$N°$d'ordre : 2645

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par

Fabio CATALANO

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

****

EXISTENCE DES SOLUTIONS GLOBALES POUR DES

PROBLÈMES HYPERBOLIQUES NON-LINÉAIRES

****

Soutenue le : 15 Janvier 2003

Après avis de :

MM.	J. C. SAUT, Professeur, Université Paris Sud	**Rapporteurs**
	S. SPAGNOLO, Professeur, Universitá di Pisa	

Devant la commission d'examen formée de :

MM.	A. BACHELOT, Professeur, Université Bordeaux I	**Président**
	P. D'ANCONA, Professeur, Universitá di Roma I	**Rapporteur**
	V. GEORGIEV, Professeur, Universitá di Pisa	**Examinateurs**
	V. PETKOV, Professeur, Université Bordeaux I	
	J. C. SAUT, Professeur, Université Paris Sud	
	S. SPAGNOLO, Professeur, Universitá di Pisa	

- 2003 -

à ma famille

Remerciements

Cette thèse achève mes études doctorales, qui ont été possibles grâce au *Contrat de Cotutelle de Thèse* établi entre l'Université Bordeaux I et l'Universitá di Roma II Tor Vergata (Italia).

Je désire remercier en premier lieu mes directeurs de thèse, les professeurs Vladimir Georgiev et Vesselin Petkov. J'aimerais leur exprimer ma reconnaissance pour la disponibilité et l'aide continue sur lesquelles j'ai pu compter durant le développement de cette recherche ainsi que sur les précieux conseils d'organisation du travail qui m'ont été prodigués et les nombreux encouragements reçus.

Je suis reconnaissant envers les professeurs Jean-Claude Saut et Sergio Spagnolo pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je tiens à remercier également les professeurs Alain Bachelot et Piero D'Ancona pour leur participation au jury de soutenance.

Je désire remercier l'Institut de Mathématiques Appliquées de Bordeaux I, le Département de Mathématique de l'Universitá di Roma II et l'Universitá di L'Aquila, pour m'avoir accueilli pendant les périodes d'études en France et en Italie prévues par la Cotutelle.

En particulier, je désire remercier professeur P. Marcati (Universitá di L'Aquila) pour les conseils concernant l'étude du modèle relatif à l'équation de Kirchhoff.

Je suis très reconnaissant envers l'I.N.d.A.M. "Istituto Nazionale di Alta Matematica - Francesco Severi" de Roma pour le soutien financier grâce auquel mon travail a été possible et, en particulier, je tiens à remercier le Président professeur A.Figà-Talamanca et le professeur P. Cannarsa.

Je voudrais remercier aussi mes amis Fabrice, Laurent, Fréderic, James et Marco.

Je remercie ma famille pour m'avoir toujours soutenu dans mon travail.

Résumé

On considère le problème de Cauchy pour des équations hyperboliques à données initiales petites. On prouve l'existence d'une solution globale dans trois cas :

- équations hyperboliques ayant une partie non-linéaire qui satisfait la condition nulle de Klainerman,

- équation du type de Kirchhoff,

- équation de Klein-Gordon non-linéaire avec une masse $m = m(\epsilon)$ qui tend vers zéro quand $\epsilon \searrow 0$.

Mots clés :

- Problème de Cauchy,
- Equations hyperboliques,
- Estimations d'énergie,

Abstract

We consider the Cauchy problem for hyperbolic equations with small initial data. We prove the globale existence of a solution in the following cases :

- hyperbolic equations with non-linear terms satisfying the null condition of Klainerman,

- a Kirchhoff type équation,

- non linear Klein-Gordon equation, where the mass $m(\epsilon)$ decreases to zero as $\epsilon \searrow 0$.

Key-words :

- Cauchy problem,
- Hyperbolic equations,
- Energy estimates

Table des matières

Notations **7**

Introduction **9**

Chapitre 1. **29**

1 Equation des ondes non-linéaire avec une condition nulle de Klainerman **29**

1.1 Introduction . . . 29
1.2 Résultats préliminaires . . . 31
1.3 L'algèbre des opérateurs de Poincaré . . . 36
1.4 Estimations du terme non-linéaire . . . 40
1.5 Application des inégalités de Von Wahl au problème (1.1)-(1.2) . . . 43
1.6 Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur . . . 46
1.7 Estimations classiques d'énergie . . . 49
1.8 Existence globale . . . 57

Chapitre 2. **63**

2 Problème de Cauchy pour l'Equation de Kirchhoff non-linéaire **63**

2.1 Introduction . . . 63
2.2 Résultats préliminaires . . . 67
2.3 Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur . . . 72
2.4 Estimations de Von Wahl . . . 74
2.5 Existence globale . . . 79

Chapitre 3. **82**

3 Equation de Klein-Gordon avec masse m(ϵ) qui tend vers zéro. **83**

3.1 Introduction . . . 83

3.2 Rappel de la méthode des formes normales 87
3.3 Algèbre des opérateurs du groupe de Poincaré 91
3.4 Estimations $L^\infty(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ 94
3.5 Inégalité d'énergie 100
3.6 Existence globale 103

Bibliographie **107**

Notations

Dans cette thèse $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ et $t \geq 0$ désignent, respectivement, l'espace euclidien de dimension n, la variable spatiale et la variable temporelle.

On pose

$$\nabla_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}) \qquad \text{et} \qquad \nabla_{t,x} = (\partial_t, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}),$$

alors que

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 \qquad \text{et} \qquad \partial_x^\alpha = (\partial_{x_1}^{\alpha_1}, ..., \partial_{x_n}^{\alpha_n})$$

représentent, respectivement, l'opérateur de Laplace et la dérivée partielle d'ordre $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ par rapport à x.

On note

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial_x^\alpha f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < +\infty \right\}$$

l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial_x^\alpha f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

et par $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions bornées en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, étant donné

$$\|f(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \text{supess}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

On pose, d'autre part,

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp}(f) \quad \text{est} \quad \text{compact}\}$$

et

$$B(0, L) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq L\}$$

la sphère ayant pour centre l'origine et de rayon $0 < L < +\infty$.

Introduction

Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-linéaire

$$\partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = F(u(t,x), \nabla_{t,x} u(t,x)) \tag{0.1}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x) \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n) \tag{0.2}$$

représente l'un des modèles mathématiques les plus connus et étudiés dans la théorie des équations aux dérivées partielles. La non-linéarité F est d'ordre $p > 0$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|F(\lambda)| = c|\lambda|^p$, où $\lambda = (u(t,x), \nabla_{t,x} u(t,x))$.

Si les données initiales sont suffisamment petites (dans une norme convenable) et la non-linearité $F(u,v)$ est régulière et telle que $F(0,0) = 0$, le problème (0.1)-(0.2) admet une solution locale $u \in L^\infty([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n))$, $T > 0$, pourvu que $p > p_0$ et $s > \frac{n}{2} + 1$ (cf. par exemple [1], [51], [55], [57], [62], [95], [102]). L'exposant p_0 dépend de la dimension n (cf. [51], [95] et (0.28)).

La preuve de l'existence locale (dans le cas où $s > [n/2] + 2$) découle de l'application des estimations classiques d'énergie et des injections de Sobolev (cf. [51], [59]). En utilisant des techniques plus raffinées, qui consistent principalement à remplacer les inégalités de Sobolev par les estimations de Strichartz, on étend ce résultat à l'intervalle $s > \frac{n}{2} + 1$ (cf. [5], [48], [90], [95], [107], [109]).

La question qu'on se pose naturellement est de savoir s'il existe des formes speciales $F(u(t,x), \nabla_{t,x} u(t,x))$ telles que le problème (0.1)-(0.2) admet une solution locale lorsque on cherche à optimiser ultérieurement la régularité des données initiales. On va considérer quelques exemples dans cette direction.

Ponce et Sideris ont prouvé (cf. [95]) que le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) &= u^k |\nabla_{t,x} u|^\alpha, \\ u(0,x) &= u_0(x), \\ (\partial_t u)(0,x) &= u_1(x), \end{aligned} \tag{0.3}$$

où $k \geq 0$ et $|\alpha| = 2, 3$, admet une solution locale pourvu que

$$(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^3), \qquad s > 2.$$

Nous obervons alors que la forme particulière de la non-linéarité dans (0.3) permet d'obtenir des estimations optimales en ce qui concerne la décroissance de la solution et que cela donne l'existence locale dans le cas où $2 < s < \frac{5}{2}$.

Dans [95] les inégalités de Strichartz remplacent les injections de Sobolev. Plus précisement, si $\phi(t,x)$ est la solution locale du problème des ondes nonhomogène

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\phi(t,x) - \Delta_x\phi(t,x) &= F(t,x), \\ \phi(0,x) &= \phi_0(x), \\ (\partial_t\phi)(0,x) &= \phi_1(x), \end{aligned}$$

les estimations de Strichartz (cf. [109], [111]) sont de la forme générale

$$\|\phi\|_{CH^s} + \|\partial_t\phi\|_{CH^{s-1}} + \|\phi\|_{L^q_t H^{r,\alpha}_x} \le c\left(\|\phi_0\|_{H^s} + \|\phi_1\|_{H^{s-1}} + \|F\|_{L^{q'}_t H^{r',\beta}_x}\right). \quad (0.4)$$

Ici $c > 0$ représente une constante convenable, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ et

$$-s + \frac{n}{2} = -\alpha + \frac{n}{r} + \frac{1}{q} = -\beta + \frac{n}{r'} + \frac{1}{q'} - 2.$$

Nous avons utilisé la notation suivante

$$CH^l = C([0,T]; H^l(\mathbb{R}^n)) \qquad \text{et} \qquad L^p_t H^{k,\delta}_x = L^p([0,T]; H^{k,\delta}(\mathbb{R}^n)),$$

où $H^{k,\delta}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{H^{k,\delta}(\mathbb{R}^n)} = \|(-\Delta^{\delta/2})f(\cdot)\|_{L^k(\mathbb{R}^n)}.$$

Strichartz a prémierement établi une forme partielle de (0.4) (cf. [110]) pour la solution du problème linéaire

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x) &= 0, \\ u(0,x) &= 0, \\ (\partial_t u)(0,x) &= g(x), \end{aligned}$$

en prouvant l'estimation dispersive

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \frac{c}{t^d}\|g(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (0.5)$$

où on suppose $q = 2(n+1)/(n-1)$, $p = 2(n+1)/(n+3)$ et $d = (n-1)/(n+1)$.

D'autre part, si $\phi(t,x)$ est la solution du problème $(\partial_{tt} - \Delta_x)\phi = F$, avec données initiales nulles, le principe de Duhamel donne

$$\phi(t,x)=\int_0^t ds\, Z(t-s)\, F(t,x),$$

où $Z(\tau)=\frac{\sin(\tau\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}$. En utilisant (0.5), on obtient

$$\|\phi(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^t ds\, \frac{c}{(t-s)^d}\|F(s,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev

$$\left\|\int_0^t ds\, \frac{c}{(t-s)^d}\psi(s)\right\|_{L^q(\mathbb{R}_+)} \leq c\|\psi(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$$

donne

$$\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|F\|_{L^p(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)}, \tag{0.6}$$

où $q=2(n+1)/(n-1)$, $p=2(n+1)/(n+3)$ et $c>0$ est une constante convenable. Une généralisation de (0.6) aux dérivées d'ordre supérieur permet de déduire (0.4) dans le cas où $q=r$.

Des inégalités similaires à (0.4) ont été établies par Peral (cf. [92]) pour des valeurs différentes de p,q. La forme complète (0.4) est due à Strichartz (cf. [111], [112]).

Dans ce cadre nous citons également les travaux de Brenner (cf. [5]), Kapitanski (cf. [60]) et Pecher (cf. [91]) et la technique $A^\star A$ utilisée par Ginibre et Velo (cf. [49]). Dans [49], en particulier, on présente une généralisation des inégalités de Strichartz pour l'équation des ondes non-homogène. Plus précisement, en utilisant des espaces de Besov convenables, on étudie les propriétés de l'opérateur

$$(A^\star A)(f)=\int_{\mathbb{I}} d\tau\, U(t-\tau)\, f(\tau),$$

où f est dans un espace de Hilbert convenable $\mathcal{H}$, $U(t)$ est le groupe unitaire de propagation, $A: L^1(\mathbb{I},\mathcal{H})\to\mathcal{H}$ est un opérateur borné défini de la façon suivante

$$A(g)=\int_{\mathbb{I}} dt\, U(-t)\, g(t),$$

$A^\star:\mathcal{H}\to L^\infty(\mathbb{I},\mathcal{H})$ est l'opérateur adjoint de A et $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$.

On envoie à [25] pour une généralisation des estimations de Strichartz avec poids pour l'équation des ondes.

A côté de ces résultats, on connaît des études intéressantes dans le cas des solutions à symétrie sphérique. Klainerman et Machedon (cf. [71]) ont prouvé que le problème (0.1)-(0.2) admet une solution locale en dimension $n=3$, en supposant $s=2$, la non-linéarité quadratique par rapport à $\nabla_{t,x}u$ et les données initiales à symétrie sphérique.

D'autre part, les résultats qu'on vient d'exhiber échouent si la non-linéarité est de forme quelconque et $s \leq \frac{n+1}{2}$. Par exemple, en dimension $n = 3$, H. Lindblad (cf. [75]) a prouvé que le problème

$$\begin{array}{rcll} \partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x) & = & F_k(u(t,x), \partial_t u(t,x)), & k = 0,1,2, \\ u(0,x) & = & u_0(x), & \\ (\partial_t u)(0,x) & = & u_1(x), & \end{array}$$

où $F_0 = u^2$, $F_1 = u\,\partial_t u$ et $F_2 = |\partial_t u|^2$, n'admet pas de solution si, respectivement, $(u_0, u_1) \in H^{k-\epsilon}(\mathbb{R}^3) \times H^{k-1-\epsilon}(\mathbb{R}^3)$, $k = 0,1,2$, $\epsilon > 0$.

Nous introduisons maintenant, pour le problème des ondes, une classe spéciale de non-linéarités qui permettent d'obtenir des estimations très intéressantes en termes de décroissance de la solution. Ces résultats sont principalement dûs à Klainerman et Machedon (cf. [71], [72]).

Dans [71] ont étudié le problème de Cauchy pour le système d'équations

$$\partial_{tt}u^I(t,x) - \Delta_x u^I(t,x) = F^I(u(t,x), \nabla_{t,x}u(t,x)), \tag{0.7}$$

où $I = 1, ..., N$ et les données initiales sont de la forme

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x), \tag{0.8}$$

avec $u = (u^1, ..., u^N)$. On suppose $n = 3$, $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et

$$F^I(u(t,x), \nabla_{t,x}u(t,x)) =$$

$$\sum_{J=0,\dots,N} \sum_{K=1,\dots,N} \Gamma^I_{J,K}(u(t,x)) B^I_{J,K}(\nabla_{t,x}u^J(t,x), \nabla_{t,x}u^K(t,x)),$$

où $\Gamma^I_{J,K}(u(t,x))$ sont des fonctions réelles analytiques et $B^I_{J,K}$ représentent une des formes nulles suivantes

$$Q_0(u,v) = \sum_{\mu=0,\dots,n} g_{\mu\mu}\partial_\mu u \partial_\mu v \tag{0.9}$$

et

$$Q_{\mu,\nu}(u,v) = \partial_\mu u \partial_\nu v - \partial_\nu u \partial_\mu v, \qquad \mu,\nu = 0,...,n, \quad \mu \neq \nu. \tag{0.10}$$

Dans (0.9) et (0.10) on utilise les coordonnées $(x^0, x^1, ..., x^n)$ de l'espace de Minkowsky $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, g)$, muni de la métrique

$$ds^2 = \sum_{\mu=0,\dots,n} \sum_{\nu=0,\dots,n} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

où

$$g = \{g_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=0,...,n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \tag{0.11}$$

est la matrice de Lorentz, $x^0 = t$, $x^i = x_i$, $\partial_0 = -\partial_t$ et $\partial_i = \partial_{x_i}$, pour $i = 1, ..., n$.

On démontre (cf. [71]) que le problème (0.7)-(0.8) admet une solution locale $u(t,x)$ définie dans le domaine $[0,T] \times \mathbb{R}^3$, $T > 0$, et telle que

(a) $\quad \sup_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < +\infty$,

(b) $\quad \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \left(|Q(u,u)|^2 + |\nabla_{t,x} Q(u,u)|^2 \right) < +\infty$,

(c) $\quad \sup_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} < +\infty$.

Ici, $Q(u,u)$ désigne une des formes (0.9), (0.10).

Pour améliorer le résultat précédent au sens de l'optimisation de la régularité des données initiales, on peut considérer uniquement la non-linéarité du type (0.9). Dans ce cas, l'équation (0.7) prend la forme

$$\partial_{tt} u^I(t,x) - \Delta_x u^I(t,x) = \sum_{J=0,...,N} \sum_{K=1,...,N} \Gamma^I_{J,K}(u(t,x)) Q_0(u^J(t,x), u^K(t,x)), \tag{0.12}$$

où $\Gamma^I_{J,K}(u(t,x))$ sont des fonctions réelles analytiques. On démontre (cf. [72]) que la solution $u(t,x)$ de l'équation (0.12) avec données initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^3) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x) \in H^{s-1}(\mathbb{R}^3)$$

existe localement pourvu que $s > \frac{3}{2}$.

Klainerman et Machedon utilisent l'invariance des formes Q_0 et $Q_{\mu,\nu}$ par rapport à l'action des opérateurs du groupe de Poincaré. Les estimations bilinéaires pour les formes nulles (0.9)-(0.10) forment la base de la preuve de ces résultats. En particulier, on voit que chaque non-linéarité qui est une combinaison des formes (0.9)-(0.10) présente des propriétés de décroissance optimales par rapport aux autres termes non-linéaires du même ordre.

En utilisant une localisation convenable dans les variables de l'espace dual, Klainerman et Foschi (cf. [33]) ont montré que les estimations bilinéaires pour les formes nulles dans le problème des ondes découlent d'une application des inégalités de Strichartz.

Récemment, N. Tzvetkov (cf. [114]) a étudié le problème de Cauchy pour le système

$$\partial_{tt} u^I(t,x) - \Delta_x u^I(t,x) = F^I(u(t,x), \nabla_{t,x} u(t,x)), \tag{0.13}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x). \tag{0.14}$$

On suppose $I = 1, ..., N$, $u = (u^1, ..., u^N) \in \mathbb{R}^N$ et

$$(u_0, u_1) \in H^{s,s-1}(\mathbb{R}^n) \times H^{s-1,s}(\mathbb{R}^n),$$

où

$$\|f\|^2_{H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{s} \|(1+|\cdot|^2)^{\delta+j} \nabla_x^j f(\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Tzvetkov a concentré son attention sur le cas des non-linéarités quadratiques qui satisfont la définition suivante.

Définition 1. *La forme quadratique $Q(t, x, \nabla_{t,x}u, \nabla_{t,x}v)$ satisfait la Condition Nulle si*

(i) $Q(t, x, \nabla_{t,x}u, \nabla_{t,x}v)$ *est homogène d'ordre zéro par rapport à* (t, x),

(ii) $Q(t, x, \nabla_{t,x}u, \nabla_{t,x}v)$ *est homogène du premier ordre par rapport à* $\nabla_{t,x}u$ *et* $\nabla_{t,x}v$ *et bilinéaire par rapport à* $\nabla_{t,x}u$ *et* $\nabla_{t,x}v$.

(iii) $Q(t, x, -t, x, -t, x) = 0$ *lorsque* $(t, x) \in t^2 - x^2 = 0$.

Les formes suivantes (cf. [114]) satisfont la Définition 1 :

$$Q_1(\nabla_{t,x}u^J, \nabla_{t,x}u^K) = \partial_t u^J \partial_t u^K - \sum_{i=1,\dots,n} \partial_{x_i} u^J \partial_{x_i} u^K,$$

$$Q_{2ij}(\nabla_{t,x}u^J, \nabla_{t,x}u^K) = \partial_{x_i} u^J \partial_{x_j} u^K - \partial_{x_j} u^J \partial_{x_i} u^K,$$

$$Q_{3j}(\nabla_{t,x}u^J, \nabla_{t,x}u^K) = \partial_t u^J \partial_{x_j} u^K - \partial_{x_j} u^J \partial_t u^K,$$

$$Q_{4ij}(x, \nabla_{t,x}u^J, \nabla_{t,x}u^K) = \frac{x_i x_j}{|x|^2} \partial_t u^J \partial_t u^K - \partial_{x_i} u^J \partial_{x_j} u^K,$$

$$Q_{5ijlk}(x, \nabla_{t,x}u^J, \nabla_{t,x}u^K) = \frac{x_i x_j}{|x|^2} \partial_k u^J \partial_{x_l} u^K - \frac{x_k x_l}{|x|^2} \partial_{x_i} u^J \partial_{x_j} u^K,$$

$$Q_{6ij}(x, \nabla_{t,x}u^J, \nabla_{t,x}u^K) = \frac{x_i}{|x|} \partial_t u^J \partial_{x_j} u^K - \frac{x_j}{|x|^2} \partial_{x_i} u^J \partial_t u^K,$$

pour $1 \le i, j, k, l \le n$.

La non-linéarité dans (0.13) est de la forme

$$F^I(u, \nabla_{t,x}u) = \sum_{J,K} \Gamma^I_{JK}(u) B^I_{JK}(t, x, \nabla_{t,x}u^I, \nabla_{t,x}u^J), \tag{0.15}$$

où $\Gamma^I_{JK}(u)$ sont des fonctions régulières et chaque $B^I_{JK}(t,x,\nabla u^I,\nabla u^J)$ représente une forme satisfaisant la Définition 1.

En dimension $n>1$, la solution $u(t,x)$ du problème (0.13)-(0.14) existe globalement (cf. [114]) si $s>1+\frac{n}{2}$ et

$$\|u_0\|_{H^{s,s-1}(\mathbb{R}^n)}+\|u_1\|_{H^{s-1,s}(\mathbb{R}^n)}\leq\epsilon.$$

On suppose $\epsilon\in]0,\epsilon_0[$, étant donné

$$\epsilon_0=\epsilon_0(\|u_0\|_{H^{s,s-1}(\mathbb{R}^n)},\|u_1\|_{H^{s-1,s}(\mathbb{R}^n)},n)>0$$

un paramètre réel suffisamment petit. Les estimations montrent qu'il existe une constante $c>0$ telle que

$$|u(t,x)|\leq\frac{c}{(1+t+|x|)^{\frac{n-1}{2}}(1+|t-|x||)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Dans [114] on utilise l'application de Penrose

$$P:\mathbb{R}^{1+n}\to E^{1+n},$$

qui transforme l'espace de Minkowsky dans une region bornée du cylindre

$$E^{n+1}=(\mathbb{R}\times S^n,\eta),$$

où $\eta=dT^2-d\omega_n^2$, $T\in\mathbb{R}$ et ω_n est l'élément de surface de S^n. Par conséquent, des singularités apparaissent dans la partie nonlinéaire. L'approche de Tzvetkov consiste à décomposer chaque dérivée comme la somme de ses composantes radiales et angulaires. En utilisant les propriétés des formes nulles (cf. (0.15)), les composantes angulaires permettent de supprimer ces singularités.

Les arguments qu'on vient d'exhiber montrent que les inégalités de Strichartz et les estimations bilinéaires pour les formes nulles donnent des résultats optimaux lorsqu'on étudie les solutions locales avec données peu régulières. Dans certains cas, il est convenable d'appliquer une transformation conforme (par exemple l'application de Penrose) pour réduire le problème de Cauchy global à un problème du type local.

Pour prouver l'existence globale on cherche à déterminer, si cela est possible, une loi globale de conservation. L'équation scalaire d'auto-interaction

$$u_{tt}-\Delta u+u|u|^p=0$$

représente un exemple typique dans cette direction (cf. [53], [60]). D'autre part, si les données initiales sont petites, la preuve de l'existence globale découle des estimations dispersives (cf. [109], [111]), des inégalités du type $L^p, p>2$ (cf. [115]), et de la méthode de contraction.

Dans le cas où il n'est pas possible d'obtenir un résultat d'existence globale, on cherche à établir une estimation convenable du temps d'existence de la solution, en fonction de la taille des données initiales et de la forme de la non-linéarité (cf. [59], [51], [68]).

Dans le chapitre 1 nous étudions l'équation

$$\partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = F(\partial_t u(t,x), \nabla_x u(t,x)), \tag{0.16}$$

en supposant les données initiales petites, très régulières et à support compact dans $\mathbb{R}^n$. La non-linéarité

$$F(\partial_t u(t,x), \nabla_x u(t,x)) = \lambda(|\partial_t u(t,x)|^2 - |\nabla_x u(t,x)|^2) + \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{(1+t+|x|)^a},$$

$\lambda \neq 0$, $a \geq 1$, est la somme d'un terme principal du type nul (satisfaisant la Condition Nulle de Klainerman) et d'une perturbation rapidement décroissante pour $|x| \to +\infty$.

Nous prouvons un théorème d'existence globale en utilisant les estimations classiques d'énergie, les inégalités de Von Wahl (cf. [115]) et les opérateurs du groupe de Poincaré (cf [68], [70]). En suivant l'approche de Klainerman, on voit que la nonlinéarité du type nul décroît plus vite que les autres termes non-linéaires du même ordre.

Dans le chapitre 2, nous étudions un modèle proche de l'équation de Kirchhoff. On considère, d'abord, les équations hyperboliques (cf. [4], [13], [23], [24], [21], [22], [30], [31], [32], [52], [82], [84])

$$\partial_{tt}u(t,x) - m\left(\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta u(t,x) = 0, \tag{0.17}$$

où $m \in C^1(\mathbb{R}_+)$.

En général, le problème de Cauchy pour l'équation (0.17) admet une solution globale si les données initiales sont analytiques (cf. [4], [21]) ou petites et rapidement décroissantes pour $|x| \to +\infty$ (cf. par exemple [52]).

Les premiers résultats dans ce cadre sont dûs à S. Bernstein (cf. [4]), qui a étudié l'équation (0.17) en dimension $n = 1$, en supposant $m(r) = 1 + r$. Dans [4], on prouve qu'une solution globale ou locale existe si, respectivement, on prend les données initiales réelles analytiques ou dans un espace de Sobolev convenable. Plus tard, Carrier (cf. [13]) a étudié une équation non-linéaire qui décrit le mouvement transversal d'une corde. Le problème de Carrier a été repris et développé par Narishima (cf. [82]), Dickey (cf. [30], [31], [32]) et Nishida (cf. [84]), qui ont examiné des modéles mathématiques qui représentent, du point de vue physique, les vibrations des cordes de longueur finie et infinie. En suivant l'approche de Dickey (cf. [32]), J.M.Greenberg et S.C.Hu (cf. [52]) ont considéré le problème de Cauchy en dimension $n = 1$ pour l'équation

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\partial_x u(t,x)|^2\right) \partial_{xx}u(t,x) = 0, \qquad \lambda > 0, \tag{0.18}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x), \tag{0.19}$$

où $u_0 \in C^3(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$, $(1+x^2)|\nabla_x u_0(x)| < +\infty$ et $(1+x^2)|u_1(x)| < +\infty$. La solution de (0.18)-(0.19) existe globalement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(a) le paramètre λ est suffisamment petit,

(b) les données initiales sont petites (avec λ fixé).

En suivant un argument heuristique, on peut déduire aisément le résultat d'existence globale dans le cas (a). En fait, si on note

$$m(\|\partial_x u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}) = \left(1 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\partial_x u(t,x)|^2\right),$$

on obtient, pour $\lambda \to 0$,

$$m(\|\partial_x u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \simeq 1.$$

Par conséquent, l'équation (0.18) peut être considérée comme une approximation du modèle linéaire

$$\partial_{tt} u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0.$$

Récemment, D'Ancona et Spagnolo (cf. [24]) ont considéré le problème de Cauchy pour l'équation (0.17) en supposant la fonction m de classe C^1 dans un voisinage à droite de l'origine et $m(0) > 0$. Les données initiales sont de la forme

$$u(0,x) = u_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{0.20}$$

L'approche de D'Ancona et Spagnolo consiste à construire une fonctionnelle convenable H qui dépend des propriétés de la fonction m et de la taille des données initiales. Plus précisement, on pose

$$H(m, u_0, u_1) = \nu_0 \frac{\|m'(\cdot)\|_{L^\infty(0,\nu_0)}}{m(0)} \tag{0.21}$$

et on démontre que la solution du problème (0.17)-(0.20) existe globalement si

$$H(m, u_0, u_1) < \frac{1}{2}. \tag{0.22}$$

Dans (0.21)

$$N(f) = \sum_{|\alpha|\le 2} \sum_{|\beta|\le 1} \int_{\mathbb{R}^n} dx\, |x^\alpha \nabla_x^\beta f(x)|^2$$

représente une norme convenable,

$$\nu_0 = 256 c_n \left(\sum_{i=1}^{n} N(\partial_i u_0) + \frac{N(u_1)}{m(0)} \right)$$

et

$$c_n = 1+$$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \sup_{u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\sqrt{N(u_0)}} \frac{1}{\sqrt{N(u_1)}} (1 + |\tau|)^2 \left| \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \, \mathrm{e}^{i\tau|\xi|} \hat{u_0}(\xi) \hat{u_1}(\xi) |\xi| \right| < +\infty$$

est une constante. On a noté par $\hat{f}$ la transformation de Fourier de la fonction f.

L'inégalité (0.22) montre que le problème (0.17)-(0.20) admet une solution globale si les données initiales sont suffisamment petites par rapport à la norme $N(f)$ ou, de manière équivalente, si $m(r)$ est proche de la constante $m(0)$ pour tout $r \in (0, \nu_0)$. Dans ce deuxième cas, en suivant le même argument heuristique que celui utilisé pour l'équation (0.18), on peut utiliser un changement de variable tel que $m(0) = 1$ et considérer l'équation (0.17) comme une approximation du modèle linéaire $\partial_{tt} u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0$.

En choisissant $m(r) = 1 + r$, par (0.17) on obtient l'équation

$$\partial_{tt} u(t,x) - \left(1 + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \Delta u(t,x) = 0, \tag{0.23}$$

étudiée pour la première fois par Kirchhoff [65] en dimension $n = 1$.

En général, l'existence des solutions de classe C^∞ pour l'équation (0.23) est un problème ouvert, si aucune restriction n'est faite sur la taille des données initiales.

On considère l'équation (0.17) comme un modèle mathématique pour décrire les vibrations des membranes élastiques. La fonction m, qui représente la vitesse de propagation de la perturbation $u(t,x)$, dépend de façon continue de l'énergie de déformation $\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Pour ce qui concerne l'équation (0.23), cette dépendance est du premier ordre ($m(r) = 1 + r$). Au contraire, l'approximation est d'ordre zéro ($m(r) = 1$) pour le modèle linéaire $\partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0$.

Par conséquent, du point de vue physique, le modèle de Kirchhoff permet une meilleure description que l'équation classique des ondes.

D'Ancona et Spagnolo (cf. [23]) ont étudié le problème de Cauchy pour l'équation de Kirchhoff nonlinéaire

$$\partial_{tt} u(t,x) - \left(1 + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \Delta u(t,x) = F(u(t,x), \partial_t u(t,x), \nabla_x u(t,x)), \tag{0.24}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x), \tag{0.25}$$

où $\epsilon > 0$ est un paramètre réel suffisamment petit, $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $n \geq 2$. La fonction F est de classe C^∞ et il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $c_1 |s|^{\lambda+1} \leq |F(s)| \leq c_2 |s|^{\lambda+1}$ dans un voisinage de $s = 0$, où $s = (u, \partial_t u, \nabla_x u)$.

On démontre (cf. [23]) que le problème (0.24)-(0.25) admet une solution globale

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$$

pourvu que $\lambda > \lambda_0(n)$ et $0 < \epsilon < \epsilon_0$, où $\epsilon_0 = \epsilon_0(u_0, u_1, F)$ est suffisamment petit. Pour ce qui concerne l'exposant critique $\lambda_0(n)$, les estimations montrent que

$$\lambda_0(2) = 10, \qquad \lambda_0(3) = 6 \qquad \text{et} \qquad \lambda_0(n) = 5 \quad \text{pour} \quad n \geq 4.$$

Dans le cas particulier où F ne dépend pas de u (i.e. $F = F(\partial_t u(t,x), \nabla_x u(t,x))$) on obtient $\lambda_0(2) = 9$.

En conclusion de ces remarques, nous proposons une comparaison entre le résultat de D'Ancona et Spagnolo (cf. [23]) et le travail de Glassey (cf. [51]) pour l'équation semi-linéaire des ondes

$$\partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = |u(t,x)|^p, \tag{0.26}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x). \tag{0.27}$$

Dans (0.27), $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\epsilon > 0$ représente un paramètre suffisamment petit et il existe deux constantes $c_{u_0} > 0$ et $c_{u_1} > 0$ telles que

$$c_{u_0} = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad c_{u_1} = \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\, dx.$$

Le problème (0.26)-(0.27) admet une solution

$$u(t,x) \in C^2([0,T[\times \mathbb{R}^n), \qquad T > 0,$$

non globale (cf. [51]) si

$$\begin{cases} 1 < p < p_0 = \frac{n+1+\sqrt{n^2+10n-7}}{2(n-1)} & \text{pour } n = 2,3, \\ 1 < p < +\infty & \text{pour } n = 1. \end{cases}$$

L'exposant

$$p_0(n) = \frac{n+1+\sqrt{n^2+10n-7}}{2(n-1)} \tag{0.28}$$

représente la plus grande solution de l'équation

$$\frac{n-1}{2} p(p-1) - p - 1 = 0.$$

On déduit que $p_0(n)$ et $\lambda_0(n)$ représentent, respectivement, les exposants critiques pour les problèmes (0.26)-(0.27) et (0.24)-(0.25). Les difficultés qu'on rencontre dans [23] lors de l'application des estimations de Von Wahl et des inégalités de Strichartz sont dues principalement à la présence du terme $\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ dans le membre de gauche de (0.24). En particulier, on voit que

$$p_0(2) = \frac{3+\sqrt{17}}{2} < \lambda_0(2) \qquad \text{et} \qquad p_0(3) = 1+\sqrt{2} < \lambda_0(3). \tag{0.29}$$

Nous étudions le problème de Cauchy

$$\partial_{tt} u(t,x) - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta_x u(t,x) = 0, \tag{0.30}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x), \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x), \qquad \epsilon > 0, \tag{0.31}$$

où $(u_0,u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ϵ est un paramètre petit et $K(z)$ est une fonction suffisamment régulière, positive et rapidement décroissante pour $|z| \to +\infty$.

Si on note par $\star$ le produit de convolution par rapport à la variable spatiale, l'équation (0.30) prend la forme

$$\partial_{tt} u(t,x) - \left(1 + \left(K \star |\nabla u|^2\right)(t,x)\right) \Delta_x u(t,x) = 0. \tag{0.32}$$

En particulier, on peut considérer (0.30) comme une interpolation entre l'équation (0.23) et l'équation quasi-linéaire

$$\partial_{tt} u(t,x) - \left(1 + |\nabla_x u(t,x)|^2\right) \Delta u(t,x) = 0, \tag{0.33}$$

obtenues de (0.32) en choisissant, respectivement, $K \equiv 1$ et $K = \delta$, où δ est la distribution de Dirac.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'équation de Klein-Gordon non-linéaire

$$\partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) + m^2 u(t,x) = F(u(t,x), \nabla_{t,x} u(t,x)), \tag{0.34}$$

en étudiant le cas où la masse m est variable et décroît vers zéro.

Pour introduire ce type de problèmes, considérons d'abord le cas $m > 0$ (m fixée) et supposons que $F(u,v)$ est une fonction régulière par rapport à ses variables et telle que $F(0,0) = 0$. Plusieurs articles (cf. par exemple [17], [41], [?], [78], [79], [86], [90], [100], [106]) sont dédiés au problème de Cauchy pour l'équation (0.34) avec données initiales

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x), \tag{0.35}$$

où $\epsilon > 0$ est petit et u_0, u_1 sont des fonctions suffisamment régulières.

L'inégalité classique d'énergie donne

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1\epsilon + c_2 \int_0^t d\tau \|F(u,\nabla u)(\tau,\cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)},$$

où $c_1, c_2 > 0$ représentent deux constantes convenables. En particulier, si F est de la forme

$$F(u) = |u|^{p-1}u, \tag{0.36}$$

on voit que

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1\epsilon + c_2 \left(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u(\tau,\cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \right) \int_0^t d\tau \|u(\tau,\cdot)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{0.37}$$

En rappelant (cf. [50], [83]) que la solution de l'équation linéaire de Klein-Gordon satisfait l'estimation

$$\|u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{(1+\tau)^{\frac{n}{2}}}, \qquad \text{pour} \quad \tau \to +\infty,$$

nous en déduisons que

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1\epsilon + c_2 \left(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u(\tau,\cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{n(p-1)}{2}}}, \tag{0.38}$$

pour t suffisamment grand. Cet argument heuristique montre que le problème (0.34)-(0.35) avec nonlinéarité (0.36) admet une solution globale si

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{n(p-1)}{2}}} < +\infty \iff p > 1 + \frac{2}{n}. \tag{0.39}$$

Nous rappelons brièvement quelques résultats concernant les équations du type (0.34) dans le cas où la nonlinéarité est d'odre quadratique dans un voisinage de l'origine.

En dimension $n \geq 5$, Klainerman-Ponce (cf. [67]) et Shatah (cf. [99]) ont prouvé que la solution du problème (0.34)-(0.35) existe globalement si les données initiales sont suffisamment petites et la non-linéarité est quadratique. Les estimations $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, forment la base de ces résultats.

Klainerman (cf. [**?**]) a étendu ce résultat en dimension $n = 3, 4$, en utilisant les opérateurs du groupe de Poincaré. Hörmander (cf. [55]), Sideris (cf. [104]) et Georgiev (cf. [36]) ont établi de nouvelles estimations qui décrivent les propriétés de décroissance de la solution par rapport au temps. Dans ces travaux on combine la technique de Klainerman et les estimations pour la solution fondamentale de l'équation linéaire de Klein-Gordon.

Quand la dimension spatiale n devient petite (en particulier $n = 2$), la difficulté principale consiste à établir les estimations classiques en présence des termes quadratiques dans la non-linéarité (cf. (0.39)). Les inégalités $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ ne donnent pas des résultats optimaux dans cette direction. On utilise alors des techniques différentes, qui consistent à remplacer les non-linéarités quadratiques par des termes d'ordre cubique ou supérieur. Cela peut être réalisé à l'aide d'une transformation convenable de la fonction inconnue u. En utilisant cette méthode Shatah (cf. [100]), en dimension $n = 3, 4$, et Simon (cf. [105]) ont prouvé des théorèmes d'existence globale pour la solution du problème (0.34)-(0.35) dans le cas où les données initiales sont petites et la non-linéarité est quadratique.

Supposons $n = 2$ et soit $u(t, x)$ la solution du problème de Cauchy (0.34)-(0.35) avec non-linéarité d'ordre quadratique et du type (0.36). L'estimation d'énergie donne (cf. (0.38))

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_1\epsilon + c_2 \left(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u(\tau,\cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)}, \tag{0.40}$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont des constantes convenables. En tenant compte que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)} = +\infty,$$

on déduit que l'inégalité (0.40) ne donne aucune information en ce qui concerne les propriétés de décroissance de la solution $u(t, x)$. En utilisant la méthode des formes normales (introduite par Shatah, cf. [100]), on se propose de remplacer la non-linéarité quadratique par des termes d'ordre supérieur, qui décroissent plus vite par rapport au temps. Une transformation du type $u \to v(u)$ permet d'obtenir, d'après (0.34), l'équation

$$\partial_{tt}v(t,x) - \Delta_x v(t,x) + m^2 v(t,x) = \tilde{F}(u(t,x), \nabla_{t,x}u(t,x)),$$

où $\tilde{F}$ est d'odre cubique ou supérieur.

En dimension $n = 2$ Georgiev-Popivanov (cf. [35]), Kosecki (cf. [74]) et Simon-Taffin (cf. [106]) ont prouvé que le problème (0.34)-(0.35) admet une solution globale pourvu que la non-linéarité quadratique ait une forme spéciale et que les données initiales soient suffisamment petites. Dans [35] et [74] on suit l'approche de Klainerman et on utilise la technique de Shatah.

En combinant la méthode des formes normales et les estimations de Georgiev pour l'équation linéaire de Klein-Gordon, Ozawa, Tsutsumi et Tsutaya (cf. [86]) ont étendu le résultat précédent au cas des non-linéarités de forme générale.

Nous étudions le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x) + m^2(\epsilon)u(t,x) &= u^2(t,x) + g(u(t,x)), \qquad (0.41)\\ u(0,x) &= \epsilon\, u_0(x), \\ (\partial_t u)(0,x) &= \epsilon\, u_1(x), \end{aligned}$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ et $g(s)$ est une fonction cubique dans un voisinage de l'origine. Les données initiales u_0, u_1 sont des fonctions très régulières à support compact dans $\mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$ représente un paramètre réel suffisamment petit.

On se propose d'étudier le cas où la masse m est variable et décroît vers zéro. Notre approche (cf.(0.41)) consiste à établir une liaison entre la masse m et la taille (d'ordre ϵ) des données initiales. Plus précisement, si $\sigma > 0$ désigne un paramètre réel convenable, nous posons $m(\epsilon) = \epsilon^{\frac{\sigma}{2}}$, de telle façon que

$$\lim_{\epsilon \to 0} m(\epsilon) = 0.$$

De manière heuristique, on peut considérer le modèle (0.41) comme une interpolation entre l'équation semi-linéaire des ondes ($m = 0$) et l'équation semi-linéaire de Klein-Gordon ($m > 0$ fixée).

En utilisant la technique des formes normales (cf. [100], [86]) et une transformation convenable des variables t et x, nous prouvons que le problème (0.41) admet une solution unique et globale

$$u \in \bigcap_{j=0,\dots,k+16} C^j([0, +\infty[, H^{k+16-j}(\mathbb{R}^2)), \tag{0.42}$$

pour $k \geq 18$ et $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Ici

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(k, \sigma, \|u_0\|_{H^{k+16}(\mathbb{R}^2)}, \|u_1\|_{H^{k+15}(\mathbb{R}^2)}) > 0$$

représente un paramètre réel suffisamment petit. On démontre, d'autre part, que σ dépend de k et, plus précisement, que $0 < \sigma = \sigma(k) < \frac{2}{k+10}$ et

$$\lim_{k \to +\infty} \sigma(k) = 0.$$

Nous présentons brièvement le contenu des trois chapitres.

Chapitre 1. Nous étudions le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-linéaire

$$\partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = F(t, x, \nabla_{t,x} u(t,x)) \tag{0.43}$$

avec des données initiales petites, très régulières et à support compact dans $\mathbb{R}^n$, $n > 3$. Le terme $F(t, x, \nabla_{t,x} u(t,x))$ désigne une forme quadratique par rapport à $(\partial_t u, \partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u)$ dans un voisinage de l'origine $(0, 0, ..., 0)$. Plus précisement, nous supposons que

$$F(t, x, \nabla_{t,x} u(t,x)) =< \lambda g \, \nabla_{t,x} u(t,x) \, , \nabla_{t,x} u(t,x) > +$$

$$< A(t,x) \, \nabla_{t,x} u(t,x) \, , \nabla_{t,x} u(t,x) >,$$

où λ est une constante réelle non nulle,

$$g = \{g_{ab}\}_{a,b=0,\dots,n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \tag{0.44}$$

est la matrice de Lorentz et $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{1+n} \times \mathbb{R}^{1+n}$. Nous posons

$$A(t,x) = \frac{1}{(1+t+|x|)^a},$$

où $a \geq 1$ est un paramètre réel.

En utilisant les coordonnées de l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^{1+n}, g)$, nous rappelons (cf. [71], [74]) que le vecteur $\vec{\xi} = (\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est nul par rapport à la métrique de Lorentz si

$$\sum_{a=0}^{n} \sum_{b=0}^{n} g_{ab}\, \xi^a\, \xi^b = 0. \tag{0.45}$$

En rappelant la notation $\partial_0 = -\partial_t$ et $\partial_a = \partial_{x_a}$, $a = 1, ..., n$, on voit que le terme

$$< \lambda g\, \nabla_{t,x} u(t,x)\, , \nabla_{t,x} u(t,x) >= \lambda \sum_{a,b=0,\dots,n} g_{ab}\, \partial_a u\, \partial_b u$$

représente une forme polynômiale quadratique nulle au sens de (0.45). Par suite, la non-linéarité se compose du terme principal

$$< \lambda g\, \nabla_{t,x} u(t,x)\, , \nabla_{t,x} u(t,x) > \tag{0.46}$$

satisfaisant la Condition Nulle de Klainerman (cf. [68],[70], [71], [66], [72]) et de la perturbation quadratique

$$< A(t,x)\, \nabla_{t,x} u(t,x)\, , \nabla_{t,x} u(t,x) >,$$

qui décroît très vite pour t suffisamment grand.

La structure du chapitre 1 est la suivante. Nous rappelons (cf. Section 1.2) des résultats préliminaires sur les inégalités de Von Wahl pour l'équation des ondes. Ces estimations, du type $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, montrent les propriétés de décroissance de la solution par rapport à la variable temporelle et en fonction de la norme de Sobolev des données initiales. En suivant l'approche de Klainerman (cf. [68], [70]) et Kosecki (cf. [74]), nous introduisons les opérateurs différentiels de l'algèbre de Poincaré (cf. Section 1.3) et exhibons les estimations bilinéaires pour la forme nulle (0.46) (cf. Section 1.4). Ces techiques sont appliquées pour établir des estimations convenables pour la solution locale du problème (0.43) (cf. Section 1.5, 1.6), en combinaison avec les inégalités classiques d'énergie (cf. Section 1.7). Nous prouvons un théorème d'existence globale en utilisant la méthode de contraction et le principe de prolongement des solutions des équations différentielles.

Chapitre 2. Ce chapitre est dedié à l'étude du problème de Cauchy pour l'équation

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta_x u(t,x) = 0. \tag{0.47}$$

On suppose les données initiales petites, très régulières et à support compact dans $\mathbb{R}^n$, $n > 3$. Le noyau $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière, positive et rapidement décroissante à l'infini avec toutes ses dérivées. Plus précisement, nous supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\max_{0\le|\gamma|\le m} |\nabla_z^\gamma K(z)| \le \frac{c}{(1+|z|)^N}, \tag{0.48}$$

pour $|z| \to +\infty$, $N > n$ et $m \ge 2\left[\frac{n}{2}\right] + 6$.

On a déjà remarqué (cf. (0.32)) qu'on peut considérer l'équation (0.47) comme une interpolation entre l'équation de Kirchhoff

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta u(t,x) = 0 \tag{0.49}$$

et de l'équation quasi-linéaire

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + |\nabla_x u(t,x)|^2\right) \Delta u(t,x) = 0. \tag{0.50}$$

L'intérêt dans l'étude de ce type d'équations (cf. [4], [13], [30], [31], [32], [82], [84]) est dû principalement aux applications possibles du point de vue physique. L'équation (0.49) représente un modèle mathématique pour décrire les vibrations des membranes élastiques quand la vitesse de propagation de la perturbation $u(t,x)$ est variable.

Nous exibons les propriétés de décroissance de la solution locale du problème (0.47) en utilisant les estimations classiques d'énergie (cf. section 2.2-2.3) et les inégalités $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ de Von Wahl (cf. section 2.4). L'application de la méthode de contraction et du principe de prolongement des solutions des équations différentielles permet d'achever la preuve de l'existence globale.

La difficulté principale consiste à établir ces estimations en tenant compte du terme variable

$$\eta(u,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2.$$

Pour avoir une idée des effects dûs à la présence du terme $\eta(u,t)$, nous proposons une comparaison entre le modèle (0.47) et l'équation des ondes linéaire.

Soit $z(t,x)$ la solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_{tt}z(t,x) - \Delta_x z(t,x) &= 0, \\ z(0,x) &= z_0(x), \\ (\partial_t z)(0,x) &= z_1(x), \end{aligned} \tag{0.51}$$

avec données initiales petites, régulières et à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Sans perte de généralité, supposons que

$$\mathrm{supp}(z(0,x)) \cup \mathrm{supp}((\partial_t z)(0,x)) \subseteq B(0,L),$$

où $B(0,L) = \{|x| \leq L\}$. En tenant compte du fait que la vitesse de propagation de la perturbation $z(t,x)$ est unitaire, l'inégalité d'énergie peut être obtenue aisément après une intégration convenable dans le cône caractéristique

$$\Gamma(T,L) = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n : |x| \leq L - t\}.$$

Soit, maintenant, $u(t,x)$ la solution locale de l'équation (0.47) et, sans perte de généralité, supposons que

$$\mathrm{supp}(u(0,x)) \cup \mathrm{supp}((\partial_t u)(0,x)) \subseteq B(0,R),$$

où $B(0,R) = \{|x| \leq R\}$. En considérant que la vitesse de propagation

$$v(t,x,K,\nabla_x u) = 1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2$$

est variable, il faut remplacer le cône caractéristique $\Gamma(T,L)$ par le domaine

$$\Omega(T,R) = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n : |x| \leq R - D(T)t\},$$

où $0 < T < \infty$ et

$$D(T) = \max\left\{ \sqrt{\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right)} : t \in [0,T], |y| \leq R \right\}.$$

L'estimation d'énergie pour $u(t,x)$ découle d'une intégration convenable dans le domaine $\Omega(T,R)$.

Chapitre 3. Dans ce chapitre, nous étudions le problème de Cauchy pour l'équation de Klein-Gordon

$$(\partial_{tt} - \Delta_x + m^2(\epsilon))\, u(t,x) = u^2(t,x) + g(u(t,x)), \tag{0.52}$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ et les données initiales sont de la forme

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x),$$

avec $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La fonction $g(s)$ est d'ordre cubique près de l'origine et $\epsilon > 0$ représente un paramètre réel suffisamment petit.

Nous supposons (cf. (0.52)) que la masse m dépend de la taille des données initiales et, plus précisement, qu'il existe un paramètre réel $\sigma > 0$ tel que

$$m(\epsilon) = \epsilon^{\frac{\sigma}{2}}. \tag{0.53}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\epsilon \to 0} m(\epsilon) = 0 \tag{0.54}$$

et l'équation (0.52) prend la forme

$$(\partial_{tt} - \Delta_x + \epsilon^\sigma)\, u(t,x) = u^2(t,x) + g(u(t,x)). \tag{0.55}$$

La dépendance de m (cf. (0.53)) rend impossible une application directe des estimations $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ (cf. section 3.4). D'autre part, en tenant compte de la présence du terme quadratique dans la non-linéarité, nous voyons que l'inégalité d'énergie ne donne aucune information en ce qui concerne la décroissance de la solution (cf. section 3.5 et (0.39)). Notre idée est de travailler avec les nouvelles variables

$$\tau(t) = \epsilon^\beta t, \qquad \xi(x) = \epsilon^\beta x, \tag{0.56}$$

où on suppose $\beta = \frac{\sigma}{2}$. Si on note

$$\tilde{u}(\tau(t), \xi(x)) = u(t,x),$$

l'équation (0.52) prend la forme

$$\partial_{\tau\tau}\tilde{u}(\tau,\xi) - \Delta_\xi \tilde{u}(\tau,\xi) + \tilde{u}(\tau,\xi) = \frac{\tilde{u}^2(\tau,\xi)}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u}(\tau,\xi))}{\epsilon^{2\beta}}, \tag{0.57}$$

avec données initiales convenablement transformées selon (0.56).

Nous prouvons que la solution $u(t,x)$ du problème (0.52) existe globalement et que

$$u \in \bigcap\nolimits_{j=0,\dots,k+16} C^j([0,+\infty[, H^{k+16-j}(\mathbb{R}^2)), \tag{0.58}$$

pour $k \geq 18$ et $0 < \epsilon < \epsilon_0$. On suppose

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(k, \sigma, \|u_0\|_{H^{k+16}(\mathbb{R}^2)}, \|u_1\|_{H^{k+15}(\mathbb{R}^2)}) > 0$$

un paramètre suffisamment petit.

Notre idée est de considérer l'équation (0.52) comme une interpolation entre le modèle classique de Klein-Gordon et l'équation semi-linéaire des ondes. Dans ce deuxième cas, on peut montrer une comparaison avec le travail de Glassey (cf. [51]), où on prouve que le problème semi-linéaire

$$\partial_{tt} v(t,x) - \Delta_x v(t,x) = |v(t,x)|^p \tag{0.59}$$

n'admet pas de solutions globales en dimension $n = 2$ pour $p < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

De (0.58) nous déduisons que la solution $u(t,x)$ est d'autant plus régulière que k est grand. D'autre part, les estimations montrent que l'exposant σ dépend de k et $0 < \sigma = \sigma(k) < \frac{2}{k+10}$. Par conséquent,

$$\lim_{k \to \infty} \sigma(k) = 0. \tag{0.60}$$

La structure du chapitre 3 est la suivante. Nous rappelons (cf. Section 3.2) la technique des formes normales introduite par Shatah (cf. [99], [100]) et utilisée pour supprimer la non-linéarité quadratique. Plus précisement, une transformation du type $u \to v(u)$ permet d'obtenir une équation équivalente à celle que nous étudions, mais avec des termes non-linéaires cubiques ou d'ordre supérieur qui décroissent plus vite. En suivant l'approche de Ozawa, Tsutsumi, Tsutaya (cf. [86]) et Georgiev (cf. ([36])), nous exhibons des estimations convenables $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ pour la solution locale du problème (0.52) (cf. Sections 3.3-3.4). On combine ces résultats avec les inégalités classiques d'énergie (cf. Section 3.5). On montre ainsi que la solution locale est bornée et petite en termes de la norme uniforme et de la norme d'énergie. L'application du principe de prolongement des solutions des équations différentielles permet d'achever la preuve de l'existence globale.

Chapitre 1

Equation des ondes non-linéaire avec une condition nulle de Klainerman

1.1 Introduction

Nous nous proposons d'étudier le problème de Cauchy pour l'équation des ondes non-linéaire

$$\partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = F(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x)) \tag{1.1}$$

avec comme données initiales

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x), \tag{1.2}$$

où $(u_0,u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\epsilon > 0$ est un paramètre réel suffisamment petit. Sans perte de généralité, nous supposons que

$$\mathrm{supp}(u_0) \cup \mathrm{supp}(u_1) \subseteq B(0,L).$$

Dans (1.1), $F(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x))$ représente une forme quadratique par rapport à $(\partial_t u, \partial_{x_1}u, ..., \partial_{x_n}u)$ dans un voisinage de l'origine $(0,0,...,0)$. Plus précisement, nous notons

$$F(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x)) = F_1(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x)) + F_2(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x)),$$

où

$$F_1(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x)) =< \lambda g\, \nabla_{t,x}u(t,x)\, , \nabla_{t,x}u(t,x) >= \lambda(|\nabla_x u(t,x)|^2 - |\partial_t u(t,x)|^2) \tag{1.3}$$

et

$$F_2(t, x, \nabla_{t,x}u(t, x)) =< A(t, x)\, \nabla_{t,x}u(t, x)\,, \nabla_{t,x}u(t, x) >= A(t, x)|\nabla_{t,x}u(t, x)|^2. \tag{1.4}$$

Dans (1.3), λ est une constante réelle non nulle, $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{1+n} \times \mathbb{R}^{1+n}$ et

$$g = \{g_{ab}\}_{a,b=0,\dots,n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

est la matrice de Lorentz. Dans (1.4) on pose

$$A(t, x) = \frac{1}{(1 + t + |x|)^a},$$

où $a \geq 1$ représente une constante réelle.

Nous utilisons les coordonnées $(x^0, x^1, ..., x^n)$ de l'espace de Minkowsky $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, g)$, muni de la métrique

$$ds^2 = \sum_{\mu=0,\dots,n} \sum_{\nu=0,\dots,n} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

où on note $x^0 = t$ et $x^i = x_i$, pour chaque $i = 1, ..., n$.

En suivant l'approche de Klainerman et Machedon (cf. [68], [70]), nous rappelons que le vecteur $\vec{\xi} = (\xi^0, \xi^1, ..., \xi^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est nul par rapport à la métrique de Lorentz si l'idéntité suivante est satisfaite

$$\sum_{a=0}^{n} \sum_{b=0}^{n} g_{ab}\, \xi^a\, \xi^b = 0. \tag{1.6}$$

En utilisant la notation $\partial_0 = -\partial_t$ et $\partial_a = \partial_{x_a}$, $a = 1, ..., n$, on voit que le terme

$$< \lambda g\, \nabla_{t,x}u(t, x)\,, \nabla_{t,x}u(t, x) >= \lambda \sum_{a,b=0,\dots,n} g_{ab}\, \partial_a u\, \partial_b u$$

représente une forme polynômiale quadratique nulle au sens de (1.6) et satisfaisante la Condition Nulle de Klainerman (cf. Introduction et [68],[70], [71], [66], [72], [114]). D'autre part, on peut considérer le terme (1.4) comme une perturbation non-linéaire qui décroît très vite pour t suffisamment grand.

Du point de vue physique, l'équation (1.1) représente un modèle mathématique utilisé pour décrire les vibrations des membranes élastiques quand la perturbation $u(t, x)$ est petite et la vitesse de propagation v est constante (on suppose, ici, $v = 1$). Les fonctions $u(0, x)$ et $(\partial_t u)(0, x)$ représentent, respectivement, la forme et la vitesse de la perturbation au temps $t = 0$.

On a supposé les données initiales (cf. (1.2)) ayant support compact contenu dans la sphère $B(0, L)$. Du principe de Huygens, on déduit que

$$\mathrm{supp}(u(t,x)) \subseteq \{|x| \leq L+t\},$$

pour $t > 0$. Nous allons prouver le théorème suivant.

Théorème 1.1 *Soit* $s \geq 2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)$, $n > 3$ [1]. *Alors il existe*

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(\|u_0(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \|u_1(x)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}, n) > 0,$$

suffisamment petit, tel que, pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *la solution* $u(t,x)$ *du problème (1.1)-(1.2) existe unique et globale et*

$$u \in \bigcap\nolimits_{j=0,\cdots,s} C^j([0,+\infty[; H^{s-j}(\mathbb{R}^n)).$$

Nous présentons brièvement la structure du chapitre 1. Le théorème de Cauchy-Kovalevskaja permet de déduire que la solution du problème (1.1)-(1.2) existe localement dans l'intervalle $[0,T]$, $T = T(\epsilon) > 0$. Nous rappelons (cf. Section 1.2) quelques résultats préliminaires concernants les inégalités $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ de Von Wahl pour l'équation des ondes. En suivant l'approche de Klainerman (cf. [68], [70]) et Kosecki (cf. [74]), nous introduisons les opérateurs différentiels de l'algèbre de Poincaré (cf. Section 1.3) et exhibons des estimations convenables pour la forme nulle (1.3) (cf. Sections 1.4-1.5-1.6). Ces résultats, combinés avec les inégalités classiques d'énergie (cf. Section 1.7), permettent de montrer les propriétés de décroissance de la solution du problème (1.1)-(1.2) en fonction du temps et de la norme de Sobolev des données initiales. La preuve du théorème 1.1 découle de l'application de la méthode de contraction et du principe de prolongement des solutions des équations différentielles.

1.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous rappelons les inégalités $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ pour l'équation des ondes établies par Von Wahl (cf. [73], Chap. 1, pp.20-30 et [66]). Nous considérons, d'abord, le problème homogène. On étendra le résultat au cas non-homogène en utilisant le principe de Duhamel. Les inégalités de Von Wahl montrent les propriétés de décroissance de la solution en fonction de la variable temporelle et de la norme de Sobolev des données initiales.

Inégalité de Von Wahl pour le problème homogène. Soit $w(t,x)$ la solution locale de l'équation

$$\partial_{tt} w(t,x) - \Delta_x w(t,x) = 0, \tag{1.7}$$

avec données initiales $w(0,x) = 0$ et $(\partial_t w)(0,x) = w_1(x)$, où $w_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{supp}(w_1) \subseteq B(0,L)$.

Considérons, d'abord, le cas n impair. La formule de représentation donne

[1] La technique que nous utilisons ne permet pas d'obtenir le résultat analogue du Théorème 1.1 en dimension $n \leq 3$ (cf. Section 1.8).

$$w(t,x) = \sum_{k=0}^{(n-3)/2} a_k\, t^{k+1}\, \frac{1}{|\Omega_n|}\, \frac{d^k}{dt^k} \int_{|\xi|=1} dS_\xi\, w_1(x+t\xi), \tag{1.8}$$

où a_k sont des constantes et Ω_n est la sphère unitaire dans $\mathbb{R}^n$. L'estimation de Von Wahl (cf. [66]) établi qu'il existe une constante $c_0 = c_0(n,L) > 0$ telle que

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_0}{t^{\frac{(n-1)}{2}}} \|\partial_x^{\frac{n-1}{2}} w_1(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.9}$$

pour $t \geq 1$.

Pour n pair, la formule de représentation donne

$$w(t,x) = \tag{1.10}$$

$$\sum_{k=0}^{(n-2)/2} b_k\, t^{k+1} \int_0^t dr \int_{|\xi|=1} dS_\xi\, t^{1-n} \frac{r^{n-1}}{\sqrt{t^2-r^2}} \sum_{|\alpha|=k} \partial^\alpha w_1(x+r\xi) \left(\frac{r\xi}{t}\right)^\alpha,$$

où b_k sont des constantes. De manière similaire, l'estimation de Von Wahl (cf. [66]) établi qu'il existe une constante $c_1 = c_1(n,L) > 0$ telle que

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_1}{t^{\frac{(n-1)}{2}}} \sum_{0\leq|\alpha|\leq\frac{n}{2}} \|\partial_x^\alpha w_1(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.11}$$

pour $t \geq 1$.

La presénce des constantes $c_0 = c_0(n,L)$ et $c_1 = c_1(n,L)$ montre que les inégalités (1.9) et (1.11) dépendent de la dimension n et de la mésure du support des données initiales.

L'hypothèse $w_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ permet d'améliorer ces résultats. Pour cela, nous considérons le lemme suivant.

Lemme 1.1 *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et supposons que* $\mathrm{supp}(f) \subseteq B(0,L)$. *Alors il existe une constante $c = c(n,L) > 0$ telle que*

$$\|f(\cdot)\|_{L^1(B(0,L))} \leq c\, \|f(\cdot)\|_{L^2(B(0,L))}. \tag{1.12}$$

Preuve. Posons $c = L^{n/2}$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\|f(\cdot)\|_{L^1(B(0,L))} = \int_{B(0,L)} \mathrm{d}x\, |f(x)| \leq$$

$$\left(\int_{B(0,L)} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(0,L)} \mathrm{d}x\, 1\right)^{\frac{1}{2}} = L^{n/2} \|f(\cdot)\|_{L^2(B(0,L))}. \blacksquare$$

En utilisant le Lemme 1.1, d'après (1.9) et (1.11) nous obtenons, respectivement,

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{t^{\frac{(n-1)}{2}}} \|\partial_x^{\frac{n-1}{2}} w_1(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad n\,\text{impair} \tag{1.13}$$

et

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{t^{\frac{(n-1)}{2}}} \|w_1(\cdot)\|_{H^{n/2}(\mathbb{R}^n)}, \qquad n\,\text{pair}, \tag{1.14}$$

pour $t \geq 1$.

Ces estimations échouent pour $t = 0$. Pour surmonter cette difficulté et obtenir une résultat convenable dans un voisinnage de $t = 0$, nous utilisons le lemme suivant, qui découle du théorème d'immersion de Sobolev.

Lemme 1.2 *Soit $n \geq 3$ et supposons que $w(t,x)$ est la solution locale du problème (1.7). Alors il existe une constante $c = c(n) > 0$ telle que*

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|w_1(\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.15}$$

Preuve. Considérons le problème (1.7). En utilisant la transformation de Fourier, on voit que la fonction

$$\hat{w}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} dx\, w(t,x)\, \mathrm{e}^{-i\,x\,\xi}$$

représente la solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\hat{w}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{w}(t,\xi) &= 0, \\ \hat{w}(0,\xi) &= 0, \\ (\partial_t \hat{w})(0,\xi) &= \hat{w}_1(\xi). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Par conséquent, la solution locale du problème (1.7) prend la forme

$$w(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi\, e^{ix\xi}\, \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\, \hat{w}_1(\xi)$$

et, suite à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit que

$$|w(t,x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi e^{ix\xi} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|(1+|\xi|^2)^{[n/2]/2}} (1+|\xi|^2)^{[n/2]/2} \hat{w}_1(\xi) \right|$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi (1+|\xi|^2)^{[n/2]} |\hat{w}_1(\xi)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \frac{1}{|\xi|^2 (1+|\xi|^2)^{[n/2]}} \right)^{1/2}.$$

En rappellant la définition d'espace de Sobolev en termes des variables duales, on voit que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi (1+|\xi|^2)^{[n/2]} |\hat{u_1}(\xi)|^2\right)^{1/2} = \|u_1(\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)}.$$

D'autre part, en tenant compte que $n \geq 3$, il existe une constante $c = c(n) > 0$ telle que

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \frac{1}{|\xi|^2 (1+|\xi|^2)^{[n/2]}}.\blacksquare$$

En rassemblant les estimations (1.13), (1.14) et (1.15), grâce au lemme 1.2 on peut déterminer une constante $c = c(n, L) > 0$ telle que

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{(1+t)^{(n-1)/2}} \|w_1(\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.17}$$

pour $t \geq 0$.

Soit maintenant $w(t, x)$ la solution locale du problème

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} - \Delta) w(t,x) &= 0, \\ w(0,x) &= w_0(x), \\ (\partial_t w)(0,x) &= w_1(x) \end{aligned} \tag{1.18}$$

et supposons que $(w_0, w_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{supp}(u_0) \cup \mathrm{supp}(u_1) \subseteq B(0, L)$. De manière similaire, on démontre qu'il existe une constante $c = c(n, L) > 0$ telle que

$$\|w(t,x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{(1+t)^{(n-1)/2}} \left(\|w_1(\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)} + \|w_0(\cdot)\|_{H^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)}\right), \tag{1.19}$$

pour $t \geq 0$.

Inégalité de Von Wahl pour le problème non-homogène. Nous allons prouver le lemme suivant.

Lemme 1.3 *Soit $w(t, x)$ la solution locale du problème non-homogène*

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} - \Delta) w(t,x) &= F(t,x), \\ w(0,x) &= w_0(x), \\ (\partial_t w)(0,x) &= w_1(x) \end{aligned} \tag{1.20}$$

et supposons que $(w_0, w_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{supp}(u_0) \cup \mathrm{supp}(u_1) \subseteq B(0, L)$. Alors il existe deux constantes $c_1 = c_1(n) > 0$ et $c_2 = c_2(n) > 0$ telles que

$$\|w(t,x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_1}{(1+t)^{(n-1)/2}} \left(\|w_1(\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)} + \|w_0(\cdot)\|_{H^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)}\right) + \tag{1.21}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{c_2}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}} \|F(\tau,\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)},$$

pour $t \geq 0$.

PREUVE. Posons $w = v + z$, où v et z sont, respectivement, les solutions des problèmes

$$\begin{aligned}(\partial_{tt}-\Delta)v(t,x) &= 0, \\ v(0,x) &= w_0(x), \\ (\partial_t v)(0,x) &= w_1(x).\end{aligned} \tag{1.22}$$

et

$$\begin{aligned}(\partial_{tt}-\Delta)z(t,x) &= F(t,x), \\ z(0,x) &= 0, \\ (\partial_t z)(0,x) &= 0.\end{aligned} \tag{1.23}$$

D'après (1.19), on déduit que

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{(1+t)^{(n-1)/2}} \left(\|w_1(\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)} + \|w_0(\cdot)\|_{H^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{1.24}$$

Considérons maintenant le problème (1.23). En appliquant le principe de Duhamel (cf. [66] et [73], Chap. 1, pp.20-30), la solution locale prend la forme

$$z(t,x) = \int_0^t \mathrm{d}\tau Z(t-\tau)F(\tau,x), \tag{1.25}$$

où $Z(s) = \frac{\sin(s\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}$.

En utilisant l'estimation (1.17), d'après (1.25) on déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|z(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{c}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}} \|F(\tau,\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.26}$$

Puisque $w = v + z$, on conclut que

$$\begin{aligned}\|w(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \|v(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|z(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{c_1}{(1+t)^{(n-1)/2}} \left(\|w_1(\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)} + \|w_0(\cdot)\|_{H^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)}\right) \\ &\quad + \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{c_2}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}} \|F(\tau,\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont deux constantes convenables. Le Lemme 1.3 est prouvé. ■

1.3 L'algèbre des opérateurs de Poincaré

En suivant l'approche de Klainerman (cf. [68], [70]) et Kosecki (cf. [74]), nous considérons l'espace de Minkowski $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, g)$ muni de la métrique de Lorentz

$$ds^2 = \sum_{\mu=0,\ldots,n} \sum_{\nu=0,\ldots,n} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

où g est la matrice (1.5), $x^0 = t$ et $x^i = x_i$ pour chaque $i = 1, ..., n$.

Nous introduisons ensuite les familles des opérateurs différentiels du premier ordre

$$\Omega_{ij} = x_i \partial_{x_j} - x_j \partial_{x_i} \qquad i, j = 1, ..., n \tag{1.27}$$

et

$$\Omega_{0i} = t\partial_{x_i} + x_i \partial_t, \qquad i = 1, ..., n. \tag{1.28}$$

Pour avoir une idée geometrique de l'action de ces opérateurs, considérons l'ensemble

$$O(p, q) = \left\{ A \in GL(1 + n, \mathbb{R}) : A^T I_{p,q} A = I_{p,q} \right\},$$

où A^T désigne la matrice transposée de A, $p + q = n + 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, et

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_{p\times p} & 0 \\ 0 & I_{q\times q} \end{pmatrix},$$

étant donné $I_{k\times k}$ la matrice identité d'ordre k.

L'ensemble $O(p, q)$, muni du produit des matrices, est un groupe de Lie. En particulier, en choisissant $p = 1$ et $q = n$, nous obtenons le groupe de Lorentz $(O(1, n), \cdot)$ des transformations linéaires qui conservent la longueur des vecteurs dans l'espace de Minkowski.

L'algèbre de Lie correspondant au groupe $(O(1, n), \cdot)$ est engendrée par les éléments

$$\{\Omega_{ij}\}_{i,j=1,\ldots n} \cup \{\Omega_{0i}\}_{i=1,\ldots n} \tag{1.29}$$

qui agissent comme des opérateurs de rotation en fonction des variables spatiales et temporelles.

On appelle groupe de Lorentz non-homogène le groupe de Lie qui contient les éléments de l'ensemble $O(1, n)$ et les translations. L'algèbre de Lie correspondante est engendrée par les opérateurs (1.29) et les dérivées usuelles $\partial_a, a = 0, 1, ..., n$.

Considérons, ensuite, la transformation d'échelle $x^a \to \lambda x^a, \lambda \in \mathbb{R}, a = 0, 1, ..., n$. L'élément correspondant dans l'algèbre de Lie est l'opérateur

$$S = t\partial_t + x_1\partial_1 + \cdots + x_n\partial_n.$$

Nous appellons algèbre de Poincaré la couple $(\Im, [\cdot, \cdot])$, où l'ensemble

$$\Im = \{\{\partial_i\}_{i=0,\dots n} \cup \{\Omega_{ij}\}_{i,j=1,\dots n} \cup \{\Omega_{0i}\}_{i=1,\dots n} \cup S\}$$

contient $\frac{n^2+3n+4}{2}$ éléments. En rappelant la notation (1.5), on démontre aisément les identités suivantes (cf. [68], [70], [74]) :

$$[\Omega_{ab}, (\partial_{tt} - \Delta)] = 0, \quad a, b = 0, ..., n, \tag{1.30}$$

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = g_{bc}\Omega_{ad} + g_{ad}\Omega_{bc} - g_{bd}\Omega_{ac} - g_{ac}\Omega_{bd}, \quad a, b, c, d = 0, ..., n,$$

$$[S, (\partial_{tt} - \Delta)] = -2(\partial_{tt} - \Delta), \qquad [S, \Omega_{ab}] = 0, \quad a, b = 0, ..., n,$$

$$[\Omega_{ab}, \partial_c] = g_{bc}\partial_a - g_{ac}\partial_b, \quad a, b, c = 0, ..., n, \qquad [S, \partial_a] = -\partial_a, \quad a = 0, ..., n.$$

Les définitions précédentes permettent de généraliser les espaces de Sobolev usuels. En particulier, pour $z \in \Im$ et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, nous définissons l'espace

$$H_z{}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in H^s(\mathbb{R}^n) : \sum_{0 \le |\alpha| \le s} \|z^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty \right\}, \tag{1.31}$$

où

$$z^\alpha = \prod_{k=1,\dots,\frac{n^2+3n+4}{2}} z_k{}^{\alpha_k} \tag{1.32}$$

et

$$|\alpha| = \sum_{k=1,\dots,\frac{n^2+3n+4}{2}} \alpha_k. \tag{1.33}$$

Dans les lemmes suivantes, nous décrivons les propriétés principales des operatéurs de l'algèbre de Poincaré.

Lemme 1.4 *Soient $z \in \Im$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Alors il existe des constantes $c_0, c_1, ..., c_n$ telles que*

$$[\nabla_{t,x}, z]f = c_0\partial_t f + \sum_{i=1,\dots,n} c_i \partial_i f.$$

PREUVE. Sans perte de généralité, supposons $z = \Omega_{km}$, où $0 \le k, m \le n$, et soient δ_{ij} les symboles de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

On a

$$[\partial_i, \Omega_{km}]f = [\partial_i, x_k\partial_m]f - [\partial_i, x_m\partial_k]f$$

$$= (\partial_i(x_k\partial_m) - x_k\partial_m\partial_i)f - (\partial_i(x_m\partial_k) - x_m\partial_k\partial_i)f$$

$$= \delta_{ik}\partial_m f + x_k\partial_i\partial_m f - x_k\partial_m\partial_i f - \delta_{im}\partial_k f - x_m\partial_i\partial_k f + x_m\partial_k\partial_i f$$

$$= \delta_{ik}\partial_m f - \delta_{im}\partial_k f.$$

La démonstration est similaire pour chaque $z \in \Im$. ■

On peut étendre ce résultat au cas général $|\alpha| > 1$. Plus précisement, on prouve qu'il existe des constantes c^α_β telles que

$$z^\alpha \nabla_{t,x} f(t,x) = \sum_{0<|\beta|\leq|\alpha|} c^\alpha_\beta \nabla_{t,x} z^\beta f(t,x), \tag{1.34}$$

pour tout $z \in \Im$.

Notre but est d'établir (cf. Section 1.4) une estimation convenable du terme non-linéaire (1.3). Pour cela, nous utiliserons les lemmes suivants.

Lemme 1.5 *Soit g la matrice (1.5) et supposons $z \in \Im$, $|\alpha| \geq 0$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Alors il existe des constantes $c^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2}$ telles que*

$$z^\alpha < g\nabla_{t,x} f(t,x)\,,\nabla_{t,x} f(t,x) > \tag{1.35}$$

$$= \sum_{0\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|\leq|\alpha|} c^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2} < g\,\nabla_{t,x} z^{\alpha_1} f(t,x)\,,\nabla_{t,x} z^{\alpha_2} f(t,x) > .$$

Preuve. Fixons $z \in \Im$ et $|\alpha| \geq 0$. En appliquant la règle de Leibnitz, il existe des constantes $b^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2}$ telles que

$$z^\alpha < g\nabla_{t,x} f(t,x)\,,\nabla_{t,x} f(t,x) >$$

$$= \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|} b^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2} < g\, z^{\alpha_1}\nabla_{t,x} f(t,x), z^{\alpha_2}\nabla_{t,x} f(t,x) > .$$

D'après (1.34), nous déduisons qu'on peut déterminer de nouvelles constantes $c^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2}$ telles que

$$z^{\alpha} < g\nabla_{t,x} f(t,x)\,, \nabla_{t,x} f(t,x) >$$

$$= \sum_{0\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|\leq|\alpha|} c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2} < g\,\nabla_{t,x} z^{\alpha_1} f(t,x), \nabla_{t,x} z^{\alpha_2} f(t,x) > .$$

Le lemme 1.5 est prouvé. ■

Lemme 1.6 *Soit $z \in \Im$ et supposons $a \geq 1$ une constante réelle. Alors, pour chaque β fixé, il existe une constante $c = c(a,\beta) > 0$ telle que*

$$\left| z^{\beta} \frac{1}{(1+t+|x|)^a} \right| \leq \frac{c}{(1+t+|x|)^a}.$$

PREUVE. Sans perte de la généralité, supposons $z = \Omega_{0i} = t\partial_i + x_i\partial_t$. Alors, il existe une constante $c = c(|a|) > 0$ telle que

$$\left|(t\partial_i + x_i\partial_t)\,\frac{1}{(1+t+|x|)^a}\right| = |a| \left| t\,\frac{x_i}{|x|}(1+t+|x|)^{-a-1} + x_i\,(1+t+|x|)^{-a-1}\right|$$

$$\leq \frac{|a|t}{(1+t+|x|)^{a+1}} + \frac{|a||x|}{(1+t+|x|)^{a+1}} \leq \frac{c}{(1+|x|+t)^a}.$$

La démonstration est similaire pour chaque $z \in \Im$. On étend aisément le résultat au cas général $|\beta| > 1$. ■

Supposons, maintenant, $z \in \Im$ et $g, h \in H^s_z(\mathbb{R}^n)$ et fixons $|\alpha| \geq 0$. Grâce à la règle de Leibnitz, il existe des constantes $c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2}$ telles que

$$z^{\alpha}(gh)(x) = \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|} c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2} (z^{\alpha_1} g)(x)(z^{\alpha_2} h)(x).$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons l'estimation suivante

$$\|z^{\alpha}(gh)(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|;0\leq|\alpha_1|\leq\frac{|\alpha|}{2}} \|z^{\alpha_1} g(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|z^{\alpha_2} h(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.36}$$

$$+c_2 \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|;0\leq|\alpha_2|\leq\frac{|\alpha|}{2}} \|z^{\alpha_1} g(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|z^{\alpha_2} h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont des constantes convenables.

1.4 Estimations du terme non-linéaire

On se propose d'établir une estimation convenable du terme non-linéaire (1.3). Pour semplicité, on utilise les notations u et ∂_i à la place, respectivement, de $u(t,x)$ et ∂_{x_i}. Puisque (cf. 1.28)

$$\partial_i = \frac{\Omega_{0i}}{t} - \frac{x_i \partial_t}{t}, \quad i = 1, ..., n, \tag{1.37}$$

nous obtenons

$$| < \lambda g \nabla_{t,x} u \, , \nabla_{t,x} u > | = | < \lambda g (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n) u, (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n) u > |$$

$$= \left| < \lambda g \left[(\partial_t, -\frac{x_1}{t}\partial_t, \cdots, -\frac{x_n}{t}\partial_t) u + (0, \frac{\Omega_{01}}{t}, \cdots, \frac{\Omega_{0n}}{t}) u \right] , (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n) u > \right|$$

$$= |\lambda| \left| -(\partial_t u)^2 - \frac{x_1 \partial_t u}{t}\partial_1 u - \cdots - \frac{x_n \partial_t u}{t}\partial_n u + \frac{\Omega_{01} u}{t}\partial_1 u + \cdots + \frac{\Omega_{0n} u}{t}\partial_n u \right|$$

$$= |\lambda| \left| -(\partial_t u)^2 - \frac{\partial_t u}{t} \sum_{1 \le i \le n} x_i \partial_i u + \sum_{1 \le i \le n} \frac{\Omega_{0i} u}{t}\partial_i u \right|$$

$$= |\lambda| \left| -\frac{\partial_t u}{t} \left(t\partial_t u + \sum_{1 \le i \le n} x_i \partial_i u \right) + \sum_{1 \le i \le n} \frac{\Omega_{0i} u}{t}\partial_i u \right|$$

$$= |\lambda| \left| -\frac{\partial_t u}{t} S u + \sum_{1 \le i \le n} \frac{\Omega_{0i} u}{t}\partial_i u \right| .$$

Par conséquent, il existe une constante $c(|\lambda|)$ telle que

$$\sup_{|x| \le L+t} |< \lambda g \nabla_{t,x} u(t,x) \, , \nabla_{t,x} u(t,x) >| \tag{1.38}$$

$$\le \frac{c(|\lambda|)}{t} \|z u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x| \le L+t)} \|\nabla_{t,x} u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x| \le L+t)},$$

où on considère $z \in \{\{\Omega_{0i}\}_{i=1,...n} \cup S\}$.

L'inégalité (1.38) présente une singularité pour $t = 0$. Pour surmonter cette difficulté et étendre le résultat dans un voisinage de $t = 0$, on considère l'identité

$$\frac{\Omega_{0i}}{1+t} = \frac{t\partial_i}{1+t} + \frac{x_i \partial_t}{1+t}, \quad i = 1, ..., n, \tag{1.39}$$

obtenue de (1.28). On en déduit que

$$\partial_i = \frac{\partial_i}{1+t} + \frac{\Omega_{0i}}{1+t} - \frac{x_i \partial_t}{1+t}, \quad i = 1, ..., n. \tag{1.40}$$

Par suite, nous obtenons

$$| < \lambda g \nabla_{t,x} u \, , \nabla_{t,x} u > | = | < \lambda g (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n) u, (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n) u > | \tag{1.41}$$

$$= \left| < \lambda g \left(\partial_t, \frac{\partial_1}{1+t} + \frac{\Omega_{01}}{1+t} - \frac{x_1 \partial_t}{1+t}, \cdots, \frac{\partial_n}{1+t} + \frac{\Omega_{0n}}{1+t} - \frac{x_n \partial_t}{1+t} \right) u, (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n) u > \right|$$

$$\leq \left| < \lambda g \left(\partial_t u, \frac{\Omega_{01} u}{1+t} - \frac{x_1 \partial_t u}{1+t}, \cdots, \frac{\Omega_{0n} u}{1+t} - \frac{x_n \partial_t u}{1+t} \right), (\partial_t u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u) > \right|$$

$$+ \left| < \lambda g \left(0, \frac{\partial_1 u}{1+t}, \cdots, \frac{\partial_n u}{1+t} \right), (\partial_t u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u) > \right|$$

$$= \left| < \lambda g \left[\left(\partial_t u, -\frac{x_1 \partial_t u}{1+t}, \cdots, -\frac{x_n \partial_t u}{1+t} \right) + \left(0, \frac{\Omega_{01} u}{1+t}, \cdots, \frac{\Omega_{0n} u}{1+t} \right) \right], (\partial_t u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u) > \right|$$

$$+ \left| < \lambda g \left(0, \frac{\partial_1 u}{1+t}, \cdots, \frac{\partial_n u}{1+t} \right), (\partial_t u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u) > \right|.$$

En désignant

$$G_1(t, x, \nabla_{t,x} u, \Omega_{0i} u) =$$

$$\left| < \lambda g \left[\left(\partial_t u, -\frac{x_1 \partial_t u}{1+t}, \cdots, -\frac{x_n \partial_t u}{1+t} \right) + \left(0, \frac{\Omega_{01} u}{1+t}, \cdots, \frac{\Omega_{0n} u}{1+t} \right) \right], (\partial_t u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u) > \right|$$

et

$$G_2(t, x, \nabla_{t,x} u) = \left| < \lambda g \left(0, \frac{\partial_1 u}{1+t}, \cdots, \frac{\partial_n u}{1+t} \right), (\partial_t u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u) > \right|,$$

l'inégalité (1.41) prend la forme

$$| < \lambda g \nabla_{t,x} u(t,x) \, , \nabla_{t,x} u(t,x) > | \leq G_1(t, x, \nabla_{t,x} u, \Omega_{0i} u) + G_2(t, x, \nabla_{t,x} u).$$

On va établir des estimations convenables pour les termes G_1 et G_2.

Estimation du term G_1. On a

$$G_1(t,x,\nabla_{t,x}u,\Omega_{0i}u) \tag{1.42}$$

$$= |\lambda| \left| -(\partial_t u)^2 - \frac{x_1\partial_t u}{1+t}\partial_1 u - \cdots - \frac{x_n\partial_t u}{1+t}\partial_n u + \frac{\Omega_{01}u}{1+t}\partial_1 u + \cdots + \frac{\Omega_{0n}u}{1+t}\partial_n u \right|$$

$$= |\lambda| \left| -(\partial_t u)^2 - \frac{\partial_t u}{1+t}\sum_{1\le i\le n} x_i\partial_i u + \sum_{1\le i\le n}\frac{\Omega_{0i}u}{1+t}\partial_i u \right|$$

$$= |\lambda| \left| -\frac{\partial_t u}{1+t}\left((1+t)\partial_t u + \sum_{1\le i\le n} x_i\partial_i u\right) + \sum_{1\le i\le n}\frac{\Omega_{0i}u}{1+t}\partial_i u \right|$$

$$\le |\lambda| \left| -\frac{\partial_t u}{1+t}\left(t\partial_t u + \sum_{1\le i\le n} x_i\partial_i u\right) + \sum_{1\le i\le n}\frac{\Omega_{0i}u}{1+t}\partial_i u \right| + |\lambda|\left| -\frac{\partial_t u}{1+t}\partial_t u\right|$$

$$\le \frac{c(|\lambda|)}{1+t}\left(\|zu(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+t)}\|\nabla_{t,x}u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+t)} + \|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\le L+t)}\right),$$

où on considère $z \in \{\{\Omega_{0i}\}_{i=1,\dots n} \cup S\}$.

Estimation du terme G_2. On a

$$G_2(t,x,\nabla_{t,x}u) \le \frac{c(|\lambda|)}{1+t}\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\le L+t)}. \tag{1.43}$$

En utilisant la notation (1.3), on voit que

$$\|F_1(t,\cdot,\nabla_{t,x}u(t,\cdot))\|_{L^\infty(|x|\le L+t)} \tag{1.44}$$

$$\le \frac{c(|\lambda|)}{1+t}\|zu(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+t)}\|\nabla_{t,x}u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+t)}$$

$$+\frac{c(|\lambda|)}{1+t}\left(\|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\le L+t)} + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\le L+t)}\right),$$

où on pose $z \in \{\{\Omega_{0i}\}_{i=1,\dots n} \cup S\}$.

En ce qui concerne le terme non-linéaire (1.4), on a l'estimation suivante :

$$\|F_2(t,\cdot,\nabla_{t,x}u(t,\cdot))\|_{L^\infty(|x|\le L+t)}$$

$$= \sup_{|x|\le L+t}\left| < \frac{1}{(1+t+|x|)^a}\nabla_{t,x}u(t,x)\,,\nabla_{t,x}u(t,x) > \right| \tag{1.45}$$

$$\leq \frac{c}{(1+t)^a} \|\nabla_{t,x} u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\leq L+t)}. \tag{1.46}$$

On conclut que

$$\|F(t,\cdot,\nabla_{t,x}u(t,\cdot))\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)} \tag{1.47}$$

$$\leq \|F_1(t,\cdot,\nabla_{t,x}u(t,\cdot))\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)} + \|F_2(t,\cdot,\nabla_{t,x}u(t,\cdot))\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)}$$

$$\leq \frac{c(|\lambda|)}{1+t} \|zu(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)} \|\nabla_{t,x}u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)}$$

$$+\frac{c(|\lambda|)}{1+t}\left(\|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\leq L+t)} + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\leq L+t)}\right)$$

$$+\frac{c}{(1+t)^a}\|\nabla_{t,x}u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(|x|\leq L+t)},$$

où $z \in \{\{\Omega_{0i}\}_{i=1,\ldots n} \cup S\}$ et $c, c(|\lambda|) > 0$ sont des constantes convenables.

1.5 Application des inégalités de Von Wahl au problème (1.1)-(1.2)

Les résultats qu'on vient d'établir (cf. Sections 1.3-1.4) forment la base de la preuve de la proposition suivante.

Proposition 1.1 *Soit $z \in \Im$ et supposons que $u(t,x)$ est la solution locale du problème (1.1)-(1.2). Alors, pour $t \in [0,T]$, il existe des constantes $c_1, c_2(|\lambda|), c_3(|\lambda|)$, $c_4(|\lambda|), c_5$ positives telles que*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)} \leq \frac{c_1\epsilon}{(1+t)^{(n-1)/2}} \tag{1.48}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times \frac{c_2(|\lambda|)}{(1+\tau)} \sum_{0\leq|\beta_1|+|\beta_2|\leq[n/2]} \|z^{\beta_1+1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times \frac{c_3(|\lambda|)}{(1+\tau)} \sum_{0\leq|\beta_1|+|\beta_2|\leq[n/2]} \|\partial_\tau z^{\beta_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \|\partial_\tau z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times \frac{c_4(|\lambda|)}{(1+\tau)} \sum_{0\leq|\beta_1|+|\beta_2|\leq[n/2]} \|\nabla_x z^{\beta_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \|\nabla_x z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times \frac{c_5}{(1+\tau)^a} \sum_{0\leq|\beta_1|+|\beta_2|\leq[n/2]} \|\nabla_x z^{\beta_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \|\nabla_x z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)}.$$

Preuve. Soit $u(t,x)$ la solution locale du problème (1.1)-(1.2). En rappelant les inégalités de Von Wahl (cf. Section 1.2), on voit que

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)} \leq \frac{c_1}{(1+t)^{(n-1)/2}} (\|u(0,\cdot)\|_{H^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)} + \|(\partial_t u)(0,\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)}) \tag{1.49}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{c_2}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}} \|F(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot))\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)},$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont deux constantes convenables.

Estimation des données initiales. Les hypothèses sur les données initiales du problème (1.1)-(1.2) impliquent que

$$\|u(0,\cdot)\|_{H^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)} + \|(\partial_t u)(0,\cdot)\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)} \simeq \epsilon.$$

Pour ce qui concerne le terme non-linéaire, on a

$$\|F(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot))\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \|F_1(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot))\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)} + \|F_2(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot))\|_{H^{[n/2]}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \sum_{0\leq|\beta|\leq[n/2]} \left\| z^\beta < \lambda g \, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x), \nabla_{\tau,x} u(\tau,x) > \right\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)}$$

$$+ \sum_{0\leq|\beta|\leq[n/2]} \left\| z^\beta < \frac{1}{(1+|x|+\tau)^a} \nabla_{\tau,x} u(\tau,x), \nabla_{\tau,x} u(\tau,x) > \right\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)},$$

où $z \in \Im$. Notons

$$J_1(\tau) = \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \left\| z^\beta < \lambda g\, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x), \nabla_{\tau,x} u(\tau,x) > \right\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}$$

et

$$J_2(\tau) = \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \left\| z^\beta < \frac{1}{(1+|x|+\tau)^a}\, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x), \nabla_{\tau,x} u(\tau,x) > \right\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}.$$

Estimation de $J_1(\tau)$. En utilisant la règle de Leibnitz et le lemme 1.5, nous obtenons

$$J_1(\tau)$$

$$\le |\lambda| \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} b^\beta_{\beta_1,\beta_2} \| < g\, z^{\beta_1} \nabla_{\tau,x} u(\tau,x), z^{\beta_2} \nabla_{\tau,x} u(\tau,x) > \|_{L^2(|x|\le L+\tau)}$$

$$\le |\lambda| \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\beta|} c^\beta_{\beta_1,\beta_2} \| < g\, \nabla_{\tau,x} z^{\beta_1} u(\tau,x), \nabla_{\tau,x} z^{\beta_2} u(\tau,x) > \|_{L^2(|x|\le L+\tau)},$$

où $b^\beta_{\beta_1,\beta_2}$ et $c^\beta_{\beta_1,\beta 2}$ sont des constantes convenables. Sans perte de généralité, nous supposons que $0 \le |\beta_2| \le \frac{[n/2]}{2}$ (cf. (1.36)). En utilisant (1.47), on obtient

$$|\lambda| \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\beta|} c^\beta_{\beta_1,\beta_2} \| < g\, \nabla_{\tau,x} z^{\beta_1} u(\tau,x), \nabla_{\tau,x} z^{\beta_2} u(\tau,x) > \|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \le$$

$$\frac{c_1(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\beta|} \|z^{\beta_1+1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_2(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\beta|} \|\partial_\tau z^{\beta_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\partial_\tau z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_3(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\beta|\le[n/2]} \sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\beta|} \|\nabla_x z^{\beta_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_x z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)},$$

où $c_1(|\lambda|), c_2(|\lambda|), c_3(|\lambda|)$ sont des constantes et $z \in \Im$.

Estimation de $J_2(\tau)$. On a

$$J_2(\tau)$$

$$\leq c_1 \sum_{0\leq|\beta|\leq[n/2]} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|=|\beta|} \left\| < z^{\beta_1} \frac{1}{(1+|x|+\tau)^a} z^{\beta_2}\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot), z^{\beta_3}\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot) > \right\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)}$$

$$\leq c_2 \sum_{0\leq|\beta|\leq[n/2]} \sum_{0\leq|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\leq|\beta|} \left\| z^{\beta_1} \frac{1}{(1+|x|+\tau)^a} \right\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)} \tag{1.50}$$

$$\times \left\|\nabla_{\tau,x} z^{\beta_2}u(\tau,\cdot)\right\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)} \left\|\nabla_{\tau,x} z^{\beta_3}u(\tau,\cdot)\right\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)},$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont des constantes. En utilisant le principe de Huygens et le Lemme 1.6, on voit que l'expression (1.50) est bornée par le term

$$\frac{c}{(1+\tau)^a}$$

$$\times \sum_{0\leq|\beta|\leq[n/2]} \sum_{0\leq|\beta_1|+|\beta_2|\leq|\beta|} \left\|\nabla_{\tau,x} z^{\beta_1}u(\tau,\cdot)\right\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)} \left\|\nabla_{\tau,x} z^{\beta_2}u(\tau,\cdot)\right\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)},$$

où $c > 0$ est une constante et $0 \leq |\beta_2| \leq \frac{[n/2]}{2}$ (cf. (1.36)). La Proposition 1.1 est démontrée. ■

1.6 Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur

Le résultat établi dans la section 1.5 peut être généralisé aux dérivées d'ordre supérieur.

Soit $u(t,x)$ la solution locale du problème (1.1)-(1.2) et supposons que $z \in \Im$ et $0 \leq |\alpha| \leq \left[\frac{s}{2}\right] + 1$. En utilisant les idéntités (1.30), nous déduisons que $z^\alpha u(t,x)$ est la solution locale du problème de Cauchy

$$(\partial_{tt} - \Delta)\, z^\alpha u(t,x) = \sum_{0\leq|\beta|\leq|\alpha|} c^\alpha_\beta z^\beta F(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x)), \tag{1.51}$$

où c^α_β sont des constantes et $(z^\alpha u)(0,x), (z^\alpha \partial_t u)(0,x)$ représentent les données initiales. L'inégalité de Von Wahl donne

$$\left\|z^\alpha u(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(|x|\leq L+t)}$$

$$\leq \frac{c_1}{(1+t)^{(n-1)/2}} \left(\left\|u(0,\cdot)\right\|_{H^{[n/2]+|\alpha|+1}(\mathbb{R}^n)} + \left\|\partial_t u(0,\cdot)\right\|_{H^{[n/2]+|\alpha|}(\mathbb{R}^n)} \right) \tag{1.52}$$

$$+ \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{c_2}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times \left\| \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} c^\alpha_\beta z^\beta < \lambda g\, \nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot)\,,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot) > \right\|_{H^{[n/2]}(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{c_3}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}\,\mathrm{x}$$

$$\left\| \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} c^\alpha_\beta z^\beta < \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} \nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot)\,,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot) > \right\|_{H^{[n/2]}(|x|\le L+\tau)},$$

où c_1, c_2, c_3 et c^α_β sont des constantes.

Estimation des données initiales. Les hypothèses sur les données initiales du problème (1.1)-(1.2) impliquent que

$$\|u(0,\cdot)\|_{H^{[n/2]+|\alpha|+1}(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t u(0,\cdot)\|_{H^{[n/2]+|\alpha|}(\mathbb{R}^n)} \simeq \epsilon.$$

Pour établir une estimation convenable des termes non-linéaires, nous notons

$$R_{1,\alpha}(\tau, \nabla_{\tau,x} u)$$

$$= \left\| \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} c^\alpha_\beta z^\beta < \lambda g\, \nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot)\,,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot) > \right\|_{H^{[n/2]}(|x|\le L+\tau)}$$

et

$$R_{2,\alpha}(\tau, \nabla_{\tau,x} u)$$

$$= \left\| \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} c^\alpha_\beta z^\beta < \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} \nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot)\,,\nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot) > \right\|_{H^{[n/2]}(|x|\le L+\tau)}.$$

Estimation du terme $R_{1,\alpha}(\tau, \nabla_{\tau,x} u)$. Sans perte de la généralité, nous supposons que $0 \le |\beta_2| \le \frac{|\alpha|+[n/2]}{2}$ (cf. (1.36)). En exploitant les résultats déjà établis (cf. 1.47), on voit que

$$R_{1,\alpha}(\tau, \nabla_{\tau,x} u)$$

$$\le \frac{c_1(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\alpha|+[n/2]} \|z^{\beta_1+1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_2(|\lambda|)}{1+\tau}\sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\alpha|+[n/2]}\|\partial_\tau z^{\beta_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\partial_\tau z^{\beta_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_3(|\lambda|)}{1+\tau}\sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\alpha|+[n/2]}\|\nabla_x z^{\beta_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\nabla_x z^{\beta_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)},$$

où $c_1(|\lambda|), c_2(|\lambda|)$ et $c_3(|\lambda|)$ sont des constantes convenables.

Estimation du terme $R_{2,\alpha}(\tau,\nabla_{\tau,x}u)$. On a

$$R_{2,\alpha}(\tau,\nabla_{\tau,x}u)$$

$$\le\frac{c}{(1+\tau)^a}\sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\alpha|+[n/2]}\|\nabla_x z^{\beta_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\nabla_x z^{\beta_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)},$$

où $c>0$ est une constante et $0\le|\beta_2|\le\frac{|\alpha|+[n/2]}{2}$. .

On a démontré ainsi la proposition suivante.

Proposition 1.2 *Soit $u(t,x)$ la solution locale du problème (1.1)-(1.2) et supposons que $0\le|\alpha|\le\left[\frac{s}{2}\right]+1$. Alors, pour $t\in[0,T]$, il existe des constantes $c_0, c_1(|\lambda|), c_2(|\lambda|), c_3(|\lambda|), c_4(|\lambda|)$ positives telles que*

$$\|z^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+t)}\le\frac{c_0\epsilon}{(1+t)^{(n-1)/2}}\tag{1.53}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau\frac{c_1(|\lambda|)}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times\frac{1}{1+\tau}\sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\alpha|+[n/2]}\|z^{\beta_1+1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\nabla_{\tau,x}z^{\beta_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau\frac{c_2(|\lambda|)}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times\frac{1}{1+\tau}\sum_{0\le|\beta_1|+|\beta_2|\le|\alpha|+[n/2]}\|\partial_\tau z^{\beta_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\partial_\tau z^{\beta_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\int_0^t \mathrm{d}\tau\frac{c_3(|\lambda|)}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times \frac{1}{1+\tau} \sum_{0 \leq |\beta_1|+|\beta_2| \leq |\alpha|+[n/2]} \|\nabla_x z^{\beta_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \|\nabla_x z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)}$$

$$+ \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{c_4(|\lambda|)}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}}$$

$$\times \frac{1}{(1+\tau)^a} \sum_{0 \leq |\beta_1|+|\beta_2| \leq |\alpha|+[n/2]} \|\nabla_x z^{\beta_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \|\nabla_x z^{\beta_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)}. \blacksquare$$

Dans (1.53) on suppose $0 \leq |\beta_2| \leq \frac{|\alpha|+[n/2]}{2}$.

1.7 Estimations classiques d'énergie

Nous nous proposons d'établir les estimations classiques d'énergie pour la solution locale $u(t,x)$ du problème (1.1)-(1.2). On rappelle d'abord le résultat suivant.

Proposition 1.3 *Soit $w(t,x)$ la solution locale du problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} (\partial_{tt}-\Delta)w(t,x) &= F(t,x), \\ w(0,x) &= \epsilon\, w_0(x), \\ (\partial_t w)(0,x) &= \epsilon\, w_1(x), \end{aligned} \tag{1.54}$$

où $(w_0,w_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{supp}(w_0) \cup \operatorname{supp}(w_1) \subseteq B(0,L)$*. Supposons aussi que*

$$\operatorname{supp}(F(t,x)) \subseteq B(0,L+t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq L+t\}.$$

Alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\leq L+t\})} \leq c_1\,\epsilon + c_2 \int_0^t \mathrm{d}\tau \||\cdot|F(\tau,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\leq L+t\})}. \tag{1.55}$$

La preuve de la Proposition 1.3 repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.7 *Soit $\chi(t,x)$ une fonction $L^2(\mathbb{R}^n_x)$-intégrable. Alors*

$$\left\| \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \chi(\tau,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \|\chi(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.56}$$

PREUVE. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left\|\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\left(\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,x)\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\left(\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,x)\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\;2\left(\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,x)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,x)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\|\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\left(\chi(\tau,x)\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,x)\right).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le dernier terme est borné par

$$\frac{1}{\|\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\left(\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,x)\right)^2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\,|\chi(\tau,x)|^2\right)^{1/2}$$

$$= \|\chi(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left\|\int_0^\tau \mathrm{d}s\,\chi(s,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\chi(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.57}$$

On obtient (1.56) en intégrant (1.57) par rapport à τ dans l'intervalle $[0,t]$. ■

Nous utilisons aussi le résultat suivant qui découle de l'inégalité de Hardy. Soit $h(z)$ une fonction suffisamment régulière et rapidement décroissante pour $|z| \to +\infty$. Alors, il existe une constante $c = c(n) > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}z\left|\frac{h(z)}{z}\right|^2 \leq c\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}z|\nabla_z h(z)|^2. \tag{1.58}$$

Preuve de la Proposition 1.3. Considérons le problème (1.54). Par la transformation de Fourier, on trouve que

$$\hat{w}(t,\xi) = \epsilon\cos(t|\xi|)\hat{w}_0(\xi) + \epsilon\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{w}_1(\xi) + \int_0^t \mathrm{d}\tau\frac{\sin((t-\tau)|\xi|)}{|\xi|}\hat{F}(\tau,\xi)$$

est la solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\hat{w}(t,\xi) + |\xi|^2\hat{w}(t,\xi) &= \hat{F}(t,\xi), \\ \hat{w}(0,\xi) &= \epsilon\,\hat{w}_0(\xi), \\ \hat{w}_t(0,\xi) &= \epsilon\,\hat{w}_1(\xi). \end{aligned} \tag{1.59}$$

On voit que

$$|\hat{w}(t,\xi)| \leq \epsilon|\hat{w}_0(\xi)| + \epsilon\left|\frac{\hat{w}_1(\xi)}{|\xi|}\right| + \left|\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{\sin((t-\tau)|\xi|)\hat{F}(\tau,\xi)}{|\xi|}\right|,$$

d'où

$$\|\hat{w}(t,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon\,\|\hat{w}_0(\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} + \epsilon\left\|\frac{\hat{w}_1(\cdot)}{|\xi|}\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} + \left\|\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{\hat{F}(\tau,\cdot)}{|\xi|}\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.60)$$

L'hypothèse $\mathrm{supp}(F(\tau,x)) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \tau + L\}$ assure que la fonction $F(\tau,x)$ est régulière et à support compact pour chaque $\tau \in [0,t]$ fixé. Par conséquent, $\hat{F}(\tau,\xi)$ décroît très rapidement pour $|\xi| \to +\infty$. En utilisant le Lemme 1.7, d'après (1.60) on obtient

$$\|\hat{w}(t,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon\,\|\hat{w}_0(\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} + \epsilon\left\|\frac{\hat{w}_1(\cdot)}{|\xi|}\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \mathrm{d}\tau \left\|\frac{\hat{F}(\tau,\cdot)}{|\xi|}\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.61)$$

En désignant $c_n = (2\pi)^{n/2}$, nous déduisons de l'identité de Plancharel que

$$\|\hat{w}(t,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} = c_n\|w(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\leq L\})} \quad (1.62)$$

et

$$\|\hat{w}_0(\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} = c_n\|w_0(\cdot)\|_{L^2(\{|x|\leq L\})} < +\infty. \quad (1.63)$$

De manière analogue, puisque w_1 est régulière et à support compact, la fonction $\hat{w_1}$ décroît rapidement pour $|\xi| \to +\infty$. En utilisant (1.58) et la propriété

$$\nabla_\xi \hat{F}(\tau,\xi) = -i\,(\widehat{xF})(\tau,\xi),$$

nous déduisons qu'il existe des constantes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ positives telles que

$$\left\|\frac{\hat{w}_1(\cdot)}{|\xi|}\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} \leq c_1\,\|\nabla_\xi \hat{w}_1(\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} = c_2\|(\widehat{xw_1})(\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} = c_3\|xw_1(\cdot)\|_{L^2(\{|x|\leq L\})}$$

$$\leq c_4\|x\|_{L^\infty(\{|x|\leq L\})}\,\|w_1\|_{L^2(\{|x|\leq L\})} < +\infty$$

et

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \left\|\frac{\hat{F}(\tau,\cdot)}{|\xi|}\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)} \leq c_5 \int_0^t \mathrm{d}\tau\,\|\nabla_\xi \hat{F}(\tau,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)}$$

$$= c_6 \int_0^t \mathrm{d}\tau\,\||\cdot|\,F(\tau,\cdot)\|_{L^2(\{x\leq L+\tau\})}.$$

D'après (1.61)-(1.62)-(1.63), nous obtenons

$$\|w(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L\})} \le c_1\epsilon + c_2 \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \||\cdot|F(\tau,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L+\tau\})}.$$

Cela acheve la preuve de la Proposition 1.3. ■

La proposition suivante permet d'étendre ce résultat au cas général des dérivées d'ordre supérieur.

Proposition 1.4 *Soit $z \in \Im$ et supposons que $u(t,x)$ est la solution locale du problème de Cauchy (1.1)-(1.2). Alors, pour $t \in [0,T]$, il existe deux constantes $c_0, c_1 > 0$ telles que*

$$\sum_{0\le|\alpha|\le s} \|z^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L+t\})} \le c_0 \sum_{0\le|\alpha|\le s} \|z^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L\})} \tag{1.64}$$

$$+c_1 \sum_{0\le|\alpha|\le s} \int_0^t \mathrm{d}\tau\,(L+\tau)\|z^\alpha F(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot))\|_{L^2(\{|x|\le L+\tau\})}.$$

Preuve. Fixons $0 \le |\alpha| \le s$. D'après (1.51), nous savons que $z^\alpha u(t,x)$ est la solution locale du problème de Cauchy

$$(\partial_{tt} - \Delta)\, z^\alpha u(t,x) = \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} c^\alpha_\beta z^\beta F(t,x,\nabla_{t,x}u(t,x)) \tag{1.65}$$

avec données initiales $(z^\alpha u)(0,x)$ et $(z^\alpha \partial_t u)(0,x)$. Grâce à la Proposition 1.3, il existe deux constantes c_2 et c_3 positives telles que

$$\|z^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L+t\})} \le c_2\|z^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L\})}$$

$$+c_3 \int_0^t \mathrm{d}\tau \left\| x \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} z^\beta F(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot)) \right\|_{L^2(\{|x|\le L+\tau\})}.$$

En utilisant le principe de Huygens, on peut déterminer d'autres constantes c_4 et c_5 telles que

$$\|z^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L+t\})} \le c_2\|z^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L\})}$$

$$+c_4 \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \|x\|_{L^\infty(\{|x|\le L+\tau\})} \left\| \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} z^\beta F(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot)) \right\|_{L^2(\{|x|\le L+\tau\})}$$

$$\le c_2\|z^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L\})}$$

$$+c_5 \int_0^t \mathrm{d}\tau\, (L+\tau) \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} \left\| z^\beta F(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot)) \right\|_{L^2(\{|x|\le L+\tau\})}.$$

En tenant compte que $0 \le |\alpha| \le s$, nous obtenons

$$\sum_{0\le|\alpha|\le s} \|z^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L+t\})} \le c_0 \sum_{0\le|\alpha|\le s} \|z^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L\})}$$

$$+c_1 \sum_{0\le|\alpha|\le s} \int_0^t \mathrm{d}\tau\, (L+\tau) \|z^\alpha F(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot))\|_{L^2(\{|x|\le L+\tau\})},$$

où c_1 et c_2 désignent deux constantes positives convenables.

La proposition 1.4 est prouvée. ■

Considérons l'inégalité (1.64). Les hypothèses sur les données initiales du problème (1.1)-(1.2) impliquent que

$$\sum_{0\le|\alpha|\le s} \|z^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L\})} \simeq \epsilon.$$

Pour établir une estimation du terme non-linéaire, nous notons

$$F^\alpha(\tau,x,\nabla_{t,x}u) = z^\alpha < \left(\lambda g + \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a}\right) \nabla_{t,x}u(\tau,x)\, , \nabla_{t,x}u(\tau,x) >,$$

où $0 \le |\alpha| \le s$ et $\tau \in [0,t]$. Nous prouvons qu'il existe des constantes $c_1(|\lambda|)$, $c_2(|\lambda|)$, $c_3(|\lambda|)$ et c_4 telles que

$$\|F^\alpha(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot))\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \tag{1.66}$$

$$\le \frac{c_1(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|z^{\alpha_1+1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_2(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\partial_\tau z^{\alpha_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\partial_\tau z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_3(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\nabla_x z^{\alpha_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_x z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_4}{(1+\tau)^a} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)},$$

où on suppose $0 \leq |\alpha_2| \leq \frac{|\alpha|}{2}$ (cf. 1.36).

Preuve de l'inégalité (1.66). Posons

$$F^\alpha(\tau, x, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x)) = F_1^\alpha(\tau, x, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x)) + F_2^\alpha(\tau, x, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x)),$$

où

$$F_1^\alpha(\tau, x, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x)) = z^\alpha < \lambda g \nabla_{\tau,x} u(\tau,x)\,, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x) >$$

et

$$F_2^\alpha(\tau, x, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x)) = z^\alpha < \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} \nabla_{\tau,x} u(\tau,x)\,, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x) >,$$

Estimation de $F_1^\alpha(\tau, x, \nabla u)$. Nous savons que (cf. section 1.4)

$$|F_1^\alpha(\tau, x, \nabla_{\tau,x} u(\tau,x))|$$

$$\leq c_1(|\lambda|) \sum_{0 \leq |\alpha_1|+|\alpha_2| \leq |\alpha|} | < g\, \nabla_{\tau,x} z^{\alpha_1} u(\tau,x), \nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau,x) > |$$

$$\leq \frac{c_2(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0 \leq |\alpha_1|+|\alpha_2| \leq |\alpha|} (|z^{\alpha_1+1} u(\tau,x)||\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau,x)| + |\partial_\tau z^{\alpha_1} u(\tau,x)||\partial_\tau z^{\alpha_2} u(\tau,x)|)$$

$$+\frac{c_3(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0 \leq |\alpha_1|+|\alpha_2| \leq |\alpha|} |\nabla_x z^{\alpha_1} u(\tau,x)||\nabla_x z^{\alpha_2} u(\tau,x)|,$$

où $c_1(|\lambda|), c_2(|\lambda|), c_3(|\lambda|) > 0$ sont des constantes. Par conséquent,

$$\|F_1^\alpha(\tau, \cdot, \nabla_{\tau,x} u(\tau,\cdot))\|_{L^2(|x| \leq L+\tau)} \tag{1.67}$$

$$\leq \frac{c_1(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0 \leq |\alpha_1|+|\alpha_2| \leq |\alpha|} \|z^{\alpha_1+1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x| \leq L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x| \leq L+\tau)}$$

$$+\frac{c_2(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0 \leq |\alpha_1|+|\alpha_2| \leq |\alpha|} \|\partial_\tau z^{\alpha_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x| \leq L+\tau)} \|\partial_\tau z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x| \leq L+\tau)}$$

$$+\frac{c_3(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0 \leq |\alpha_1|+|\alpha_2| \leq |\alpha|} \|\nabla_x z^{\alpha_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x| \leq L+\tau)} \|\nabla_x z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x| \leq L+\tau)},$$

où $0 \leq |\alpha_2| \leq \frac{|\alpha|}{2}$ et $c_1(|\lambda|), c_2(|\lambda|), c_3(|\lambda|)$ sont de nouvelles constantes.

Estimation de $F_2^\alpha(\tau, x, \nabla u)$. Considérons d'abord le cas $|\alpha| = 0$, c'est-à-dire le terme

$$F_2(\tau, x, \nabla_{\tau,x} u(\tau, \cdot)) =< \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} \nabla_{\tau,x} u(\tau, x) \, , \nabla_{\tau,x} u(\tau, x) > .$$

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|F_2(\tau, \cdot, \nabla_{\tau,x} u(\tau, \cdot))\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)}$$

$$\leq \frac{c}{(1+\tau)^a} \|\nabla_{\tau,x} u(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} u(\tau, \cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)}.$$

Supposons ensuite $0 < |\alpha| \leq s$. En utilisant la règle de Leibnitz et l'idéntité (1.34), on déduit qu'il existe des constantes $b^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ et $c^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ telles que

$$F_2^\alpha(\tau, \cdot, \nabla_{\tau,x} u(\tau, x))$$

$$= z^\alpha < \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} \nabla_{\tau,x} u(\tau, x) \, , \nabla_{\tau,x} u(\tau, x) >$$

$$= \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|=|\alpha|} b^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} z^{\alpha_1} \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} z^{\alpha_2} \nabla_{\tau,x} u(\tau, x) z^{\alpha_3} \nabla_{\tau,x} u(\tau, x)$$

$$= \sum_{0\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\leq|\alpha|} c^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} z^{\alpha_1} \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} \nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau, x) \nabla_{\tau,x} z^{\alpha_3} u(\tau, x).$$

Suite au Lemme 1.6, nous déduisons que, pour chaque $0 < |\alpha| \leq s$ fixé, il existe une constante $c = c(a, \alpha)$ telle que

$$\|F_2^\alpha(\tau, \cdot, \nabla_{\tau,x} u(\tau, \cdot))\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \tag{1.68}$$

$$= \left\| z^\alpha < \frac{1}{(1+\tau+|x|)^a} \nabla_{\tau,x} u(\tau, x) \, , \nabla_{\tau,x} u(\tau, x) > \right\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)}$$

$$\leq \frac{c}{(1+\tau)^a} \sum_{0\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|\leq|\alpha|} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_1} u(\tau, \cdot)\|_{L^2(|x|\leq L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(|x|\leq L+\tau)},$$

où $0 \leq |\alpha_2| \leq \frac{|\alpha|}{2}$.

Si on rassemble les estimations (1.67) et (1.68) on déduit que, pour chaque $0 \leq |\alpha| \leq s$ fixé, il existe des constantes $c_1(|\lambda|), c_2(|\lambda|), c_3(|\lambda|), c_4$ positives telles que

$$\|F^\alpha(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot))\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \tag{1.69}$$

$$\le \|F_1^\alpha(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot))\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} + \|F_2^\alpha(\tau,\cdot,\nabla_{\tau,x}u(\tau,\cdot))\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}$$

$$\le \frac{c_1(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|z^{\alpha_1+1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\nabla_{\tau,x}z^{\alpha_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_2(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\partial_\tau z^{\alpha_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\partial_\tau z^{\alpha_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_3(|\lambda|)}{1+\tau} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\nabla_x z^{\alpha_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\nabla_x z^{\alpha_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+\frac{c_4}{(1+t)^a} \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)},$$

pour $\tau\in[0,t]$ et $0\le|\alpha_2|\le\frac{|\alpha|}{2}$. ■

On a ainsi prouvé la proposition suivant.

Proposition 1.5 *Soit $u(t,x)$ une solution locale du problème (1.1)-(1.2) et supposons que $0\le|\alpha|\le s$. Alors, pour $t\in[0,T]$, il existe des constantes $c_1, c_2(|\lambda|)$, $c_3(|\lambda|), c_4(|\lambda|), c_5$, positives telles que*

$$\sum_{0\le|\alpha|\le s}\|z^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\{|x|\le L+t\})}\le c_1\epsilon \tag{1.70}$$

$$+c_2(|\lambda|)\sum_{0\le|\alpha|\le s}\int_0^t \mathrm{d}\tau\frac{L+\tau}{1+\tau}$$

$$\times \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|z^{\alpha_1+1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\nabla_{\tau,x}z^{\alpha_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+c_3(|\lambda|)\sum_{0\le|\alpha|\le s}\int_0^t \mathrm{d}\tau\frac{L+\tau}{1+\tau}$$

$$\times \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\partial_\tau z^{\alpha_1}u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}\|\partial_\tau z^{\alpha_2}u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+c_4(|\lambda|) \sum_{0\le|\alpha|\le s} \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{L+\tau}{1+\tau}$$

$$\times \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\nabla_x z^{\alpha_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_x z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)}$$

$$+c_5 \sum_{0\le|\alpha|\le s} \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{L+\tau}{(1+t)^a}$$

$$\times \sum_{0\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\le|\alpha|} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_1} u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)} \|\nabla_{\tau,x} z^{\alpha_2} u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)},$$

où $0 \le |\alpha_2| \le \frac{|\alpha|}{2}$. ∎

1.8 Existence globale

Dans les sections précédentes on a établi des estimations convenables pour la solution locale du problème (1.1)-(1.2) en termes de la norme d'énergie et des inégalités de Von Wahl. Pour completer la preuve du théorème 1.1, nous introduisons les normes

$$\Lambda(u,t,s) = \sup_{0\le\tau\le t} (1+\tau)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{0\le|\alpha|\le 1+\left[\frac{s}{2}\right]} \|z^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+\tau)} \tag{1.71}$$

et

$$\Theta(u,t,s) = \sup_{0\le\tau\le t} \sum_{0\le|\alpha|\le s+1} \|z^\alpha u(\tau,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+\tau)}, \tag{1.72}$$

où $t \in [0,T]$. Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 1.8 *Supposons $n > 3$ et $0 < t \le +\infty$. Alors il existe une constante $c = c(n)$ telle que*

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}} \le \frac{c}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{1.73}$$

Preuve. Notons

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}} = I_1(t) + I_2(t),$$

où

$$I_1(t) = \int_0^{t/2} \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}$$

et

$$I_2(t) = \int_{t/2}^{t} \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Il existe des constantes $c_0, c_1, c_2, c_3 > 0$, qui dépendent de la dimension n, telles que

$$I_1(t) \leq \left\{ \max_{\tau\in[0,t/2]} \frac{1}{(1+t-\tau)^{(n-1)/2}} \right\} \int_0^{t/2} \mathrm{d}\tau \, \frac{1}{(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{t}{2})^{(n-1)/2}} \left(\frac{2}{n-3} - \frac{2}{(n-3)(1+\frac{t}{2})^{\frac{n-3}{2}}} \right)$$

$$\leq \frac{c_0}{(1+\frac{t}{2})^{(n-1)/2}} \leq \frac{c_1}{(1+t)^{(n-1)/2}}$$

et

$$I_2(t) \leq \left\{ \max_{\tau\in[t/2,t]} \frac{1}{(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}} \right\} \int_{t/2}^{t} \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+t-\tau)^{(n-1)/2}}$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{t}{2})^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{2}{n-3} - \frac{2}{(n-3)(1+\frac{t}{2})^{\frac{n-3}{2}}} \right)$$

$$\leq \frac{c_2}{(1+\frac{t}{2})^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{c_3}{(1+t)^{(n-1)/2}}.$$

Le lemme 1.8 est prouvé. ■

On va écrire les estimations (1.53) et (1.70) en utilisant la notation (1.71)-(1.72). Dans ce qui suit, $c_i(|\lambda|)$ représentent des constantes qui dépendent de λ.

L'inégalité (1.53) prend la forme

$$\frac{\Lambda(u,t,s)}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{c_1\epsilon}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{1.74}$$

$$+c_2(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s) \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}(1+\tau)(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$+c_3(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s) \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}(1+\tau)^a(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

En désignant

$$I(\Theta(u,t,s),\Lambda(u,t,s),n)$$

$$= c_2(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}(1+\tau)(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$+c_3(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}(1+\tau)^a(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}},$$

on voit que

$$I(\Theta(u,t,s),\Lambda(u,t,s),n)$$

$$\leq c_4(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{1}{1+\tau}+\frac{1}{(1+\tau)^a}\right)$$

$$\leq c_5(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\max_{0\leq\tau\leq t}\left(\frac{1}{1+\tau}+\frac{1}{(1+\tau)^a}\right)$$

$$\times\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$\leq c_6(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{1}{(1+(t-\tau))^{(n-1)/2}(1+\tau)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

$$\leq \frac{c_7(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Dans la dernière inégalité on a utilisé le lemme 1.8. Par conséquent,

$$\frac{\Lambda(u,t,s)}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{c_1\epsilon}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{c_6(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{1.75}$$

et, de manière équivalente,

$$\Lambda(u,t,s) \leq c\epsilon + c(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s). \tag{1.76}$$

De manière similaire, l'inégalité (1.70) prend la forme

$$\Theta(u,t,s) \leq c_0\epsilon + c_1\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\int_0^t \mathrm{d}\tau(1+\tau)^{\frac{1-n}{2}}\frac{L+\tau}{(1+\tau)} \tag{1.77}$$

$$+c_2\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\int_0^t \mathrm{d}\tau(1+\tau)^{\frac{1-n}{2}}\frac{L+\tau}{(1+\tau)^a}$$

$$\leq c_0\epsilon + c_3\,\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s)\int_0^t \mathrm{d}\tau\left((1+\tau)^{\frac{1-n}{2}}+(1+\tau)^{\frac{1-n}{2}+1-a}\right).$$

D'autre part, en tenant compte que $n>3$ et $a\geq 1$, l'intégrale

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau\left((1+\tau)^{\frac{1-n}{2}}+(1+\tau)^{\frac{1-n}{2}+1-a}\right)$$

converge pour $t\to+\infty$. Cela permettra d'appliquer le principe de prolongement des solutions des équations différentielles.

Par (1.77) on déduit qu'il existe deux constantes c et $c(n)$ positives telles que

$$\Theta(u,t,s)\leq c\epsilon + c(n)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s). \tag{1.78}$$

D'après (1.76) et (1.78) on voit que

$$\begin{cases}\Lambda(u,t,s)\leq c\epsilon + c(|\lambda|)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s),\\ \Theta(u,t,s)\leq c\epsilon + c(n)\Theta(u,t,s)\Lambda(u,t,s),\end{cases} \tag{1.79}$$

pour $t\in[0,T]$. En définissant le vecteur

$$\Upsilon(u,t,s)=(\Theta(u,t,s),\Lambda(u,t,s))$$

et la norme

$$\|\Upsilon(u,t,s)\|=\sqrt{\Theta^2(u,t,s)+\Lambda^2(u,t,s)},$$

le systeme (1.79) prend la forme

$$\|\Upsilon(u,t,s)\|\leq c_0\epsilon + c(n,|\lambda|)\|\Upsilon(u,t,s)\|^2, \tag{1.80}$$

où c_0 et $c(n,|\lambda|)$ sont des constantes convenables et $t\in[0,T]$. Le lemme suivant montre que l'énergie généralisée et la norme uniforme de la solution locale $u(t,x)$ du problème (1.1)-(1.2) sont bornées supérieurement par des termes d'odre ϵ.

Lemme 1.9 *Supposons que (1.80) est satisfaite. Alors il existe un paramètre réel suffisamment petit*

$$\epsilon_0=\epsilon_0(\|u_0(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},\|u_1(\cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)},n,|\lambda|)>0$$

et une constante $c=c(n,\lambda)>\frac{2}{3}c_0$*, uniforme par rapport à* T*, tels que*

$$\|\Upsilon(u,t,s)\|<c\epsilon \tag{1.81}$$

pour tous $\epsilon\in]0,\epsilon_0[$ *et* $t\in[0,T]$.

Preuve. On prouve le lemme 1.9 par l'absurde. Notons $c = 2c_1$ et supposons qu'il existe $t_1 \in [0, T]$ tel que

$$\|\Upsilon(u,t,s)\| < 2c_1\epsilon \qquad \forall\, 0 \le t < t_1 \qquad \text{et} \qquad \|\Upsilon(u,t_1,s)\| = 2c_1\epsilon. \tag{1.82}$$

D'après (1.80) on obtient

$$\|\Upsilon(u,t,s)\| < c_0\epsilon + c(n,|\lambda|)(2c_1\epsilon)^2, \tag{1.83}$$

pour chaque $0 \le t < t_1$. Observons que l'inégalité

$$c_0\epsilon + c(n,|\lambda|)(2c_1\epsilon)^2 < \frac{3}{2}c_1\epsilon$$

a lieu pour tout

$$0 < \epsilon < \frac{3c_1 - 2c_0}{8c(n,|\lambda|)c_1^2}.$$

Par suite, en désignant $\epsilon_0 = \frac{3c_1-2c_0}{8c(n,|\lambda|)c_1^2} > 0$, nous obtenons

$$\|\Upsilon(u,t,s)\| < \frac{3}{2}c_1\epsilon, \tag{1.84}$$

pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $0 \le t < t_1$. La continuité de $\|\Upsilon(u,t,s)\|$ permet de déduire que

$$\|\Upsilon(u,t_1,s)\| \le \frac{3}{2}c_1\epsilon, \tag{1.85}$$

pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Cela contradit (1.82).

Puisque t_1 est arbitraire, l'inégalité (1.81) est valable pour tout $t \in [0, T]$. ∎

Par conséquent, d'après (1.81) nous obtenons

$$\Theta(u,t,s) \le c\epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \|u(t,\cdot)\|_{L^2(|x|\le L+t)} \le c\epsilon$$

et

$$\Lambda(u,t,s) \le c\epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(|x|\le L+t)} \le \frac{c\epsilon}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}},$$

pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $t \in [0, T]$.

Nous nous proposons finallement de montrer que la solution $u(t,x)$ du problème (1.1)-(1.2) existe pour tout $t \in [0, +\infty[$. Pour cela, on utilise le principe de prolongement des solutions des équations différentielles.

Lemme 1.10 *Soient ϵ_0 et c les mêmes paramètres que dans le lemme 1.9 et, pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$, notons*

$$T_1 = \max\{\tau \in \mathbb{R}^+ : u(t,x) \text{ existe et } \|\Upsilon(u,t,s)\| < c\epsilon \text{ pour tout } 0 \leq t \leq \tau\}. \tag{1.86}$$

Alors $T_1 = +\infty$.

PREUVE. Nous supposons, par l'absurde, que $T_1 < +\infty$. Considérons alors l'intervalle $[T_1 - \delta, T_1 + \delta]$, où $\delta > 0$ est suffisamment petit. Comme on déduit de (1.86), le problème de Cauchy pour l'équation (1.1) avec données initiales $u(T_1, x)$ et $(\partial_t u)(T_1, x)$ admet une solution unique dans l'intervalle $[T_1 - \delta, T_1 + \delta]$. De manière analogue à ce qu'on a fait dans la preuve du lemme 1.9, nous déduisons que

$$\|\Upsilon(u,t,s)\| < c\epsilon,$$

pour tous $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $t \in [0, T_1 + \delta]$. Encore une fois, ϵ_0 et c sont les mêmes que dans le lemme 1.9. En fait, comme l'inégalité (1.81) montre, le paramètre ϵ_0 et la constante c ne dépendent que des données initiales u_0 et u_1 et, par conséquent, ils sont uniformes par rapport à $T_1 + \delta$.

D'autre part, la méthode de contraction (cf. [67], [98])) assure que, dans l'intervalle $[T_1 - \delta, T_1]$, la solution du problème avec donnée initiales $u(T_1, x)$ et $(\partial_t u)(T_1, x)$ concide avec celle de la définition (1.86).

Par conséquent, la solution $u(t,x)$ du problème (1.1)-(1.2) est prolongeable à droite de T_1, ce qui contradit l'hypothèse $T_1 < \infty$. ∎

Le Théorème 1.1 est prouvé.

Chapitre 2

Problème de Cauchy pour l'Equation de Kirchhoff non-linéaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions le problème de Cauchy

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta_x u(t,x) = 0, \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x), \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x), \qquad \epsilon > 0, \tag{2.2}$$

où $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n > 3$ et ϵ est un paramètre réel suffisamment petit.

Le noyau $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ représente une fonction régulière, positive et rapidement décroissante à l'infini avec toutes ses dérivées. Plus précisement, en utilisant la notation

$$\nabla_z^\gamma K(z) = \partial_{z_1}^{\gamma_1} \cdots \partial_{z_n}^{\gamma_n} K(z),$$

nous supposons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\max_{0 \le |\gamma| \le s} |\nabla_z^\gamma K(z)| \le \frac{c}{(1+|z|)^N}, \tag{2.3}$$

pour $|z| \to +\infty$, $N > n$ et $s \ge 2\left[\frac{n}{2}\right] + 6$ (cf. Théorème 2.1).

L'équation (2.1) représente un cas particulier du modèle

$$\partial_{tt}u(t,x) - m\left(\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta u(t,x) = 0, \tag{2.4}$$

où $m \in C^1(\mathbb{R}_+)$ (cf. [4], [13], [23], [24], [21], [22], [30], [31], [32], [52], [82], [84]).

Les premieres résultats sur l'équation (2.4) sont dûs à S. Bernstein (cf. [4]), en dimensions $n = 1$. En supposant $m(r) = 1 + r$, Bernstein a prouvé qu'une solution globale ou locale existe si, respectivement, on prend les données initiales réelles analytiques ou dans un espace de Sobolev convenable. Ce type de problème a été développé par Carrier (cf. [13]) et, plus tard, par Narishima (cf. [82]), Dickey (cf. [30], [31], [32]) et Nishida (cf. [84]), qui ont étudié des modèles mathématiques non-linéaires qui décrivent, du point de vue physique, les vibrations transversales des cordes de longueur finie et infinie. En suivant l'approche de Dickey (cf. [32]), J.M.Greenberg et S.C.Hu (cf. [52]) ont étudié le problème de Cauchy

$$\begin{aligned}
\partial_{tt} u(t,x) - \left(1 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\partial_x u(t,x)|^2\right) \partial_{xx} u(t,x) &= 0, \qquad \lambda > 0, \qquad (2.5)\\
u(0,x) &= u_0(x),\\
(\partial_t u)(0,x) &= u_1(x),
\end{aligned}$$

en dimension $n = 1$ et avec données initiales $u_0 \in C^3(\mathbb{R})$ et $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$ telles que

$$(1 + x^2)|\nabla_x u_0(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad (1 + x^2)|u_1(x)| < +\infty.$$

On prouve (cf. [52]) que le problème (2.5) admet une solution globale si les données initiales sont suffisamment petites ou, de manière équivalente, si le paramètre λ est proche de zéro. Dans ce dernier cas on observe que, pour $\lambda \to 0$,

$$\left(1 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\partial_x u(t,x)|^2\right) \simeq 1$$

et le modèle (2.5) représente une approximation, dans un sense convenable, de l'équation des ondes linéaire.

D'Ancona et Spagnolo (cf. [24]) ont étudié le problème de Cauchy pour l'équation

$$\partial_{tt} u(t,x) - m\left(\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta u(t,x) = 0, \tag{2.6}$$

en supposant la fonction m de classe C^1 dans un voisinage à droite de l'origine, $m(0) > 0$ et les données initiales

$$u(0,x) = u_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = u_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

L'approche de D'Ancona et Spagnolo (cf. [24]) consiste à construire une fonctionnelle H convenable, qui dépend de la fonction m et de la norme de Sobolev des données initiales, et à prouver que la solution du problème (2.6)-(2.7) existe globalement d'autant que H est suffisamment petit. Plus précisement, la fonctionnelle est définie de la façon suivante

$$H(m, u_0, u_1) = \nu_0 \frac{\|m'(\cdot)\|_{L^\infty(0,\nu_0)}}{m(0)}, \tag{2.8}$$

où

$$\nu_0 = 256c_n \left(\sum_{i=1}^{n} N(\partial_i u_0) + \frac{N(u_1)}{m(0)} \right), \quad N(f) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \sum_{|\beta|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} dx \, \left|x^\alpha \nabla_x^\beta f(x)\right|^2$$

et c_n est une constante convenable. Le problème (2.6)-(2.7) admet une solution globale pourvu que

$$H(m, u_0, u_1) < \frac{1}{2}, \tag{2.9}$$

c'est-à-dire quand les données initiales sont suffisamment petites par rapport à la norme $N(f)$ ou, de manière équivalente, quand $m(r)$ est proche de la constante $m(0)$, pour $r \in (0, \nu_0)$.

Écrivons l'équation (2.1) sous la forme

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + \left(K \star |\nabla u|^2\right)(t,x)\right) \Delta_x u(t,x) = 0, \tag{2.10}$$

où $\star$ représente la convolution par rapport aux variables spatiales. Par suite, on peut considérer (2.10) comme une interpolation entre l'équation de Kirchoff (cf. [65])

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta u(t,x) = 0 \tag{2.11}$$

et l'équation quasi-linéaire

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + |\nabla_x u(t,x)|^2\right) \Delta u(t,x) = 0, \tag{2.12}$$

obtenues d'après (2.10) en choisissant, respectivement, $K \equiv 1$ et $K = \delta$, étant donné δ la distribution de Dirac.

Nous nous intéressons au cas des données initiales petites. D'autre part, si aucune restriction n'est faite sur la taille des données initiales, l'existence des solutions de classe C^∞ pour les équations proches du modèle de Kirchhoff est un problème ouvert.

D'Ancona et Spagnolo (cf. [23]) ont étudié le problème de Cauchy pour l'équation non-linéaire

$$\partial_{tt}u(t,x) - \left(1 + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \Delta u(t,x) = F(u(t,x), \partial_t u(t,x), \nabla_x u(t,x)) \tag{2.13}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x), \tag{2.14}$$

où $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $n \geq 2$. La fonction F est de classe C^∞ et il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1|s|^{\lambda+1} \leq |F(s)| \leq c_2|s|^{\lambda+1}$$

dans un voisinage de $s = 0$, où $s = (u, \partial_t u, \nabla_x u)$.

On démontre (cf. [23]) que le problème (2.13)-(2.14) admet une solution globale

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$$

pourvu que $\lambda > \lambda_0(n)$ et $0 < \epsilon < \epsilon_0$, où $\epsilon_0 = \epsilon_0(u_0, u_1, F)$ est suffisamment petit.

Du point de vue physique les équations (2.1) et (2.11) permettent une meilleure description que l'équation classique des ondes. On utilise ces modèles mathématiques pour décrire les vibrations des membranes elatiques quand la vitesse de propagation $m(r)$ de la perturbation $u(t, x)$ est variable.

En particulier, on voit que la fonction m dépend de façon continue de l'énergie de déformation

$$\eta(u; t) = \|\nabla_x u(t, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

et que l'approximation est du premier ordre ($m(r) = 1 + r$) dans l'équation de Kirchhoff (2.11) et d'ordre 0 ($m(r) \equiv 1$) dans l'équation linéaire $\partial_{tt} u - \Delta_x u = 0$.

Notre but est de prouver le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Supposons* $s \geq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 6$, $n > 3$ [1]. *Alors il existe*

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(\|u_0(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \|u_1(x)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}, n) > 0$$

suffisamment petit, tel que, pour chaque $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *le problème (2.1)-(2.2) admet une solution unique globale*

$$u \in \bigcap_{j=0,\cdots,s} C^j([0, +\infty[; H^{s-j}(\mathbb{R}^n)).$$

Nous présentons brièvement la structure du chapitre 2. Nous exhibons d'abord les propriétés de décroissance de la solution locale $u(t, x)$ en utilisant les inégalités classiques d'énergie (cf. sections 2.2-2.3). La difficulté principale lorsque on établi ces estimations est due à la présence du terme variable

$$v(t, x, K, \nabla_x u) = 1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x - y)\, |\nabla_y u(t, y)|^2.$$

Notre approche consiste à remplaçer le cône caractéristique de l'équation linéaire des ondes par un ensemble de forme plus général (cf. Section 2.2). On combine ensuite les inégalités d'énergie avec les estimations $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ de Von Wahl (cf. section 2.4). L'application de la méthode de contraction et du principe de prolongement des solutions des équations différentielles permet de completer la preuve du Théorème 2.1.

[1] La technique que nous utilisons ne permet pas d'obtenir le résultat analogue du Théorème 2.1 en dimension $n \leq 3$ (cf. Section 2.5).

Dans ce qui suit, pour simplicité, nous désignons $\partial_x^\alpha u$ et $\partial_t u$, respectivement, par $u^{(\alpha)}$ et u_t.

2.2 Résultats préliminaires

Considérons le problème (2.1)-(2.2) et supposons, sans perte de généralité, que

$$\mathrm{supp}(u_0) \cup \mathrm{supp}(u_1) \subseteq B(0, L).$$

Grâce à la régularité des données initiales, le théorème de Cauchy-Kovalevskaja permet de déduire que la solution $u(t,x)$ du problème (2.1)-(2.2) existe localement dans l'intervalle $[0,T]$, $T = T(\epsilon) > 0$.

Nous nous proposons d'établir une estimation d'énergie convenable pour cette solution. Pour cela, nous rappelons la méthode classique utilisée pour l'équation des ondes.

Soit $\tilde{u}(t,x)$ la solution de l'équation linéaire

$$\partial_{tt}\tilde{u}(t,x) - \Delta_x \tilde{u}(t,x) = 0 \tag{2.15}$$

et supposons que les données initiales soient regulières et que

$$\mathrm{supp}(\tilde{u}(0,x)) \cup \mathrm{supp}((\partial_t \tilde{u})(0,x)) \subseteq B(0,R).$$

L'inégalité d'énergie pour $\tilde{u}(t,x)$ découle aisément d'une intégration convenable de l'équation (2.15) dans le cône caractéristique

$$\Gamma(T) = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n : |x| \le R - t\}.$$

Dans l'équation (2.1) la vitesse de propagation $v(t,x,K,\nabla_x u)$ est variable. Par conséquent, notre idée est de remplacer le cône $\Gamma(T)$ par l'ensemble

$$\Omega(T) = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n : |x| \le L - D(T)t\}, \tag{2.16}$$

où

$$D(T) = \max\left\{ \sqrt{\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right)} : t \in [0,T], |y| \le L \right\}. \tag{2.17}$$

On introduit ensuite l'énergie associée à la solution locale $u(t,x)$ du problème (2.1)-(2.2)

$$E(u,t) = \tag{2.18}$$

$$\int_{|x| \le L - D(T)t} \mathrm{d}x \left(\frac{|u_t(t,x)|^2}{2} + \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2} \right)$$

et l'énergie associée aux dérivées d'ordre supérieur

$$E_{(\alpha)}(u,t) = \tag{2.19}$$

$$\int_{|x|\leq L-D(T)t} \mathrm{d}x \left(\frac{\left|u_t^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2} + \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{\left|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2} \right),$$

pour $|\alpha| > 0$. On va démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Supposons que $u(t,x)$ est la solution locale du problème (2.1)-(2.2). Alors*

$$E(u,T) \leq E(u,0) \tag{2.20}$$

$$-\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \left(\nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) u_t(t,x) \nabla_x u(t,x)$$

$$+\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \left(\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2}.$$

Preuve. *Pas 1. Définition du cône caractéristique.* Considérons l'ensemble

$$\Omega_\gamma(T) = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n : |x| \leq L - \gamma(t,x)\}, \tag{2.21}$$

où

$$\gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, positive et telle que

$$\gamma(0,x) = 0, \qquad \gamma(T,x) = D(T)\, T \tag{2.22}$$

et

$$\gamma_t(t,x) > 0 \qquad \text{pour} \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.23}$$

Si on multiplie l'équation (2.1) par $u_t(t,x)$ et on intègre dans le domaine $\Omega_\gamma(T)$, nous obtenons

$$\int_{\Omega_\gamma(T)} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\, u_t(t,x) \left(u_{tt}(t,x) - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta u(t,x)\right) = 0.$$

Après une intègration par partie, la dernière identité prend la forme

$$\int_{\Omega_\gamma(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \;\left[\partial_t\left(\frac{|u_t(t,x)|^2}{2}+\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2}\right)\right] \tag{2.24}$$

$$-\int_{\Omega_\gamma(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\;div\left[\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)u_t(t,x)\nabla_x u(t,x)\right]$$

$$+\int_{\Omega_\gamma(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\;\left(\nabla_x\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)u_t(t,x)\nabla_x u(t,x)$$

$$-\int_{\Omega_\gamma(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\;\left(\partial_t\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2}=0,$$

où $div(f(x))=\sum_{i=1,\dots,n}\partial_{x_i}f(x)$ représente l'opérateur de divergence.

Pas 2. Application du théorème de la divergence. Soit

$$\Gamma_\gamma(T)=\{(t,x)\in]0,T[\times\mathbb{R}^n:|x|=L-\gamma(t,x)\}$$

la surface latérale de $\Omega_\gamma(T)$, et, pour $(t,x)\in\Gamma_\gamma(T)$, notons

$$\nu(t,x)=(\nu_t(t,x),\nu_x(t,x))= \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma_t(t,x)|^2+\left|\frac{x}{|x|}+\nabla_x\gamma(t,x)\right|^2}}\left(\gamma_t(t,x),\,\frac{x}{|x|}+\nabla_x\gamma(t,x)\right)$$

la normale unitaire orientée vers l'extérieur de $\Gamma_\gamma(T)$.

De (2.22) nous déduisons que les surfaces de base inférieure ($t=0$) et supérieure ($t=T$) du cône $\Omega_\gamma(T)$ sont de la forme

$$B_{inf}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le L\}$$

et

$$B_{sup}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le L-D(T)\,T\}.$$

Les normales unitaires orientées vers l'extérieur de B_{inf} et B_{sup} sont, respectivement, $(-1,0,\cdots,0)$ et $(1,0,\cdots,0)$. En appliquant le théorème de la divergence, l'intégrale

$$J=\int_{\Omega_\gamma(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\;\left[\partial_t\left(\frac{|u_t(t,x)|^2}{2}+\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2}\right)\right]$$

$$-\int_{\Omega_\gamma(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\ div\left[\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\left|\nabla_y u(t,y)\right|^2\right)u_t(t,x)\nabla_x u(t,x)\right]$$

peut être écrit comme la somme des trois intégrales

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

où

$$J_1 = -\int_{|x|\le L}\mathrm{d}x\left(\frac{|u_t(0,x)|^2}{2}+\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\left|\nabla_y u(0,y)\right|^2\right)\frac{|\nabla_x u(0,x)|^2}{2}\right),$$

$$J_2 = \int_{|x|\le L-D(T)\,T}\mathrm{d}x\left(\frac{|u_t(T,x)|^2}{2}+\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\left|\nabla_y u(T,y)\right|^2\right)\frac{|\nabla_x u(T,x)|^2}{2}\right)$$

et

$$J_3 = \int_{\Gamma_\gamma(T)}\mathrm{d}\sigma_{t,x}\left(\frac{|u_t(t,x)|^2}{2}+\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\left|\nabla_y u(t,y)\right|^2\right)\frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2}\right)\cdot\nu_t(t,x)$$

$$-\int_{\Gamma_\gamma(T)}\mathrm{d}\sigma_{t,x}\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\left|\nabla_y u(t,y)\right|^2\right)u_t(t,x)\nabla_x u(t,x)\cdot\nu_x(t,x).$$

En rappelant (2.18), on voit que J_1 et J_2 désignent, respectivement, l'énergie aux temps $t=0$ et $t=T$.

Pas 3. J_3 est positif. Nous prouvons que $J_3 \ge 0$. Pour cela, il suffit de montrer que le terme

$$J_{31} = \left(\frac{|u_t(t,x)|^2}{2}+\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\left|\nabla_y u(t,y)\right|^2\right)\frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2}\right)\cdot\nu_t(t,x)$$

$$-\left(1+\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(x-y)\left|\nabla_y u(t,y)\right|^2\right)u_t(t,x)\nabla_x u(t,x)\cdot\nu_x(t,x)$$

est positif, pour $(t,x)\in\Gamma_\gamma(T)$. En rappelant (2.25), nous posons

$$\phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{|\gamma_t(t,x)|^2+\left|\frac{x}{|x|}+\nabla_x\gamma(t,x)\right|^2}},$$

$$A(\gamma) = \frac{\gamma_t(t,x)}{2}, \qquad B(\gamma, K, \nabla u) = \frac{\gamma_t(t,x)\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \,\mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right)}{2} \tag{2.26}$$

et

$$C(\gamma, K, \nabla u) = \frac{\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \,\mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right)\left(\frac{x}{|x|} + \nabla_x \gamma(t,x)\right)}{2},$$

de telle façon que

$$J_{31} = \phi(\gamma) \times$$

$$\left(A(\gamma)|u_t(t,x)|^2 + B(\gamma, K, \nabla u)|\nabla_x u(t,x)|^2 - 2C(\gamma, K, \nabla u) u_t(t,x) \nabla_x u(t,x)\right).$$

D'abord, on voit que $\phi(\gamma) > 0$. Il reste alors à chosir la fonction $\gamma(t,x)$ de telle façon que

$$A(\gamma)|u_t(t,x)|^2 + B(\gamma, K, \nabla u)|\nabla_x u(t,x)|^2 - 2C(\gamma, K, \nabla u) u_t(t,x) \nabla_x u(t,x) > 0.$$

Cette dernière condition est, en effet, satisfaite si on choisit $\gamma(t,x)$ telle que

$$C(\gamma, K, \nabla u) \leq \sqrt{A(\gamma)} \sqrt{B(\gamma, K, \nabla u)}. \tag{2.27}$$

Pour cela, posons

$$\beta(t,x) = |x| + \gamma(t,x), \tag{2.28}$$

pour $(t,x) \in \Gamma_\gamma(T)$. L'inégalité (2.27) peut être écrite, de manière équivalente, sous la forme

$$\left|\left(\frac{x}{|x|} + \nabla_x \gamma(t,x)\right)\right| \leq \frac{|\gamma_t(t,x)|}{\sqrt{\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \,\mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right)}}. \tag{2.29}$$

Puisque

$$\beta_t(t,x) = \gamma_t(t,x) \qquad \text{et} \qquad \nabla_x \beta(t,x) = \frac{x}{|x|} + \nabla_x \gamma(t,x),$$

en remplaçant γ par β, l'inégalité (2.29) prend la forme

$$|\nabla_x \beta(t,x)| \leq \frac{\beta_t(t,x)}{\sqrt{\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \,\mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right)}}.$$

Sans perte de généralité, on peut étudier l'équation éiconale correspondante

$$|\nabla_x \beta(t,x)| = \frac{\beta_t(t,x)}{\sqrt{\left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} \,\mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right)}}. \tag{2.30}$$

Une solution de cette équation est de la forme

$$\beta(t,x) = |x| + D(T)\, t. \tag{2.31}$$

Par suite, d'après (2.28), on obtient $\gamma(t,x) = D(T)\, t$. On voit alors que $\Omega_\gamma(T)$ et $\Gamma_\gamma(T)$ coïncident, respectivement, avec $\Omega(T)$ et $\Gamma(T)$ (cf. (2.21)) et que

$$A(\gamma) > 0 \qquad \text{et} \qquad B(\gamma, K, \nabla u) > 0,$$

pour $(t,x) \in \Gamma(T)$ (cf. (2.26)). D'après (2.27), nous obtenons

$$C^2(\gamma, K, \nabla u) \leq A(\gamma) B(\gamma, K, \nabla u), \tag{2.32}$$

et, par conséquent,

$$A(\gamma)|u_t(t,x)|^2 + B(\gamma, K, \nabla u)|\nabla_x u(t,x)|^2 - 2C(\gamma, K, \nabla u) u_t(t,x) \nabla_x u(t,x)$$

$$\geq \left(\sqrt{A(\gamma)}u_t(t,x) - \sqrt{B(\gamma, K, \nabla u)}\nabla_x u(t,x)\right)^2 \geq 0.$$

Cela montre que $J_{31} \geq 0$. On en déduit que J_3 est positive.

En utilisant (2.18), on voit que $J_1 = -E(u,0)$ et $J_2 = E(u,T)$. La positivité de J_3 implique que

$$E(u,T) - E(u,0) + \int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \left(\nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) u_t(t,x) \nabla_x u(t,x)$$

$$- \int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \left(\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{|\nabla_x u(t,x)|^2}{2} \leq 0.$$

La proposition 2.1 est prouvée. ∎

2.3 Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur

On se propose d'étendre l'estimation d'énergie aux dérivées d'ordre supérieur $\partial_x^\alpha u(t,x)$, pour $|\alpha| > 0$. On prouve la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Supposons que $u(t,x)$ est la solution locale du problème (2.1)-(2.2). Alors*

$$E_{(\alpha)}(u,T) \leq E_{(\alpha)}(u,0) \tag{2.33}$$

$$+\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \, \left(\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{\left|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2}$$

$$-\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \, \left(\nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) u_t^{(\alpha)}(t,x)\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)$$

$$+\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|} c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2} u_t^{(\alpha)}(t,x) \left(\partial_x^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta\, u^{(\alpha_2)}(t,x),$$

pour tout $0 < |\alpha| \leq s$. *On suppose ici* $1 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha|, 0 \leq |\alpha_2| \leq |\alpha| - 1$ *et* $c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2}$ *des constantes convenables.*

Preuve. Fixons $0 < |\alpha| \leq s$. En utilisant la règle de Leibnitz, l'identité

$$\partial_x^{\alpha}\left(u_{tt}(t,x) - \left[1 + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\right] \Delta u(t,x)\right) = 0$$

prend la forme

$$u_{tt}^{(\alpha)}(t,x) - \left[1 + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\right] \Delta\, u^{(\alpha)}(t,x) \tag{2.34}$$

$$= \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|} c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2} \left(\partial_x^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta u^{(\alpha_2)}(t,x),$$

où $c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2}$ sont des constantes, $1 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha|$ et $0 \leq |\alpha_2| \leq |\alpha| - 1$. Si on multiplie l'équation (2.34) par $u_t^{(\alpha)}(t,x)$ et on intègre dans le domaine $\Omega(T)$, on déduit que

$$\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \; u_t^{(\alpha)}(t,x) u_{tt}^{(\alpha)}(t,x) \tag{2.35}$$

$$-\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \; u_t^{(\alpha)}(t,x) \left[1 + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\right] \Delta\, u^{(\alpha)}(t,x)$$

$$= \int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|} c^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2} u_t^{(\alpha)}(t,x) \left(\partial_x^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta u^{(\alpha_2)}(t,x).$$

Cette identité prend la forme

$$\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \,\left[\partial_t \left(\frac{\left|u_t^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2} + \left(1+\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{\left|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2}\right)\right]$$

$$-\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\ div\left[\left(1+\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) u_t^{(\alpha)}(t,x)\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)\right]$$

$$+\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\, \left(\nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) u_t^{(\alpha)}(t,x)\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)$$

$$-\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\, \left(\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{\left|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2}$$

$$= \int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|} C^{\alpha}_{\alpha_1,\alpha_2} u_t^{(\alpha)}(t,x)\, \left(\partial_x^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \Delta\, u^{(\alpha_2)}(t,x).$$

De manière similaire à ce qu'on a fait dans la section 2.2, nous appliquons le théorème de la divergence au terme

$$J_1^{(\alpha)} =$$

$$\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \,\left[\partial_t \left(\frac{\left|u_t^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2} + \left(1+\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) \frac{\left|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)\right|^2}{2}\right)\right]$$

$$-\int_{\Omega(T)} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\ div\left[\left(1+\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right) u_t^{(\alpha)}(t,x)\nabla_x u^{(\alpha)}(t,x)\right]$$

et rappelons (2.19). La preuve de la proposition 2.2 découle aisément. ∎

2.4 Estimations de Von Wahl

En suivant la méthode utilisée dans le chapitre 1, on se propose d'établir des estimations $L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ convenables pour la solution locale du problème (2.1)-(2.2). Pour cela, nous reprenons les inégalités de Von Wahl présentées dans la section 1.2.

Définissons, d'abord, la norme

$$\Sigma_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T) = \tag{2.36}$$

$$\sup_{(t,x)\in\Omega(T)\,,\,0\leq|\beta|\leq\left[\frac{s}{2}\right]+1}\left\{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}\left|\partial_x^\beta u(t,x)\right|,\,(1+t)^{\frac{n-1}{2}}\left|\partial_t\partial_x^\beta u(t,x)\right|\right\}$$

et considérons le lemme suivant.

Lemme 2.1 *Soit $r\geq 0$ un entier et notons*

$$C_0^r(\mathbb{R}^n)=\{h\in C^r(\mathbb{R}^n):\quad \mathrm{supp}(h)\quad \text{est}\quad \text{compact}\quad \text{dans}\quad \mathbb{R}^n\}.$$

Supposons $f\in C_0^r(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$ et $1\leq p\leq+\infty$. Alors, il existe une constante $c=c(p,n)>0$ telle que

$$\|f\star g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq c\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

où $f\star g$ désigne le produit de convolution. De plus,

$$(f\star g)\in C^r(\mathbb{R}^n)\qquad \text{et}\qquad (\partial_x^j(f\star g))(x)=((\partial_x^j f)\star g)(x),$$

pour tout $0\leq|j|\leq r$. ■

Dans ce qui suit, nous utiliserons le résultat suivant.

Lemme 2.2 *Supposons $n>3$ et $0<T\leq+\infty$. Alors il existe une constante $c=c(n)$ telle que*

$$\int_0^T \mathrm{d}t\frac{1}{(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}(1+t)^{n-1}}\leq\frac{c}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{2.37}$$

Preuve. De manière similaire à la preuve du lemme 1.8 (cf. Chapitre 1), nous posons

$$\int_0^T \mathrm{d}t\frac{1}{(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}(1+t)^{n-1}}=I_1(T)+I_2(T),$$

où

$$I_1(T)=\int_0^{T/2}\mathrm{d}t\frac{1}{(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}(1+t)^{n-1}}$$

et

$$I_2(T)=\int_{T/2}^T\mathrm{d}t\frac{1}{(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}(1+t)^{n-1}}.$$

Il existe des constantes $c_0(n),c_1(n),c$ positives telles que

$$I_1(T)\leq\left\{\max_{\tau\in[0,T/2]}\frac{1}{(1+T-t)^{(n-1)/2}}\right\}\int_0^{T/2}\mathrm{d}t\,\frac{1}{(1+t)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{T}{2})^{(n-1)/2}} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{(n-2)(1+\frac{T}{2})^{n-2}} \right)$$

$$\leq \frac{c_0(n)}{(1+\frac{T}{2})^{(n-1)/2}} \leq \frac{c}{(1+T)^{(n-1)/2}}$$

et

$$I_2(T) \leq \left\{ \max_{t\in[T/2,T]} \frac{1}{(1+t)^{n-1}} \right\} \int_{T/2}^{T} \mathrm{d}t \frac{1}{(1+T-t)^{(n-1)/2}}$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{T}{2})^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{2}{n-3} - \frac{2}{(n-3)(1+\frac{T}{2})^{\frac{n-3}{2}}} \right)$$

$$\leq \frac{c_1(n)}{(1+\frac{T}{2})^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{c}{(1+T)^{(n-1)/2}}.$$

Le lemme 2.2 est prouvé. ■

On a la proposition suivante.

Proposition 2.3 *Supposons que $u(t,x)$ est la solution locale du problème (2.1)-(2.2). Alors il existe deux constantes $c_0, c_1 > 0$ telles que*

$$\Sigma_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T) \leq c_0\epsilon + c_1 \Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T) \sup_{t\in]0,T[} \left\{ \|u(t,\cdot)\|_{H^{[\frac{s}{2}]+[\frac{n}{2}]+3}(\mathbb{R}^n)} \right\}. \tag{2.38}$$

Preuve. On peut écrire l'équation (2.1) sous la forme

$$\partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right) \Delta_x u(t,x). \tag{2.39}$$

Les estimations de Von Wahl (cf. Section 1.2) donnent

$$\|u(T,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_0 \frac{\|\epsilon u_0(\cdot)\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n)} + \|\epsilon u_1(\cdot)\|_{H^{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{R}^n)}}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{2.40}$$

$$+c_1 \int_0^T \mathrm{d}t\, \frac{\left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(\cdot - y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right) \Delta_x u(t,\cdot) \right\|_{H^{[\frac{n}{2}]}(\mathbb{R}^n)}}{(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}},$$

où c_0 et c_1 sont des constantes.

On va étendre ce résultat aux dérivées d'ordre supérieur. Plus précisement, soit $0 < |\beta| \leq \left[\frac{s}{2}\right] + 1$ et considérons l'équation

$$\partial_x^\beta(\partial_{tt}u(t,x) - \Delta_x u(t,x)) = \partial_x^\beta \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right) \Delta_x u(t,x) \right]. \tag{2.41}$$

En utilisant la notation $u^{(\beta)}$ à la place de $\partial_x^\beta u$, par (2.41) nous obtenons

$$u_{tt}^{(\beta)}(t,x) - \Delta_x u^{(\beta)}(t,x) = \partial_x^\beta \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right) \Delta_x u(t,x) \right]. \tag{2.42}$$

Les données initiales prennent la forme

$$\partial_x^\beta u(0,x) = \epsilon\, \partial_x^\beta u_0(x), \qquad (\partial_x^\beta \partial_t u)(0,x) = \epsilon\, \partial_x^\beta u_1(x). \tag{2.43}$$

Grâce à la règle de Leibnitz, il existe des constantes $c^\beta_{\beta_1,\beta_2}$ telles que

$$\partial_x^\beta \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right) \Delta_x u(t,x) \right]$$

$$= \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} c^\beta_{\beta_1,\beta_2} \left(\partial_x^{\beta_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right) \Delta_x u^{(\beta_2)}(t,x),$$

où $0 \le |\beta_1| \le |\beta|$ et $0 \le |\beta_2| \le |\beta|$. Les estimations de Von Wahl, appliquées au problème (2.42)-(2.43), donnent

$$\|u^{(\beta)}(T,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le c_{0,\beta} \frac{\|\epsilon u_0(\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+|\beta|}(\mathbb{R}^n)} + \|\epsilon u_1(\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+|\beta|}(\mathbb{R}^n)}}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{2.44}$$

$$+ c_{1,\beta} \int_0^T \mathrm{d}t\, \frac{\left\| \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|=|\beta|} \left(\partial_x^{\beta_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(\cdot - y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right) \Delta_x u^{(\beta_2)}(t,\cdot) \right\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbb{R}^n)}}{(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}},$$

où $c_{0,\beta}$ et $c_{1,\beta}$ sont des constantes convenables.

Suite au Lemme 2.1, nous déduisons que

$$\partial_x^{\beta_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, K(x-y)\, |\nabla_y u(t,y)|^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\, \left(\partial_x^{\beta_1} K(x-y) \right) |\nabla_y u(t,y)|^2 \right). \tag{2.45}$$

D'autre part, la condition (2.3) assure que, pour chaque $0 \le |\beta_1| \le |\beta|$, il existe une constante $c_{\beta_1} < +\infty$ telle que

$$\|\partial_z^{\beta_1} K(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le c_{\beta_1} < +\infty. \tag{2.46}$$

En utilisant encore une fois le Lemma 2.1, nous obtenons

$$\left\|\left(\partial_x^{\beta_1}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(\cdot-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\Delta_x u^{(\beta_2)}(t,\cdot)\right\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq c_0\left\|\partial_x^{\beta_1}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\,K(\cdot-y)\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left\|\Delta_x u^{(\beta_2)}(t,\cdot)\right\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq c_1\left\|\partial_x^{\beta_1}K(\cdot)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left\|\Delta_x u^{(\beta_2)}(t,\cdot)\right\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq c_2\frac{\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)}{(1+t)^{n-1}}\|u(t,\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+|\beta_2|+2}(\mathbb{R}^n)},$$

où $c_0 = c_0(n), c_1 = c_1(n,\beta_1)$ et $c_3 = c_3(n,\beta_1,\beta_2)$ sont des constantes convenables. On déduit que, pour chaque β fixé, il existe des constantes $c_{0,\beta}$ et $c_{1,\beta}$ telles que

$$\|u^{(\beta)}(T,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_{0,\beta}\frac{\|\epsilon u_0(\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+|\beta|}(\mathbb{R}^n)}+\|\epsilon u_1(\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+|\beta|}(\mathbb{R}^n)}}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$+c_{1,\beta}\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)\int_0^T\mathrm{d}t\,\frac{\sum_{0\leq|\beta_2|\leq|\beta|}\|u(t,\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+|\beta_2|+2}(\mathbb{R}^n)}}{(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}(1+t)^{n-1}}.$$

En tenant compte de la taille et de la régularité des données initiales, on voit que

$$\|u(0,\cdot)\|_{H^{\left[\frac{s}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\mathbb{R}^n)} < c\epsilon \qquad \text{et} \qquad \|(\partial_t u)(0,\cdot)\|_{H^{\left[\frac{s}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\mathbb{R}^n)} < c\epsilon.$$

Par conséquent, puisque $0\leq|\beta|\leq\left[\frac{s}{2}\right]+1$, on obtient

$$\sum_{0\leq|\beta|\leq\left[\frac{s}{2}\right]+1}\|u^{(\beta)}(T,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_0\epsilon}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{2.47}$$

$$+c_1\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)\int_0^T\mathrm{d}t\sum_{0\leq|\beta_2|\leq\left[\frac{s}{2}\right]+1}\frac{\|u(t,\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+|\beta_2|+2}(\mathbb{R}^n)}}{(1+t)^{n-1}(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$\leq \frac{c_0\epsilon}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$+c_1\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)\left(\sup_{t\in[0,T[}\|u(t,\cdot)\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{s}{2}\right]+3}(\mathbb{R}^n)}\right)\int_0^T\mathrm{d}t\,\frac{1}{(1+t)^{n-1}(1+T-t)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

En utilisant (2.37), l'inégalité (2.47) prend la forme

$$\sum_{0\le|\beta|\le\left[\frac{s}{2}\right]+1} \|u^{(\beta)}(T,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \frac{c_0\epsilon}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{2.48}$$

$$+c_1\frac{\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)}{(1+T)^{\frac{n-1}{2}}}\left(\sup_{t\in[0,T[}\|u(t,\cdot)\|_{H^{\left[\frac{s}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

La proposition 2.3 est prouvée. ■.

En tenant compte de (2.19), l'inégalité (2.48) prend la forme

$$\Sigma_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T) \le c_0\epsilon + c_1(n,s)\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)\sup_{t\in[0,T[}\left\{\sqrt{E_{(\left[\frac{s}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+3)}(u,t)}\right\}. \tag{2.49}$$

2.5 Existence globale

Rappelons, maintenant, les estimations d'énergie (2.20) et (2.33). En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous déduisons qu'il existe des constantes $c^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2}$ telles que

$$E_{(\alpha)}(u,T) \le E_{(\alpha)}(u,0) \tag{2.50}$$

$$+\int_0^T \mathrm{d}t \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\,(\nabla_x K(\cdot-y))\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right\|_{L^\infty} \|u_t^{(\alpha)}(t,\cdot)\|_{L^2}\|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,\cdot)\|_{L^2}$$

$$+\int_0^T \mathrm{d}t \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\,K(\cdot-y)\,\partial_t\left(|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\right\|_{L^\infty} \|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,\cdot)\|_{L^2}\frac{\|\nabla_x u^{(\alpha)}(t,\cdot)\|_{L^2}}{2}$$

$$+\sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha|} c^\alpha_{\alpha_1,\alpha_2}\int_0^T \mathrm{d}t \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\,(\partial_x^{\alpha_1}K(\cdot-y))\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right\|_{L^\infty} \|u_t^\alpha(t,\cdot)\|_{L^2}\frac{\|\Delta u^{\alpha_2}(t,\cdot)\|_{L^2}}{2},$$

où $1\le|\alpha_1|\le|\alpha|, 0\le|\alpha_2|\le|\alpha|-1$ et $0\le|\alpha|\le s$. D'autre part, on voit que

$$|\partial_t\,|\nabla_y u(t,y)|^2| \le 2|\nabla_y u(t,y)||\partial_t\,\nabla_y u(t,y)| \le 2\frac{\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)}{(1+t)^{n-1}}$$

et qu'il existe des constantes c et c_{α_1} telles que

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\,(\nabla_x K(\cdot-y))\,|\nabla_y u(t,y)|^2\right\|_{L^\infty} + \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\,K(\cdot-y)\,\partial_t\left(|\nabla_y u(t,y)|^2\right)\right\|_{L^\infty}$$

$$\leq c \, \frac{\Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T)}{(1+t)^{n-1}}$$

et

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \, (\partial_x^{\alpha_1} K(\cdot - y)) \, |\nabla_y u(t,y)|^2 \right\|_{L^\infty} \leq c_{\alpha_1} \, \frac{\Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T)}{(1+t)^{n-1}}.$$

Dans ces estimations on a utilisé la condition (2.3). En remplaçant ces résultats dans (2.50), nous obtenons

$$E_{(\alpha)}(u,T) \leq E_{(\alpha)}(u,0) + c_\alpha \, \Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T) \int_0^T \mathrm{d}t \, \frac{E_{(\alpha)}(u,t)}{(1+t)^{n-1}}, \tag{2.51}$$

pour tout $0 \leq |\alpha| \leq s$. Sans perte de généralité, à la place de $E_{(\alpha)}(u,T)$ on va considérer la fonction monotone (par rapport à t)

$$\hat{E}_{(\alpha)}(u,T) = \sup_{t \in [0,T]} E_{(\alpha)}(u,t).$$

De (2.51) on obtient

$$\hat{E}_{(\alpha)}(u,T) \leq \hat{E}_{(\alpha)}(u,0) + c_\alpha \, \hat{E}_{(\alpha)}(u,T) \Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T) \int_0^T \mathrm{d}t \, \frac{1}{(1+t)^{n-1}}. \tag{2.52}$$

En tenant compte que $n > 3$, il existe une constante $c = c(n) < +\infty$ telle que

$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^T \mathrm{d}t \, \frac{1}{(1+t)^{n-1}} = c$$

et, par (2.52), nous déduisons qu'il existe des constantes c_0 et $c_1 = c_1(n,s)$ telles que

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \hat{E}_{(\alpha)}(u,T) \leq c_0 \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \hat{E}_{(\alpha)}(u,0) + c_1 \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \hat{E}_{(\alpha)}(u,T) \right) \Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T). \tag{2.53}$$

On avance de manière similaire à ce qu'on a fait dans le chapitre 1. Notons

$$\eta(u,t,s) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \hat{E}_{(\alpha)}(u,t)$$

et, d'après (2.38), considérons le système d'inégalités suivant

$$\begin{aligned} \Sigma_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T) &\leq \epsilon + c_1(n,s) \, \Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T) \sqrt{\hat{E}_{([\frac{s}{2}]+[\frac{n}{2}]+3)}(u,T)} \\ \eta(u,T,s) &\leq \eta(u,0,s) + c_2(n,s) \, \eta(u,T,s) \, \Sigma^2_{[\frac{s}{2}]+1}(u,T). \end{aligned} \tag{2.54}$$

En tenant compte de la taille des données initiales on voit que $\eta(u,0,s) \simeq \epsilon^2$. D'autre part, l'hypothèse $s \geq 2\left[\frac{n}{2}\right]+6$ (cf. Théorème 2.1) assure que

$$s \geq \left[\frac{s}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + 3.$$

Le systeme (2.54) prend alors la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T) &\leq \epsilon + c_1(n,s)\,\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T)\sqrt{\eta(u,T,s)} \\ \eta(u,T,s) &\leq \epsilon^2 + c_2(s,n)\eta(u,T,s)\Sigma^2_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T). \end{aligned} \tag{2.55}$$

En désignant

$$\theta(u;T;s) = \eta(u,T,s) + \Sigma_{\left[\frac{s}{2}\right]+1}(u,T),$$

d'après (2.55) on voit qu'il existe une constante $c = c(n,s) > 0$ telle que

$$\theta(u;T;s) \leq c\left(\epsilon + \epsilon^2 + \theta(u;T;s)^{\frac{5}{2}} + \theta(u;T;s)^3\right). \tag{2.56}$$

En suivant l'approche utilisé dans la preuve du lemme 1.9, on peut déterminer une constante $c_1 = c_1(s,n,K) > c$, uniforme par rapport à T, et un paramètre

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(\|u_0(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \|u_1(x)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}, n, K, s) > 0,$$

suffisamment petit, tels que

$$\theta(u;t;s) < c_1\epsilon,$$

pour $\epsilon \in]0,\epsilon_0[$ et $t \in [0,T]$. Par analogie avec ce qu'on a établi dans le chapitre 1 (cf. Lemme 1.10), le principe de prolongement des solutions des équations différentielles permet de prouver que la solution du problème (2.1)-(2.2) existe globalement. La méthode de contraction (cf. [67], [98]) assure l'unicité de cette solution. Le théorème 2.1 est prouvé.

Chapitre 3

Equation de Klein-Gordon avec masse m(ϵ) qui tend vers zéro.

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au problème de Cauchy pour l'équation non-linéaire

$$(\partial_{tt} - \Delta_x + m(\epsilon)^2)\, u(t,x) = u^2(t,x) + g(u(t,x)), \tag{3.1}$$

où

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} m(\epsilon) = 0$$

et les données initiales sont de la forme

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x). \tag{3.2}$$

Ici $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\epsilon > 0$ est un paramètre réel suffisamment petit et on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|g(s)| \leq c|s|^3$ dans un voisinage de $s = 0$.

L'équation (3.1) représente un cas particulier de l'équation classique de Klein Gordon

$$(\partial_{tt} - \Delta_x + m^2)\, u(t,x) = F(u(t,x), \partial_t u(t,x), \nabla_x u(t,x)), \qquad m > 0, \tag{3.3}$$

qui joue un rôle très important dans la mécanique relativiste, en particulier pour ce qui concerne l'analyse de l'action des champs électromagnétiques et la description des phénomènes liés aux particules de spin zéro.

Du point de vue physique, le paramètre m dans (3.3) représente la masse associée au champ $u(t,x)$. Dans l'équation (3.1), nous nous proposons d'étudier le cas limite quand m décroît vers 0. Nous posons

$$m(\epsilon) = \epsilon^{\frac{\sigma}{2}},$$

où σ est un paramètre réel positif (cf. Théorème 3.1). On établi ainsi une liaison entre la masse et la taille ϵ des données initiales. Le problème (3.1)-(3.2) prend la forme

$$(\partial_{tt} - \Delta_x + \epsilon^\sigma)\, u(t,x) = u^2(t,x) + g(u(t,x)), \tag{3.4}$$

avec données initiales

$$u(0,x) = \epsilon\, u_0(x) \qquad \text{et} \qquad (\partial_t u)(0,x) = \epsilon\, u_1(x). \tag{3.5}$$

En tenant compte de la régularité des fonctions u_0 et u_1, le théorème de Cauchy-Kovalevskaja permet de déduire que la solution du problème (3.4)-(3.5) existe localement dans un intervalle $[0,T]$, $T = T(\epsilon) > 0$, $\epsilon > 0$ fixé.

Notre but est d'étudier la régularité et les propriétés de décroissance de la solution $u(t,x)$ du problème (3.4)-(3.5) quand $\epsilon \to 0$. Remarquons que la dépendance de m rend impossible une application directe des estimations $L^\infty(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ (section 3.4) et des inégalités d'énergie (section 3.5). Pour surmonter cette difficulté, notre idée est de travailler avec les variables

$$\tau(t) = \epsilon^\beta t, \qquad \xi(x) = \epsilon^\beta x, \tag{3.6}$$

où $\beta = \frac{\sigma}{2}$. On pose alors

$$\tilde{u}(\tau(t), \xi(x)) = u(t,x), \tag{3.7}$$

de telle façon que

$$\partial_t u(t,x) = \partial_\tau \tilde{u}(\tau,\xi)\, \epsilon^\beta, \qquad \partial_x u(t,x) = \partial_\xi \tilde{u}(\tau,\xi)\, \epsilon^\beta \tag{3.8}$$

et le problème (3.4)-(3.5) prend la forme

$$\epsilon^{2\beta}\partial_{\tau\tau}\tilde{u}(\tau,\xi) - \epsilon^{2\beta}\Delta_\xi \tilde{u}(\tau,\xi) + \epsilon^\sigma \tilde{u}(\tau,\xi) = \tilde{u}^2(\tau,\xi) + g(\tilde{u}(\tau,\xi)), \tag{3.9}$$
$$\tilde{u}(0,\xi) = \epsilon\, \tilde{u}_0(\xi), \qquad (\partial_\tau \tilde{u})(0,\xi) = \frac{\epsilon}{\epsilon^\beta}\, \tilde{u}_1(\xi),$$

où $\tilde{u}_0(\xi) = u_0(\frac{\xi}{\epsilon^\beta})$ et $\tilde{u}_1(\xi) = u_1(\frac{\xi}{\epsilon^\beta})$. Étant donné que $\beta = \frac{\sigma}{2}$, nous obtenons

$$\partial_{\tau\tau}\tilde{u}(\tau,\xi) - \Delta_\xi \tilde{u}(\tau,\xi) + \tilde{u}(\tau,\xi) = \frac{\tilde{u}^2(\tau,\xi)}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u}(\tau,\xi))}{\epsilon^{2\beta}}, \tag{3.10}$$

$$\tilde{u}(0,\xi) = \epsilon \tilde{u}_0(\xi), \qquad (\partial_\tau \tilde{u})(0,\xi) = \frac{\epsilon}{\epsilon^\beta}\tilde{u}_1(\xi). \tag{3.11}$$

Nous prouvons le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit* $k \geq 18$ *un entier et supposons que* $0 < \sigma = \sigma(k) < \frac{2}{k+10}$. *Alors, il existe*

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(k, \sigma(k), \|u_0\|_{H^{k+16}(\mathbb{R}^2)}, \|u_1\|_{H^{k+15}(\mathbb{R}^2)}) > 0,$$

suffisamment petit, tel que le problème (3.4)-(3.5) admet une solution unique et globale

$$u \in \bigcap_{j=0,\ldots,k+16} C^j([0,+\infty[, H^{k+16-j}(\mathbb{R}^2)), \tag{3.12}$$

pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Le Théorème 3.1 montre que σ dépend de k. La restriction $k \geq 18$ implique que $0 < \sigma(k) < \frac{1}{14}$. D'autre part, la solution est d'autant plus régulière que k est grand (cf. (3.12)) et on voit que

$$\lim_{k \to +\infty} \sigma(k) = 0.$$

De manière heuristique, on peut considérer l'équation (3.4) comme une interpolation entre le modèle de Klein-Gordon

$$(\partial_{tt} - \Delta_x + m^2)\, u(t,x) = u^2(t,x), \qquad m > 0, \tag{3.13}$$

et l'équation semi-linéaire des ondes

$$(\partial_{tt} - \Delta_x)\, u(t,x) = u^2(t,x), \tag{3.14}$$

correspondante au cas $m = 0$. Pour plus de détails en ce qui concerne le temps d'existence des solutions de (3.13) et (3.14) on envoie, respectivement, à [86] et [51].

Considérons, maintenant, l'équation

$$(\partial_{tt} - \Delta_x + m^2)\, u(t,x) = F(u(t,x), \nabla_{t,x} u(t,x), \nabla^2_{t,x} u(t,x)), \qquad m > 0 \tag{3.15}$$

où $F(u,v,w)$ est d'odre quadratique dans un voisinage de l'origin.

En dimension $n \geq 5$, Klainerman-Ponce (cf. [67]) et Shatah (cf. [99]) ont montré que l'équation (3.15) admet une solution globale si les données initiales sont suffisamment petites. Pour obtenir ce résultat, on utilise les inégalités classiques $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, qui permettent de montrer les propriétés de décroissance de la solution.

En utilisant les opérateurs du groupe de Poincaré et en supposant les données initiales petites, Klainerman (cf. [?]) a prouvé que la solution du problème (3.15) existe globalement en dimension $n = 3, 4$. Des estimations plus raffinées sont dues à Hörmander (cf. [55]), Sideris (cf. [104]) et Georgiev (cf. [36]), qui ont combiné la technique de Klainerman avec les estimations pour la solution fondamentale de l'équation linéaire de Klein-Gordon.

Les estimations $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ ne donnent pas des résultats optimaux quand la dimension spatiale n est petite ($n = 2, 3$). La difficulté principale est liée à la présence des termes quadratiques dans la non-linéarité.

En appliquant des transformation convenables, Shatah (cf. [100]), en dimension $n = 3, 4$, et Simon (cf. [105]) ont prouvé que le problème (3.15) admet une solution globale si les données initiales sont petites. On utilise ces transformations pour supprimer les termes non-linéaires d'ordre quadratique.

En dimension $n = 2$ Georgiev-Popivanov (cf. [35]), Kosecki (cf. [74]) et Simon-Taffin (cf. [106]) ont prouvé que la solution de l'équation (3.15) existe globalement pourvu que la non-linéarité quadratique ait une forme spéciale et que les données initiales soient petites. L'approche de Georgiev-Popivanov (cf. [35]) et Kosecki (cf. [74]) consiste à combiner la méthode de Klainerman avec la technique de Shatah.

Ce résultat a été étendu au cas des non-linéarités quadratiques de forme générale par Ozawa-Tsutsumi-Tsutaya (cf. [86]), qui ont utilisé la méthode de Shatah et les estimations de Georgiev pour l'équation linéaire de Klein-Gordon.

Dans ce chapitre nous reprenons la *méthode des formes normales* (cf. [99], [100]) et considérons (cf. Section 3.2) la fonction

$$\tilde{v}(\tau, \xi) = \tilde{u}(\tau, \xi) - \left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau, \xi) - \left[\frac{\partial_\tau \tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau \tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau, \xi),$$

où $\tilde{u}(\tau, \xi)$ est la solution locale du problème (3.10)-(3.11), $B_i \in S'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $i = 1, 2$ (cf. Lemme 3.1), et

$$[f, B_i, g](\tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\eta \, d\zeta \, f(\tau, \eta) \, B_i(\xi - \eta, \xi - \zeta) \, f(\tau, \zeta) \tag{3.16}$$

est le produit de convolution au sens des distributions, étant donné[1] $f, g \in S(\mathbb{R}^2)$.

D'après (3.10), on obtient l'équation de Klein Gordon pour $\tilde{v}(\tau, \xi)$

$$(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\tilde{v}(\tau, \xi) = \frac{\tilde{u}^2(\tau, \xi)}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u}(\tau, \xi))}{\epsilon^{2\beta}} - (\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1) \left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau, \xi) \tag{3.17}$$

$$-(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1) \left[\frac{\partial_\tau \tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau \tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau, \xi).$$

En suivant l'approche de Ozawa, Tsutaya, Tsutsumi (cf. [86]), on supprime les termes quadratiques dans la non-linéarité de l'équation (3.17) (cf. Section 3.2). Cela permet de travailler avec des termes les plus décroissants possibles.

Les estimations $L^\infty(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ (cf. Section 3.4 et [36]) et les inégalités d'énergie (cf. Section 3.5) montrent que la solution locale du problème (3.4)-(3.5) est bornée et petite en termes de la norme uniforme et de la norme d'énergie. L'application du principe de prolongement des solutions des équations différentielles (cf. Lemme 1.10, Chapitre 1) permet de completer la preuve du Théorème 3.1.

[1] $S(\mathbb{R}^n)$ et $S'(\mathbb{R}^n)$ désignent, respectivement, l'espace de Schwartz et son espace dual.

3.2 Rappel de la méthode des formes normales

Nous rappelons brièvement la technique des formes normales introduite par Shatah (cf. [100]).

Soit $w(t,x)$ la solution locale du problème de Cauchy pour l'équation non-linéaire de Klein-Gordon

$$w_{tt}(t,x) - \Delta_x w(t,x) + w(t,x) = w^2(t,x), \tag{3.18}$$

avec données initiales

$$w(0,x) = \eta\, w_0(x), \qquad (\partial_t w)(0,x) = \eta\, w_1(x), \qquad \eta > 0.$$

Supposons que $(w_0, w_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et soit $\eta > 0$ un paramètre réel suffisamment petit.

En dimension $n = 2$ l'inégalité d'énergie donne

$$\|w(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0\eta + c_1 \left(\sup_{\tau \in [0,t]} \|w(\tau,\cdot)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} \right) \int_0^t d\tau \|w(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.19}$$

où $c_0, c_1 > 0$ sont des constantes convenables. En rappelant les estimations établies pour la solution linéaire de l'équation de Klein-Gordon, on voit que

$$\|w(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{(1+\tau)}, \qquad \text{pour} \quad \tau \to +\infty.$$

On déduit alors, de façon heuristique, que l'inégalité (3.19) ne donne aucune information en ce qui concerne le temps d'existence de la solution de (3.18), car

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t d\tau \frac{1}{(1+\tau)} = +\infty. \tag{3.20}$$

Pour surmonter ces difficultés, liées à la présence des termes quadratiques, on se propose d'augmenter l'ordre de la non-linéarité. En suivant la méthode des formes normales introduite par Shatah (cf. [100]), on cherche à obtenir des termes cubiques ou d'ordre supérieur qui décroissent plus vite.

Plus précisément, soit $\tilde{u}(\tau,\xi)$ la solution locale de l'équation (3.10) et considérons la transformation (cf. [86])

$$\tilde{v}(\tau,\xi) = \tilde{u}(\tau,\xi) - \left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta} \right](\tau,\xi) - \left[\frac{\partial_\tau \tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau \tilde{u}}{\epsilon^\beta} \right](\tau,\xi), \tag{3.21}$$

où $B_i \in S'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $i = 1,2$ (cf. Lemme 3.1), et $[\cdot,\cdot,\cdot]$ désigne le produit de convolution au sens des distributions (cf. (3.16)). Le problème de Cauchy pour la fonction $\tilde{v}(\tau,\xi)$ prend la forme

$$(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\tilde{v}(\tau,\xi) = \frac{\tilde{u}^2(\tau,\xi)}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u}(\tau,\xi))}{\epsilon^{2\beta}} - (\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) \tag{3.22}$$

$$-(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi),$$

avec comme données initiales

$$\tilde{v}(0,\xi) = \tilde{u}(0,\xi) - \left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](0,\xi) - \left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](0,\xi) \tag{3.23}$$

et

$$(\partial_t\tilde{v})(0,\xi) = (\partial_\tau\tilde{u})(0,\xi) - \left(\partial_\tau\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\xi) - \left(\partial_\tau\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\xi). \tag{3.24}$$

Développons les termes non-linéaires de (3.22) de la façon suivante

$$-(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) =$$

$$-\partial_{\tau\tau}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) + (\Delta_\xi - 1)\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

et

$$-(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) =$$

$$-\partial_{\tau\tau}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) + (\Delta_\xi - 1)\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi).$$

En rappelant que $\tilde{u}(\tau,\xi)$ est la solution de (3.10), nous déduisons que

$$-\partial_{\tau\tau}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) = -\partial_\tau\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - \partial_\tau\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

$$= -\left[\frac{\partial_{\tau\tau}\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - 2\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - \left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\partial_{\tau\tau}\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

$$= -\left[\frac{(\Delta - 1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - \left[\frac{\frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - 2\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

$$-\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - \left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

et

$$-\partial_{\tau\tau}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

$$= -\left[\frac{\partial_\tau(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - \left[\frac{\frac{\partial_\tau\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{\partial_\tau g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

$$-2\left[\frac{(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - 2\left[\frac{(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

$$-2\left[\frac{\frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - \left[\frac{\frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)$$

$$-\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) - \left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\frac{\partial_\tau\tilde{u}^2}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{\partial_\tau g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi).$$

On va écrire (3.22) sous la forme

$$(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\tilde{v}(\tau,\xi) = \frac{\tilde{u}^2(\tau,\xi)}{\epsilon^{2\beta}} + Q_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u}, \partial_\tau\Delta\tilde{u})(\tau,\xi) \tag{3.25}$$

$$+\frac{g(\tilde{u})(\tau,\xi)}{\epsilon^{2\beta}} + C_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u})(\tau,\xi) + R_{4,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u})(\tau,\xi)$$

$$+R_{5,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))(\tau,\xi) + R_{6,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))(\tau,\xi),$$

où

$$Q_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u}, \partial_\tau\Delta\tilde{u}) = \frac{(\Delta_\xi - 1)}{\epsilon^{2\beta}}\left([\tilde{u}, B_1, \tilde{u}]\right) \tag{3.26}$$

$$+\frac{(\Delta_\xi - 1)}{\epsilon^{2\beta}}\left([\partial_\tau\tilde{u}, B_2, \partial_\tau\tilde{u}]\right) - \frac{1}{\epsilon^{2\beta}}[(\Delta-1)\tilde{u}, B_1, \tilde{u}]$$

$$+\frac{1}{\epsilon^{2\beta}}\left(-2[\partial_\tau\tilde{u}, B_1, \partial_\tau\tilde{u}] - [\tilde{u}, B_1, (\Delta-1)\tilde{u}] - [(\Delta-1)\partial_\tau\tilde{u}, B_2, \partial_\tau\tilde{u}]\right)$$

$$+\frac{1}{\epsilon^{2\beta}}\left(-2[(\Delta-1)\tilde{u}, B_2, (\Delta-1)\tilde{u}] - [\partial_\tau\tilde{u}, B_2, (\Delta-1)\partial_\tau\tilde{u}]\right),$$

$$C_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau \tilde{u}, \Delta \tilde{u}) = \frac{1}{\epsilon^{4\beta}} \left(-[\tilde{u}^2, B_1, \tilde{u}] - [\tilde{u}, B_1, \tilde{u}^2] - 2[(\Delta - 1)\tilde{u}, B_2, \tilde{u}^2] \right)$$

$$+\frac{1}{\epsilon^{4\beta}} \left(-[\partial_\tau \tilde{u}^2, B_2, \partial_\tau \tilde{u}] - [\partial_\tau \tilde{u}, B_2, \partial_\tau \tilde{u}^2] - 2[\tilde{u}^2, B_2, (\Delta - 1)\tilde{u}] \right),$$

$$R_{4,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau \tilde{u}, \Delta \tilde{u}) = -\frac{1}{\epsilon^{6\beta}} [\tilde{u}^2, B_2, \tilde{u}^2]$$

$$+\frac{1}{\epsilon^{4\beta}} \left(-[g(\tilde{u}), B_1, \tilde{u}] - [\tilde{u}, B_1, g(\tilde{u})] - 2[(\Delta - 1)\tilde{u}, B_2, g(\tilde{u})] \right)$$

$$+\frac{1}{\epsilon^{4\beta}} \left(-[\partial_\tau g(\tilde{u}), B_2, \partial_\tau \tilde{u}] - [\partial_\tau \tilde{u}, B_2, \partial_\tau g(\tilde{u})] - 2[g(\tilde{u}), B_2, (\Delta - 1)\tilde{u}] \right),$$

$$R_{5,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u})) = \frac{1}{\epsilon^{6\beta}} \left(-[\tilde{u}^2, B_2, g(\tilde{u})] - [g(\tilde{u}), B_2, \tilde{u}^2] \right)$$

et

$$R_{6,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u})) = -\frac{1}{\epsilon^{6\beta}} [g(\tilde{u}), B_2, g(\tilde{u})].$$

On utilise maintenant le lemme suivant (cf. [86]).

Lemme 3.1 *Il est possible de choisir les distributions B_1 et B_2 de telle façon que*

$$\frac{\tilde{u}^2(\tau, \xi)}{\epsilon^{2\beta}} + Q_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau \tilde{u}, \Delta \tilde{u}, \partial_\tau \Delta \tilde{u})(\tau, \xi) = 0. \quad \blacksquare \tag{3.27}$$

Le Lemme 3.1 permet de supprimer les termes quadratiques dans l'équation (3.25), qui prend la forme

$$(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\tilde{v}(\tau, \xi) = \frac{g(\tilde{u})(\tau, \xi)}{\epsilon^{2\beta}} + C_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau \tilde{u}, \Delta \tilde{u})(\tau, \xi) \tag{3.28}$$

$$+R_{4,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau \tilde{u}, \Delta \tilde{u})(\tau, \xi) + R_{5,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))(\tau, \xi) + R_{6,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))(\tau, \xi),$$

avec données initiales (3.23) et (3.24). Pour plus de détails concernants le lemme 3.1 on envoie à [86].

3.3 Algèbre des opérateurs du groupe de Poincaré

Nous introduisons l'ensemble

$$\{\Gamma_i\}_{i=1,\cdots,6} \tag{3.29}$$

$$= \{\partial_\tau, \partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}, \Omega_{12} = \xi_1\partial_{\xi_2} - \xi_2\partial_{\xi_1}, L_1 = \xi_1\partial_\tau + \tau\partial_{\xi_1}, L_2 = \xi_2\partial_\tau + \tau\partial_{\xi_2}\}$$

des opérateurs du groupe de Poincaré sur $\mathbb{R}^2$ et notons

$$\Gamma^\alpha_{\tau,\xi} = \prod_{i=1,\cdots,6} \Gamma_i^{\alpha_i},$$

pour $|\alpha| = \sum_{i=1,\cdots,6} |\alpha_i|$.

En utilisant (3.6) et (3.7), on voit que le changement d'échelle de variable n'a aucun effet sur les opérateurs de rotation Ω_{12}, L_1, L_2, car

$$(x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1})u(t,x) = (\xi_1\partial_{\xi_2} - \xi_2\partial_{\xi_1})\tilde{u}(\tau,\xi), \tag{3.30}$$

$$(x_1\partial_t + t\partial_{x_1})u(t,x) = (\xi_1\partial_\tau + \tau\partial_{\xi_1})\tilde{u}(\tau,\xi) \tag{3.31}$$

et

$$(x_2\partial_t + t\partial_{x_2})u(t,x) = (\xi_2\partial_\tau + \tau\partial_{\xi_2})\tilde{u}(\tau,\xi). \tag{3.32}$$

Au contraire, les identités (3.8) montrent l'effet de nouvelles variables sur les dérivées partielles $\partial_t, \partial_{x_1}, \partial_{x_1}$.

Nous rappelons brièvement les propriétés suivantes

$$[\Omega_{12}, \partial_{\xi_i}] = (-1)^i\partial_{\xi_{3-i}}, \quad [\Omega_{12}, \partial_\tau] = 0, \quad [L_j, \partial_\tau] = -\partial_{\xi_j}, \quad [L_j, \partial_{\xi_i}] = -\delta_{ij}\partial_\tau, \tag{3.33}$$

où $[A,B] = A \circ B - B \circ A$ et δ_{ij} désignent les symboles de Kronecker, $i, j = 1, 2$. Pour plus de détails on envoie au Chapitre 1, Section 1.3.

Grâce à (3.33), nous pouvons utiliser la notation suivante

$$\Gamma^\eta_{\tau,\xi} = c^\eta_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6}\, {\partial_\tau}^{\eta_1}\, {\partial_{\xi_1}}^{\eta_2}\, {\partial_{\xi_3}}^{\eta_3}\, {\Omega_{12}}^{\eta_4}\, {L_1}^{\eta_5}\, {L_2}^{\eta_6}, \tag{3.34}$$

où $|\eta| = \sum_{i=1,\cdots,6} |\eta_i|$ et $c^\eta_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6}$ sont des constantes. Nous posons

$$\Gamma^{\alpha_1+\lambda_1}_{\tau,\xi} = \partial_\tau^{\eta_1}\, \partial_{\xi_1}^{\eta_2}\, \partial_{\xi_2}^{\eta_3},$$

pour $|\eta_1| + |\eta_2| + |\eta_3| = |\alpha_1| + |\lambda_1|$ et

$$\Gamma^{\alpha_2+\lambda_2}_{\tau,\xi} = \Omega_{12}^{\eta_4}\, L_1^{\eta_5}\, L_2^{\eta_6},$$

pour $|\eta_4| + |\eta_5| + |\eta_6| = |\alpha_2| + |\lambda_2|$, de telle façon que

$$\Gamma_{\tau,\xi}^{\alpha+\lambda} = c_{\alpha_1+\lambda_1,\alpha_2+\lambda_2}^{\alpha+\lambda}\, {\Gamma_{\tau,\xi}}^{\alpha_1+\lambda_1}\, {\Gamma_{\tau,\xi}}^{\alpha_2+\lambda_2}, \tag{3.35}$$

où $|\alpha_1|+|\lambda_1|+|\alpha_2|+|\lambda_2| = |\alpha|+|\lambda|$ et $c_{\alpha_1+\lambda_1,\alpha_2+\lambda_2}^{\alpha+\lambda}$ sont des constantes convenables.

Étant donné $k \geq 18$, nous définissons les normes

$$|\tilde{u}(\tau,\cdot)|_k = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|\Gamma_{\tau,\xi}^{\alpha}\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.36}$$

$$\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_k = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|\Gamma_{\tau,\xi}^{\alpha}\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.37}$$

$$[\tilde{u}]_k(\tau) = \sup_{s\in[0,\tau],\,\xi\in\mathbb{R}^2} (1+s+|\xi|) \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} |\Gamma_{s,\xi}^{\alpha}\tilde{u}(s,\xi)| \tag{3.38}$$

et

$$G_k(\tau) = [\tilde{u}]_k(\tau) + \sup_{s\in[0,\tau]} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+16}. \tag{3.39}$$

On énonce ensuite quelques résultats techniques qu'on utilisera dans les sections suivantes.

En tenant compte de (3.16), de la règle de Leibnitz et après une intégration par partie, on voit qu'il existe des constantes $c_{\mu,\nu,\zeta,\rho}$ et $\hat{c}_{\mu,\nu,\zeta,\rho}$ telles que

$$\Gamma_{\tau,\xi}^{\alpha}[f,B_j,g](\tau,\xi) = \sum_{|\zeta|+|\rho|=|\alpha|}\ \sum_{|\mu|\leq|\zeta|,|\nu|\leq|\rho|} c_{\mu,\nu,\zeta,\rho}[\Gamma^\zeta f, y^\mu z^\nu B_j, \Gamma^\rho g] \tag{3.40}$$

$$= \sum_{|\zeta|+|\rho|=|\alpha|}\ \sum_{|\mu|\leq|\zeta|,|\nu|\leq|\rho|} \hat{c}_{\mu,\nu,\zeta,\rho}\times$$

$$[(1-\Delta_y)^2\Gamma^\zeta f, (1-\Delta_y)^{-2}(1-\Delta_z)^{-2} y^\mu z^\nu B_j, (1-\Delta_z)^2\Gamma^\rho g].$$

Si B_j, $j=1,2$, sont choisis comme dans le lemme 3.1, on a

$$(1-\Delta_y)^{-2}(1-\Delta_z)^{-2} y^\mu z^\nu B_j(y,z) \in L^1(\mathbb{R}_y^2\times\mathbb{R}_z^2), \tag{3.41}$$

pour tous multi-indices $|\mu| \leq |\zeta|$ et $|\nu| \leq |\rho|$. On utilisera, d'autre part, l'estimation suivante (qui découle de l'inégalité de Holder)

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} dy\, dz f(t,y) K_j(\cdot-y,\cdot-z) g(t,z)\right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)} \tag{3.42}$$

$$\leq c\,\|K_j(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)}\|f(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|g(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

où $c>0$ est une constante et

$$K_j(y,z) = (1-\Delta_y)^{-2}(1-\Delta_z)^{-2} y^\mu z^\nu B_j(y,z), \qquad j = 1, 2.$$

Pour plus de détails en ce qui concerne (3.41) et (3.42) on envoie à [86].

Le lemme suivant est une application directe du théorème d'injection de Sobolev.

Lemme 3.2 *Soit $w \in C(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|w^2(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq c\, \|w(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \|w(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.43}$$

Preuve. Soit $f \in C(\mathbb{R}^2)$ et supposons $s > 1$. En utilisant la transformation inverse de Fourier et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\eta\, |\hat{f}(\eta)|^2 (1+|\eta|^2)^s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\eta\, \frac{1}{(1+|\eta|^2)^s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En rappelant la définition d'espace de Sobolev en termes des variables duales, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\eta\, |\hat{f}(\eta)|^2 (1+|\eta|^2)^s \right)^{\frac{1}{2}} = \|f(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

D'autre part, puisque $s > 1$, on déduit que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\eta\, \frac{1}{(1+|\eta|^2)^s} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Il existe alors une constante c, uniforme par rapport à $x \in \mathbb{R}^2$, telle que

$$\|f(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq c\, \|f(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.44}$$

En remplaçant f par w^2 dans (3.44), on obtient

$$\|w^2(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq c_1\, \|w^2(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.45}$$

où $c_1 > 0$ est une constante convenable. D'autre part, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\|w^2(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_2\, \|w(\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \|w(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.46}$$

Cela achève la preuve du lemme 3.2. ■

3.4 Estimations $L^\infty(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$

En utilisant des estimations convenables du type $L^\infty(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$, nous étudions les propriétés de décroissance de la solution locale $\tilde{u}(\tau,\xi)$ du problème (3.10)-(3.11).

Nous rappelons d'abord les fonctions $\{\psi_j\}_{j=0,\ldots,\infty}$ intervenant dans la décomposition de Littlewood-Paley et caractérisées par les propriétés suivantes

1. $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\psi_j \geq 0, \forall\, j \geq 0$,
2. $\sum_{j=0,\ldots,\infty} \psi_j(s) = 1, \forall\, s \geq 0$,
3. $supp(\psi_j) \subseteq [2^{j-1}, 2^{j+1}], \forall\, j \geq 1,$ et $supp(\psi_0) \subseteq [0,2]$.

On va utiliser le résultat suivant, dû à Georgiev (cf. [36]).

Proposition 3.1 *(cf. [36]). Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et supposons que $w(t,x)$ est la solution locale du problème de Cauchy*

$$\begin{aligned}(\partial_{tt} - \Delta_x + 1)\, w(t,x) &= F(t,x), \qquad (3.47)\\ w(0,x) &= w_0(x),\\ (\partial_t w)(0,x) &= w_1(x).\end{aligned}$$

Alors, il existe des constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ telles que

$$(1+t+|x|)|w(t,x)| \qquad (3.48)$$

$$\leq c_1 \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sum_{|\lambda|\leq 4} \sup_{s\in]0,t[} \psi_j(s) \|(1+s+|\cdot|)\Gamma^\lambda F(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \qquad (3.49)$$

$$+c_2 \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sum_{|\lambda|\leq 5} \|(1+|\cdot|)\psi_j(|\cdot|)(\Gamma^\lambda w)(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \qquad (3.50)$$

$$+c_3 \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sum_{|\lambda|\leq 4} \|(1+|\cdot|)^2\psi_j(|\cdot|)(\Gamma^\lambda \partial_t w)(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad \blacksquare \qquad (3.51)$$

On se propose de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.2 *Soit $\tilde{u}(\tau,\xi)$ la solution locale du problème (3.10)-(3.11) et supposons que $0 \leq |\alpha| \leq k$. Alors il existe des constantes $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ positives telles que*

$$(1+\tau+|\xi|)|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{u}(\tau,\xi)| \qquad (3.52)$$

$$\leq c_1\epsilon^\delta + c_2\frac{{G_k}^2(\tau)}{\epsilon^{2\beta}} + c_3\frac{{G_k}^3(\tau)}{\epsilon^{4\beta}} + c_4\frac{{G_k}^4(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_5\frac{{G_k}^5(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_6\frac{{G_k}^6(\tau)}{\epsilon^{6\beta}},$$

où $\delta = \delta(k) > 0$ est un paramètre réel (cf. (3.67)).

Preuve. En appliquant l'opérateur $\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}$, $0 \le |\alpha| \le k$, à l'équation (3.28), nous obtenons

$$(\partial_{\tau\tau} - \Delta_\xi + 1)\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{v}(\tau,\xi) = \Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}} \tag{3.53}$$

$$+\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\left(C_{\epsilon^\beta}(\tilde{u},\partial_\tau\tilde{u},\Delta\tilde{u}) + R_{4,\epsilon^\beta}(\tilde{u},\partial_\tau\tilde{u},\Delta\tilde{u}) + R_{5,\epsilon^\beta}(\tilde{u},g(\tilde{u})) + R_{6,\epsilon^\beta}(\tilde{u},g(\tilde{u}))\right),$$

où les données initiales prennent la forme

$$(\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{v})(0,\xi)$$

$$= \left(\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{u}\right)(0,\xi) - \left(\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\xi) - \left(\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\xi) \tag{3.54}$$

et

$$(\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\partial_\tau\tilde{v})(0,\xi) = (\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\partial_\tau\tilde{u})(0,\xi) \tag{3.55}$$

$$-\left(\left(\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\partial_\tau\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\xi) + \left(\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\partial_\tau\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\xi)\right).$$

En utilisant la Proposition 3.1, nous déduisons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3 positives telles que

$$(1+\tau+|\xi|)|\Gamma^\alpha\tilde{v}(\tau,\xi)| \le \tag{3.56}$$

$$c_1 \sum_{j=0,\ldots,\infty}\sum_{|\lambda|\le 4}\sup_{s\in]0,\tau[}\psi_j(s)\,\mathrm{x} \tag{3.57}$$

$$\mathrm{x}\left\|(1+s+|\cdot|)\Gamma^{\alpha+\lambda}\left(\frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}} + (C_{\epsilon^\beta}+R_{4,\epsilon^\beta})(\tilde{u},\partial_\tau\tilde{u},\Delta\tilde{u}) + (R_{5,\epsilon^\beta}+R_{6,\epsilon^\beta})(\tilde{u},g(\tilde{u}))\right)(s,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$+c_2\sum_{j=0,\ldots,\infty}\sum_{|\lambda|\le 5}\|(1+|\cdot|)\psi_j(|\cdot|)(\Gamma^{\alpha+\lambda}\tilde{v})(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{3.58}$$

$$+c_3\sum_{j=0,\ldots,\infty}\sum_{|\lambda|\le 4}\|(1+|\cdot|)^2\psi_j(|\cdot|)(\Gamma^{\alpha+\lambda}\partial_t\tilde{v})(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.59}$$

Estimation des termes (3.58) et (3.59). Sans perte de généralité, on se propose d'établir une estimation convenable du terme (3.58). On considère les propriétés des fonctions ψ_j et on rappelle que les données initiales du problème (3.4)-(3.5) sont petites (la taille est d'ordre ϵ) et régulières. En utilisant aussi les propriétés des distributions B_j, $j=1,2$, (cf. lemme (3.1), (3.41) et (3.42)), on déduit qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3 positives telles que

$$\sum_{j=0,\ldots,\infty}\sum_{|\lambda|\le 5}\|(1+|\cdot|)\psi_j(|\cdot|)(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{\tau,\xi}\tilde{v})(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\le$$

$$\le c_1\|(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{\tau,\xi}\tilde{u})(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}+c_2\left\|\left(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{\tau,\xi}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_1,\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$+c_3\left\|\left(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{t,\xi}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_2,\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

De (3.6) et (3.7) on voit que

$$\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^2)}=\epsilon^\beta\|u(t,\cdot)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.60}$$

En tenant compte de (3.35) et des propriétés (3.6)-(3.7)-(3.30)-(3.31)-(3.32), nous obtenons

$$\|(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{\tau,\xi}\tilde{u})(0,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^2)}=c_1\,\epsilon^\beta\left\|\frac{1}{\epsilon^{\beta(|\alpha_1+\lambda_1|)}}(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{t,x}u)(0,\cdot)\right\|_{L^2_x(\mathbb{R}^2)} \tag{3.61}$$

$$\le c_2\frac{\epsilon+o(\epsilon)}{\epsilon^{\beta(|\alpha_1+\lambda_1|-1)}}=I_1(\epsilon)$$

où $c_1, c_2>0$ sont des constantes convenables.

De manière analogue, si $\sum$ désigne en abrégé $\sum_{|\zeta|+|\rho|=|\alpha+\lambda|}\sum_{|\mu|\le|\zeta|,|\nu|\le|\rho|}$, on peut déterminer des constantes c_3, c_4, c_5, c_6 telles que

$$\left\|\left(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{\tau,\xi}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_1,\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\cdot)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^2)}$$

$$=c_3\left\|\sum\left[(1-\Delta_\xi)^2\Gamma^\zeta\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta},(1-\Delta_y)^{-2}(1-\Delta_z)^{-2}y^\mu z^\nu B_1,(1-\Delta_z)^2\Gamma^\rho\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](0,\cdot)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^2)}$$

$$\le c_4\frac{\epsilon^2+o(\epsilon^2)}{\epsilon^{\beta(|\alpha_1+\lambda_1|+9)}}=I_2(\epsilon) \tag{3.62}$$

et

$$\left\|\left(\Gamma^{\alpha+\lambda}_{\tau,\xi}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_2,\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\cdot)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^2)}$$

$$=c_5\left\|\sum\left[(1-\Delta_y)^2\Gamma^\zeta\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta},(1-\Delta_y)^{-2}(1-\Delta_z)^{-2}y^\mu z^\nu B_2,(1-\Delta_z)^2\Gamma^\rho\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](0,\cdot)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq c_6 \frac{\epsilon^2 + o(\epsilon^2)}{\epsilon^{\beta(|\alpha_1+\lambda_1|+11)}} = I_3(\epsilon). \tag{3.63}$$

Si on suppose β tel que

$$1 - \beta\left(|\alpha_1 + \lambda_1| - 1\right) > 0 \quad \text{et} \qquad 2 - \beta\left(|\alpha_1 + \lambda_1| + 11\right) > 0, \tag{3.64}$$

on obtient

$$\lim_{\epsilon \to 0} I_i(\epsilon) = 0, \tag{3.65}$$

pour tout $i = 1, 2, 3$. Puisque $|\lambda| \leq 5$, on a $|\alpha_1 + \lambda_1| \leq k + 5$ et, d'après (3.64),

$$0 < \beta < \min\left\{\frac{1}{k+4}, \frac{2}{k+16}\right\}. \tag{3.66}$$

On peut établir une estimation similaire pour le terme (3.59).

Il existe alors une constante $c > 0$ telle que

$$\sum_{j=0,\dots,\infty} \sum_{|\lambda| \leq 5} \|(1 + |\cdot|)\psi_j(|\cdot|)(\Gamma^{\alpha+\lambda}\tilde{v})(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$+ \sum_{j=0,\dots,\infty} \sum_{|\lambda| \leq 4} \|(1 + |\cdot|)^2\psi_j(|\cdot|)(\Gamma^{\alpha+\lambda}\partial_t\tilde{v})(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c\epsilon^\delta,$$

où

$$\delta = \min\left\{1 - \beta\left(|\alpha_1 + \lambda_1| - 1\right), 2 - \beta\left(|\alpha_1 + \lambda_1| + 11\right)\right\}. \tag{3.67}$$

On se propose maintenant d'étudier le terme (3.57). On rappelle d'abord que les fonctions $\psi_j(s)$ de la décomposition de Littlewood-Paley satisfont la propriété suivante

$$\sum_{j=0,\dots,\infty} \sup_{s \in]0,\tau[} \psi_j(s)(1+s)^{-1} \leq c,$$

où $c > 0$ est une constante. Dans ce qui suit $|\alpha| \leq k$, $|\lambda| \leq 4$ et c représente une constante convenable.

Estimation du terme qui contient $\frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}$. On a

$$\sum_{j=0,\dots,\infty} \sup_{s \in]0,\tau[} \psi_j(s) \left\| (1 + s + |\cdot|)\Gamma^{\alpha+\lambda}\left(\frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}\right)(s,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{2\beta}} [\tilde{u}]^2_{[\frac{k+4}{2}]+1}(\tau) \sum_{j=0,\dots,\infty} \sup_{s \in]0,\tau[} \psi_j(s)(1+s)^{-1} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+4}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{2\beta}} [\tilde{u}]^2_{[\frac{k+4}{2}]+1}(\tau) \sup_{s \in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+4}.$$

Estimation du terme qui contient $C_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau \tilde{u}, \Delta\tilde{u})$. Sans perte de généralité, nous considérons le terme avec l'ordre de dérivation le plus élevé (on pose $\omega_x = (1-\Delta_x)^{1/2}$)

$$\sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s) \left\| (1+s+|\cdot|)\Gamma^{\alpha+\lambda} \left[\frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{3\beta}}, B_2, \frac{(\Delta-1)\tilde{u}}{\epsilon^\beta} \right](s,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$= \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s) \times$$

$$\left\| \sum (1+s+|\cdot|) \left[{\omega_y}^4 \Gamma^\zeta \frac{\tilde{u}^2}{\epsilon^{3\beta}}, {\omega_y}^{-4}{\omega_z}^{-4} y^\mu z^\nu B_2, {\omega_z}^4 \Gamma^\rho \frac{{\omega_z}^2 \tilde{u}}{\epsilon^\beta} \right] \right\|_{L^2} \tag{3.68}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{4\beta}} [\tilde{u}]^2_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau) \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s)(1+s)^{-1} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{4\beta}} [\tilde{u}]^2_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10}$$

où $\sum$ désigne toujours $\sum_{|\zeta|+|\rho|=|\alpha+\lambda|} \sum_{|\mu|\leq|\zeta|,|\nu|\leq|\rho|}$. En général, on voit que

$$\sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s) \|(1+s+|\cdot|)\Gamma^{\alpha+\lambda} C_{\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u})(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{4\beta}} [\tilde{u}]^2_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau) \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s)(1+s)^{-1} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{4\beta}} [\tilde{u}]^2_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10}.$$

Estimation du terme qui contient $R_{4,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u})$.

$$\sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s) \|(1+s+|\cdot|)\Gamma^{\alpha+\lambda} R_{4,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u})(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq c\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}} + \frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right) [\tilde{u}]^3_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau) \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s)(1+s)^{-2} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10}$$

$$\leq c\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}} + \frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right) [\tilde{u}]^3_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10}.$$

Estimation du terme qui contient $R_{5,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))$.

$$\sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s) \|(1+s+|\cdot|)\Gamma^{\alpha+\lambda} R_{5,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{6\beta}}[\tilde{u}]^4_{[\frac{k+8}{2}]+1}(\tau) \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s)(1+s)^{-3}\|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+8}.$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{6\beta}}[\tilde{u}]^4_{[\frac{k+8}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+8}.$$

Estimation du terme qui contient $R_{6,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))$.

$$\sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s)\|(1+s+|\cdot|)\Gamma^{\alpha+\lambda}R_{6,\epsilon^\beta}(\tilde{u}, g(\tilde{u}))(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{6\beta}}[\tilde{u}]^5_{[\frac{k+8}{2}]+1}(\tau) \sum_{j=0,\ldots,\infty} \sup_{s\in]0,\tau[} \psi_j(s)(1+s)^{-4}\|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+8}$$

$$\leq \frac{c}{\epsilon^{6\beta}}[\tilde{u}]^5_{[\frac{k+8}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+8}.$$

Par conséquent, de (3.56) on déduit qu'il existe des constantes positives $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ telles que

$$(1+\tau+|\xi|)|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{v}(\tau,\xi)| \leq c_0\epsilon^\delta + \frac{c_1}{\epsilon^{2\beta}}[\tilde{u}]^2_{[\frac{k+4}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+4} \tag{3.69}$$

$$+\frac{c_2}{\epsilon^{4\beta}}[\tilde{u}]^2_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10} + c_3\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}} + \frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right)[\tilde{u}]^3_{[\frac{k+8}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+8}$$

$$+\frac{c_4}{\epsilon^{6\beta}}[\tilde{u}]^4_{[\frac{k+8}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+8} + \frac{c_5}{\epsilon^{6\beta}}[\tilde{u}]^5_{[\frac{k+8}{2}]+1}(\tau) \sup_{s\in]0,\tau[} \|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+8}.$$

En utilisant (3.39), on a

$$(1+\tau+|\xi|)|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{v}(\tau,\xi)| \leq c_1\epsilon^\delta + c_3\left(\frac{1}{\epsilon^{2\beta}} + \frac{1}{\epsilon^{4\beta}}\right){G_k}^3(\tau) \tag{3.70}$$

$$+c_4\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}} + \frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right){G_k}^4(\tau) + c_5\frac{{G_k}^5(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_6\frac{{G_k}^6(\tau)}{\epsilon^{6\beta}}.$$

Suite à l'inégalité triangulaire, d'après (3.21) on obtient

$$(1+\tau+|\xi|)|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{u}(\tau,\xi)| \leq (1+\tau+|\xi|)|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{v}(\tau,\xi)| \tag{3.71}$$

$$+(1+\tau+|\xi|)\left|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\left(\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) + \left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)\right)\right|.$$

Par conséquent (cf. 3.70),

$$(1+\tau+|\xi|)|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\tilde{u}(\tau,\xi)| \leq c_1\epsilon^\delta \tag{3.72}$$

$$+c_2(1+\tau+|\xi|)\left|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\left(\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi) + \left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)\right)\right|$$

$$+c_3\left(\frac{1}{\epsilon^{2\beta}}+\frac{1}{\epsilon^{4\beta}}\right){G_k}^3(\tau) + c_4\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}}+\frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right){G_k}^4(\tau) + c_5\frac{{G_k}^5(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_6\frac{{G_k}^6(\tau)}{\epsilon^{6\beta}}.$$

D'autre part, en utilisant le théorème d'injection de Sobolev (cf. lemme 3.2), nous déduisons que

$$\left|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)\right| \leq \frac{c(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}[\tilde{u}]_{[\frac{k+4}{2}]+1}(\tau)\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+4}$$

$$\leq \frac{c(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}{G_k}^2(\tau)$$

et

$$\left|\Gamma^\alpha_{\tau,\xi}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\xi)\right| \leq \frac{c(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}[\tilde{u}]_{[\frac{k+5}{2}]+1}(\tau)\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+5}$$

$$\leq \frac{c(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}{G_k}^2(\tau).$$

En remplaçant ces résultats dans (3.72), on complete la preuve de la Proposition 3.2. ■

3.5 Inégalité d'énergie

On se propose d'établir l'inégalité d'énergie pour la solution locale $\tilde{u}(\tau,\xi)$ du problème (3.10)-(3.11).

Soit $k \geq 18$ et supposons que $\tilde{v}(\tau,\cdot)$ est la solution locale du problème (3.28). L'inégalité d'énergie donne

$$\|\tilde{v}(\tau,\cdot)\|_{k+10} + \|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{v}(\tau,\cdot)\|_{k+10} \leq c_1(\|\tilde{v}(0,\cdot)\|_{k+10} + \|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{v}(0,\cdot)\|_{k+10}) \tag{3.73}$$

$$+c_2\int_0^\tau ds\left\|\left(\frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}} + (C_{\epsilon^\beta}+R_{4,\epsilon^\beta})(\tilde{u},\partial_\tau\tilde{u},\Delta\tilde{u}) + (R_{5,\epsilon^\beta}+R_{6,\epsilon^\beta})(\tilde{u},g(\tilde{u}))\right)(s,\cdot)\right\|_{k+10},$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont des constantes convenables. Notre but est de prouver la proposition suivante.

Proposition 3.3 *Soit $\tilde{u}(\tau,\xi)$ la solution locale du problème (3.10)-(3.11). Alors, il existe des constantes c_i, $i = 1, \cdots, 6$, positives telles que*

$$\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+10} + \|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+10} \leq c_1\epsilon^{\delta'} + c_2\frac{{G_k}^2(\tau)}{\epsilon^{2\beta}} \tag{3.74}$$

$$+c_3\frac{{G_k}^3(\tau)}{\epsilon^{4\beta}} + c_4\frac{{G_k}^4(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_5\frac{{G_k}^5(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_6\frac{{G_k}^6(\tau)}{\epsilon^{6\beta}},$$

où $\delta' = \delta'(k) > 0$ est un paramètre convenable (cf. 3.75).

Preuve. En suivant la preuve de la proposition 3.2, nous posons

$$\delta' = \min\{1 - \beta(|\gamma| - 1), 2 - \beta(|\gamma| + 11)\}, \tag{3.75}$$

où $0 \leq |\gamma| \leq k + 11$. On en déduit que

$$0 < \beta < \min\left\{\frac{1}{k+10}, \frac{2}{k+22}\right\}. \tag{3.76}$$

Estimation des données initiales. En utilisant la technique de la section 3.4, d'après (3.21) nous obtenons

$$\|\tilde{v}(0,\cdot)\|_{k+10} \tag{3.77}$$

$$\leq \|\tilde{u}(0,\cdot)\|_{k+10} + \left\|\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](0,\cdot)\right\|_{k+10} + \left\|\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](0,\cdot)\right\|_{k+10} \leq c\epsilon^{\delta'}$$

et

$$\|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{v}(0,\cdot)\|_{k+10} \leq \|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{u}(0,\cdot)\|_{k+10} + \left\|\left(\nabla_{\tau,\xi}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\cdot)\right\|_{k+10} \tag{3.78}$$

$$+\left\|\left(\nabla_{\tau,\xi}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right]\right)(0,\cdot)\right\|_{k+10} \leq c\epsilon^{\delta'},$$

où $c > 0$ est une constante convenable.

Estimation de la non-linéarité. Il existe des constantes c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 positives telles que

$$\left\|\frac{g(\tilde{u})(s,\cdot)}{\epsilon^{2\beta}}\right\|_{k+10} \leq c_1(1+s)^{-2}\frac{[\tilde{u}]^2_{[\frac{k+10}{2}]+1}(\tau)(\sup_{s\in]0,\tau[}\|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+10})}{\epsilon^{2\beta}},$$

$$\|C_\beta(\tilde{u}, \partial_\tau\tilde{u}, \Delta\tilde{u})(s,\cdot)\|_{k+10} \leq c_2(1+s)^{-2}\frac{[\tilde{u}]^2_{[\frac{k+16}{2}]+1}(\tau)(\sup_{s\in]0,\tau[}\|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+16})}{\epsilon^{4\beta}},$$

$$\|R_{4,\beta}(\tilde{u},\partial_\tau\tilde{u},\Delta\tilde{u})(s,\cdot)\|_{k+10}$$

$$\leq c_3(1+s)^{-3}\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}}+\frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right)[\tilde{u}]^3_{[\frac{k+16}{2}]+1}(\tau)\left(\sup_{s\in]0,\tau[}\|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+16}\right),$$

$$\|R_{5,\beta}(\tilde{u},g(\tilde{u}))(s,\cdot)\|_{k+10}\leq c_4(1+s)^{-4}\frac{[\tilde{u}]^4_{[\frac{k+14}{2}]+1}(\tau)(\sup_{s\in]0,\tau[}\|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+14})}{\epsilon^{6\beta}},$$

et

$$\|R_{6,\beta}(\tilde{u},g(\tilde{u}))(s,\cdot)\|_{k+10}\leq c_5(1+s)^{-5}\frac{[\tilde{u}]^5_{[\frac{k+14}{2}]+1}(\tau)(\sup_{s\in]0,\tau[}\|\tilde{u}(s,\cdot)\|_{k+14})}{\epsilon^{6\beta}}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^\tau ds\left\|\left(\frac{g(\tilde{u})}{\epsilon^{2\beta}}+(C_{\epsilon^\beta}+R_{4,\epsilon^\beta})(\tilde{u},\partial_\tau\tilde{u},\Delta\tilde{u})+(R_{5,\epsilon^\beta}+R_{6,\epsilon^\beta})(\tilde{u},g(\tilde{u}))\right)(s,\cdot)\right\|_{k+10} \tag{3.79}$$

$$\leq c_1\left(\frac{1}{\epsilon^{2\beta}}+\frac{1}{\epsilon^{4\beta}}\right){G_k}^3(\tau)+c_2\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}}+\frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right){G_k}^4(\tau)+c_3\frac{{G_k}^5(\tau)}{\epsilon^{6\beta}}+c_4\frac{{G_k}^6(\tau)}{\epsilon^{6\beta}}.$$

On en déduit que

$$\|\tilde{v}(\tau,\cdot)\|_{k+10}+\|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{v}(\tau,\cdot)\|_{k+10}\leq c_0\epsilon^{\delta'}+c_1\left(\frac{1}{\epsilon^{2\beta}}+\frac{1}{\epsilon^{4\beta}}\right){G_k}^3(\tau) \tag{3.80}$$

$$+c_2\left(\frac{1}{\epsilon^{4\beta}}+\frac{1}{\epsilon^{6\beta}}\right){G_k}^4(\tau)+c_3\frac{{G_k}^5(\tau)}{\epsilon^{6\beta}}+c_4\frac{{G_k}^6(\tau)}{\epsilon^{6\beta}},$$

où c_0,c_1,c_2,c_3,c_4 sont des constantes convenables.

En utilisant l'inégalité triangulaire, d'après (3.21) nous obtenons

$$\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+10}+\|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+10}\leq\|\tilde{v}(\tau,\cdot)\|_{k+10}+\|\nabla_{\tau,\xi}\tilde{v}(\tau,\cdot)\|_{k+10} \tag{3.81}$$

$$+\left\|\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_1,\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10}+\left\|\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_2,\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10}$$

$$+\left\|\nabla_{\tau,\xi}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_1,\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10}+\left\|\nabla_{\tau,\xi}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta},B_2,\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10}.$$

D'autre part, le lemme 3.2 donne

$$\left\|\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10} \leq \frac{c\,(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}[\tilde{u}]_{[\frac{k+14}{2}]+1}(\tau)\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+14}$$

$$\leq \frac{c\,(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}{G_k}^2(\tau),$$

$$\left\|\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10} + \left\|\nabla_{\tau,\xi}\left[\frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_1, \frac{\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10}$$

$$\leq \frac{c\,(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}[\tilde{u}]_{[\frac{k+15}{2}]+1}(\tau)\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+15} \leq \frac{c\,(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}{G_k}^2(\tau)$$

et

$$\left\|\nabla_{\tau,\xi}\left[\frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}, B_2, \frac{\partial_\tau\tilde{u}}{\epsilon^\beta}\right](\tau,\cdot)\right\|_{k+10}$$

$$\leq \frac{c\,(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}[\tilde{u}]_{[\frac{k+16}{2}]+1}(\tau)\|\tilde{u}(\tau,\cdot)\|_{k+16} \leq \frac{c\,(1+\tau)^{-1}}{\epsilon^{2\beta}}{G_k}^2(\tau).$$

En remplaçant ces résultats dans (3.80), on complete la preuve de la Proposition 3.3. ∎

3.6 Existence globale

Si on rassemble les résultats (3.52) et (3.74), on obtient l'inégalité

$$G_k(\tau) \leq c_1\epsilon^{\hat{\delta}} + c_2\frac{{G_k}^2(\tau)}{\epsilon^{2\beta}} + c_3\frac{{G_k}^3(\tau)}{\epsilon^{4\beta}} + c_4\frac{{G_k}^4(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_5\frac{{G_k}^5(\tau)}{\epsilon^{6\beta}} + c_6\frac{{G_k}^6(\tau)}{\epsilon^{6\beta}}, \quad (3.82)$$

où $\hat{\delta} = \min\{\delta, \delta'\}$ et $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ sont des constantes.

De (3.66) et (3.76) nous déduisons que β dépend de k et, précisément, que

$$0 < \beta(k) < \frac{1}{k+10}. \quad (3.83)$$

En rappelant que $k \geq 18$, on obtient $0 < \beta(k) < \frac{1}{28}$ et $0 < \sigma(k) = 2\beta(k) < \frac{1}{14}$.

On avance de manière similaire à ce qu'on a fait dans le chapitre 1 (cf. lemme 1.9). Nous supposons $\hat{\delta} > 2\beta$ et notons $G_k(\tau) = \epsilon^{2\beta}H_k(\epsilon; u; \tau)$. De (3.82) on déduit l'inégalité suivante

$$H_k(\epsilon;u;\tau) \leq c_1\epsilon^{\hat{\delta}-2\beta} + c_2H_k^2(\epsilon;u;\tau) + c_3H_k^3(\epsilon;u;\tau) + c_4H_k^4(\epsilon;u;\tau) \quad (3.84)$$

$$+c_5\epsilon^{2\beta}H_k^5(\epsilon;u;\tau) + c_6\epsilon^{4\beta}H_k^6(\epsilon;u;\tau).$$

Fixons alors $\bar{\tau} < +\infty$. On a le lemme suivant.

Lemme 3.3 *Soit $0 < \theta < \hat{\delta} - 2\beta$ et supposons que (3.84) est satisfaite. Alors, il existe*

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(k, H_k(\epsilon; u; 0)) > 0,$$

suffisamment petit, et une constante c_1, uniforme par rapport à $\bar{\tau}$, tels que

$$H_k(\epsilon; u; \tau) < c_1 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta-\theta} \tag{3.85}$$

pour $\epsilon \in]0, \epsilon_1[$ et $\tau \in [0, \bar{\tau}]$.

Preuve. En suivant la preuve du Lemme 1.9, soit $c_1 = 2c_0$ et supposons qu'il existe $\tau_1 \in [0, \bar{\tau}]$ tel que

$$H_k(\epsilon; u; \tau) < 2c_0 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta-\theta} \qquad \forall\, 0 \le \tau < \tau_1 \qquad \text{et} \qquad H_k(\epsilon; u; \tau_1) = 2c_0 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta-\theta}. \tag{3.86}$$

En ne tenant pas compte des termes d'ordre 5 et 6, d'après (3.84) et (3.86) on obtient

$$H_k(\epsilon; u; \tau) \le c_1 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta} + 4c_2 c_0^2 \epsilon^{2(\hat{\delta}-2\beta-\theta)} + 8c_3 c_0^3 \epsilon^{3(\hat{\delta}-2\beta-\theta)} + 16c_4 c_0^4 \epsilon^{4(\hat{\delta}-2\beta-\theta)}, \tag{3.87}$$

pour tout $0 \le \tau < \tau_1$.

Il est possible de choisir $\epsilon_1 > 0$ suffisamment petit tel que

$$c_1 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta} + 4c_2 c_0^2 \epsilon^{2(\hat{\delta}-2\beta-\theta)} + 8c_3 c_0^3 \epsilon^{3(\hat{\delta}-2\beta-\theta)} + 16c_4 c_0^4 \epsilon^{4(\hat{\delta}-2\beta-\theta)} \le \frac{3}{2} c_0 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta-\theta},$$

pour tous $0 < \epsilon < \epsilon_1$ et $0 \le \tau < \tau_1$. Par suite,

$$H_k(\epsilon; u; \tau) \le \frac{3}{2} c_0 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta-\theta},$$

pour chaque $0 < \epsilon < \epsilon_1$ et $0 \le \tau < \tau_1$. En utilisant la continuité de la fonction $H_k(\epsilon; u; \tau)$, on déduit que

$$H_k(\epsilon; u; \tau_1) \le \frac{3}{2} c_0 \epsilon^{\hat{\delta}-2\beta-\theta}. \tag{3.88}$$

Cela contradit (3.86). ■

Par conséquent, il existe une constante $c > 0$, uniforme par rapport à $\bar{\tau}$, telle que

$$G_k(\tau) = \epsilon^{2\beta} H_k(\epsilon; u; \tau) < c\, \epsilon^{\hat{\delta}-\theta},$$

pour tous $0 < \epsilon < \epsilon_1$ et $0 \le \tau \le \bar{\tau}$.

Le principe de prolongement des solutions des équations différentielles (cf. lemme 1.10) permet d'établir que la solution $\tilde{u}(\tau, \xi)$ du problème (3.10)-(3.11) existe pour tous les temps $\tau \ge 0$.

En rappelant (3.6) et (3.7), en correspondance de ϵ_1 nous trouvons un paramètre suffisamment petit

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(k, \sigma, \|u_0\|_{H^{k+16}(\mathbb{R}^2)}, \|u_1\|_{H^{k+15}(\mathbb{R}^2)}) > 0$$

tel que le problème (3.4)-(3.5) admet une solution unique et globale

$$u \in \bigcap\nolimits_{j=0,\ldots,k+16} C^j([0, +\infty[, H^{k+16-j}(\mathbb{R}^2)),$$

pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Cela acheve la preuve du Théorème 3.1.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, *Blow-up of small data solutions for a quasi-linear wave equation in two space dimension,* Ann. Math. **149** (1999), 97-127.

[2] A. Arosio, S. Spagnolo, *Global solution to the Cauchy problem for a non-linear equation,* in Non-Linear PDE's and their applications, Collège de France Seminar. H. Brézis and J.L. Lions (eds.), Vol. VI, Research Notes Math. **109**, Pitman, Boston (1984), 1-26.

[3] A. Bachelot, *Problème de Cauchy globale pour des systèmes de Dirac-Klein-Gordon,* Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique) **48** (1988), 387-422.

[4] S. Bernstein, *Sur une Classe d'Equations Fonctionnelles aux Dérivées Partielles,* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. **4** (1940), 17-26.

[5] P. Brenner, *On $L^p - L^q$ estimates for the wave equation,* Math. Z. **145** (1975), 251-254.

[6] P. Brenner, *$L^p - L^{p'}$ estimates for Fourier integral operators related to hyperbolic equations,* Math. Z. **152** (1977), 273 - 286.

[7] P. Brenner, *L^p-estimates of difference schemes for strictly hyperbolic systems with non-smooth data,* SIAM J. Number Anal. **14** (1977), 1126-1144.

[8] P. Brenner, *On the existence of global smooth solutions of certain semi-linear hyperbolic equations,* Math. Z. (1979), 99-135.

[9] P. Brenner, *On the decay in L^p of certain non-linear hyperbolic equations,* Report N. 10, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg (1980).

[10] P. Brenner, W. Von Wahl, *Global classical solutions on non-linear wave equations,* Math. Z. **176** (1981), 87-121.

[11] P. Brenner, *On L^p-decay and scattering for non-linear Klein-Gordon Equations,* Math. Scand. **51** (1982), 333-360.

[12] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications,* Masson, Paris (1983).

[13] G.F. Carrieer, *On the non-linear vibration problem of the elastic string,* Quart. Appl. Math. **3** (1945), 157-165.

[14] F. Catalano, *Null Condition for Semilinear Wave Equation with Variable Coefficients,* Serdica Math. J. **25** (1999), 321-340.

[15] F. Catalano, *On a Model Connected with the Kirchhoff Equation,* J. Math. Anal. Appl. **267** (2002), 471-488.

[16] F. Catalano, *The Non-linear Klein-Gordon equation with Mass decreasing to zero,* Adv. Diff. Eqs. **7** N. 9 (2002), 1025-1044.

[17] T. Cazenave, *Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations,* J. Funct. Anal. **60** (1985), 36-55.

[18] Y.Choquet - Bruhat, D.Christodoulou, *Elliptic $H_{s,\delta}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity,* Acta Matematica **146** (1981), 129 - 150.

[19] Y. Choquet - Bruhat, C. De Witt - Morette, M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics,* North - Holland, Amsterdam (1982).

[20] D. Christodoulou, *Global solutions of non-linear hyperbolic equations for small initial data,* Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267-282.

[21] P. D'Ancona, S. Spagnolo, *Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data,* Invent. Math. **108** (1992), 247-262.

[22] P. D'Ancona, S. Spagnolo, *Global existence for the generalized Kirchhoff equation with small data,* Arch. Rat. Mech. Anal. **124** (1993), 201-219.

[23] P. D'Ancona, S. Spagnolo, *Non-Linear perturbations of the Kirchhoff equation,* Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 1005-1029.

[24] P. D'Ancona, S. Spagnolo, *Kirchhoff type equation depending on small parameter,* Chinese Annals Math. **16B** (1995), 413-430.

[25] P. D'ancona, V. Georgiev, H. Kubo, *Weighted Strichartz estimate for the wave equation,* C.R. Acad. Sci. Paris **t.330** Série I (2000), 349-354.

[26] J.M. Delort, *Temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire à données petites faiblement décroissantes,* Séminaire Equations aux dérivées partielles, Ecole Polytechnique 1996-1997 Exposé N. V.

[27] J. M. Delort, *Sur le temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire en dimnesion 1,* Bull. Soc. Math. France **125** N.2 (1997), 269-311.

[28] J.M. Delort, *Temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire à données petites périodiques,* Amer. J. Math. **120** (1998), 663-689.

[29] J. M. Delort, *Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon non-linéaire en dimension 1 d'espace,* Ann. Inst. Poincaré (Anal. Non-linéaire) **16** N.5 (1999), 563-591.

[30] R.W. Dickey, *Infinite systems of non-linear oscillation equations related to the string,* Proc. A.M.S. **23** (1969), 459-468.

[31] R.W. Dickey, *Infinite systems of non-linear oscillation equations with linear damping,* SIAM J. Appl. Math. **19** (1970), 208-214.

[32] R.W. Dickey, *The initial value problem for a non-linear semi-infinite string,* University of Texas, Austin, Workshop March 1977.

[33] D.Foschi, S.Klainerman, *Bilinear space-time estimates for homogeneous wave equations,* Ann. Sc. Normale. Sup. 4e serie **33** (2000), 211-274.

[34] V. Georgiev, *Global Solution of the System of Wave and Klein-Gordon Equations,* Math. Z. **203** (1990), 683-698.

[35] V. Georgiev, P. Popivanov, *Global solution to the two-dimensional Klein-Gordon equation,* Comm. P.D.E. **16** (1991), 941-995.

[36] V. Georgiev, *Decay estimates for the Klein-Gordon equations,* Comm. P.D.E. **17** (1992), 1111-1139.

[37] V.Georgiev, *Weighted estimate for the wave equation,* Preprint Tsukuba Univ. (1995), 95-010.

[38] V.Georgiev, *Existence of global solutions to supercritical wave equations* Serdica Math. J. **22** (1996), 125-164.

[39] V.Georgiev, *Une estimation avec poids pour l'equation des ondes,* C.R.Acad.Sci. Paris **322** Serie I (1996), 829-834.

[40] V. Georgiev, *Non-Linear hyperbolic equations in mathematical physics,* Institute of Mathematics, Bulgarian Academy of Sciences (1997).

[41] V. Georgiev, H. Lindblad, C.D.Sogge, *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations,* Amer. J. Math. **119** (1997), 1291-1319.

[42] V.Georgiev and S. Lucente, *Decay for nonlinear Klein-Gordon equation,* preprint (1999).

[43] J. Ginibre, G. Velo, *Time decay of finite energy solutions of the non-linear Klein-Gordon equation,* Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique) **43** (1985), 339-442.

[44] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the non-linear Klein-Gordon equation,* Math. Z. **189** (1985), 487-505.

[45] J. Ginibre, G. Velo, *Conformal invariance and time decay for non-linear wave equations, II* Ann. Inst. H. Poincaré (Phys. Théor.) **47** (1987), 263-276.

[46] J. Ginibre, G. Velo, *The Cauchy problem for the non-linear Klein-Gordon equation,* New methods and results in non-linear fields equations (Bielefeld 1987), 79-90, Lect. Notes in Phys. **347** Springer, Berlin-New York, 1989.

[47] J. Ginibre, G. Velo, *The global Cauchy problem for the non-linear Klein-Gordon equation,* Ann. Inst. H. Poincaré (Anal. Non Linéaire) **6** N.1 (1989), 15-35.

[48] J. Ginibre, A. Soffer, G. Velo, *The global Cauchy problem for the critical linear wave-equation,* J. Funct. Anal. **110** (1992), 96-130.

[49] J. Ginibre, G. Velo, *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation,* J. of Funct. Anal. **133** (1995), 50-69.

[50] R. Glassey, *On the asymptotic behavior of non-linear wave equations.* Trans. A.M.S. **182** (1973), 187-200.

[51] R. Glassey, *Finite-Time Blow-Up for Solutions of Nonlinear Wave Equations,* Math. Z. **177** (1981), 323-340.

[52] J.M. Greenberg, S.C. Hu, *The initial value problem for a stretched string,* Quart. Appl. Math. (1980), 289-331.

[53] M. Grillakis, *Regularity for the wave equation with a critical nonlinearity,* Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 749-774.

[54] L. Hörmander, *On Sobolev spaces associated with some Lie algebras,* Report No. 4, Instutut Mittag Leffler (1985).

[55] L. Hörmander, *Non-linear Hyperbolic Differential Equations,* Lectures (1986-1987), Lund 1988.

[56] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Diffferential Equations,* Mathematiques et Applications **26**, Springer (1997).

[57] F. John, *Blow-up of Solutions of Non-Linear Wave Equations in Three Space Dimension,* Manuscripta Math. **28** (1979), 235-268.

[58] F. John, *Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimension,* Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 29-51.

[59] F. John, *Existence for Large Times of Strict Solutions of Non-Linear Wave Equations in Three Space Dimension for Small Initial Data,* Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 79-109.

[60] L.Kapitanski, *Some generalisations of the Strichartz - Brenner inequality,* Leningrad Math. J. (1990), 693-726.

[61] L. Kapitanski, *Global and unique weak solutions of non-linear wave equations,* Math. Res. Lett. **1** (1994), 211-223.

[62] T. Kato, *Blow-up of solutions of some non-linear hyperbolic equations,* Comm. Pure. Appl. Math. **33** (1980), 501-505.

[63] M. Keel, T. Tao, *Local and global well-posedness of wave maps on* $\mathbb{R}^{1+1}$ *for rough data,* Comm. Pure Appl. Math. **46** N.9 (1993), 1221-1268.

[64] M. Keel, T. Tao, *Small data blow-up for semilinear Klein-Gordon equations,* Amer. J. Math. **121** N.3 (1999), 629-669.

[65] G. Kirchhoff, *Vorlesungen* über *Mechanik,* Teubner, Leipzig (1883).

[66] S. Klainermann, *Global existence for non-linear wave equations,* Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 52-61.

[67] S. Klainerman, G. Ponce, *Global small amplitude solutions to non-linear evolution equations,* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 133-141.

[68] S. Klainermann, *Uniform Decay Estimates and the Lorentz Invariance of the Classical Wave Equation*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 321-332.

[69] S. Klainerman, *Global existence of small amplitude solutions to non-linear Klein-Gordon equation in four space time dimension,* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 631-641.

[70] S. Klainermann, *Remarks on the Sobolev Inequalities in the Minkowski Space* $\mathbb{R}^{n+1}$*,* Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 111-117.

[71] S. Klainerman, M. Machedon, *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem,* Comm. Pure Appl. Math. **46** N.9 (1993), 1221-1268.

[72] S. Klainerman, M. Machedon, *Smoothing estimates for null forms and applications,* Duke Math. J. **81** (1995-1996), 99-133.

[73] S. Kickenassamy, *Non-Linear Wave Equations,* Pure Appl. Math. (1996), 1-82.

[74] R. Kosecki, *The unit condition and global existence for a class of non-linear Klein-Gordon equations,* J. Diff. Eqs. **100** (1992), 257-268.

[75] H. Lindblad, *A sharp counterexample to the local existence of low-regularity solutions to non-linear wave equations,* Duke Math. J. **72** (1993), N.2, 503-539.

[76] H. Lindblad, C. Sogge, *Restriction theorems and semi-linear Klein-Gordon equations in (1+3)-space dimensions,* Duke Math. J. **85** (1996), 227-252.

[77] B. Marshall, *Mixed norm estimates for the Klein-Gordon equation,* Proc. Conf. Harmonic Anal., Chicago : Wardsworth (1981), 638-652.

[78] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, $L^p - L^q$ *estimates for the Klein-Gordon equation,* J. Math. Pure Appl. **59** (1980), 417-440.

[79] K. Moriyama, S. Tonegawa, Y. Tsutsumi, *Almost global existence of solutions for the quadratic semilinear Klein-Gordon equation in one space dimension,* Funkcial. Ekvac. **40** (1997), 313-333.

[80] K. Moriyama, *Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic non-linear Klein-Gordon equations in one space dimension,* Diff. Int. Eqs. **10** N.3 (1997), 499-520.

[81] T. Motai, *Asymptotic behavior of solutions of the Klein-Gordon equation with a non-linear dissipative term,* Tsukuba J. Math. **15** N.1 (1991), 151-160.

[82] R. Narisimha, *Non-Linear vibrations of an elastic string,* J. Sound Vibration **8** (1968), 134-146.

[83] S. Nelson, L^2 *asymptotes for the Klein-Gordon Equation,* Proc. A.M.S. **27** N.1 (1971), 110-116.

[84] T. Nishida, *A note on the non-linear vibrations of the elastic string,* Mem. Fac. Engng. Kyoto Univ. **33** (1971), 329-341.

[85] T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tsutsumi, *Remarks on the Klein-Gordon equation with quadratic non-linearity in two space dimension,* Nonlinear Waves (Supporo, 1995), 383-392.

[86] T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tsutsumi, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic non-linearity in two space dimension,* Math. Z. **222** (1996), 341-362.

[87] H. Pecher, *Das Verhalten der Ableitungen globarer Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen für grosse Zeiten,* Manuscripta Math. **12** (1974), 197-204.

[88] H. Pecher, *Das Verhalten globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen für grosse Zeiten,* Math. Z. (1974), 67-92.

[89] H. Pecher, *Decay of solutions of non-linear wave equations in three space dimension,* Report, Fachbereich Mathematik, Gesamthochschule Wuppertal (June 1981).

[90] H. Pecher, *Low energy scattering for nonlinear Klein-Gordon equations,* J. Funct. Anal. **63** (1985), 101-122.

[91] H. Pecher, *Non-linear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equation,* Math. Z. **185** (1984), 261-270.

[92] J.C. Peral, L^p*-estimates for the Wave Equation,* Proc. Symp. Pure Math. **35** Part 2 (1979), 171-174.

[93] A.I. Peral, *Some remarks on semilinear wave equation in* $\mathbb{R}^n$, Contrib. to Nonlinear PDE, ed. J.Diaz and P.Lions, Pitman (1986).

[94] G. Perla Menzala, *On a classical solutions of a quasilinear hyperbolic equation,* Nonlinear Anal. **3** (1979), 613-627.

[95] G. Ponce, T. Sideris, *Local regularity of nonlinear wave equations in three space dimensions,* Comm. P.D.E. **18** (1993), 169-177.

[96] R. Racke, *Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems,* Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1992), viii+259.

[97] I. Segal, *Non-Linear semi-groups,* Annals Math. **78** N. 2 (1963).

[98] I. Segal, *Space-time decay for solutions of wave equations,* Adv. Math. **22** (1976).

[99] J. Shatah, *Global existence of small solutions to non-linear evolution equations,* J. Diff. Eqs. **46** (1982), 409-425.

[100] J. Shatah, *Normal forms and quadratic non-linear Klein-Gordon equations,* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 685-696.

[101] J. Shatah, M. Struwe, *Geometric wave equations,* Courant Lecture Notes in Mathematics **2**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York (1998).

[102] T. Sideris, *Global behavior of solutions to non-linear wave equations in three space dimensions,* Comm. P.D.E. **8** (1983), 1921-1323.

[103] T. Sideris, *Formation of singularities in solutions to nonlinear hyperbolic equations,* Arch. Rat. Mech. Anal. **86** N.4 (1984), 369-381.

[104] T. Sideris, *Decay estimates for the three-dimensional inhomogeneous Klein-Gordon equations and applications,* Comm. P.D.E. **14** (1989), 1421-1455.

[105] J.C.H. Simon, *A wave operator for the non-linear Klein-Gordon equation,* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 387-398.

[106] J.C.H. Simon, E. Taflin, *The Cauchy problem for non-linear Klein-Gordon equations,* Comm. Math. Phys. **152** (1993), 433-478.

[107] W. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy,* J. Funct. Anal. **41** (1981), 110-133.

[108] R.S. Strichartz, *Multipliers on fractional Sobolev spaces,* J. Math. and Mech. **16** N. 9 (1967), 1031-1060.

[109] R.S. Strichartz, *A priori estimates for the wave equation and some applications,* J. Funct. Anal. **5** (1970), 218-235.

[110] R.S. Strichartz, *Convolutions with Kernels having singularities on a sphere,* Trans. A.M.S. **148** (1970), 461-471.

[111] R.S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations,* Duke Math. J. **44** (1977), 705-714.

[112] R.S. Strichartz, *Asymptotic behavior of waves,* J. Funct. Anal. **40** (1981), 341-357.

[113] R.S. Strichartz, *Harmonic analysis as Spectral theory of Laplacians,* J. Funct. Anal. **87** (1989), 51-148.

[114] N. Tzetkov, *Remark on the Null-Condition for the non-linear wave equation,* Preprint.

[115] W. Von Wahl, *L^p- decay rates for homogeneous wave equation,* Math. Z. **120** (1971), 93-106.

[116] Y. Zhou, *Cauchy problem for semilinear wave equations with small data in four space dimensions,* J. Diff. Equations **8** (1995), 135-144.