * P)$ est alors :

$$G_u = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 + B_1FD_4C_1 & B_1FC_4 & B_2 + B_1FD_4D_{12} \\ B_4EC_1 & A_4 + B_4ED_{11}C_4 & B_4ED_{12} \\ \hline C_2 + D_{21}FD_4C_1 & D_{21}FC_4 & D_{22} + D_{21}FD_4D_{12} \end{array} \right] \quad (\text{AI.6})$$

où $E = (I - D_{11}D_4)^{-1}$ et $F = (I - D_4D_{11})^{-1}$.

Dualement à (AI.4), le transfert matriciel équivalent est :

$$y_1 = (P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12})u_1 \quad (\text{AI.7})$$

AI.2 - Algèbre des LFTs

Soient $G_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right]$ et $G_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]$ deux matrices de transferts. L'algèbre

employée pour construire les schémas augmentés est défini ci-dessous.

AI.2.1 - Somme

La réalisation équivalente à une somme de deux matrices de transfert est :

$$G_1 + G_2 = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right] \quad (\text{AI.8})$$

AI.2.2 - Mise en parallèle

La réalisation équivalente à mise en parallèle de deux matrices de transferts est la suivante :

$$\left[\begin{array}{cc} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{array} \right] \quad (\text{AI.9})$$

AI.2.3 - Changement de base

Soit T une matrice inversible de dimension appropriée. Si G_2 est égal à G_1 après avoir effectué un changement de base (via la matrice T), alors :

$$G_2 = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}A_1T & T^{-1}B_1 \\ \hline CT_1 & D_1 \end{array} \right] \quad (\text{AI.10})$$

AI.2.4 - Transposé

Soit G_1^T la transposée de G_1 . La réalisation d'état associée est :

$$G_1^T = \left[\begin{array}{c|c} A_1^T & B_1^T \\ \hline C_1^T & D_1^T \end{array} \right] \quad (\text{AI.11})$$

AI.2.5 - Conjugué

Soit G_1^* la conjuguée de G_1 . La réalisation d'état associée est :

$$G_1^* = \left[\begin{array}{c|c} -A_1^T & -C_1^T \\ \hline B_1^T & D_1^T \end{array} \right] \quad (\text{AI.12})$$

AI.2.6 - Inversion

Soit G_1^{-1} l'inverse de G_1 . La réalisation d'état associée est :

$$G_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_1^{-1} C_1 & -B_1 D_1^{-1} \\ \hline D_1^{-1} C_1 & D_1^{-1} \end{array} \right] \quad (\text{AI.13})$$

AI.2.7 - Multiplication

La réalisation d'état équivalente à la multiplication $G_1 G_2$ est :

$$G_1 G_2 = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ \hline 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right] \quad (\text{AI.14})$$

Annexe II

Définitions et propriétés des normes H_∞ et H_- **All.1 - Définitions****All.1.1 - Norme H_∞**

Soit H_∞ l'espace de Hardy des fonctions matricielles appartenant à C^+ . RH_∞ le sous espace de H_∞ des matrices de transferts propres, stables et à coefficients réels. La norme H_∞ d'une matrice de transfert $G(s) \in RH_\infty$ est alors défini de la façon suivante :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (\text{AII.1})$$

Cette norme s'interprète comme l'amplification maximale de la norme L_2 du signal de sortie, lorsque le système est soumis à une excitation déterministe de norme L_2 unitaire.

All.1.2 - Norme H_-

Tout comme la norme H_∞ d'une fonction de transfert $G(s)$ qui définit la borne supérieure de la plus grande valeur propre de $G(s)$ sur tout l'espace des fréquences, on définit la norme H_- de la fonction de transfert $G(s)$ comme étant la borne inférieure de la plus petite valeur propre de $G(s)$ sur un espace de fréquence fini privé de la pulsation ω où le module de $G(s)$ est nul (Chen et Patton, 1999) :

$$\|G(s)\|_- = \inf_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} \underline{\sigma}(G(j\omega)) \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2] / |G(j\omega)| \neq 0 \quad (\text{AII.2})$$

Cette norme s'interprète comme l'amplification minimale de la norme L_2 du signal de sortie, lorsque le système est soumis à une excitation déterministe de norme L_2 unitaire.

All.2 - Propriétés

Les propriétés des normes H_∞ et H découlent des propriétés des valeurs singulières, dont les principales sont les suivantes:

$$\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\overline{\sigma}(A^+)} \quad (\text{AII.3})$$

où A^+ est la pseudo inverse à gauche ou à droite de la matrice A . Dans le cas où l'on travaille sur une matrice de transfert $G(s)$ ayant une réalisation donnée par $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, $G(s)^+$ existe si et seulement si D est de plein rang ligne et colonne.

$$\overline{\sigma}(A+B) \leq \overline{\sigma}(A) + \overline{\sigma}(B) \quad (\text{AII.4})$$

$$\overline{\sigma}(A.B) \leq \overline{\sigma}(A)\overline{\sigma}(B) \quad (\text{AII.5})$$

$$\underline{\sigma}(A) - \overline{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(A+B) \leq \underline{\sigma}(A) + \overline{\sigma}(B) \quad (\text{AII.6})$$

$$\max[\overline{\sigma}(A), \overline{\sigma}(B)] \leq \overline{\sigma}[A \mid B] \leq \sqrt{2} \max[\overline{\sigma}(A), \overline{\sigma}(B)] \quad (\text{AII.7})$$

A l'aide des définitions (AII.1) et (AII.2) ces propriétés sont aisément étendus aux normes H_∞ et H .

Annexe III

Compléments sur la modélisation RCAM

AIII.1 - Définitions des repères aérodynamiques

Considérons le schéma ci-dessous :

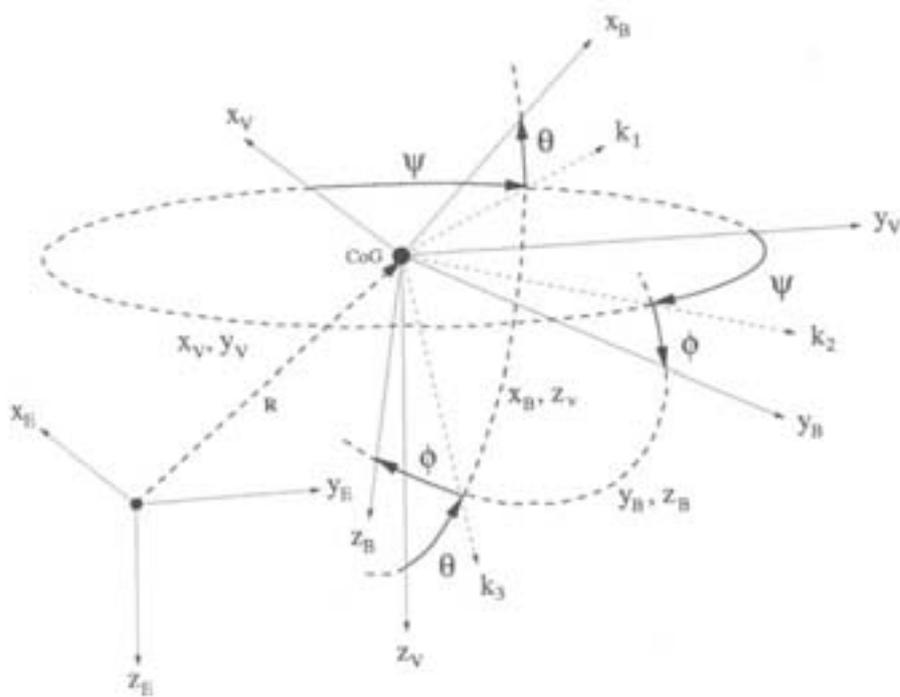


figure AIII.1: Repères aérodynamiques

La figure AIII.1 représente schématiquement, la position de l'avion dans l'espace ainsi que les différents paramètres agissant sur sa dynamique. *CoG* est le centre de gravité de l'avion. Sur ce schéma sont représentés trois repères orthonormés :

✓ F_E défini par les axes X_E, Y_E, Z_E , représente le repère terrestre, dont l'origine se situe sur la piste, X_E est dirigé vers le Nord, Y_E vers l'Est et Z_E vers le centre de la Terre.

✓ F_V défini par les axes X_V, Y_V, Z_V , représente le repère terrestre lié à l'avion, dont les axes ont les mêmes directions que ceux de F_E , mais avec une origine se situant au centre de gravité de l'avion.

✓ F_B défini par les axes X_B, Y_B, Z_B , représente le repère avion ayant son origine au centre de gravité. X_B est l'axe longitudinal de l'avion, Y_B suivant l'aile gauche de l'avion et Z_B , tel que le trièdre soit direct.

En considérant la figure AIII.1, on peut trouver les matrices de passage entre chaque repère. Tout comme R_{BV} , qui définit la matrice de passage entre le repère F_V et le repère F_B :

$$R_{BV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.1})$$

AIII.2 - Modèle d'état du mode longitudinal

Dans le chapitre IV, le mode longitudinal est modélisé à l'aide des équations d'état suivantes:

$$P_L(s) := \begin{cases} \dot{x}_L(t) = A_L(\bar{p})x_L(t) + B_L(\bar{p})u(t) + E_1(\bar{p})d(t) + K_1(\bar{p})f(t) \\ y_L(t) = C_L(\bar{p})x_L(t) + E_2(\bar{p})d(t) \end{cases} \quad (\text{AIII.2})$$

Une approximation polynomiale de chaque paramètre constituant ces matrices, permet de définir ces matrices par (voir Varga et al., 1997):

$$A_L = \begin{pmatrix} \frac{0.70528z_{CG} - 96507 + 24.879x_{CG}}{C_W V_A} & 0 & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{14}}{C_W V_A} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1.986\tilde{b}_{31} - V_A^2 \alpha_0 C_W}{C_W V_A} & -9.81\alpha_0 & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{33}}{C_W V_A} & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{34}}{C_W V_A} \\ \frac{-241.25 + 0.004C_W V_A + V_A^2 C_W}{C_W V_A} & -9.81\alpha_0 & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{43}}{C_W V_A} & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{44}}{C_W V_A} \end{pmatrix}$$

(AIII.3)

$$B_L = \begin{pmatrix} \frac{140.01z_{CG} - 19159 + 4938.9x_{CG}}{C_W V_A^2} & \frac{-301.18}{C_W V_A^2} & \frac{-301.18}{C_W V_A^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-47892\tilde{b}_{31}}{C_W V_A} & \frac{5768.4}{C_W V_A^2} & \frac{5768.4}{C_W V_A^2} \\ \frac{-47892}{C_W V_A^2} & \frac{72517}{C_W V_A^2} & \frac{72517}{C_W V_A^2} \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.4})$$

$$C_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -V_A & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.5})$$

R_L est une matrice de passage issue de la matrice de rotation R_{B_V} (AIII.1) en posant $\varphi = \phi = 0$:

$$R_L = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.6})$$

Les matrices de distribution des perturbations externes et des défauts sont données par:

$$E_1 = -E_{1cst} \begin{pmatrix} W_{XE} & W_{ZE} \end{pmatrix} - E_{1turb} \begin{pmatrix} u_g & w_g \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.7})$$

où E_{1cst} et E_{1turb} sont définis ci-dessous:

$$(E_{1cst} \quad E_{1turb}) = \begin{pmatrix} 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} \\ 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} \\ 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} \\ 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} & 0.061601 \frac{\tilde{a}_{13}}{C_W V_A} \end{pmatrix} (R_L \quad I_2) \quad (\text{AIII.8})$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{2152.8 + 7478.4z_{CG}}{C_W V_A^2} \\ 0 \\ \frac{5768.4}{C_W V_A^2} \\ \frac{72517}{C_W V_A^2} \\ \frac{72517}{C_W V_A^2} \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.9})$$

$$E_2 = -E_{2cst}(W_{XE} \quad W_{ZE}) - E_{2turb}(u_g \quad w_g) \quad (\text{AIII.10})$$

où E_{2cst} et E_{2turb} sont définis ci-dessous :

$$(E_{2cst} \quad E_{2turb}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (R_L \quad I_2) \quad (\text{AIII.11})$$

où les variables C_W , \tilde{a}_{ij} , \tilde{b}_{32} et α_0 sont définies de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_W = \frac{mg}{\rho / 2V_A^2 S} \\ \tilde{a}_{13} = 2.1451x_{CG}C_W^2z_{CG} + 0.058556x_{CG}C_Wz_{CG} - 20.291x_{CG}C_W + 1.1425x_{CG}C_W^2 \\ \quad - 0.90635C_W^2 - 9.5334 + 9.2389C_W + 18.03x_{CG} - 5.7399z_{CG} - 5.6075C_W^2z_{CG} \\ \quad - 0.97164x_{CG}z_{CG} + 5.7418C_Wz_{CG} \\ \tilde{a}_{14} = 1.6726x_{CG}C_W^2z_{CG} - 0.1723x_{CG}^2C_W - 3.9324x_{CG}C_Wz_{CG} - 0.28903x_{CG}^2C_W^2z_{CG} \\ \quad - 46.85 - 0.070972x_{CG}^2z_{CG} + 0.29652x_{CG}^2C_Wz_{CG} + 4.9667x_{CG}C_W - 2.7036x_{CG}C_W^2 \\ \quad + 0.58292C_W^2 - 0.25564x_{CG}^2 - 1.3439C_W + 100.13x_{CG} - 14.251z_{CG} - 1.9116C_W^2z_{CG} \\ \quad + 1.1243x_{CG}z_{CG} + 24.656C_Wz_{CG} + 0.45703x_{CG}^2C_W^2 \\ \tilde{a}_{33} = 1.5667C_W^2 - 16.241C_W + 65.449 \\ \tilde{a}_{34} = -201.39C_W + 121.84 \\ \tilde{a}_{43} = 144.91C_W + 171.66 \\ \tilde{a}_{44} = 24.355C_W^2 + 6.09367C_W + 962.75 \\ \alpha_0 = -0.041088x_{CG}C_W - 0.0053886x_{CG} + 0.17559C_W - 0.16287 \\ \tilde{b}_{31} = 4.9092x_{CG}C_W + 0.73956x_{CG} - 21.27C_W + 19.721 \end{array} \right. \quad (\text{AIII.12})$$

où S est la surface de l'avion, g la constante de gravité, et ρ la densité de l'air.

AIII.3 - Correcteur Longitudinal de RCAM

AIII.3.1 - Définition

Le correcteur longitudinal implanté dans le simulateur de vol RCAM, a pour intérêt de réguler les paramètres de vol, q , w_V , V_A et z . Pour cela il est constitué d'un bouclage externe (régulant l'altitude z), et d'un bouclage interne (régulant les autres paramètres).

Ce correcteur est donc composé de deux correcteurs (voir figure 4.3) K_{lonz} pour l bouclage externe et K_{lon0} pour le bouclage interne.

AIII.3.2 - Bouclage externe

Le correcteur K_{out} implanté pour former le bouclage externe, régule l'altitude de l'avion à l'aide de l'intégration de la composante de la vitesse verticale :

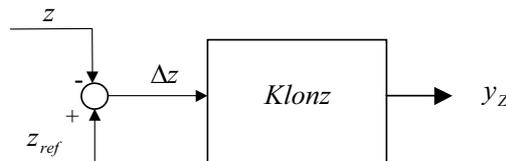


figure AIII.2: Bouclage externe

Où la réalisation d'état de K_{lonz} est la suivante :

$$a_{K_{lonz}} = \begin{pmatrix} 0 & -1.3067 & 0.6033 & -0.2179 & 0.2537 \\ 0 & -0.7199 & 0.8541 & -0.22 & 0.2725 \\ 0 & -0.8524 & -0.6907 & 0.8471 & -0.6586 \\ 0 & -0.22 & -0.8461 & -0.2191 & 0.3969 \\ 0 & 0.6585 & 0.3959 & 0.3959 & -1.0374 \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.13})$$

$$b_{K_{lonz}} = (-2.4516 \quad -1.2557 \quad -0.565 \quad -0.2091 \quad 0.2393)^T \quad (\text{AIII.14})$$

$$c_{K_{lonz}} = (0.05 \quad -0.3267 \quad 0.1508 \quad -0.0545 \quad 0.0634) \quad (\text{AIII.15})$$

$$d_{K_{lonz}} = 0.6129 \quad (\text{AIII.16})$$

Le tracé de Bode de cette représentation d'état est alors :

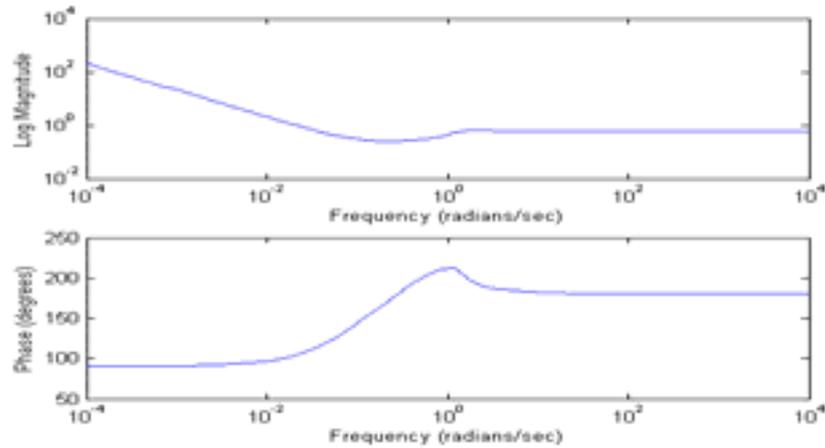


figure AIII.3: Gain et phase de Klonz

AIII.3.3 Bouclage interne

Le correcteur K_{in} implanté pour former le bouclage interne, régule le taux de tangage (q), la composante verticale de la vitesse (w_v) et la vitesse air (V_A) :

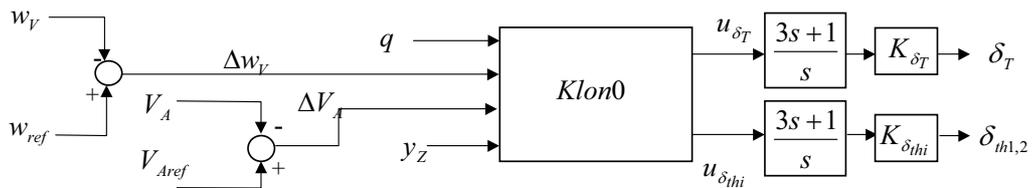


figure AIII.4: Bouclage interne

où la réalisation d'état de $Klon0$ est :

$$a_{Klon0} = \begin{pmatrix} -1.5752 & -0.5503 & -1.2147 & 1.2241 & -0.2512 & 6.178 \\ 0.4772 & -2.135 & -1.5074 & -1.4781 & 0.0964 & -5.3788 \\ 0.9259 & 1.1367 & -0.3632 & 0.3142 & -0.2439 & -1.2206 \\ -1.5114 & 0.0977 & 0.2682 & -1.4255 & 0.8202 & 1.5244 \\ -0.1425 & -0.2234 & 0.2443 & -0.7454 & -0.1301 & 0.1471 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.17})$$

$$b_{Klon0} = \begin{pmatrix} -4.3596 & 0 & -2.4840 & 0.4587 \\ 3.7956 & 0 & -3.3886 & 0.3802 \\ 0.8613 & 0 & 0.0695 & -0.5952 \\ -1.0757 & 0 & -1.6331 & 0.2068 \\ -0.1038 & 0 & -0.2486 & 0.1459 \\ 3.5284 & -1.3265 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.18})$$

$$c_{Klon0} = \begin{pmatrix} -0.0068 & -0.0018 & -0.002 & 0.0016 & -0.0005 & 0.0273 \\ -0.0084 & 0.0138 & -0.0007 & 0.0081 & -0.0011 & 0.0399 \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.19})$$

$$d_{Klon0} = \begin{pmatrix} -0.0193 & 0 & -0.0091 & 0.003 \\ -0.0282 & 0 & -0.0133 & -0.005 \end{pmatrix} \quad (\text{AIII.20})$$

Sur les figures AII.4 et AII.5 sont les tracés de Bode des transferts entre $(u_{\delta_T} \ u_{\delta_{thi}})^T$ et $(q \ \Delta w_V \ \Delta V_A \ y_z)^T$.

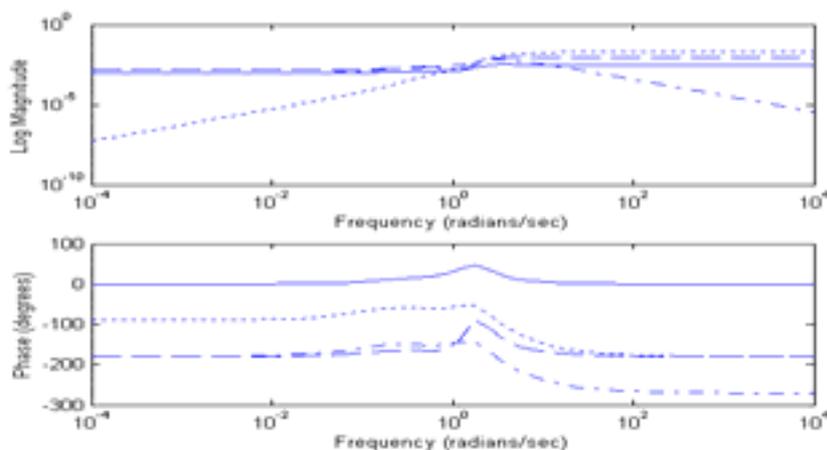


figure AIII.5: Gains et phases $T_{q \rightarrow u_{\delta_T}}$ (..), $T_{w_V \rightarrow u_{\delta_T}}$ (-.), $T_{V_A \rightarrow u_{\delta_T}}$ (--) et $T_{y_z \rightarrow u_{\delta_T}}$ (-)

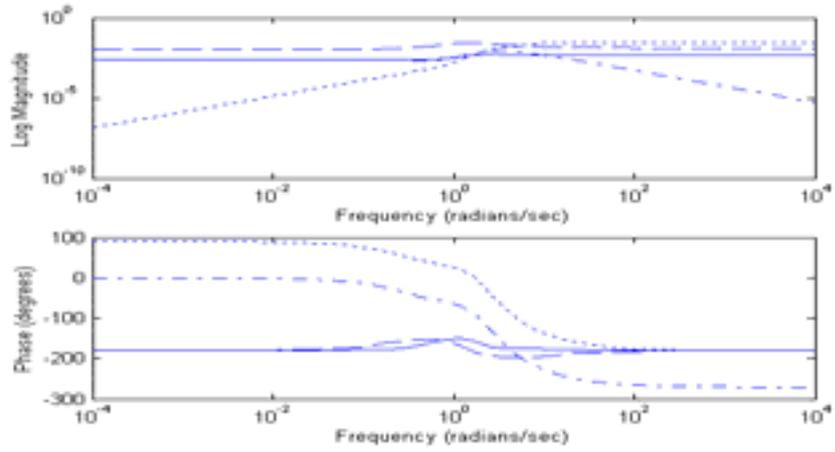


figure AIII.6: Gains et phases de $T_{q \rightarrow u_{\delta_{thi}}}$ (.), $T_{w_V \rightarrow u_{\delta_{thi}}}$ (-.), $T_{V_A \rightarrow u_{\delta_{thi}}}$ (--) et $T_{y_z \rightarrow u_{\delta_{thi}}}$ (-)

Bibliographie

- Alazar, D. and Apkarian, P. (1999). *Exact observer-based structures for arbitrary compensators*. International Journal of Robust Nonlinear Control 9, pp.101-118.
- Apkarian, P., Gahinet, P., et Becker, G. (1995). *Self-scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-varying Systems: a Design Example*. Automatica, vol31(9), pp. 1251-1261.
- Appleby, B.D. (1991a). *Robust estimator design using the H_∞ norm and μ synthesis*. PhD Thesis. Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology.
- Appleby, B.D., John R. D. (1991b). *Robust Estimator Design using μ Synthesis*. Proceedings of the 30th conference on decision and control. Brighton, England.
- Boyd, S., El. Ghaoui L., Feron E. and Balakrishnan V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in system and Control theory*. Studies in Applied Mathematics.
- Castang, F., Henry, D., Zolghadri, A. et Monsion, M. (2002a). *Synthèse d'un filtre H_∞/H_2 , équivalence avec un observateur*. CIFA 2002, Nantes, France, pp. 56-61.
- Castang, F., Zolghadri, A., Henry, D., et Monsion, M. (2002b). *A LMI approach for designing robust FDI filters with guaranteed fault sensitivity Performance*. SMC, Hammamet, Tunisie.
- Chen, J., Patton, R.J. (2000). *Standard H_∞ filtering formulation of robust fault detection*. Proceedings of SAFEPROCESS'2000, Budapest, Hungary, pp. 256-261.
- Chen, J., Patton, R.J. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers.
- Chen, J., Patton, R.J. and Liu, G.P. (1996). *Optimal residual design for fault diagnosis using multi-objective optimization and genetic algorithms*. International Journal of Systems Science, vol.27, pp. 567-576.

- Chilali, M., Gahinet, P. and Apkarian, P. (1999). *Robust Pole Placement in LMI Region*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44(12), pp. 2257-2269.
- Cocquempot, V. (1992). *Surveillance des processus industriels complexes. Généralisation et optimisation des relations de redondance analytiques*. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille.
- Delmaire, G., Cassar, J.P., Staroswiecki, M. (1999). *Comparaison of multivariable identification and parity space techniques for fdi purpose in mimo systems*. Proceedings of 3rd ECC'99. Karlsruhe, Germany.
- Ding, S.X., Ding, E.L. and Jeinsch, T. (2000a). *A new optimization approach to the design of fault detection filters*. Proceedings of SAFEPROCESS'2000. Budapest, Hungary.
- Ding, S.X., Jeinsch, T., Franck, P.M. and Ding, E.L. (2000b). *A unified approach to the optimization of fault detection systems*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 14, pp. 725-745.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., and Francis, B. (1989). *State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, pp. 831-847.
- Doyle, J. (1982). *Analysis of feedback systems with structured uncertainties*. Proceedings. IEE. , pt. D, Vol. 133, pp. 45-56.
- Edelmayer, A., Bokor, J. (2000). *Scaled H_∞ Filtering for sensitivity optimization of detection filters*. Proceedings of SAFEPROCESS'2000. Budapest, Hungary.
- Fan, M.K.H., Tits, A.L., Doyle, J.C. (1991). *Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics*. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 36(1), pp. 25-38.
- Frank, P., Ding, S.X. and Koppen-Seliger, B. (2000). *Current developments in the theory of FDI*. Proceedings of SAFEPROCESS'2000. Budapest, Hungary.
- Frank, P.M. and Ding, S.,X. (1997). *Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems*. International journal of Process Control, vol. 7(6), pp. 403-424.

- Frank, P.M. (1990). *Fault diagnosis in dynamic system using analytical and knowledge based redundancy – a survey and some results*. Automatica, vol. 26(3), pp. 459-474.
- Gertler, J. (1997). *Fault Detection and Isolation using parity relations*. Control Eng. Practice, vol. 5(5), pp.653-661.
- Grogoriadis, K., Watson, J. (1997). *Reduced-order H_∞ and l_2 - l_∞ filtering via linear matrix inequalities*. IEEE Transaction in Aerospace and Electronic Systems, vol. 33(4), pp.1326-1338.
- Henry, D., Zolghadri, A., Monsion, M., and Ygorra, S. (2002a). *Off line robust fault diagnosis using the generalised structured singular value*. Automatica, vol 38(8), pp 1347-1358.
- Henry, D., Zolghadri, A., Castang, F. and Monsion, M. (2002b). *A multiobjective filtering approach for fault diagnosis with guaranteed sensitivity performances*. Proceedings of the 15th World Congress. IFAC, paper n° 1802, Barcelone, Espagne.
- Henry, D., Zolghadri, A., Castang, F. and Monsion, M. (2001). *A new multi-objective design for guaranteed robust FDI performance*. CDC'2001, Orlando.
- Henry, D. (1999). *Diagnostic et contrôle de cohérence des systèmes multivariables incertains*. Thèse de doctorat, université de Bordeaux I, Laboratoire d'Automatique et de Productique.
- Hou, M., Patton, R.J. (1996). *An LMI approach to H/H_∞ fault detection observers*. IEEE, UKACC International Conference on Control. pp305-310.
- Huaizhong, L., Minyue, F. (1997). *A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering*. IEEE Transactrion on Signal Processing, vol. 45(9), pp. 2238-2350.
- Isermann, R. (1984). *Process fault detection based on modelling and estimation methods- a survey*. Automatica vol. 20 (4), pp. 815-835.
- Kilsgaard, S., Rank, M.L., Niemann, H., Stoustrup, J. (1996). *Fault Detection in closed-loop by standard H -infinity methods*. Proceedings of the IEEE Conference on Decision Control, pp. 628-629.

- Louis Rambeaux, F. (2001). *Génération et évaluation de résidus pour le diagnostic de systèmes incertains: approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, Université de Nancy, Centre de Recherche en Automatique de Nancy.
- Maciejowski, J.M. (1989) *Multivariable feedback design*. Addison-Wesley, Wokingham, England.
- Medvedev, A. (1995). *Fault Detection and Isolation by a Continuous Parity Space Method*. Automatica, vol 31 (7), pp. 1039-1044.
- Magni, J.F., S. Bennani, J. Terlouw (1997). *Robust Flight Control: a design challenge*. Lecture Notes in Control and information Sciences 224, Springer.
- Mangoubi, R.S. (1998). *Robust estimation and failure detection: A concise treatment*. Springer Verlag.
- Mangoubi, R. S., Appleby, B.D., Verghesse, G.C., VanderVelde, W.E. (1995). *A robust failure detection and isolation algorithm*. Proceedings. 34th IEEE Conf. Dec. Cont. pp. 2377-2382. New Orleans, LA.
- Mangoubi, R. S., Appleby, B.D and Farrell, J. (1992). *Robust Estimation in Fault Detection*. Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, pp. 2317-2322, Tucson, Arizona.
- Newlin, M.P., Smith, R.S. (1998). *A generalization of the structured value and its application to model validation*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43(7).
- Niemann, H., Stoustrup, J. (2000). *Design of fault detectors using Hinf optimization*. Proceedings of the 39th IEEE, Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, pp.4327-4328.
- Niemann, H., Stoustrup, J. (1998). *Multi-Objective Design Techniques applied To fault Detection and isolation*. ACC-98, pp. 2022-2026.
- Niemann, H., Stoustrup, J. (1996). *Filter design for failure detection and isolation in the presence of modeling errors and disturbances*. Proceedings. Of the 35th IEEE Conf. On Decision and Control., Kobe, Japon, pp. 1155-1160.
- Nuningen, W., Kratz, F., Ragot, J. (1997). *Structural equivalence between direct residuals based on parity space and indirect residuals based on unknown input*

- observers*. Proceedings of SAFEPROCESS'97. IFAC. Hull-England. pp. 462-467.
- Nuningen, W., Kratz, F., Ragot, J. (1996). *Observers and redundancy equations generation for systems with unknown inputs*. Proceedings of CESA'96. Lille-France, pp.672-677.
- Patton, R.J (1997). *Fault-tolerant control: the 1997 situation*. SAFEPROCESS'97, IFAC Symp. on fault detection, supervision and safety, Kingston Upon Hull, UK.
- Ploix, S. (1998). *Diagnostic des systèmes incertains: l'approche bornante*. Thèse de doctorat. Université de Nancy, centre de recherche en Automatique de Nancy.
- Redheffer, R. (1960). *On a certain linear fractional transformation*. Em J. Maths and phys. 39, 269-286.
- Rank, M.L., Niemann, H. (1999). *Norm based design of fault detectors*. International. Journal Control, vol. 72(7), pp. 773-783.
- Scherer, C., Gahinet, P., Chilali, M. (July 1997). *Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42(7), pp. 896-911.
- Staroswiecki, M., Guerchouh, D. (1999). *A Parity Space Approach for Monitoring Inequality Constraints, Part 1 : Static Case*. 14th IFAC World Congress, Beijing (Chine).
- Stoustrup, J., Niemann, H. (1999). *Fault detection and isolation in systems with parametric faults*. IFAC World Congress 1999, Beijing (Chine).
- Stoustrup, J., Grimble, M.J. (1997a). *Integrated control and fault diagnosis: a separation result*. SAFEPROCESS'97, pp. 323-328.
- Stoustrup, J., Grimble M.J., Niemann H., (1997b). *Design of Integrated Systems for the Control and Detection of Actuator/Sensor Faults*, Sensor Review, vol. 17(2).
- Varga, A., Looye, G., Moormann, D., Grübel, G. (1997). *Automated Generation of LFT-Based parametric uncertainty descriptions from generic aircraft models*. GARTEUR/ TP-088-36.

Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K, (1995). *Robust and optimal control*. Prentice Hall.

Zolghadri, A., Castang, F., Henry, D., Monsion, M.,(2001) *An iterative approach to the design of robust FDI filters*. Proceedings of ECC'2001, Porto, Portugal.

Zolghadri, A., Bergeon, B., Monsion, M. (1993). *A two-ellipsoid overlap test for on-line failure detection*. Automatica vol. 29 (6), pp. 1517-1522.

Zolghadri, A., Goetz C., Bergeon B. & Denoize X. (1998). Integrity monitoring of flight parameters using analytical redundancy. *IEE International Conference on CONTROL'98*, Swansea, UK.

Résumé:

Le travail effectué dans ce mémoire concerne la synthèse robuste de filtres DLRD pour la surveillance à base de modèle des systèmes multivariables et incertains. Il se fonde sur la modélisation sous forme LFT qui permet de prendre en compte une large classe d'incertitudes, et sur les outils modernes de synthèse et d'analyse robustes. Nous proposons une méthodologie générale pour l'intégration simultanée des contraintes de robustesse et les spécifications de performances en termes de sensibilité pour la synthèse d'un système DLRD. Nous montrons comment la méthodologie de synthèse proposée peut être étendue au cas des systèmes bouclés.

Dans un premier temps, nous présentons une méthodologie de synthèse directe de filtres DLRD, centrée sur la valeur singulière structurée généralisée. L'introduction de l'outil d'analyse μ_g permet de tester les performances robustes d'un filtre de DLRD. Une démarche d'affinement itérative entre l'étape d'estimation robuste et l'étape de validation par μ_g -analyse est alors proposée de façon à résoudre la problématique de DLRD.

Dans un deuxième temps, une approche plus générale où les objectifs de sensibilité sont inclus dans l'étape même de la synthèse est développée. Le problème d'optimisation, associé aux contraintes de robustesse/sensibilité est résolu à l'aide d'un problème fictif H_∞ . Cette approche est ensuite étendue au cas des systèmes commandés en boucle fermée, en intégrant le régulateur dans le schéma de synthèse.

Ces méthodes sont validées en simulation, sur un procédé hydraulique de laboratoire et sur un simulateur de vol.

Mots-clés:

Détection et isolation de défauts ; Filtres de détection ; robustesse ; valeur singulière structurée généralisée ; Inégalités Linéaires Matricielles ; systèmes multivariables ; systèmes commandés en boucle fermée.

Abstract:

The work presented in this dissertation is focused on the design of robust Fault Detection and Isolation (FDI) filters for multivariable uncertain systems. We show how the proposed methodology can be extended to the case of feedback systems.

First, an iterative scheme is presented to design a robust detection filter. The design procedure is based on robust H_∞ estimation techniques and generalised structured singular values (μ_g).

Second, a new and general scheme is presented to design robust FDI filters. The design procedure ensures simultaneously robustness of the FDI output against disturbances and modelling errors, and nominal sensitivity to faults. Robust sensitivity of the residual signals is analysed by means of a test based on the generalised structured singular value. The feedback controller is directly included in the design procedure.

These approaches are validated in simulation, on a hydraulic process of laboratory and flight simulator.

Keywords:

Robust Fault Detection and Isolation ; fault sensitivity ; detection filters ; robustness ; generalised structured singular value ; Linear Matrix Inequalities ; Multivariable feedback systems.