

UNIVERSIDADE ABERTA

Mestrado em Estatística, Matemática e Computação

(Ramo - Estatística Computacional)

**Planeamento de Experiências:**

**Modelos e desafios dos Planos em Blocos Incompletos**

Helga Carina Baptista Martins Correia

Dissertação apresentada na Universidade Aberta para obtenção do grau de  
Mestre em Matemática, Estatística e Computação  
(especialização em Estatística Computacional)

Orientadora:

Prof.<sup>a</sup> Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira

Lisboa 2012

*Ao meu filho*  
*Ao meu marido*  
*Aos meus pais*



## **AGRADECIMENTOS**

*À Professora Doutora Teresa Oliveira, pelo acompanhamento, sugestões, críticas e pela serenidade que sempre me transmitiu.*

*Ao Instituto Superior de Ciências Económicas e Empresariais de Cabo Verde pelo apoio e facilidades concedidas.*

*Aos meus alunos, pela disponibilidade que demonstraram em colaborar neste trabalho.*

*À minha família, irmãs e avó, em especial aos meus pais. A eles agradeço tudo. Apesar de fisicamente longe, estão sempre comigo nos momentos mais importantes da minha vida.*

*Ao meu marido, pelo apoio, compreensão pelas ausências, pela tolerância ao meu mau humor nas horas mais difíceis, pela dedicação excepcional ao nosso filho, pelo amor.*

*Ao meu filho, pela paciência quando a mãe não esteve tão disponível para brincar com ele o quanto desejava.*

*A todos, Muito Obrigada.*

## RESUMO

O principal objetivo de um Planeamento de Experiências reside essencialmente na procura de relações entre variáveis e na comparação de níveis de fatores, recorrendo ao tratamento estatístico dos dados recolhidos. A utilização de blocos no Planeamento de Experiências é fundamental, pois permite reduzir ou eliminar a variabilidade introduzida por fatores que podem influenciar a experiência mas que não interessam e/ou não foram explicitamente incluídos durante o planeamento.

Neste trabalho apresentamos os resultados do estudo e investigação dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (BIBD), Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com repetição de blocos (BIBDR) e Planos em Blocos Incompletos com blocos de diferentes dimensões (VBBD). Exploramos algumas propriedades e métodos de construção destes planos e ilustramos, sempre que possível, com exemplos.

Tendo como base o planeamento em blocos, apresentamos uma aplicação dos BIBDR na área da Educação com o objetivo de comparar cinco domínios do pensamento algébrico de uma amostra de alunos do 1º ano do ensino superior em Cabo Verde.

Para a análise dos dados da amostra foi utilizado o software R, versão 2.12.1.

Pudemos constatar que existem diferenças significativas entre alguns dos domínios do pensamento algébrico, nomeadamente entre os domínios da Generalização da Aritmética e Tecnicismo Algébrico com os restantes domínios.

Recomendamos a escolha de uma amostra mais representativa constituída por alunos de todas as instituições superiores de Cabo Verde.

**Palavras-chave:** Planeamento de Experiências; BIBD; BIBDR; Software R; BIBDR na Educação

## SUMMARY

The main purpose of an Experimental Design resides mainly in the search for relationships between variables and in comparing levels of factors, using statistical treatment of collected data. The use of blocks in Experimental Design is essential because it allows reducing or eliminating the variability introduced by factors that can influence the experience but are not of main interest and/or were not explicitly included during experiments.

In this work we present the results of the study and research of Balanced Incomplete Block Designs (BIBD), Balanced Incomplete Block Designs with repeated blocks (BIBDR) and the Incomplete Blocks Designs with blocks with different dimensions (VBBD). We explore some properties and construction methods of such designs and illustrate, when possible, with examples. Based on Block Designs, we present an application of BIBDR in Education, with the aim of comparing five domains of algebraic thinking in a sample of 1<sup>st</sup> year students of higher education in Cape Verde.

For the analysis of sample data, the software R was used, version 2.12.1.

We observed that significant differences exist between some of the domains of algebraic thinking, especially among the domains of Generalization of Arithmetic and Algebraic Technicality with the remaining areas.

For a more representative sample, we recommend a bigger sample consisting of students from all higher institutions of Cape Verde.

**Key words:** Experimental Design; BIBD; BIBDR; Software R; BIBDR in Education

## SIMBOLOGIA E NOTAÇÕES

<b>BIBD</b>	Plano em Blocos Incompletos Equilibrados
<b>IBD</b>	Planos em Blocos Incompletos
<b>VBBD</b>	Planos em Blocos incompletos com blocos de diferentes dimensões
<b>BIBDR</b>	Plano em Blocos Incompletos Equilibrados com Repetição
<b>PBIBD</b>	Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados
<b>SBIBD</b>	Plano em Blocos Incompletos Equilibrados simétrico
<b>ANOVA</b>	Analysis of Variance (Análise de Variância)
<b>STS</b>	Steiner Triple System (Sistemas triplos de Steiner)
<b>MINLP</b>	Mixed-Integer Nonlinear Programming (Programação não linear inteira mista)
$v$	Número de tratamentos ou variedades
$b$	Número de blocos
$k$	Número de unidades experimentais do bloco
$r$	Número de vezes que cada tratamento ocorre
$\lambda$	Número de vezes que cada par de tratamentos se repete
$SQ_T$	Soma dos Quadrados Total
$SQ_{Trat_{(aj)}}$	Soma dos Quadrados tratamentos ajustados
$SQ_b$	Soma dos Quadrados blocos
$SQ_e$	Soma dos Quadrados erro
$QM_{trat_{(aj)}}$	Quadrado Médio tratamento ajustado
$QMe$	Quadrado Médio erro
$Q_i$	Ajuste global para o $i$ -ésimo tratamento
$SQ_{b_{(aj)}}$	Soma dos Quadrados blocos ajustados

- $\mathbf{1}_v$  Vetor de unidades do tipo  $v \times 1$
- $I_v$  Matriz identidade de ordem  $v$
- $\eta$  Valor próprio
- $C$  Matriz de informação
- $r(C)$  Característica da matriz  $C$
- $\psi$  Função contraste

# ÍNDICE

<b>Agradecimentos</b> .....	<b>i</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>ii</b>
<b>Summary</b> .....	<b>iii</b>
<b>Simbologia e notações</b> .....	<b>iv</b>
<b>Lista de tabelas e ilustrações</b> .....	<b>ix</b>
<b>Capítulo 1</b> .....	<b>1</b>
<b>1 PLANEAMENTO DE EXPERIÊNCIAS E PLANOS EM BLOCOS: UMA REVISÃO DA LITERATURA</b> ..	<b>2</b>
1.1 NOTA HISTÓRICA E CONTRIBUTOS IMPORTANTES .....	2
1.2 ABORDAGENS E APLICAÇÕES RECENTES DOS PLANOS EM BLOCOS .....	5
1.3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....	8
1.3.1 PLANEAMENTO DE EXPERIÊNCIAS .....	8
1.3.2 ANÁLISE DA VARIÂNCIA .....	9
1.3.3 PLANOS EM BLOCOS COMPLETOS .....	11
1.3.4 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS .....	11
<b>Capítulo 2</b> .....	<b>14</b>
<b>2 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS</b> .....	<b>15</b>
2.1 DEFINIÇÃO E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA .....	15
2.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS BIBD .....	17
2.2.1 MODELO ESTATÍSTICO .....	17
2.2.2 TESTE PARAMÉTRICO: ANÁLISE DA VARIÂNCIA .....	17
2.2.3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS .....	19
2.2.4 MATRIZ DE INFORMAÇÃO E ESTIMAÇÃO DOS CONTRASTES DE TRATAMENTOS .....	20
2.2.5 ANÁLISE INTER-BLOCO E INTER-INTRA BLOCO .....	22
2.2.6 MÉTODO DE COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE TUKEY .....	24
2.3 SOFTWARE ESTATÍSTICO PARA ANÁLISE DOS BIBD .....	27
2.4 CLASSES ESPECIAIS DOS BIBD .....	30
2.4.1 BIBD $\alpha$ –RESOLÚVEL .....	30
2.4.2 BIBD COM $\lambda = 1$ : SISTEMAS DE STEINER .....	32

2.4.3 BIBD COM $K = 3$ E $\lambda = 1$ : SISTEMAS TRIPLOS DE STEINER.....	33
<b>Capítulo 3.....</b>	<b>36</b>
<b>3 PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO DOS BIBD .....</b>	<b>37</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	37
3.2 MÉTODO DAS DIFERENÇAS .....	38
3.3 MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO SUCESSIVA.....	40
3.4 BIBD IRREDUTÍVEL .....	41
3.5 BIBD COMPLEMENTAR .....	41
3.6 BIBD RESIDUAL .....	42
3.7 BIBD DERIVADO .....	43
3.8 DUAL DO BIBD.....	43
3.9 MÉTODO COMPUTACIONAL: ALGORITMO BACKTRACKING .....	44
<b>Capítulo 4.....</b>	<b>51</b>
<b>4 OS BIBD E A TEORIA DA AMOSTRAGEM.....</b>	<b>52</b>
4.1 BREVE HISTORIAL.....	52
4.2 AMOSTRAGEM ALEATÓRIA SIMPLES SEM REPOSIÇÃO .....	54
4.2.1 RELAÇÃO COM OS BIBD .....	54
4.2.2 RELAÇÃO COM OS SBIBD.....	55
4.2.3 RELAÇÃO COM OS BIBDR .....	55
4.3 BIBD E AMOSTRAGEM CONTROLADA .....	57
<b>Capítulo 5.....</b>	<b>60</b>
<b>5 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS COM REPETIÇÕES.....</b>	<b>61</b>
5.1 DEFINIÇÃO E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA .....	61
5.2 CLASSIFICAÇÃO DOS BIBDR EM FAMÍLIAS.....	63
5.3 MULTIPLICIDADE E LIMITES DOS BLOCOS .....	64
5.4 VARIÂNCIA PARA O EFEITO DOS BLOCOS NUM BIBDR.....	65
5.5 MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO DOS BIBDR: CONTRIBUIÇÕES IMPORTANTES.....	66
5.5.1 MÉTODO TRADE-OFF.....	67
5.5.2 OUTROS MÉTODOS DE CONTRUÇÃO DOS BIBDR .....	69
<b>Capítulo 6.....</b>	<b>71</b>
<b>6 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS COM BLOCOS DE DIFERENTES DIMENSÕES .....</b>	<b>72</b>

6.1 INTRODUÇÃO E NOTAÇÃO .....	72
6.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS VBBD.....	74
6.2.1 TABELA ANOVA .....	74
6.3 CONSTRUÇÃO DOS VBBD ATRAVÉS DOS BIBD .....	76
<b>Capítulo 7.....</b>	<b>81</b>
<b>7 CASO PRÁTICO: APLICAÇÃO DOS BIBDR NA ÁREA DA EDUCAÇÃO EM CABO VERDE .....</b>	<b>82</b>
7.1 INTRODUÇÃO.....	82
7.2 ENQUADRAMENTO GEOGRÁFICO E INSITUCIONAL.....	84
7.3 RECOLHA, ANÁLISE E TRATAMENTO DE DADOS .....	84
7.4 MODELO APLICADO .....	85
7.5 ANÁLISE ESTATÍSTICA DO BIBDR.....	86
7.5.1 ANÁLISE DA VARIÂNCIA.....	88
7.5.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE TUKEY.....	91
7.6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	93
<b>Capítulo 8.....</b>	<b>95</b>
<b>8 CONSIDERAÇÕES E PERSPETIVAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA .....</b>	<b>96</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>98</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>107</b>
<b>Anexo I – Questionário aplicado aos alunos.....</b>	<b>108</b>
<b>Anexo II – Tabela com a estrutura completa do BIBDR(5, 100, 60, 3, 30 b *= 10).....</b>	<b>112</b>
<b>Anexo III – Outputs do software R.....</b>	<b>116</b>

## LISTA DE TABELAS E ILUSTRAÇÕES

Tabela 1: Tabela Anova para análise intra-bloco de um BIBD .....	19
Tabela 2: Tabela ANOVA (efeito dos tratamentos) para VBBD.....	74
Tabela 3: Tabela ANOVA (efeito dos blocos) para VBBD .....	75
Tabela 4: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 1 e 2 do BIBDR(5,100,60,3,30 b*=10) .....	87
Tabela 5: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 3 e 4 do BIBDR(5,100,60,3,30 b*=10) .....	87
Tabela 6: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 5 e 6 do BIBDR(5,100,60,3,30 b*=10) .....	87
Tabela 7: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 7 e 8 do BIBDR(5,100,60,3,30 b*10) .....	88
Tabela 8: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 9 e 10 do BIBDR(5,100,60,3,30 b*=10) .....	88
Ilustração 1: Grafo que representa a estrutura do BIBD(5,10,4,2,1) .....	32
Ilustração 2: Grafo que representa um plano de amostragem para N=7 .....	58

## **CAPÍTULO 1**

### **PLANEAMENTO DE EXPERIÊNCIAS E PLANOS EM BLOCOS: UMA REVISÃO DE LITERATURA**

# 1 PLANEAMENTO DE EXPERIÊNCIAS E PLANOS EM BLOCOS: UMA REVISÃO DA LITERATURA

## 1.1 NOTA HISTÓRICA E CONTRIBUTOS IMPORTANTES

A realização de experiências em investigações científicas desempenhou desde cedo um papel fundamental no desenvolvimento das mais diversas áreas do conhecimento. No entanto, foi no setor agrícola que a pesquisa experimental ganhou maior notoriedade através de Ronald Aylmer Fisher (1890-1962). Este estatístico, durante o período de 1919 a 1933, desenvolveu, para além da teoria, diversos métodos relacionados com o Planeamento de Experiências e análise de dados, nomeadamente a análise da variância (ANOVA). Fisher observou que, tendo um plano experimental mais adequado e envolvendo o mesmo esforço, conseguiria aumentar consideravelmente a precisão e, ao mesmo tempo, obter mais informação. Em 1925, publica o seu primeiro livro, "*Statistical methods for research workers*", no qual apresenta as novas técnicas de planeamento e análise de experiências vocacionadas para os setores da agricultura e biologia. Através das suas pesquisas agrícolas, Fisher demonstrou que a repetição tem um papel fundamental numa experiência, pois, para além de permitir a estimação do erro, permite ainda controlar as fontes de variação aleatórias garantindo desta forma a precisão dos resultados. Introduziu o conceito de casualização e desenvolveu várias formas de planos casualizados, em particular os Planos em Blocos Casualizados cuja utilidade veio a ser demonstrada essencialmente no setor agrícola. O seu segundo livro, "*The design of experiments*", é publicado em 1935 e nele são apresentadas as suas contribuições na área da pesquisa experimental.

Frank Yates (1902-1994) foi um dos fiéis seguidores das ideias de Fisher. Juntamente com Fisher desenvolveu os quadrados latinos em 1934. Mas foi em 1936 que publicou um projeto sobre Planos em Blocos Incompletos na área da biologia. Durante a segunda Guerra Mundial, Yates estudou estratégias de melhoramento alimentar, nomeadamente a aplicação de fertilizantes para melhorar os cultivares. Foi assim um importante

contributo durante a época de guerra, o que o levou a desenvolver as suas técnicas de delineamento experimental no sentido de encontrar vários tipos de problemas, entre eles, o controle de pragas. Deste autor destacam-se alguns estudos publicados sobre os Planos em Blocos Incompletos e Planos em Blocos Incompletos Equilibrados bem como a sua análise, (1936a) “*Incomplete randomized blocks*”, e (1940) “*The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs*”.

Também William Gemmell Cochran (1909-1980), seguidor de Yates, deu o seu contributo para o avanço do planeamento experimental, nomeadamente no que se refere à variação dos efeitos de padrões climáticos no campo agrícola. Cochran, juntamente com Gertrude Mary Cox (1900-1978), constrói em 1957 uma grande obra, “*Experimental design*”, que rapidamente se torna um clássico nesta área.

Ainda no campo dos Planos em Blocos, Raj Chandra Bose (1901-1987), Matemático Indiano, publicou alguns trabalhos na área do planeamento experimental por blocos incompletos equilibrados, “*On the construction of balanced incomplete block designs*” (1939) e, juntamente com K. R. Nair, “*Partially balanced incomplete block designs*” (1939). Em 1942, Bose introduz o conceito de BIBD resolúvel e mais tarde, em 1951, publica o livro, “*Partially balanced incomplete block designs with two associate classes involving only two replications*”.

Em 1952, Oscar Kempthorne (1919-2000) deu uma grande contribuição para o delineamento experimental publicando o livro “*The Design and Analysis of Experiments*”. Nesse livro, Kempthorne trata dos princípios fundamentais do delineamento experimental, analisando em particular os planos casualizados e os planos factoriais. Este livro viria a ser o terceiro livro publicado nesta área. Já em 1994, Kempthorne teve ainda uma importante contribuição no delineamento casualizado desenvolvendo o trabalho já efetuado nessa área por Fisher e Yates e publicou outro livro intitulado de “*Design and Analysis of Experiments Vol. 1: Introduction to Experimental Design*”, com a co-autoria de Klaus Hinkelmann (1966-1999).

Os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com repetições surgem com a

finalidade de reduzir os custos de implementação das experiências, permitindo ainda obter resultados viáveis mesmo quando algumas unidades experimentais são perdidas. Este tipo de planos são apresentados em 1977 por A. Hedayat e Walter M. Foody na prestigiada revista científica *The annals of Statistics*. Hedayat publicou vários livros e artigos nesta área, destacando-se o artigo “*The trade off method in the construction of BIB designs with repeated blocks*” (1979), no qual o autor, juntamente com B. Y. Li, apresenta um novo método de construção dos BIBD com repetição, o Método Trade-Off ou método de compensação. Em 1984, juntamente com H. L. Hwang, Hedayat publica o artigo “*BIB(8, 56, 21, 3, 6) and BIB(10, 30, 9, 3, 2) designs with repeated blocks*”. Após esta data, Hedayat, bem como outros investigadores como John Stufken e W.G. Zhang, A. Atkinson, D. Montgomery, R. A. Bailey, continuam os seus estudos não só nos BIBD com repetição, mas também noutros tipos de planos, nomeadamente nos Planos Factoriais, Planos Ótimos e Metodologias de Superfície de resposta (MSR).

Em Portugal, também os BIBD têm sido objeto de estudo de alguns investigadores, entre os quais Teresa Oliveira e M. F. Sousa. Da primeira autora destacam-se alguns dos estudos publicados como, “*Planos de Blocos Equilibrados Incompletos com Repetições*” em 1994 e, juntamente com M. F. Sousa, “*Some correspondence between Diallel Crosses and BIB Designs*” (2002), “*BIBDR: Some analysis on BIBD (9,24,8,3,2) cardinalities*” e “*BIB Designs with Repeated Blocks: Some analysis on BIBD (12,44,11,3,2) with different structures.*”, ambos publicados no ano de 2004 em *Colloquium Biometryczne*. Oliveira, T., nos seus primeiros estudos, apresenta teoremas fundamentais sobre os Planos em Blocos Incompletos (IBD) e sobre os BIBD descrevendo a sua análise e, mais tarde, apresenta os BIBD com Repetições e a problemática da sua construção. Em 1999, acrescenta às suas anteriores contribuições, os Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD) onde demonstra a sua aplicabilidade na área da Genética através dos Diallel Crosses utilizados para o melhoramento de plantas através de cruzamentos cromossómicos.

## 1.2 ABORDAGENS E APLICAÇÕES RECENTES DOS PLANOS EM BLOCOS

Atualmente, são muitos os investigadores em diversas áreas que demonstram a importância da aplicação dos BIBD como contributo para o avanço da ciência. Destacam-se alguns nomes nas diferentes áreas.

Na área da Agricultura, Wiesław Pilarczyk (2008) utiliza os BIBD em problemas de melhoramento de plantas na Polónia. Na Genética, salientam-se nomes como, T. Oliveira e M. Sousa (2002), que apresentam a correspondência entre os Planos Diallel Crosses e os BIBD, Chai e Mukerjee (1999) que estudam os Planos Ótimos para os Diallel Crosses apresentando propriedades específicas e Ayele (2010) que desenvolve a construção dos Planos Parciais Diallel Crosses através dos PBIBD com blocos de dimensão dois.

No setor industrial, J. C. Young (1996) veio demonstrar a importância dos Planos em Blocos como uma ferramenta essencial para melhorar a precisão dos resultados, diminuindo os recursos, os custos e o tempo despendido.

No âmbito da Biologia e da Medicina, Colquhoun (1963) apresenta os BIBD em ensaios nos animais através dos Quadrados Latinos Incompletos (*Youden Square*) e Kraiczi *et al.* (2000) apresentam um estudo no qual é comparado o efeito de cinco substâncias medicamentosas em pacientes com hipertensão e com apneia do sono.

Na área das ciências da Educação existem ainda poucos estudos publicados, no entanto, Yang (1985) apresenta uma aplicação dos BIBD na qual se pretende estimar a confiabilidade de um exame oral da faculdade de medicina na Universidade de Iowa. Como apenas alguns dos examinadores poderão examinar cada aluno, a importância da aplicação dos BIBD veio a mostrar-se fundamental. Ainda nesta área, Van der Linden *et al.* (2004) mostram como o problema do cálculo de um BIBD ótimo pode ser considerado como um problema de otimização combinatorial, usando para isso uma amostra de 1996 alunos do oitavo ano de Matemática do NAEP (National Assessment of Educational Progress).

Em Ciências como a Criptografia e Teoria de Codificação, os BIBD e os PBIBD têm sido usados para construir códigos de impressão digital. Kang *et al.* (2006) apresentam um novo método de construção de códigos de impressão digital utilizando planos divisíveis em grupos. Ainda nesta área, Chakrabarti e Khanna (2006) apresentam um novo esquema de criptografia visual para STS (Steiner Triple System) com base em estruturas de acesso. Como exemplo de um STS temos um BIBD com os parâmetros  $(7,7,3,3,1)$  uma vez que apresenta 7 variedades (tratamentos), distribuídos por 7 blocos de dimensão 3, onde cada variedade aparece 3 vezes nos blocos e cada par de variedades aparecem juntos apenas uma vez nos blocos. Assim, um sistema deste tipo é definido como um conjunto  $(V, B)$ , onde  $V$  é um conjunto finito de pontos (variedades) e  $B$  é um conjunto de subconjuntos de 3 elementos do  $V$ , chamando-se triplas (blocos), no qual cada par de pontos distintos de  $V$  ocorre exatamente 3 vezes em  $B$ . Também Kumar *et al.* (2007) deram o seu contributo nesta área utilizando os BIBD para apresentarem um novo código ótico de acesso tridimensional para o comprimento de onda, denominado Multi Wavelength Optical Code Division Multiple Access (MW-OCDMA).

Por fim, podemos encontrar alguns autores que se têm dedicado a estabelecer relações entre os BIBD e outros ramos da Estatística e da Matemática, tais como Chakrabarti (1963), D. Raghavarao e R. Singh (1975), Wynn (1977), Foody e Hedayat (1977), Hedayat e Majumdar (1995), D. Raghavarao e L. Padgett (2005), Rao e Vijayan (2008) e, Sharma e Fanta (2009) que nos seus trabalhos têm vindo a apresentar a ligação entre este tipo de planos e a Teoria da Amostragem. Também nomes como Box e Hunter (1957), Koske *et al.* (2011) e Zhang *et al.* (2011) têm dedicado as suas investigações a estabelecer correspondências entre os BIBD e a Metodologia de Superfície de Resposta.

No campo da Matemática, destaca-se T. Oliveira (2011) que apresenta como a Matriz de Hadamard pode ser obtida através do BIBD  $(7, 7, 3, 3, 1)$ , bastando para isso adicionar uma linha e uma coluna de 1s e substituímos todas as entradas nulas por (-1). Nos dias de hoje, com o progresso tecnológico e conseqüente desenvolvimento computacional, é possível, através dos algoritmos, construir e analisar de um modo mais rápido e eficaz diversos tipos de planos nas mais variadas ciências e, em particular, nas

ciências consideradas modernas como por exemplo, na Biotecnologia, na Engenharia Eletrónica e nas Ciências da Computação.

### **1.3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS**

Nesta secção serão introduzidos alguns conceitos fundamentais sobre Planeamento de Experiências e Planos por Blocos para melhor compreensão dos capítulos seguintes.

#### **1.3.1 PLANEAMENTO DE EXPERIÊNCIAS**

Montgomery (2001) define experiência como sendo um teste ou um conjunto de testes, nos quais as variáveis independentes são controladas pelo investigador para que se possam observar e identificar os efeitos produzidos na variável resposta.

Os principais elementos de uma experiência são as unidades experimentais (podem ser animais, pessoas, matérias-primas, etc.), os fatores (por vezes são subdivididos em níveis ou tratamentos) e a variável-resposta (pode ser uma ou várias). Quando uma experiência não é planeada ou quando é incorretamente planeada, as informações obtidas poderão não ser viáveis e conseqüentemente, para além da perda de recursos, as conclusões não serão credíveis.

Os resultados observados numa experiência estão sujeitos a variações que podem ter diferentes origens. Às variações provenientes de fontes identificáveis e que, em princípio, poderão ser evitadas ou compensadas chamamos de erros sistemáticos. Este tipo de erros podem ocorrer devido a vários fatores como por exemplo, o instrumento utilizado, o método de observação utilizado ou até efeitos ambientais. Quando as causas da variação são aleatórias como por exemplo, pequenas variações das condições ambientais, erros humanos ou instrumentais, são chamados erros aleatórios. Enquanto os erros sistemáticos afetam a exatidão dos resultados, os erros aleatórios afetam a precisão dos dados e não podem ser eliminados totalmente devendo por isso ser analisados corretamente. Assim, um dos objetivos do Planeamento de Experiências é evitar os erros sistemáticos ou enviesamentos, minimizar e estimar os erros aleatórios, e garantir que os resultados sejam o mais precisos possível.

Os três princípios básicos do planeamento experimental são: a replicação (ou repetição da experiência básica para estimação do erro aleatório), a aleatorização (afetação de

tratamentos, ou níveis de fatores, às unidades experimentais para redução dos erros sistemáticos durante a experiência e para “garantir” a independência das observações e dos erros) e a utilização de blocos (técnica destinada a reduzir ou eliminar a variabilidade introduzida por fatores que podem influenciar a experiência mas que não interessam e/ou não foram explicitamente incluídos durante o planeamento).

Assim, o planeamento experimental apresenta várias vantagens para o investigador e conseqüentemente para o seu estudo, entre as quais, reduzir o erro experimental e portanto aumentar a precisão dos resultados, diminuir o tempo e os custos inerentes à realização da experiência.

### 1.3.2 ANÁLISE DA VARIÂNCIA

Entre o plano experimental e posterior análise dos dados existe uma estreita relação pois o método aplicado na análise depende diretamente do tipo de plano aplicado (Montgomery, 2001). Um plano adequado tornará a análise e interpretação dos resultados tão simples e clara quanto for possível.

A técnica estatística vulgarmente utilizada para analisar os resultados de experiências é designada por Análise de Variância (ou ANOVA, do inglês "Analysis Of Variance"). Esta técnica é utilizada para testar se determinado fator (tratamento), quando aplicado de modo diferente a grupos de unidades experimentais, tem um efeito significativo sobre determinada variável-resposta. A ANOVA baseia-se na decomposição da variação total em duas parcelas, as causas conhecidas (ex. tratamentos e blocos) e as causas desconhecidas (erro experimental ou resíduo). No entanto, a análise da variância só é possível partindo dos pressupostos de que os erros aleatórios são independentes, normalmente distribuídos, com média 0 (zero) e variância  $\sigma^2$ , ou seja,  $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$ . Os erros deverão ter a mesma variância  $\sigma^2$  e os efeitos do modelo deverão ser aditivos.

Para a verificação do pressuposto da homocedasticidade podem ser utilizados os gráficos de resíduos (erros). Se os pontos estão distribuídos aleatoriamente numa faixa, sem apresentar um comportamento definido, significa que há homocedasticidade. Caso

se verifique alguma tendência para crescimento, decrescimento ou oscilação, podem ser feitas transformações nas variáveis e o modelo deverá ser alterado. Para testar a igualdade de  $k$  variâncias podem ser ainda usados os testes de Bartlett e de Cochran, ver Oliveira, T.A. (2004).

A independência dos resíduos pode ser verificada através da análise da autocorrelação obtida pelo gráfico dos resíduos comparados com os valores preditos. O gráfico deverá apresentar pontos dispersos aleatoriamente. Poderá também optar-se pelo Teste de Durbin-Watson.

A normalidade dos erros pode ser analisada recorrendo aos testes de aderência, como por exemplo, o de Kolmogorov- Smirnov ou o de Shapiro Wilks.

Sabe-se que a ANOVA é uma técnica estatística bastante robusta, relativamente aos pressupostos das distribuições das populações e da homogeneidade das variâncias das amostras ou tratamentos. Assim, quando as amostras têm a mesma dimensão, a ANOVA não é fortemente afetada. Na realidade, a validade da ANOVA é ligeiramente afetada pelo pressuposto da normalidade, especialmente quando as amostras são de grande dimensão.

Assim, pode-se dizer que o teste da ANOVA é considerado válido, a não ser que as violações dos pressupostos sejam muito graves, e neste caso deverá ser usado um teste de análise de variância não paramétrico. Por exemplo, para amostras independentes poderá usar-se o Teste de Kruskal-Wallis e para amostras dependentes ou emparelhadas poderá ser utilizado o Teste de Durbin.

### 1.3.3 PLANOS EM BLOCOS COMPLETOS

Um plano diz-se *casualizado* quando os resultados são obtidos a partir de ensaios realizados de forma aleatória, sem a definição exata de uma variável de influência, ou dos seus limites de análise. Um plano casualizado deverá ser aplicado quando as unidades experimentais são homogêneas, o que nem sempre acontece. Assim, nos casos onde existe heterogeneidade, há necessidade de agrupar as unidades experimentais em parcelas ou em blocos que irão representar uma porção mais homogênea do material em estudo. Assim, a cada um dos  $b$  blocos serão aplicados aleatoriamente os  $v$  tratamentos. Cada bloco consistirá numa réplica da experiência e cada variedade ou tratamento repete-se  $r$  vezes. O número de unidades experimentais será  $br$ . Este tipo de plano é denominado de plano em *Blocos Completos Casualizados* e pretende melhorar o rigor das estimativas das diferenças entre as médias de determinadas variedades, minimizando a variabilidade dentro de cada bloco e maximizando a variabilidade entre blocos, (Silva, 2009). Pressupõe-se assim a heterogeneidade entre blocos mas homogeneidade dentro dos blocos.

A análise utilizada para este tipo de planos é a ANOVA a dois fatores, sem interação, tendo como principal objetivo o estudo dos resultados dos tratamentos e não as diferenças entre blocos. Nos Planos em Blocos Completos Casualizados é permitido utilizar qualquer número de tratamentos e blocos e uma vez que a variação entre blocos é isolada, conduz a uma estimativa mais exata para a variância residual. No entanto, a exigência de homogeneidade dentro dos blocos limita o número de tratamentos, que não deve ser elevado.

### 1.3.4 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS

Quando num Plano em Blocos Casualizados o número de variedades é superior ao tamanho dos blocos, temos um *Plano em Blocos Incompletos* (Incomplete Block Design – IBD). Neste tipo de planos não é necessário que todos os blocos tenham a mesma

dimensão e não se exige que cada variedade se repita o mesmo número de vezes, aumentando desta forma o seu campo de aplicabilidade. Pelo facto dos planos poderem ser desequilibrados e sem a verificação dos pressupostos usuais, a análise dos IBD pode tornar-se um pouco complexa. Surgem assim os *Planos em Blocos Incompletos Equilibrados* (Balanced Incomplete Block Designs – BIBD) nos quais todos os pares de variedades ocorrem igual número de vezes ao longo dos blocos. Atribuindo  $v$  variedades e  $b$  blocos de dimensão  $k$ , ( $k < v$ ), um plano em blocos incompletos equilibrados pode ser construído tomando combinações de  $v$ ,  $k$  a  $k$ , e impondo uma determinada combinação das variedades em cada bloco, (Silva, 2009). A repetição de blocos nos BIBD apresenta várias vantagens para os resultados de uma experiência. Para além de reduzir os custos de implementação das experiências e da facilidade de aplicação prática, permitem obter resultados viáveis mesmo quando algumas unidades experimentais são perdidas. O investigador pode ainda optar pelas combinações de tratamentos mais adequadas podendo até evitar as combinações que têm menos interesse para a experiência (Foody and Hedayat, 1977) e (Hedayat and Hwang, 1984). Por outro lado, caso não ocorra a repetição de blocos no plano, alguns dos contrastes dos tratamentos poderão não ser estimáveis (Oliveira, 2010).

Apesar da expressão da variância de comparações para cada plano ser a mesma, o número de comparações de efeitos dos blocos com a mesma variância é diferente para os BIBD considerando ou não a repetição de blocos, permitindo assim uma maior aplicabilidade destes planos. Ver Oliveira et al. (2006).

Uma abordagem mais detalhada dos BIBD com e sem repetição será apresentada nos capítulos seguintes deste trabalho.

Como forma de tentar ultrapassar as exigências impostas dos BIBD, surgem os *Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados* (Partially balanced incomplete block designs – PBIBD). Como nos BIBD  $\lambda$  é um número inteiro, este facto poderá originar um elevado número de blocos de grande dimensão, dificultando assim a realização de uma experiência. Por outro lado, neste tipo de plano, a variância da diferença entre os

efeitos dos pares dos tratamentos estimados tem o mesmo valor para qualquer par de tratamentos, o que pode não acontecer no caso dos PBIBD (Mascarenhas, 2008).

Em Mascarenhas, V. (2008) podemos encontrar a seguinte definição para os PBIBD:

“Um esquema de associação com  $m$  classes, definido pelos respectivos parâmetros, é um Plano Incompleto Parcialmente Equilibrado com  $m$  classes de associação (PBIBD ( $m$ )) se os  $v$  tratamentos estão dispostos em  $b$  blocos de dimensão  $k$  e  $k < v$ , tal que:

- i*) Cada tratamento ocorre no máximo uma única vez em cada bloco (plano binário) de dimensão  $k$  (plano próprio).
- ii*) Cada tratamento ocorre em  $r$  blocos (plano equi-replicado).
- iii*) Dois tratamentos  $\alpha$  e  $\beta$   $i$ -ésimos associados ocorrem juntos em  $\lambda_i$  blocos, sendo  $\lambda_i$  independente do par de tratamentos  $i$ -ésimos associados escolhidos.”

Assim, o Plano PBIBD ( $m$ ) com  $m$  classes de associação, é caracterizado por cinco parâmetros  $b, v, r, k, e \lambda_i$ , não independentes, com  $\lambda_i = 1, 2, \dots, m$ ,

Uma abordagem mais detalhada dos PBIBD poderá ser encontrada em Oliveira, T (1999) e Mascarenhas, V. (2008).

## **CAPÍTULO 2**

### **PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS**

## 2 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS

### 2.1 DEFINIÇÃO E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

Quando o número de repetições de todos os pares de tratamentos num plano experimental é igual, obtemos os chamados Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (BIBD). Segundo Mascarenhas, V. (2008), “um BIBD é um plano em blocos incompletos binário, apropriado e equireplicado.”

Num Plano em Blocos Incompletos Equilibrados, todos os blocos possuem o mesmo número de tratamentos, sendo esse número definido como  $k$ , cada tratamento ocorre  $r$  vezes no planejamento (ou é replicado  $r$  vezes), e assim, existem  $n = v.r = b.k$  observações.

Um BIBD é caracterizado por cinco parâmetros  $v, b, r, k$ , e,  $\lambda$  não independentes, que são números inteiros, tais que:

$$n = rv = bk \quad (\text{i})$$

$$r(k - 1) = \lambda(v - 1) \quad (\text{ii})$$

$$b \geq v \quad (\text{desigualdade de Fisher}) \quad (\text{iii})$$

Onde  $v$  representa o nº de tratamentos ou variedades,  $b$  o nº de blocos,  $r$  o número de vezes de ocorrência de cada tratamento,  $k$  o nº de tratamentos por bloco, e  $\lambda$  (inteiro) o número de vezes que cada par de tratamentos aparece no mesmo bloco.

Um Plano em Blocos Incompletos Equilibrados poderá não existir se as condições (i), (ii) e (iii) não forem satisfeitas. Por exemplo, considerando  $v = b = 6$  e  $r = k = 3$  verifica-se que  $\lambda = 6/5$  não é um número inteiro. Por outro lado, se considerarmos  $v = 15$ ,  $b = 21$ ,  $r = 7$ ,  $k = 5$  temos que  $\lambda = 2$  que é inteiro, no entanto não existe um BIBD nestas condições. Assim, estas condições não são suficientes para garantir a

existência de um BIBD e Fisher demonstrou que se  $b < v$  não é possível encontrar este tipo de Planos.

Vários investigadores procuram encontrar uma condição que seja por si só suficiente para a existência dos BIBD. Nesse sentido, Reiss (1859) e Moore (1893) demonstram que as condições  $\lambda(v - 1) \equiv 0 \pmod{(k - 1)}$  e  $\lambda v(v - 1) \equiv 0 \pmod{k(k - 1)}$  são suficientes para a existência dos BIBD com  $k = 3$  e  $\lambda = 1$ , e mais tarde, Bose (1930) acrescenta os BIBD com  $k = 3$  e  $\lambda = 2$ . Em 1961, Hanani apresenta a prova de que estas condições são suficientes para os BIBD com  $k = 3$  e 4 (para qualquer  $\lambda$ ) e para  $k = 5$  com  $\lambda = 1, 4, 20$ . Em Abel, R. e Julian, R. (2004) podemos encontrar o estudo das condições suficientes para a existência de BIBD com  $k = 9$  (para vários valores de  $\lambda$ ).

Uma lista dos BIBD existentes pode ser encontrada em Cochran e Cox (1957) e em Fisher e Yates (1963).

## 2.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS BIBD

### 2.2.1 MODELO ESTATÍSTICO

Considerando um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) já referidas anteriormente, o modelo estatístico para este plano é dado por:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, v \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases}$$

onde  $y_{ij}$  é a  $i$ -ésima observação no  $j$ -ésimo bloco,  $\mu$  é média geral,  $\tau_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento,  $\beta_j$  é o efeito do  $j$ -ésimo bloco, e  $e_{ij}$  é o efeito do erro aleatório. Para este modelo estatístico pressupõe-se que os erros aleatórios são independentes, normalmente distribuídos, com média 0 (zero) e variância  $\sigma^2$ , ou seja,  $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$ .

### 2.2.2 TESTE PARAMÉTRICO: ANÁLISE DA VARIÂNCIA

A técnica da análise da variância (ANOVA) é um teste paramétrico que consiste na análise da variação total dos valores das observações em relação à média calculada desses valores, e engloba a ‘partição’ dessa variação total em componentes. A ANOVA pressupõe a normalidade da variável resposta e a homogeneidade das variâncias entre os grupos. Vejamos agora a construção da tabela Anova para este modelo.

A variabilidade da soma de quadrados total será particionada da seguinte forma:

$$SQ_T = SQ_{Trat(a_j)} + SQ_b + SQ_e$$

Onde,

- $SQ_T = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{00}^2}{N}$  é a soma de quadrados para o total ou a variação dos dados,  $y_{00}$  representa a soma total das observações e  $N = rv = bk$  é o número total de observações.
- $SQ_{Trat(a_j)} = \frac{k \sum_{j=1}^v (Q_j)^2}{\lambda v}$  é a soma de quadrados para tratamentos ajustados, onde  $Q_i$  é

o ajuste global para o  $i$ -ésimo tratamento.

Uma expressão para  $Q_i$  é dada por:  $Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, v$ , onde  $n_{ij}$  toma o valor 1 se o  $i$ -ésimo tratamento aparece no  $j$ -ésimo bloco, e toma o valor 0 caso contrário. A soma de quadrados dos tratamentos tem  $v - 1$  graus de liberdade.

- $SQb = \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N}$  é a soma de quadrados dos blocos, onde  $y_{oj}$  representa o total do  $j$ -ésimo bloco na qual a soma de quadrados dos blocos tem  $b - 1$  graus de liberdade.
- $SQe = SQ_T - SQ_{trat(a_j)} - SQb$  é a soma de quadrados para o erro e tem  $N - v - b + 1$  graus de liberdade.

Assim, para verificar se há diferenças significativas no efeito dos tratamentos serão testadas as seguintes hipóteses:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a \text{ versus } H_1: \tau_i \neq 0 \text{ para pelo menos um } i.$$

A estatística de teste é dada por:

$$F_o = \frac{QM_{trat(a_j)}}{QMe} \sim F_{\alpha; v-1; N-v-b+1}$$

onde  $QM_{trat(a_j)} = \frac{SQ_{trat(a_j)}}{v-1}$ ,  $QMe = \frac{SQe}{N-v-b+1}$  e a razão  $F_o$  é o valor observado da estatística de teste  $F$  da distribuição  $F$  de Fisher com  $v - 1$  e  $N - v - b + 1$  graus de liberdade.

A regra de decisão é dada por: Se  $F_o > F_{\alpha; v-1; N-v-b+1}$  deve-se rejeitar  $H_0$ .

A análise efetuada é denominada de análise intra-bloco porque as diferenças entre blocos são eliminadas e todos os contrastes no efeito dos tratamentos podem ser expressos como comparação entre observações no mesmo bloco.

Vejamos então a tabela ANOVA para a análise intra-bloco de um BIBD:

**Tabela 1: Tabela Anova para análise intra-bloco de um BIBD**

Fonte de variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrados médios	$F_o$
Tratamentos (ajustados)	$\frac{k \sum_{j=1}^v (Q_j)^2}{\lambda v}$	$v - 1$	$\frac{SQ_{trat(a_j)}}{v - 1}$	$\frac{QM_{trat(a_j)}}{QM_e}$
Blocos	$\sum_{j=1}^b \frac{y_{0j}^2}{k} - \frac{y_{00}^2}{N}$	$b - 1$	$\frac{SQ_b}{b - 1}$	$\frac{QM_b}{QM_e}$
Erro	$SQ_T - SQ_{trat(a_j)} - SQ_b$	$N - v - b + 1$	$\frac{SQ_e}{N - v - b + 1}$	
Total	$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{00}^2}{N}$	-	-	

Quando se pretender analisar o estudo dos efeitos dos blocos, deverá fazer-se uma partição diferente da soma de quadrados total:

$$SQ_T = SQ_e + SQ_{trat} + SQ_{b(a_j)}$$

onde  $SQ_{trat}$  é não ajustada e  $SQ_b$  é ajustada.

A construção da tabela ANOVA ajustada para o caso de um BIBD simétrico ( $v = b$ ) e de um BIBD completo encontra-se em Oliveira; T.A. (2004).

### 2.2.3 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

Considerando o modelo acima descrito para um BIBD, temos que as equações normais de  $\mu$ ,  $\tau_i$ , e  $\beta_j$  obtidas pelo método dos mínimos quadrados são dadas por:

$$\mu: N\hat{\mu} + r \sum_{i=1}^v \hat{\tau}_i + k \sum_{j=1}^b n_{ij} \hat{\beta}_j = y_{00}$$

$$\tau_i: r\hat{\mu} + r\hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b n_{ij}\hat{\beta}_j = y_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$\beta_j: k\hat{\mu} + k\hat{\tau}_i + \sum_{i=1}^v n_{ij}\hat{\tau}_i = y_{oj}, \quad j = 1, 2, \dots, b$$

Impondo agora que  $\sum \hat{\tau}_i = \sum \hat{\beta}_i = 0$  vem que  $\hat{\mu} = \bar{y}$ .

Finalmente, podemos obter as estimativas dos mínimos quadrados para os efeitos dos tratamentos e para os efeitos dos blocos num BIBD dadas por:

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda v}, \quad i = 1, 2, \dots, v \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_j = \frac{rQ'_j}{\lambda b}, \quad j = 1, 2, \dots, b$$

com  $Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj}$  e  $Q'_j = y_{oj} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^v n_{ij} \cdot y_{io}$ .

Temos ainda que,

$$\text{var}(Q_i) = \frac{(k-1)r}{k} \sigma^2, \quad \text{var}(\hat{\tau}_i) = \frac{k(v-1)}{\lambda v^2} \sigma^2, \quad \text{var}(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2$$

Sabe-se ainda que a eficiência da estimação dos efeitos dos tratamentos pode ser medida através do fator  $E = \frac{\lambda v}{rk}$  (T. Oliveira, 1994), para qualquer plano  $E < 1$ .

Uma descrição mais detalhada para a obtenção das equações em cima poderá ser encontrada em Silva (2009).

#### 2.2.4 MATRIZ DE INFORMAÇÃO E ESTIMAÇÃO DOS CONTRASTES DE TRATAMENTOS

Consideremos um plano em blocos com  $v$  tratamentos e  $b$  blocos com, a matriz de incidência  $N = [n_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$ ,  $j = 1, 2, \dots, b$  onde  $n_{ij}$  representa o número de vezes que a  $i$ -ésima variedade ocorre no  $j$ -ésimo bloco e  $n = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b n_{ij}$ .

A seguinte notação será usada:

$r = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_v]'$  - vetor da replicação dos tratamentos

$k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_b]'$  - vetor da dimensão dos blocos

$1_v$  - vetor de unidades do tipo  $v \times 1$

$I_v$  - matriz identidade de ordem  $v$

$\eta$  - valor próprio

Normalmente denotada por  $C = C_N$ , a matriz de informação de  $N$  para estimação dos efeitos dos tratamentos, é dada por:

$$C = R - NK^{-1}N' = \frac{\lambda v}{k} \left( I_v - \frac{1}{v} \cdot 1_v 1_v' \right)$$

onde  $R = \text{diag}[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_v]$  e  $K = \text{diag}[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_b]$ .

Para cada elemento da diagonal principal da matriz  $C$ , temos que:

$$C_{ij} = \frac{\lambda v}{k} \left( 1 - \frac{1}{v} \cdot 1 \right) = \frac{\lambda v}{k} - \frac{\lambda v}{k} \cdot \frac{1}{v} = \frac{\lambda(v-1)}{k} = \frac{r(k-1)}{k} \quad \text{para } i = j$$

Os elementos fora da diagonal principal são dados por:

$$C_{ij} = \frac{\lambda v}{k} \left( 0 - \frac{1}{v} \cdot 1 \right) = -\frac{\lambda v}{k} \cdot \frac{1}{v} = -\frac{\lambda}{k} \quad \text{para } i \neq j$$

A matriz  $C$  é uma matriz quadrada de ordem  $v$ , simétrica e o somatório dos elementos de cada linha ou coluna é igual a zero, o que implica que  $r(C) \leq v - 1$ .<sup>1</sup>

Vejamos agora algumas definições que serão úteis para melhor compreensão da importância da matriz de informação:

---

<sup>1</sup>  $r(C)$  representa a característica da matriz  $C$ , ou seja, o maior número de linhas(colunas) linearmente independentes.

**Definição 2.1:** Dois tratamentos  $1 \leq s \neq t \leq v$  dizem-se *associados* se existe um bloco  $j_0$  que simultaneamente inclui os tratamentos  $s$  e  $t$ . Para além disso,  $s$  e  $t$  dizem-se *conexos* se existir uma cadeia  $(i_1, \dots, i_{q+1})$  de tratamentos com  $i_1 = s$  e  $i_{q+1} = t$  tal que quaisquer dois tratamentos vizinhos  $i_l, i_{l+1}$  são associados com  $1 \leq l \leq q$ .

**Definição 2.2:** Um Plano  $D$  diz-se *conexo* se quaisquer dois tratamentos são conexos. Caso contrário,  $D$  diz-se *desconexo*.

**Definição 2.3:** Consideremos um planeamento com  $g$  grupos, cujos tratamentos são  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_g$ . Um *contraste de tratamentos* é qualquer função do tipo  $\psi = \sum_{i=1}^g c_i \tau_i$ , com  $\sum_{i=1}^g c_i = 0$ .

O conceito de planos conexos foi introduzido por Bose (1950/1951). Mais tarde, este conceito foi novamente discutido e desenvolvido por Eccleston e Hedayat (1974). Sabe-se assim que, para o modelo estatístico apresentado, a estimação de todos os contrastes de tratamentos é equivalente à conexidade do plano  $D$ .

Chakrabarti (1963), demonstrou que  $D$  é conexo se  $r(C) = v - 1$  e, admitindo esta igualdade, para o modelo estatístico apresentado, todos os contrastes de tratamento elementares  $(\tau_i - \tau_j)$  são estimáveis.

Em Kempthorne, O. e Hinkelmann, K. (2005), encontramos uma abordagem mais detalhada à análise intra-blocos para os BIBD, dando especial importância à matriz de informação e aos estimadores para o efeito dos tratamentos.

### 2.2.5 ANÁLISE INTER-BLOCO E INTER-INTRA BLOCO

Em 1940, Yates verificou que, sendo os efeitos dos blocos variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância  $\sigma_\beta^2$ , poderia obter informação adicional

sobre os efeitos de tratamentos,  $\tau_i$ . Esta análise seria assim denominada análise inter-blocos. O modelo seguido para estas observações (John, 1971) é dado por:

$$y_{oj} = k\mu + \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i + f_i$$

onde  $f_i = k\beta_j + \sum_{j=1}^b \varepsilon_{ij}$  é considerado o erro ou resíduo onde  $E(f_i) = 0$  e  $\sigma^2(f_i) = \text{var}(f_i) = k^2\sigma_\varepsilon^2 + k^2\sigma_\eta^2$ .

Minimizando a função dos mínimos quadrados obtém-se os estimadores inter-bloco de  $\mu$  e  $\tau_i$ :

$$\tilde{\mu} = y_{..}$$

$$\tilde{\tau}_i = \frac{\sum_{j=1}^b n_{ij}y_{oj} - kry_{..}}{r - \lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

onde é aplicada a restrição  $\sum \tilde{\tau}_i = 0$ .

Prova-se ainda que, os estimadores inter-bloco e os estimadores intra-bloco são não correlacionados, ou seja,  $COV(\hat{\tau}_i, \tilde{\tau}_i) = 0$ .

Em Montgomery (2001), poderá verificar-se que combinando os estimadores inter-bloco e os estimadores intra-bloco, encontra-se um estimador não enviesado para a variância para cada  $\tau_i$  através de uma combinação linear entre os dois estimadores:

$$\text{var}(\hat{\tau}_i) = \frac{k(v-1)}{\lambda v^2} \sigma^2 \quad (\text{Intra-Bloco})$$

$$\text{var}(\tilde{\tau}_i) = \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma^2\beta)}{v(r-\lambda)} \quad (\text{Inter-Bloco})$$

Assim, para estimar  $\tau_i$ , é necessário utilizar uma combinação linear dos dois estimadores:

$$\tau_i^* = \alpha_1 \hat{\tau}_i + \alpha_2 \tilde{\tau}_i$$

Uma abordagem mais detalhada com todos os cálculos necessários para obter o estimador combinado, encontra-se em Montgomery (2001). A expressão obtida é dada por:

$$\tau_i^* = \frac{kQ_i(\widehat{\sigma}^2 + k\widehat{\sigma}_\beta^2) + (\sum_{j=1}^b n_{ij}y_{oj} - kry_{\bullet\bullet})\widehat{\sigma}^2}{(r-\lambda)\widehat{\sigma}^2 + \lambda v(\widehat{\sigma}^2 + k\widehat{\sigma}_\beta^2)}, \text{ se } \sigma_\beta^2 > 0$$

e,

$$\tau_i^* = \frac{y_{io} - \frac{1}{v}y_{oo}}{r}, \text{ se } \sigma_\beta^2 = 0$$

### 2.2.6 MÉTODO DE COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE TUKEY

Quando, depois da análise da variância do plano, se rejeita a hipótese nula da igualdade dos tratamentos, não se tem informação sobre qual ou quais os tratamentos são responsáveis pela diferença, sendo útil fazer diversas comparações entre os tratamentos de forma a analisar essas diferenças. Uma das possibilidades para efetuar comparações múltiplas consiste em comparar todos os pares de tratamentos,  $\tau_k$  e  $\tau_l$  para  $k \neq l$ .

Muitos testes de comparação múltipla já foram desenvolvidos, destacando-se os mais conhecidos, o teste de Tukey, o teste de Scheffé e o teste de Duncan. O método de Tukey consiste na construção de intervalos de confiança para todos os pares de tratamentos de tal forma que o conjunto de todos os intervalos tenha um determinado grau de confiança  $\alpha$ . O método de construção destes intervalos depende do facto dos grupos terem ou não a mesma dimensão.

Assim, para os BIBD (Oliveira, T., 1994) os intervalos com grau de confiança  $1 - \alpha$ , para  $\tau_k - \tau_l$  com  $k \neq l$  são dados por:

$$(\hat{\tau}_k - \hat{\tau}_l) \pm Q_{v,gle,\alpha} \sqrt{\frac{kQM_e}{\lambda v}},$$

onde  $Q_{v,gle,\alpha}$  é o valor da tabela “Studentized Range”, no caso dos grupos terem a mesma dimensão. Caso existam diferenças entre as dimensões dos grupos, é exigido

que a  $dim_{max} \leq 2dim_{min}$ , caso esta condição não seja satisfeita é utilizado o método de Scheffé. Uma vantagem para este teste é o facto de, quando os grupos têm a mesma dimensão, os intervalos de confiança têm menor amplitude e logo é mais preciso.

### 2.2.7 TESTE NÃO PARAMÉTRICO -TESTE DE DURBIN

Em 1951, Durbin apresentou um teste de graduações que pode ser usado para testar a hipótese nula de não haver diferenças entre os tratamentos num plano em blocos incompletos equilibrados. O teste de Durbin deve ser preferido ao teste paramétrico, baseado na Análise da Variância, se as condições de normalidade não se verificarem, se for desejável um método de análise simples, ou se as observações apresentarem a forma de ordens.

Seja  $X_{ij}$  os resultados do tratamento  $j$  no bloco  $i$  se o tratamento  $j$  aparece no bloco  $i$ . A atribuição de ordens é feita dentro de cada bloco. Ordenam-se os  $X_{ij}$  e assinala-se com número de ordem 1 a menor observação no bloco, número de ordem 2 a segunda menor, e assim por diante, até ao número de ordem  $k$ , que é a maior de todas as observações no bloco  $i$ , já que existe apenas  $k$  observações dentro de cada bloco.

Denota-se por  $R(X_{ij})$  o número de ordem de  $X_{ij}$  onde  $X_{ij}$  existe. Efetua-se a soma das ordens assinaladas aos  $r$  valores observados para o  $j$ -ésimo tratamento e chama-se esta soma de  $R_j$ :

$$R_j = \sum_{i=1}^b R(X_{ij})$$

onde apenas  $r$  valores de  $R(X_{ij})$  existem para cada tratamento  $j$ .

Caso as observações sejam variáveis não numéricas mas sejam passíveis de serem ordenadas dentro dos blocos de acordo com algum critério de interesse, a ordem de cada observação é anotada e os valores de  $R_j$  são calculados da forma anterior. Se houver empates, recomenda-se assinalar a ordem média às observações empatadas.

Para este teste não paramétrico, pressupõe-se que os blocos sejam mutuamente independentes uns dos outros e que dentro de cada bloco as observações possam ser ordenadas em ordem crescente, de acordo com algum critério de interesse.

As hipóteses a serem testadas são:

$H_0$ : Os tratamentos têm efeitos idênticos (as ordens das variáveis aleatórias, dentro de cada bloco, são igualmente prováveis)

versus

$H_1$ : Pelo menos um tratamento tende a produzir valores maiores do que pelo menos um dos outros tratamentos.

A estatística de teste é dada por:

$$T_2 = \frac{T_1(v-1)}{(b(k-1) - T_1)/(bk - b - v + 1)}$$

onde,

$$T_1 = \frac{(v-1)[\sum_{j=1}^v R_j^2 - rC]}{A - C}$$

$v$  = Número de tratamentos

$k$  = Número de tratamentos por bloco

$b$  = Número de blocos

$r$  = Número de vezes que cada tratamento ocorre

$$A = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^v (R(X_{ij}))^2$$

$$C = \frac{bk(k+1)^2}{4}$$

Ao nível de significância  $\alpha$ , a  $H_0$  é rejeitada se  $T_2 > c$ , sendo  $c$  o ponto crítico da distribuição assintótica de  $T_2$ ,  $\chi^2$  com  $k - 1$  graus de liberdade, que define uma região de rejeição de tamanho  $\alpha$ .

## Comparações múltiplas

Caso a hipótese nula seja rejeitada, os pares de tratamentos serão comparados. Os tratamentos  $i$  e  $j$  consideram-se significativamente diferentes se,

$$|R_j - R_i| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, bk-b-v+1} \sqrt{\frac{2(A-C)r}{bk-b-v+1} \left(1 - \frac{T_1}{b(k-1)}\right)}$$

Onde  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  é o quantil da distribuição  $t$  de Student com  $bk - b - v + 1$  graus de liberdade. O lado direito da desigualdade é denotado por *Diferença Mínima Significativa*.

## 2.3 SOFTWARE ESTATÍSTICO PARA ANÁLISE DOS BIBD

### 2.3.1 INTRODUÇÃO

Hoje em dia existem muitos softwares estatísticos que disponibilizam um vasto leque de ferramentas que permitem ao investigador o tratamento e análise dos dados de uma forma mais simples e muito menos morosa. Softwares como o Excel, o SPSS, o R, o Minitab, o Statistica, o Stata, apresentam aplicativos estatísticos capazes de importar ficheiros de dados gravados noutras aplicações, escolher o tratamento de análise adequado para os dados, desde estatísticas descritivas a vários tipos de gráficos, selecionar as variáveis de interesse para cada estudo, entre outros.

Dos softwares já mencionados, destaca-se o software R, pois ao mesmo tempo que é uma linguagem de programação, o R é também um ambiente para computação estatística e gráfica. Sendo este software gratuito, torna-se uma poderosa ferramenta não só para estatísticos como também para outros investigadores que pretendam obter resultados fiáveis, menos morosos e com menor custo. O R é uma ferramenta muito eficiente, com boas capacidades ao nível da programação e com um conjunto muito vasto de packages que está em constante crescimento.

No planeamento de experiências ainda é recente o uso de softwares estatísticos mas, cada vez mais, os investigadores recorrem à tecnologia de modo a avançar significativamente nas suas investigações. No software R, já encontramos diversos packages que permitem facilmente obter planeamentos e fazer a sua análise com maior rapidez e com grande eficiência, como veremos de seguida.

### 2.3.2 PLANOS EM BLOCOS E A LINGUAGEM R

Existem atualmente alguns packages no R que disponibilizam alguns recursos para o planeamento experimental e em particular para o planeamento em blocos incompletos equilibrados, nomeadamente o package *dae*, que contém vários comandos, entre eles destacam-se:

*decomp.relate* Examina a relação entre os valores próprios para duas decomposições.

*fac.layout* Gera um plano aleatório para um delineamento experimental;

*fac.gen* Gera todas as combinações para vários fatores;

*fac.combine* Combina vários fatores num só;

*fac.vcmat* Forma a matriz para a componente da variância de um fator;

*no.reps* Calcula o número de repetições para um delineamento experimental;

*power.exp* Calcula o poder de um delineamento experimental;

*resid.errors* Retira os resíduos para um modelo ajustado;

*tukey.1df* Efetua o teste de Tukey com 1 grau de liberdade;

*yates.effects* Retira os efeitos de Yates.

No package *crossdes* podemos encontrar o comando *find.BIB* que é usado para gerar

planos em blocos com um número específico de tratamentos, blocos (linhas do plano) e elementos por blocos (colunas do plano). Este comando poderá gerar planos não equilibrados, no entanto, usando o comando *isGYD* poderá ser verificado se o plano gerado é ou não equilibrado. Neste package destacam-se ainda alguns comandos:

*des.MOLS* Constrói planos baseados nos MOLS;

*MOLS* Constrói conjuntos completos de quadrados latinos mutualmente ortogonais;

Também o package *agricolae* é frequentemente utilizado nos planeamentos experimentais em agricultura, nomeadamente os planos fatoriais, BIB e BIBD, quadrados latinos, entre outros. Destacam-se alguns comandos:

*BIB.test* Obtém a ANOVA de um BIBD e compara as médias ajustadas;

*DAU.test* Obtém a ANOVA do Plano em Blocos Aumentado;

*design.bib* Cria um Plano Casualizado por Blocos Incompletos Equilibrados;

*design.crd* Gera um Plano Casualizado Completo com iguais ou diferentes repetições;

*design.lsd* Gera Quadrados Latinos;

*design.split* Gera Planos Split Plot;

*HSD.test* Efetua o teste de comparações múltiplas de Tukey;

*PBIB.test* Efetua a ANOVA dos PBIBD;

*design.graeco Graeco* Gera quadrados greco-latinos;

Existe ainda a possibilidade de recorrer a outros comandos que se encontram nos packages mais básicos e sem necessidade de instalar outros packages. Com efeito, poderá ser formada uma matriz com os dados observados e, a partir dessa matriz, ajustar um modelo através do comando *lm*, e finalmente para a construção da tabela ANOVA, o R apresenta o comando *anova*. Através do comando *outer*, são obtidas as diferenças

entre os tratamentos e poderá ser obtida a significância dos tratamentos bem como a eficiência relativa, recorrendo a operações básicas na linha de comando.

No capítulo 6, apresentamos um exemplo de aplicação às Ciências da Educação, onde na computação recorreremos ao software R e ao comando *BIB.test* para a análise da variância do plano e para a comparação múltipla dos tratamentos pelo teste de Tukey.

## 2.4 CLASSES ESPECIAIS DOS BIBD

### 2.4.1 BIBD $\alpha$ –RESOLÚVEL

Em termos gerais, um BIBD diz-se  $\alpha$  –resolúvel se os seus blocos podem ser divididos em  $t$  conjuntos com  $m$  blocos cada, de forma a que em cada conjunto (classe de resolução) cada tratamento ocorra  $\alpha$  vezes (Shirkhande e Raghavarao, 1963).

Um BIBD  $\alpha$ -Resolúvel é denominado de  $\alpha$ -Resolúvel Afim se quaisquer dois blocos pertencentes a quaisquer diferentes classes de resolução tiverem precisamente o mesmo número de tratamentos em comum,  $\frac{k^2}{v}$ . Assim, nestas condições temos que,

$$v\alpha = km, \quad b = tm \text{ e } r = t\alpha.$$

Quando  $\alpha = 1$ , obtemos um BIBD Resolúvel e Resolúvel Afim inicialmente introduzidos por Bose (1942). Para BIBD resolúveis, a inequação de Fisher é agora dada por  $b \geq v + r - 1$  e quando  $b = v + r - 1$  diz-se que o plano é resolúvel afim (Raghavarao, 1971).

Kageyama (1972) mostrou ainda que para um BIBD com os parâmetros  $v = nk$ ,  $b = nr$ ,  $r, k, \lambda$ , se  $b > v + r - 1$ , então  $b \geq 2v + r - 2$ . Esta inequação ainda é válida para BIBD resolúveis não afins.

Generalizando este resultado para os BIBD  $\alpha$ -resolúvel não afim de parâmetros  $v$ ,  $b = tm, r = t\alpha, k, \lambda$ , tem-se que  $b \geq \frac{2(v-1)}{\alpha} + r$ .

Diz-se ainda que um BIBD será parcialmente resolúvel se  $\frac{v}{k}$  for um número inteiro e se existirem  $\frac{v}{k}$  blocos cuja união compreenda cada variedade apenas uma vez (Silva, 2009).

**Exemplo 2.1**

Consideremos o BIBD com os parâmetros  $(6, 20, 10, 3, 4)$ , formado pelos blocos:

(1,2,5)		(3,4,6)
(1,2,6)		(3,4,5)
(1,3,4)		(2,5,6)
(1,3,6)		(2,4,5)
(1,4,5)		(2,3,6)
(2,3,4)		(1,5,6)
(2,3,5)		(1,4,6)
(2,4,6)		(1,3,5)
(3,5,6)		(1,2,4)
(4,5,6)		(1,2,3)

Este plano é um BIBD 5-resolúvel onde podemos verificar que cada um dos dois grupos de 10 blocos formam um BIBD com os parâmetros  $(6, 10, 5, 3, 2)$ .

**Exemplo 2.2**

Seja agora o BIBD com os parâmetros  $(9, 12, 4, 3, 1)$ . A solução para este plano é apresentada em baixo:

(1,2,3)	(1,4,7)	(1,5,9)	(1,6,8)
(4,5,6)	(2,5,8)	(2,6,7)	(2,4,9)
(7,8,9)	(3,6,9)	(3,4,8)	(3,5,7)

Facilmente se verifica que este plano é resolúvel afim, pois cada tratamento ocorre apenas uma vez em cada conjunto de blocos e  $b = 9 + 4 - 1 = 12$ .

### 2.4.2 BIBD COM $\lambda = 1$ : SISTEMAS DE STEINER

Apresenta-se agora a seguinte definição:

**Definição 2.7:** Um sistema de Steiner (Steiner System)  $S(t, k, v)$  é formado por um conjunto  $X$  com  $v$  pontos e por uma coleção  $B$  de subconjuntos de  $X$  chamados de blocos, cada um contendo  $k$  pontos, tais que qualquer subconjunto de  $X$  com  $t$  elementos está contido precisamente num único bloco. Um sistema de Steiner com os parâmetros  $S(2, k, v)$  é um BIBD.

Num BIBD com os parâmetros  $k = 2$  e  $\lambda = 1$ , tem-se que  $r = v - 1$  e  $b = \frac{v(v-1)}{2}$ . Isto significa que os blocos do plano são todos os possíveis pares de variedades, ou seja, o conjunto dos blocos é o conjunto de todos os subconjuntos de dimensão 2 de  $X$ . Em termos geométricos, se considerarmos as variedades do plano como sendo os vértices e os blocos como sendo as arestas, um plano com estes parâmetros forma um grafo completo com  $v$  vértices. Por exemplo, considerando  $v = 5$  temos que  $r = 4$  e  $b = 10$ , o grafo correspondente pode ser representado por:

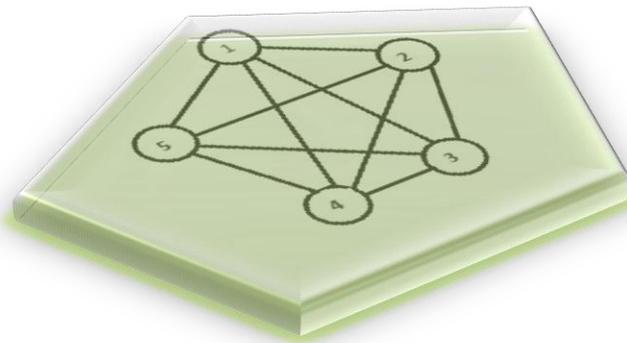


Ilustração 1: Grafo que representa a estrutura do BIBD(5,10,4,2,1)

### 2.4.3 BIBD COM $K = 3$ E $\lambda = 1$ : SISTEMAS TRIPLOS DE STEINER

Um sistema de Steiner com os parâmetros  $S(2,3, v)$  é denominado de Sistema Triplo de Steiner (Steiner triple System, STS). Obtemos ainda um BIBD com  $k = 3$  e  $\lambda = 1$ , uma vez que os blocos são triplos e cada par de variedades ocorre exatamente num triplo. Verifica-se ainda que  $r = \frac{v-1}{2}$  e  $b = \frac{v(v-1)}{6}$ . Como  $r$  é um número inteiro,  $v$  deverá ser ímpar. Por outro lado, como  $b$  também é um inteiro e  $v$  ímpar, o 3 divide  $v$  ou o 6 divide  $v - 1$ , ou seja  $v \equiv 1,3 \pmod{6}$ . Esta condição necessária também é suficiente para a existência de um sistema triplo de Steiner (Kirkman, 1847).

Considerando um STS de parâmetros  $S(2,3,9)$  verifica-se que se trata do BIBD de parâmetros  $(9, 12, 4, 3, 1)$  dado no exemplo 2.2.

### 2.4.4 PLANOS DE HADAMARD

Apresenta-se agora a seguinte definição:

**Definição 2.8:** A matriz de Hadamard  $H$ , é uma matriz quadrada de ordem  $n$  constituída pelos elementos  $\pm 1$  em que  $HH^T = nI$  onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

Os planos de Hadamard (Hadamard designs) são um caso particular dos BIBD simétricos com os parâmetros  $(4m - 1, 2m - 1, m - 1)$ . Estes planos são construídos através da normalização da matriz de Hadamard  $H$  de ordem  $4m$ , de modo a que a primeira linha e coluna seja constituída apenas por  $+1$ . Seguidamente removem-se a primeira linha e coluna obtendo agora uma matriz quadrada  $A$ , do tipo  $(4m - 1) \times (4m - 1)$ , composta por  $2m$  elementos  $-1$  e  $2m - 1$  elementos  $+1$  em cada linha e coluna. O somatório de cada linha e coluna será sempre  $-1$  para esta matriz  $A$ . O produto interno para duas linhas distintas será  $-1$  e o produto de uma linha com a própria linha será  $4m - 1$ .

**Exemplo 2.3**

Consideremos a matriz de Hadamard de ordem 8 dada por:

$$\begin{aligned}
 H = & \begin{matrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Removendo a 1ª linha e a 1ª coluna obtemos a matriz A de ordem 7:

$$\begin{aligned}
 A = & \begin{matrix} +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Substituindo agora os elementos -1 por 0 obtemos uma nova matriz, B:

$$\begin{aligned}
 B = & \begin{matrix} +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{array}$$

Ao atribuímos a cada elemento +1 das linhas da matriz B os elementos do conjunto  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ , obtemos o BIBD simétrico com os parâmetros  $(7,3,1)$  e os seus blocos são:

$$(1,4,5) \quad (2,4,6) \quad (3,4,7) \quad (1,2,3) \quad (1,6,7) \quad (2,5,7) \quad (3,5,6)$$

Da mesma forma, se a cada elemento 0 for atribuído um elemento do conjunto  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ , obtém-se agora o complementar do BIBD original com os parâmetros  $(7,4,2)$ .

## **CAPÍTULO 3**

### **PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO DOS BIBD**

## 3 PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO DOS BIBD

### 3.1 INTRODUÇÃO

Não existe um método único para a construção dos BIBD e sabe-se que existem muitos BIBD cujo método de construção ainda não é conhecido. A maioria dos métodos já existentes, tem como base uma abordagem algébrica e muitas vezes, não são de fácil aplicação. No entanto, recorrendo a métodos computacionais, a construção dos BIBD torna-se mais simples.

Neste trabalho será feita uma abordagem resumida de alguns dos métodos já estudados na construção dos BIBD. Será descrito o método de construção dos BIBD através do desenvolvimento cíclico do primeiro bloco, denominado de Método das diferenças de conjuntos e, será também apresentado um método baseado no conceito de Planos fatoriais, o Método da diagonalização sucessiva.

Serão ainda abordados outros métodos diretos nos quais os BIBD são construídos a partir de BIBD já existentes. Por fim, será apresentada uma abordagem computacional na qual, a construção dos BIBD é formulada como sendo um problema de programação não linear inteira mista (*Nonlinear mixed integer programming – MINLP*).

### 3.2 MÉTODO DAS DIFERENÇAS

Este método deve-se a Bose (1939) e através dele é possível construir a maioria dos BIBD existentes que encontramos na lista publicada em Raghavarao (1971). Para melhor compreensão deste método, consideremos as seguintes definições:

**Definição 3.1:** Um BIBD é considerado simétrico (SBIBD) quando  $v = b$  ou  $r = k$ . Neste tipo de BIBD cada par de blocos tem  $\lambda$  tratamentos em comum.

**Definição 3.2:** Seja  $G = \{0,1,2, \dots, v - 1\}$  um grupo abeliano para a operação adição, ou seja  $(G, +)$ , onde para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$  se tem  $g_1 + g_2 \equiv (g_1 + g_2) \pmod v$  e  $g_1 - g_2 = g$  onde  $g_2 + g \equiv g_1 \pmod v$ . Seja  $A$  um subconjunto de  $G$  de  $k$  elementos tal que nas  $k(k - 1)$  diferenças  $(\pmod v)$  entre os elementos de  $A$  constem todos os elementos não nulos de  $G$  exatamente  $\lambda$  vezes. O conjunto  $A$  é chamado de *conjunto diferença* e é representado pelo conjunto de parâmetros  $(v, k, \lambda)$ .

#### Exemplo 3.1

Seja  $v = 21, G = \{0,1, \dots, 20\}$  e  $A = \{0,1,6,8,18\} \subset G$ . As possíveis diferenças são apresentadas em baixo:

$$\begin{array}{cccccc}
 0 - 1 = 20 & 1 - 0 = 1 & 0 - 6 = 15 & 6 - 0 = 6 & 0 - 8 = 13 & \\
 8 - 0 = 8 & 0 - 18 = 3 & 18 - 0 = 18 & 1 - 6 = 16 & 6 - 1 = 5 & \\
 1 - 8 = 14 & 8 - 1 = 7 & 1 - 18 = 4 & 18 - 1 = 17 & 6 - 8 = 19 & \\
 8 - 6 = 2 & 6 - 18 = 9 & 18 - 6 = 12 & 8 - 18 = 11 & 18 - 8 = 10 & 
 \end{array}$$

Verifica-se que cada elemento de  $G \setminus \{0\}$  ocorre apenas uma vez. O conjunto  $A$  é representado pelos parâmetros  $(21,5,1)$ .

**Definição 3.3:** Seja  $B$  um subconjunto de  $G = \{0,1,2, \dots, v - 1\}$  com  $k$  elementos, então  $B = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Para cada elemento  $j \in G$ , seja  $B + j = \{i_1 + j, i_2 + j, \dots, i_k + j\}$ . O conjunto dos blocos  $\mathfrak{B} = \{B + 0, B + 1, \dots, B + v - 1\}$ , é o desenvolvimento a partir do

bloco  $B$ . O bloco  $B_0 = B + 0$  é denominado o bloco inicial de  $\mathfrak{B}$  e é desenvolvido ciclicamente constituindo assim um BIBD simétrico com os parâmetros  $(v, k, \lambda)$ . Diz-se ainda que o BIBD é *cíclico* se  $G = \mathbf{Z}_v$ .

Considerando o exemplo 3.1, temos que  $v = 21, G = \{0, 1, \dots, 20\}$  e  $A = B_0 = \{0, 1, 6, 8, 18\}$  e  $\lambda = 1$ . O SBIBD obtido por este método é dado por:

(0,1,6,8,18)	(10,11,16,18,7)
(1,2,7,9,19)	(11,12,17,19,8)
(2,3,8,10,20)	(12,13,18,20,9)
(3,4,9,11,0)	(13,14,19,0,10)
(4,5,10,12,1)	(14,15,20,1,11)
(5,6,11,13,2)	(15,16,0,2,12)
(6,7,12,14,3)	(16,17,1,3,13)
(7,8,13,15,4)	(17,18,2,4,14)
(8,9,14,16,5)	(18,19,3,5,15)
(9,10,15,17,6)	(19,20,4,6,16)
	(20,0,5,7,17)

O SBIBD é assim definido pelos parâmetros  $v = b = 21, k = r = 5$  e  $\lambda = 1$ .

Quando se tem vários blocos iniciais, o método em cima descrito é facilmente generalizado obtendo um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  onde  $b = sv$  e  $r = sk$ , sendo  $s$  o nº de blocos iniciais. Uma abordagem mais detalhada desta generalização poderá ser encontrada em Hinkelmann, Klaus e Kempthorne, Oscar (2005).

### 3.3 MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO SUCESSIVA

O método da diagonalização sucessiva foi desenvolvido por Khare e Federer (1981) e surge como alternativa ao método introduzido por Yates (1936) usado essencialmente em planos do tipo quase-fatorial ou planos reticulados (lattice designs). Segundo Yates, os tratamentos são organizados sob a forma de uma matriz quadrada  $K \times K$ , onde  $v = K^2, b = K(K + 1), r = K + 1, k = K, \lambda = 1$  com  $K$  um número primo ou potência de um primo. Uma abordagem mais detalhada deste método pode ser encontrada em Hinkelmann, K. e Kempthorne, O. (2005).

Segundo Khare e Federer (1981), o algoritmo para o método da diagonalização sucessiva é dado por:

- Organizar os números dos tratamentos  $1, 2, \dots, v$  consecutivamente numa matriz quadrada do tipo  $K \times K$  formando a 1ª réplica, onde as linhas constituem os blocos;
- Fazer a transposta dessa matriz, ou seja, trocar as linhas e as colunas da 1ª réplica para obter a 2ª réplica;
- Tomar a diagonal principal da direita da 2ª réplica para formar a primeira linha da 3ª réplica. Seguidamente, escrever os restantes elementos das colunas da 2ª réplica ciclicamente na mesma coluna da 3ª réplica;
- Repetir o passo 3 para obter a 4ª réplica;
- Continuar este processo até obter as  $k + 1$  réplicas.

#### Exemplo 3.2

Consideremos o BIBD com os parâmetros  $v = 3^2, b = 12, r = 4, k = 3, \lambda = 1$ . A matriz inicial, ou a 1ª réplica, é dada por:

#### 1ª Réplica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Fazendo os restantes procedimentos obtemos as seguintes réplicas:

**2ª Réplica**

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

**3ª Réplica**

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

**4ª Réplica**

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Construímos assim um BIBD com os parâmetros  $(9, 12, 4, 3, 1)$  onde as linhas de cada uma das réplicas constituem os blocos do plano.

### 3.4 BIBD IRREDUTÍVEL

Este método é aplicado essencialmente quando o número de variedades é pequeno e, no qual consideram-se como blocos todas as possíveis combinações de  $v$  variedades  $k$  a  $k$ , ou seja,  $\binom{v}{k}$ . Assim, considerando um plano com  $v$  tratamentos e blocos de dimensão  $k$ , um BIBD irredutível apresenta os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  onde  $b = \binom{v}{k}$ ,  $r = \binom{v-1}{k-1}$  e  $\lambda = \binom{v-2}{k-2}$ .

Como exemplo, um BIBD com os parâmetros  $(8, 8, 7, 7, 6)$  é irredutível. Sabe-se ainda que em planos deste tipo e para  $v \leq 31$ , temos que  $v = b$ ,  $r = k$  e  $\lambda = k - 1$ .

Num BIBD irredutível é desejável que o número de blocos seja inferior a  $\binom{v}{k}$ , pois o elevado número de blocos irá aumentar de forma significativa os custos de implementação destes planos.

### 3.5 BIBD COMPLEMENTAR

O complementar de um BIBD é obtido substituindo os tratamentos num bloco por aqueles que não ocorrem nesse bloco. No geral, quando temos um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$ , o seu complementar é ainda um BIBD com os parâmetros

( $v' = v, b' = b, r' = b - r, k' = v - k, \lambda' = b - 2r + \lambda$  ). Vejamos o BIBD do exemplo 2.3.2 construído pelo método da diagonalização sucessiva, com os parâmetros (9, 12, 4, 3, 1). Os blocos deste plano são:

$$\begin{array}{cccc} (1,2,3) & (1,4,7) & (1,5,9) & (1,6,8) \\ (4,5,6) & (2,5,8) & (2,6,7) & (2,4,9) \\ (7,8,9) & (3,6,9) & (3,4,8) & (3,5,7) \end{array}$$

O complementar deste plano é agora o BIBD com os parâmetros (9, 12, 8, 6, 5), constituído pelos blocos:

$$\begin{array}{cccc} (4,5,6,7,8,9) & (2,3,5,6,8,9) & (2,3,4,6,7,8) & (2,3,4,5,7,9) \\ (1,2,3,7,8,9) & (1,3,4,6,7,9) & (1,3,4,5,8,9) & (1,3,5,6,7,8) \\ (1,2,3,4,5,6) & (1,2,4,5,7,8) & (1,2,5,6,7,9) & (1,2,4,6,8,9) \end{array}$$

### 3.6 BIBD RESIDUAL

Num BIBD simétrico com parâmetros ( $v = b, r = k, \lambda$ ), se eliminarmos um bloco e os tratamentos que ocorrem nesse mesmo bloco, partindo agora dos  $b - 1$  blocos, obtém-se o chamado plano residual. Este plano é ainda um BIBD com os parâmetros ( $v^* = v - k, b^* = b - 1, r^* = k, k^* = k - \lambda, \lambda^* = \lambda$ ).

#### Exemplo 3.3

Considerando o BIBD com os parâmetros (11,11,5,5,2), os blocos deste plano podem ser construídos a partir do bloco inicial  $B_0 = \{1,3,4,5,9\}$  em que  $v = 11, G = \{0,1, \dots, 10\}$  e  $\lambda = 2$ :

$$\begin{array}{cccc} (1,3,4,5,9) & (4,6,7,8,1) & (7,9,10,0,4) & (10,1,2,3,7) \\ (2,4,5,6,10) & (5,7,8,9,2) & (8,10,0,1,5) & (0,2,3,4,8) \\ (3,5,6,7,0) & (6,8,9,10,3) & (9,0,1,2,6) & \end{array}$$

Removendo o primeiro bloco e todos os seus elementos nos restantes blocos, obtém-se o plano residual dado por:

$$\begin{array}{ccc} (6,7,8) & (7,10,0) & (10,2,7) \\ (2,6,10) & (7,8,2) & (8,10,0) & (0,2,8) \\ (6,7,0) & (6,8,10) & (0,2,6) \end{array}$$

Verifica-se assim que o plano residual obtido tem os parâmetros  $(6,10,5,3,2)$ .

### 3.7 BIBD DERIVADO

Um BIBD derivado obtém-se retirando qualquer bloco de um BIBD simétrico com os parâmetros  $(v = b, r = k, \lambda)$ , e mantendo os tratamentos nos  $b - 1$  blocos que ocorrem no bloco eliminado. Os parâmetros para este BIBD são  $(v'' = k, b'' = b - 1, r'' = r - 1, k'' = \lambda, \lambda'' = \lambda - 1)$ .

Considerando o BIBD do exemplo 3.3, verifica-se que o plano é simétrico de parâmetros  $(11, 5, 2)$ . Eliminando o 1º bloco e mantendo os seus elementos nos restantes blocos, obtemos o plano:

$$\begin{array}{ccc} (4,1) & (9,4) & (1,3) \\ (4,5) & (5,9) & (1,5) & (3,4) \\ (3,5) & (9,3) & (9,1) \end{array}$$

Temos assim um BIBD derivado com os parâmetros  $(5,10,4,2,1)$ .

### 3.8 DUAL DO BIBD

O dual de um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  é obtido trocando os tratamentos pelos blocos do plano original. Os parâmetros do dual serão  $(v' = b, b' = v, r' = k, k' = r, \lambda)$ . No entanto, nem sempre o dual de um BIBD é um BIBD. Se o BIBD original é simétrico, então o seu dual é também um BIBD com os mesmos parâmetros.

### Exemplo 3.4

Consideremos o BIBD com os parâmetros  $(4,4,3,3,2)$  formado pelos seguintes blocos:

$$A = (1,2,3) \quad B = (2,3,4) \quad C = (3,4,1) \quad D = (4,1,2)$$

Para melhor compreensão, a cada bloco é atribuída uma letra. Assim, o dual do BIBD é agora baseado no conjunto  $\{A, B, C, D\}$  e os seus blocos são:

$$1 = \{A, C, D\} \quad 2 = \{A, B, D\} \quad 3 = \{A, B, C\} \quad 4 = \{B, C, D\}$$

Verifica-se assim que o dual do BIBD obtido é o BIBD original com  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = 3$  e  $D = 4$ . Em Hinkelmann, Klaus e Kempthorne, Oscar (2005) é apresentada uma lista dos BIBD com  $v \leq 25$  e  $k \leq 11$  e que podem ser construídos utilizando os métodos em cima mencionados.

### 3.9 MÉTODO COMPUTACIONAL: ALGORITMO BACKTRACKING

Desenvolvido por Yokoya, D. e Yamada, T. (2010), este método é apresentado como sendo uma abordagem alternativa à construção dos BIBD pois formula este problema como sendo um MINLP. Se o problema for resolvido com vista à otimização, ou é obtido um BIBD, ou verifica-se a não existência de um BIBD com determinado conjunto de parâmetros.

Este método apresenta resultados viáveis para os BIBD com  $k = 3$  (Sistema Triplo de Steiner) mas, considerando outros BIBD, o tempo de computação é muito longo e poderá não apresentar uma solução. Para este método, e em notação matricial, temos que um BIBD é representado pela matriz binária  $X = (x_{il})$  do tipo  $v \times b$  onde:

$$\sum_{l=1}^b x_{il} = r, \quad i = 1, \dots, v \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^v x_{il} = k, \quad l = 1, \dots, b \quad (2)$$

$$\sum_{l=1}^b x_{il}x_{jl} = \lambda, \quad i, j = 1, \dots, v, \quad i < j \quad (3)$$

$$x_{il} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, v, \quad l = 1, \dots, b$$

Para encontrar a matriz satisfazendo as equações (1), (2) e (3) é utilizado o algoritmo backtracking. Temos assim um problema de programação não linear, onde a função objetivo a maximizar é dada por,

$$F: \quad \max \sum_{i=1}^v \left( \sum_{l=1}^b x_{il} \right) + \sum_{l=1}^b \left( \sum_{i=1}^v x_{il} \right) + \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{j=i+1}^v \left( \sum_{l=1}^b x_{il} x_{jl} \right)$$

sujeita às seguintes condições,

$$\sum_{l=1}^b x_{il} \leq r, \quad i = 1, \dots, v \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^v x_{il} \leq k, \quad l = 1, \dots, b \quad (5)$$

$$\sum_{l=1}^b x_{il} x_{jl} \leq \lambda, \quad i, j = 1, \dots, v, \quad i < j \quad (6)$$

$$x_{il} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, v, \quad l = 1, \dots, b$$

Verifica-se facilmente, para uma possível solução  $X = (x_{il})$  de  $F$ , onde  $z(X)$  representa o seu valor, se tem:

$$z(X) \leq vr + bk + \frac{v(v-1)}{2} \lambda \quad (7)$$

Se a igualdade se verificar em (7), então nas condições (4), (5) e (6) também se verifica a igualdade e a solução obtida representa um BIBD. Caso contrário, se  $z(X) < vr + bk + \frac{v(v-1)}{2} \lambda$ , então o BIBD não existe.

Para este tipo de algoritmo é difícil encontrar uma solução ótima pois  $F$  é não linear. Assim, os autores apresentam no seu trabalho uma outra abordagem, na qual as linhas são determinadas uma a uma, e a função  $F$  não linear, é transformada em várias funções lineares, sendo por isso mais fácil obter uma solução ótima.

Consideremos agora as primeiras  $j$ -ésimas linhas de  $X$  denotadas por  $X_j = (\bar{x}_{ij})$  com  $i = 1, \dots, j$ . Partindo das igualdades (1), (2) e (3), obtemos ainda uma matriz binária satisfazendo as condições:

$$\sum_{l=1}^b \bar{x}_{il} = r, \quad i = 1, \dots, j \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^j \bar{x}_{il} \leq k, \quad l = 1, \dots, b \quad (9)$$

$$\sum_{l=1}^b \bar{x}_{il} \bar{x}_{i'l} = \lambda, \quad i, i' = 1, \dots, j, \quad i < i' \quad (10)$$

Deste modo, o vetor para a  $(j + 1)$  - ésima linha,  $x = (x_l)$  satisfaz as condições:

$$\sum_{l=1}^b x_l = r \quad (11)$$

$$x_l \leq k - \sum_{i=1}^j \bar{x}_{il}, \quad l = 1, \dots, b \quad (12)$$

$$\sum_{l=1}^b \bar{x}_{il} x_l = \lambda, \quad i = 1, \dots, j \quad (13)$$

Se o vetor  $x$  existir, a matriz  $X_j$  é aumentada obtendo-se a matriz do tipo  $(j + 1) \times b$ , dada por,  $X_{j+1} = \begin{pmatrix} X_j \\ x \end{pmatrix}$ . Segundo os autores, para obter o vetor  $x$  satisfazendo as condições (10), (11) e (12) é agora formulado um problema de otimização no qual, a função objetivo é linear e é dada por:

$$F_j(X_j): \quad \max \sum_{l=1}^b x_l + \sum_{i=1}^j (\sum_{l=1}^b \bar{x}_{il}) x_l \quad (14)$$

sujeita às condições,

$$\sum_{l=1}^b x_l \leq r \quad (15)$$

$$x_l \leq k - \sum_{i=1}^j \bar{x}_{il}, \quad l = 1, \dots, b \quad (16)$$

$$\sum_{l=1}^b \bar{x}_{il} x_l \leq \lambda, \quad i = 1, \dots, j \quad (17)$$

$$x_l \in \{0,1\}, \quad l = 1, \dots, b \quad (18)$$

Facilmente se verifica que a função objetivo é dada pelos somatórios do primeiro membro das equações (15) e (17). Considerando agora  $z_j^*(X_j)$ , o valor ótimo da função objetivo, tem-se que,

$$z_j^*(X_j) = r + j\lambda \quad (19)$$

A equação (19) satisfaz as condições (11), (12) e (13) e, sem perda de generalidade, a primeira e segunda linhas de  $X_j$  são dadas por:



Na forma matricial, queremos então maximizar o vetor  $\mathbf{x}$ ,

$$(3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$$

sujeito às seguintes condições:

- $x_1 + x_2 + \dots + x_{22} \leq 11$
- $x_1 \leq 6 - (\bar{x}_{1,1} + \bar{x}_{2,1})$
- $x_2 \leq 6 - (\bar{x}_{1,2} + \bar{x}_{2,2})$
- ...
- $x_{22} \leq 6 - (\bar{x}_{1,22} + \bar{x}_{2,22})$
- $x_1(\bar{x}_{1,1} + \bar{x}_{2,1}) + x_2(\bar{x}_{1,2} + \bar{x}_{2,2}) + \dots + x_{22}(\bar{x}_{1,22} + \bar{x}_{2,22}) \leq 5$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Depois de resolver este problema linear, os autores obtêm a solução  $\mathbf{x}^* = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$ . Calculando agora a imagem desta solução pela função maximizada, obtemos:

$$3.0 + 3.1 + 3.1 + \dots + 2.0 + 2.0 + \dots + 2.0 + 1.1 + \dots + 1.1 = 21$$

Como  $z_2^*(X_2) = 21 = 11 + 2.5$ , é agora acrescentada a solução obtida à matriz  $X_2$ , ficando assim com a nova matriz,

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma são obtidas as restantes linhas do BIBD,  $j = 3, \dots, 8$ , chegando à matriz,



Uma abordagem mais detalhada deste método é apresentada em Yokoya, D. e Yamada, T. (2010). Os autores desenvolvem ainda os algoritmos Branch-and-bound e Tabu search na construção dos BIBD e apresentam tabelas nas quais os vários algoritmos são comparados.

## **CAPÍTULO 4**

### **OS BIBD E A TEORIA DA AMOSTRAGEM**

## 4 OS BIBD E A TEORIA DA AMOSTRAGEM

### 4.1 BREVE HISTORIAL

O uso dos BIBD na Teoria da amostragem surge pela primeira vez no trabalho apresentado por Chakrabarti (1963), no qual o autor relaciona a estrutura deste tipo de planos em blocos com a noção de suporte de um plano de amostragem. O suporte de um plano de amostragem consiste no número distinto de amostras com probabilidade positiva de serem selecionadas.

Posteriormente, diversos autores apresentaram estudos aplicados a outros tipos de amostragem. Raghavarao e Singh (1975) demonstraram a aplicação de duas classes de associação dos PBIBD à amostragem por clusters e em 1976, Singh, Raghavarao e Federer continuaram este trabalho estendendo a aplicação à amostragem por clusters multidimensional com um maior número de classes de associação dos PBIBD.

Também na amostragem controlada os BIBD são utilizados para obter amostras com um número mínimo de dimensão de suporte (número mínimo de blocos distintos) e assim identificar o número máximo de blocos distintos com as amostras não preferenciais (Avadhani e Sukhatme, 1973). Ainda nesse ano, Das e Mohanty sugerem alguns esquemas para selecionar amostras utilizando a amostragem proporcional ao tamanho sem reposição.

Em 1979, Hedayat apresentou um método geral para obter BIBD com dimensão de suporte relativamente pequena, o método do trade-off. Este método será posteriormente abordado no capítulo 5.

Já nos anos de 1982 e 1985, Gupta et al. e Kumar et al. respectivamente, apresentam uma família de planos de amostragem com probabilidade de inclusão proporcional ao tamanho baseada num único BIBD e em dois planos incompletos equilibrados.

No trabalho de Fienberg e Tanur (1987) para além do paralelismo entre o planeamento experimental e os planos de amostragem, os autores estabelecem também uma relação entre o suporte do plano de amostragem e os BIBD.

Recentemente, destacam-se os trabalhos dos autores Rao e Vijayan (2008), no qual apresentam aplicações recentes do planeamento de experiências na amostragem controlada, e Sharma e Fanta (2009) que consideram os PBIBD como um plano de amostragem proporcional ao tamanho sem reposição.

## 4.2 AMOSTRAGEM ALEATÓRIA SIMPLES SEM REPOSIÇÃO

### 4.2.1 RELAÇÃO COM OS BIBD

Considerando a amostragem aleatória simples sem reposição (SRS), sabe-se que neste tipo de amostragem, todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de serem escolhidos para fazer parte da amostra, a probabilidade de inclusão de 1ª ordem e 2ª ordem são dadas por  $\pi_i = \frac{n}{N}$  e  $\pi_{ij} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$  respectivamente, onde  $n$  representa a dimensão da amostra e  $N$  a dimensão da população.

Segundo Chakrabarti (1963), um plano de amostragem com probabilidade de seleção uniforme sobre o suporte do plano com as respectivas probabilidades de inclusão de 1ª e 2ª ordem é equivalente à amostragem aleatória simples sem reposição, se e só se for associado a uma estrutura de um BIBD onde  $N = v$  e  $n = k$  com blocos distintos. Partindo deste resultado, o autor estabelece as seguintes relações entre pares de tratamentos num bloco e pares de unidades numa amostra:

<b>BIBD</b>	<b>Plano de amostragem</b>
<b>Blocos</b>	amostras
<b>Tratamentos</b>	unidades
$k$	Dimensão da amostra, $n$
$v$	Numero de unidades na população, $N$
$b$	Dimensão do suporte do plano de amostragem
$r$	Probabilidade de inclusão de 1ª ordem
$\lambda$	Probabilidade de inclusão de 2ª ordem

Assim, o autor considerou que ao número de tratamentos num BIBD corresponde a dimensão da população, à dimensão dos blocos corresponde a dimensão da amostra e que ao número de blocos corresponde o número de amostras distintas dadas por  $\binom{N}{n}$ , denotado por dimensão de suporte. No entanto, há que salientar uma importante diferença entre um BIBD e um plano amostral, enquanto todos os grupos ou blocos são utilizados pelo investigador numa experiência, apenas um grupo é utilizado para efeitos

da amostragem. Para além disso, a enumeração dos blocos é importante para um planeamento experimental, enquanto para a amostragem não é necessário. Na realidade, a enumeração no caso da amostragem deve ser evitada para que a amostragem seja aleatória. (Tefera, Y., 2007)

#### 4.2.2 RELAÇÃO COM OS SBIBD

Wynn (1977) provou que, existe um plano de amostragem com dimensão de suporte  $N$  equivalente à amostragem aleatória simples sem reposição com as respetivas 1ª e 2ª ordem de probabilidades de inclusão, se e só se existe um SBIBD com  $v = b = N$ . Mostrou ainda que, nestas condições, nenhum plano existe com dimensão de suporte menor que  $N$ . Por exemplo, para  $v = 8, k = 3$  e  $b < \binom{8}{3} = 56$ , não existe um BIBD com blocos distintos.

O resultado apresentado por este autor permitiu ainda reduzir o número de possíveis amostras do suporte do plano de amostragem de  $\binom{N}{n}$  para um valor entre  $\binom{N}{2}$  e  $N$ .

#### 4.2.3 RELAÇÃO COM OS BIBDR

Os autores Foody e Hedayat (1977) prosseguiram as investigações iniciadas por Wynn(1977) alcançando agora os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com Repetições. Ao admitir a repetição de blocos, os autores ultrapassam a restrição apresentada por Chakrabarti (1963) onde apenas eram admitidos blocos distintos. Assim, permitindo a repetição de blocos nos BIBD, os autores mostram que é possível selecionar blocos específicos um número máximo de vezes e assim maximizar, no contexto da amostragem, a probabilidade de seleção de certas amostras mantendo ainda as probabilidades de inclusão de 1ª e 2ª ordem.

Se considerarmos  $b^*$  o número de blocos distintos (dimensão de suporte), então para a amostragem aleatória simples sem reposição, o BIBD correspondente é dado pelos parâmetros:

$$\lambda = \binom{v-2}{k-2}, \quad b^* = b = \binom{v}{k}, \quad r = \binom{v-1}{k-1}$$

Quando nem todos os blocos são distintos tem-se que  $b^* < b$ . Os autores apresentam ainda no seu trabalho uma condição necessária e suficiente para a existência dos BIBD com os parâmetros em cima mencionados mas onde  $b^* < b$ .

Como consequência do estudo anterior, os autores mostram o seguinte resultado:

Se existirem dois BIBD com o mesmo número de tratamentos  $v$ , a mesma dimensão de blocos  $k$  e cujas dimensão de suporte  $b_1^*$  e  $b_2^*$ , respetivamente, não se sobrepõem, então existe um BIBD com  $v' > v$  tratamentos,

$$b^* = \binom{v'}{k} - b_1^* \quad \text{e} \quad b = e \binom{v'}{k}$$

onde  $e = \frac{\lambda_2}{\text{mdc}(\lambda_1, \lambda_2)}$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  correspondem ao número de pares de tratamentos que ocorrem juntos nos planos originais.

### 4.3 BIBD E AMOSTRAGEM CONTROLADA

Os BIBD com dimensão de suporte reduzido têm tido particular importância na teoria da amostragem. Com efeito, quanto menor for o número de blocos distintos num BIBD, melhor é a possibilidade de adaptá-lo a uma dada situação no controlo de amostragem. (Srivastava e Ouyang, 1992).

A amostragem controlada é um método de recolha da amostra que reduz a probabilidade de selecionar combinações não desejáveis mantendo certas propriedades de um plano não controlado associado.

Encontramos em vários estudos da Amostragem Controlada o uso dos BIBD para construir planos com dimensão mínima de suporte e que identificam o máximo número de blocos distintos com amostras não preferíveis. Um dos  $b$  blocos é assim selecionado aleatoriamente e as unidades que o constituem formam a amostra.

São vários os investigadores que têm desenvolvido os seus trabalhos no sentido de reduzir a dimensão de suporte do plano. Entre eles destacam-se Avadhani e Sukthame, (1973) que aplicam os BIBD na amostragem controlada onde os resultados decorrem do trabalho já apresentado por Chakrabarti (1963). Os autores utilizam os BIBD, com os parâmetros  $N = v$ ,  $b < \binom{N}{n}$ ,  $r, k = n$  e  $\lambda$ , para construir amostras aleatórias simples controladas. Selecionando um bloco aleatoriamente, ou seja com probabilidade  $\frac{1}{b}$ , as probabilidades de inclusão de 1ª e 2ª ordem mantêm-se. Com efeito,

$$\pi_i = \frac{r}{b} = \frac{k}{v} = \frac{n}{N}$$

$$\pi_{ij} = \frac{\lambda}{b} = \frac{k(k-1)}{v(v-1)} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

Estas probabilidades são as mesmas obtidas sobre a amostragem aleatória simples sem reposição não controlada. Este facto assegura que, sobre um plano de amostragem aleatória simples, a média aleatória simples  $\bar{y}$ , permanece não enviesada para a média da população  $\bar{Y}$  com variância equivalente para  $\bar{y}$ .

Para ilustrar esta relação, os autores apresentam o seguinte exemplo:

**Exemplo 4.1**

Com  $N = 7$ , apresenta-se o seguinte grafo,

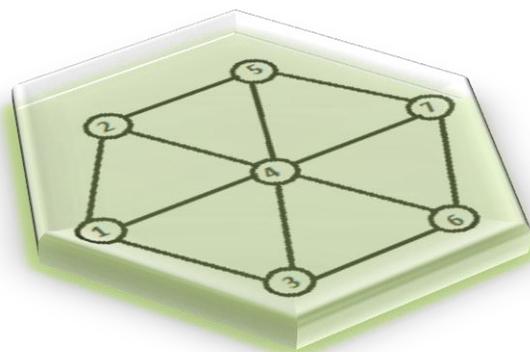


Ilustração 2: Grafo que representa um plano de amostragem para  $N=7$

Pode-se verificar que quaisquer duas unidades que estão ligadas por uma linha são consideradas vizinhas.

Pretende-se agora obter uma amostra de forma a minimizar os custos, e portanto, constituída por unidades vizinhas. Assim, uma amostra  $w = \{i_1, i_2, i_3\}$  é considerada preferível se e só se, depois de uma permutação adequada, existe uma linha entre  $i_1$  e  $i_2$  e outra linha entre  $i_2$  e  $i_3$ . Para este caso, o número total de amostras preferidas é 21 e o número total de amostras possíveis é  $\binom{7}{3} = 35$ . Se cada uma das 35 combinações possíveis têm a mesma probabilidade de serem selecionadas, ou seja  $\frac{1}{35} \approx 0,0285$ , então a probabilidade de selecionar uma combinação não preferível é  $\frac{14}{35} \approx 0,4$ .

Consideremos agora o BIBD com os parâmetros  $v = 7, b = 7, r = 3, k = 3$  e  $\lambda = 1$  e a sua estrutura:

$$\begin{matrix} (2,5,7) & (2,4,6) & (3,6,7) & (1,4,7) \\ & (1,2,3) & (1,5,6) & (3,4,5) \end{matrix}$$

Podemos verificar que apenas o bloco (1,5,6) é não preferível pois não existe uma linha que una  $i_1 = 1$  com  $i_2 = 5$  e  $i_2 = 5$  com  $i_3 = 6$ . Portanto, a probabilidade de selecionar um bloco da estrutura apresentada é  $\frac{1}{7}$ , verificando-se assim, uma redução significativa do valor inicialmente apresentado, sobre uma amostra simples aleatória não controlada.

De salientar que, a probabilidade de selecionar uma amostra não preferível pode variar se escolhermos uma solução diferente para o BIBD com os mesmos parâmetros. Por exemplo, se optarmos pela seguinte estrutura do BIBD,

$$\begin{array}{cccc} (1,3,4) & (2,4,5) & (3,5,6) & (4,6,7) \\ & (1,2,6) & (2,3,7) & (1,5,7) \end{array}$$

Verifica-se que os blocos (3,5,6), (1,5,7), (1,2,6) e (2,3,7) são não preferíveis pois não existem linhas entre as unidades vizinhas e portanto  $\frac{4}{7} > \frac{14}{35}$  (valor obtido para a amostragem não controlada). Assim, uma má escolha para a estrutura do BIBD pode levar a um resultado pior para uma amostragem controlada do que uma amostragem não controlada.

## **CAPÍTULO 5**

# **PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS COM REPETIÇÕES**

## 5 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS COM REPETIÇÕES

### 5.1 DEFINIÇÃO E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

Um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  pode, ou não, ter blocos repetidos sendo que esse facto não afeta a otimização dos parâmetros do modelo estatístico. Assim, um BIBD com blocos repetidos é desejável pois, para além de diminuir os custos de implementação do plano, é possível escolher, ou até evitar, uma determinada combinação de tratamentos nos casos em que se perdem observações num bloco.

Por outro lado, e segundo Ghosh e Shrivastava (2001) e Oliveira et al. (2006), os BIBD com blocos repetidos apresentam alguns estimadores de contrastes de blocos com variância mínima, permitindo assim uma maior aplicabilidade deste tipo de planos.

Consideremos um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$ . Define-se por *suporte* do plano, o conjunto de todos os blocos distintos do plano e a sua cardinalidade denota-se por  $b^*$ . Assim, se  $b^* < b$  diz-se que o BIBD tem blocos repetidos e é agora caracterizado pelos parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda | b^*)$ .

Seja  $B$  um bloco específico selecionado aleatoriamente de um BIBD e seja  $x_i$ , com  $i = 0, 1, \dots, k$ , o número de blocos para além do próprio bloco  $B$ , que têm exatamente  $i$  variedades em comum com  $B$ . Sabe-se que para os BIBD com blocos repetidos são válidas as seguintes condições:

$$\sum_{i=0}^k \binom{i}{0} x_i = b - 1 ; \quad \sum_{i=1}^k \binom{i}{1} x_i = k(r - 1); \quad \sum_{i=2}^k \binom{i}{2} x_i = \binom{k}{2} (\lambda - 1)$$

Em Sousa e Oliveira (2004) encontramos o desenvolvimento destas condições que, após algumas operações algébricas, permitem obter o limite inferior para o número de blocos de modo a que o plano admita a repetição de blocos. A inequação obtida é dada por:

$$b \geq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1 + k(r-1) - \frac{k(k-1)(\lambda-1)}{2} \quad (i)$$

Assim, se existir um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  então o número de blocos,  $b$ , deve satisfazer a inequação (i) para que o plano admita repetição de blocos.

Vários autores têm realizado estudos no sentido de encontrar parâmetros para possíveis BBDR. Em Oliveira (2010) são apresentadas, respetivamente, as seguintes desigualdades para os casos em que  $k = 3, 4, 5$  e  $6$ :

$$\begin{aligned} \lambda[(v-5)^2 + 2] &\geq 2 \\ \lambda[(v-8)^2 - v + 24] &\geq 72 \\ \lambda[(v-13)^2 + 56] &\geq 240 \\ \lambda[(v-18)^2 - v + 162] &\geq 600 \end{aligned}$$

Considerando  $5 \leq v \leq 30$ ,  $\lambda \leq 10$ ,  $b \leq 200$  e implementando o algoritmo tendo em conta as condições de existência dos BIBDR, obtém-se os parâmetros para possíveis BIBDR.

## 5.2 CLASSIFICAÇÃO DOS BIBDR EM FAMÍLIAS

Para  $\lambda \geq 2$ , os BIBDR agrupam-se em três famílias mutuamente exclusivas e exaustivas, definidas em Hedayat and Hwang (1984):

### **Família 1:**

Constituída por todos os BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  em que os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  têm um divisor comum inteiro,  $t > 1$ , e existe um ou mais BIBD com os parâmetros  $(v, b/t, r/t, k, \lambda/t)$ .

Como exemplo, o BIBD  $(4, 24, 12, 2, 4)$  pertence à família 1 pois com  $t = 2$  obtemos o BIBD  $(4, 12, 6, 2, 2)$  que sabemos existir. (Cochran e Cox, 1957).

### **Família 2:**

Constituída por todos os BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  em que os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  têm um ou mais divisores comuns inteiros maiores que um, mas não existe o BIBD com os parâmetros  $(v, b/t, r/t, k, \lambda/t)$  e com  $t > 1$  um dos divisores comuns de  $b, r$  e  $\lambda$ .

Como exemplo, o BIBD  $(36, 84, 14, 6, 2)$  pertence à família 2 pois com  $t = 2$  obtemos o BIBD  $(36, 42, 7, 6, 1)$  que não existe. (Cochran e Cox, 1957).

### **Família 3:**

Constituída por todos os BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  em que os parâmetros  $(b, r, \lambda)$  são primos entre si, ou seja, o maior divisor comum entre os parâmetros é igual a um.

Como exemplo, o BIBD  $(15, 15, 14, 14, 13)$  pertence à família 3 pois os números 15, 14, 13 são primos entre si.

Tendo como base as famílias em cima descritas, e considerando  $t \geq 2$ , Oliveira (2010) apresenta os parâmetros de possíveis BIBDR (caso existam os BIBD) distribuídos em quatro tabelas para os casos de blocos de dimensão 3, 4, 5 e 6.

### 5.3 MULTIPLICIDADE E LIMITES DOS BLOCOS

A multiplicidade de um bloco é o número de vezes que o bloco ocorre no plano.

Se num BIBD há exatamente  $\alpha$  blocos com multiplicidade  $i$ , exatamente  $\beta$  blocos com multiplicidade  $j$ , ..., e todos os outros blocos com multiplicidade 1, então o plano tem como padrão de multiplicidade  $\alpha^i \beta^j$ , (Oliveira, 2010).

Considerando um BIBD de parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  em que cada bloco ocorre exatamente  $m$  vezes ( $m > 1$ ), então o plano é denominado de plano com blocos múltiplos de multiplicidade  $m$ , e é denotado por M-BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$ . Se  $m = 1$ , então o plano não tem blocos repetidos e é denominado de plano simples.

Para um BIBD com os parâmetros  $(v, b, r, k, \lambda)$  e  $m$  o valor máximo para a multiplicidade de um bloco, Mann (1969) provou que  $m \leq \frac{b}{v} = \frac{r}{k}$ . Em 1972, Van Lint e Ryser mostraram para o caso em que  $m = \frac{b}{v}$ , então  $m$  divide o máximo divisor comum entre  $(b, r, \lambda)$ . Em particular, se um BIBD  $(v, b, r, k, \lambda)$  tem blocos repetidos, então  $b \geq 2v$  e se  $b = 2v$  o máximo divisor comum entre  $(b, r, \lambda)$  é par. Estes autores mostraram ainda que a dimensão do suporte de um BIBD,  $b^*$ , satisfaz as condições  $b^* = v$  ou  $b^* > v + 1$ .

Em 1977, Foody e Hedayat estabeleceram novos limites para  $b^*$ , encontrando a inequação  $b_{min}^* \geq \frac{b}{\lambda}$  onde  $b_{min}^*$  representa a dimensão mínima do suporte de um BIBD com base em  $v$  e  $k$ . Para os casos em que  $b < b_{min}^*$  e utilizando a desigualdade de Mann (1969), Hedayat et al. (1989) encontraram um limite mais restritivo para  $b_{min}^*$ , considerando as informações sobre os blocos de suporte que se repetem  $\lambda$  vezes no plano:

$$b_{min}^* \geq 2 \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$$

Em Dobcsányi, Preece e Soicher (to appear) encontramos a continuação das investigações iniciadas por Van Lint e Ryser em 1972 e Van Lint em 1973, no qual são

apresentados, entre outros resultados, novos limites para a multiplicidade de um bloco em termos dos parâmetros de um BIBDR e novas aproximações destes limites para um BIBD resolúvel.

#### 5.4 VARIÂNCIA PARA O EFEITO DOS BLOCOS NUM BIBDR

Consideremos um BIBDR( $v, b, r, k, \lambda | b^*$ ) e a correspondente matriz de incidência  $N = (n_{ij})$  do tipo  $v \times b$ , onde  $n_{ij}$  representa o número de vezes que a  $i$ -ésima variedade ocorre no  $j$ -ésimo bloco com  $i = 1, 2, \dots, v$  e  $j = 1, 2, \dots, b$ . Para este plano,  $D$  é a matriz dos coeficientes para estimar o vetor do efeito dos blocos  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b)'$  e é dada por:

$$D = kI_b - \frac{NN'}{r} \text{ com } r_1 = r_2 = \dots = r_v = r$$

onde  $I_b$  é a matriz identidade de ordem  $b$ . Este resultado foi apresentado por Raghavarao *et al.* (1986) que também demonstra que a matriz  $NN'$  (matriz de concorrências dos tratamentos) não é a mesma para todos os planos de classe  $\beta$ , variando à medida que o número de blocos repetidos varia. Deste modo, as estimativas do contraste do efeito dos blocos também irão variar e a variância para a diferença do efeito dos blocos é dada por:

$$Var(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j) = \left( \frac{v\lambda + k - h}{v k \lambda} \right) 2\sigma^2$$

onde  $\beta_i$  e  $\beta_j$  representam quaisquer dois blocos com  $h$  variedades em comum.

Considerando a expressão anterior, Raghavarao *et al.* (1986) conclui que o estimador para o contraste do efeito dos blocos varia conforme o número de tratamentos comuns entre dois blocos e, conseqüentemente, a variância para a diferença do efeito dos blocos tende a ser mínima à medida que o número de tratamentos comuns entre dois blocos aumenta.

## 5.5 MÉTODOS DE CONSTRUÇÃO DOS BIBDR: CONTRIBUIÇÕES IMPORTANTES

As condições de existência de BIBD com blocos repetidos e a sua construção têm interessado vários investigadores particularmente na área do planeamento experimental.

Van Lint e Ryser (1972) e Van Lint (1973, 1974) dedicaram os seus estudos à construção de BIBD com blocos repetidos. A base dessas investigações assenta na construção dos BIBDR onde os parâmetros  $b$ ,  $r$  e  $\lambda$  são primos relativos, ou seja, o máximo divisor comum entre os parâmetros é um.

Wynn (1977) apresenta a construção de um BIBD com os parâmetros  $v = 8$ ,  $b = 56$ ,  $K = 3$  e  $b^* = 24$  demonstrando a sua aplicabilidade na teoria da amostragem. Foody e Hedayat (1977) também tiveram um contributo importante na construção dos BIBDR mostrando que em termos de aplicabilidade é desejável desenvolver técnicas que permitam construir BIBD com várias dimensões de suporte para quaisquer  $v$  e  $k$ . Apresentam alguns algoritmos para a construção deste tipo de planos e em particular mostram que o problema combinatorial de pesquisa de BIBDR é equivalente ao problema algébrico de encontrar soluções para um conjunto de equações lineares homogéneas. Através desta equivalência, os autores apresentam uma tabela dos planos com  $v = 8$  e  $k = 3$  com  $22 \leq b^* \leq 56$ .

Um dos principais métodos de construção dos BIBDR com diferentes suportes, o método Trade-off ou o método da Compensação, foi apresentado por Hedayat e Li (1979). Através deste método, Hedayat e Hwang (1984) apresentam a construção dos BIBDR(8,56,21,3,6) e BIBD (10,30,9,3,2) que são exemplos de planos com menor nº de variedades e menor número de blocos, respetivamente. Apresentam ainda uma tabela deste tipo de planos com 30 diferentes dimensões de suporte.

### 5.5.1 MÉTODO TRADE-OFF

A principal ideia deste método é compensar ou trocar alguns blocos com outros blocos de modo a que as características gerais que definem um BIBD se mantenham.

Para melhor compreensão deste método, consideremos as seguintes definições:

**Definição 5.1:** Seja  $v > k > t \geq 1$  três inteiros e seja  $P_t(X)$  o conjunto de todos os  $t$ -subconjuntos baseados num conjunto  $X$  de dimensão  $v$ . Um “trade”  $T$ , representado por  $T(t, k, v)$  e baseado nos elementos (blocos) de  $P_k(X)$ , é um par de coleções de blocos, não vazios e disjuntos,  $T_1$  e  $T_2$ , cada um com  $m$  blocos de  $P_k(X)$ , tal que o número de vezes que cada elemento de  $P_t(X)$  é substituído por  $T_1$  é igual ao número de vezes que é substituído por  $T_2$ .

**Definição 5.2:** Os números inteiros  $m, k, v$  e  $t$  são os parâmetros básicos de um “trade” e representam respetivamente, o volume, ou seja, a soma de todas as entradas positivas de um bloco no “trade”, o comprimento, o nº de variedades, e a força do “trade”.

**Definição 5.3:** Um “trade” é um sistema de Steiner se nenhum elemento de  $P_t(X)$  ocorrer mais do que uma vez em cada um dos  $T_1$  e  $T_2$ .

**Definição 5.4:** Se  $D_1$  e  $D_2$  são dois BIBD com os mesmos parâmetros  $v, k$  e  $\lambda$ , então  $D_1 - D_2$  é um “trade”,  $T(v, k)$ .

Seja  $D$  um BIBD de parâmetros  $(v, k, \lambda)$  que contém a coleção dos blocos em  $T_1$  de um “trade”,  $T(t, k, v)$ . Se substituirmos os blocos de  $T_2$  pelos blocos de  $T_1$  deste plano, obtemos um novo BIBD com os mesmos parâmetros que poderá ter uma dimensão do suporte diferente do original.

#### Exemplo 5.1

Consideremos o BIBDR de parâmetros  $(6, 20, 10, 3, 4 | b^* = 14)$ . Tendo como base este plano, através do método “Trade-off” iremos obter uma estrutura possível para um

BIBDR com os mesmos parâmetros mas com dimensão de suporte diferente, ou seja,  $b^* = 16$ :

BIBDR(6,20,10,3,4  $b^* = 14$ )	Trade	BIBDR(6,20,10,3,4  $b^* = 16$ )
		(1,2,3)
2(1,2,5)		(1,2,4)
2(1,2,6)	(1,2,5) → (2,3,6)	(1,2,5)
2(1,3,4)	(1,2,6) → (3,4,6)	(1,2,6)
(1,3,5)	(1,3,4) → (2,4,5)	(1,3,4)
(1,3,6)	(1,3,6) → (1,4,6)	2(1,3,5)
(1,4,5)	(1,4,5) → (2,5,6)	2(1,4,6)
(1,4,6)	(2,3,4) → (1,2,3)	(1,5,6)
2(2,3,4)	(2,3,5) → (1,2,4)	(2,3,4)
(2,3,5)	(2,4,6) → (1,3,5)	2(2,3,6)
(2,3,6)	(3,5,6) → (1,5,6)	2(2,4,5)
(2,4,5)	(4,5,6) → (3,4,5)	(2,5,6)
(2,4,6)		(3,4,5)
2(3,5,6)		(3,4,6)
2(4,5,6)		(3,5,6)
		(4,5,6)

De facto, considerando  $D_1$  e  $D_2$  os BIBDR(6,20,10,3,4| $b^* = 14$ ) e BIBDR(6,20,10,3,4| $b^* = 16$ ), respetivamente, fazendo  $D_1 - D_2$ , obtemos o “trade”  $T(6,3)$  de volume 10 dado por:

$$\begin{aligned}
 &(1,2,5) + (1,2,6) + (1,3,4) + (1,3,6) + (1,4,5) + (2,3,4) + (2,3,5) + (2,4,6) + (3,5,6) \\
 &+ (4,5,6) - (1,2,3) - (1,2,4) - (1,3,5) - (1,4,6) - (1,5,6) - (2,3,6) - (2,4,5) - (2,5,6) \\
 &- (3,4,5) - (3,4,6)
 \end{aligned}$$

Uma abordagem mais detalhada do método Trade-off com exemplos de construção de BIBD com diferentes dimensões de suporte, poderá ser encontrada em Hedayat e

Hwang (1984). Também Hedayat e Khosrovshah (2006) apresentam em “Handbook of Combinatorial Designs Chap 60”, um capítulo dedicado inteiramente aos “Trades”.

### 5.5.2 OUTROS MÉTODOS DE CONTRUÇÃO DOS BIBDR

Segundo Calinski e Kageyama (2003), um dos métodos de construção mais simples, “*juxtaposition Method*”, permite obter um BIBDR repetindo os blocos de um BIBD existente.

#### Exemplo 5.2

Consideremos o BIBDR de parâmetros  $(6,10,5,3,2)$ . Tal como já demonstrado no exemplo 2.4.1 do capítulo anterior, uma possível estrutura para este plano é dada por:

(1,2,5)	(2,3,4)
(1,2,6)	(2,3,5)
(1,3,4)	(2,4,6)
(1,3,6)	(3,5,6)
(1,4,5)	(4,5,6)

Considerando a multiplicidade dos blocos igual a 3 e triplicando o BIBD, obtemos o BIBDR $(6,30,15,3,6|b^* = 10)$ . Em termos gerais, qualquer BIBDR $(6,10t,5t,3,2t)$  para  $t \geq 2$ , pode ser facilmente construído reproduzindo cópias do plano original BIBDR $(6,10,5,3,2)$ . Considerando a expressão da variância para a diferença do efeito dos blocos encontrada por Raghavarao *et al.* (1986), pode ainda verificar-se que, para quaisquer dois blocos com três variedades em comum, os contrastes terão variância mínima  $\left(\frac{2}{3}\sigma^2\right)$ .

Um outro método de construção dos BIBDR tem como base a definição de plano complementar. Este método é particularmente útil para os casos em que os blocos são

de grande dimensão. Sabe-se por definição que o complementar de um  $\text{BIBD}(v, b, r, k, \lambda)$  é ainda um BIBD de parâmetros  $(v' = v, b' = b, r' = b - r, k' = v - k, \lambda' = b - 2r + \lambda)$ . Assim, se existir um BIBD com blocos de dimensão  $k$  também existirá um BIBD com blocos de dimensão  $v - k$ . O complementar de um BIBD é obtido quando substituímos os tratamentos num bloco por aqueles que não ocorrem nesse bloco.

### Exemplo 5.3

Consideremos o  $\text{BIBDR}(8,56,21,3,6|b^* = 24)$  cuja estrutura é apresentada em Foody e Hedayat (1977). Fazendo o seu complementar, obtemos a seguinte estrutura:

$\text{BIBDR}(8,56,21,3,6|b^* = 24)$

(1,2,5)	2(2,5,6)
2(1,2,7)	2(2,5,7)
3(1,2,8)	3(2,6,8)
5(1,3,6)	2(3,4,8)
(1,3,7)	2(3,5,7)
5(1,4,5)	4(3,5,8)
(1,4,6)	(3,6,7)
3(1,7,8)	3(4,6,7)
4(2,3,4)	(4,6,8)
2(2,3,7)	3(4,7,8)
(2,4,5)	2(5,6,7)
(2,4,6)	2(5,6,8)

$\text{BIBDR}(8,56,35,5,20|b^* = 24)$

(3,4,6,7,8)	2(1,3,4,7,8)
2(3,4,5,6,8)	2(1,3,4,6,8)
3(3,4,5,6,7)	3(1,3,4,5,7)
5(2,4,5,7,8)	2(1,2,5,6,7)
(2,4,5,6,8)	2(1,2,4,6,8)
5(2,3,6,7,8)	4(1,2,4,6,7)
(2,3,5,7,8)	(1,2,4,5,8)
3(2,3,4,5,6)	3(1,2,3,5,8)
4(1,5,6,7,8)	(1,2,3,5,7)
2(1,4,5,6,8)	3(1,2,3,5,6)
(1,3,6,7,8)	2(1,2,3,4,8)
(1,3,5,7,8)	2(1,2,3,4,7)

Como se pode verificar, para ambos os BIBDR existem oito blocos com multiplicidade 5, dois blocos com multiplicidade 4, cinco blocos com multiplicidade 3 e sete blocos que não se repetem, mantendo assim a dimensão do suporte igual a 24.

## **CAPÍTULO 6**

### **PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS COM BLOCOS DE DIFERENTES DIMENSÕES**

## 6 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS COM BLOCOS DE DIFERENTES DIMENSÕES

### 6.1 INTRODUÇÃO E NOTAÇÃO

Consideremos uma experiência na qual o investigador pretende comparar  $v$  tratamentos sem preferência sobre os pares de tratamentos que serão comparados. Para este tipo de experiências é desejável a utilização de um plano onde as diferenças dos efeitos dos tratamentos sejam estimadas com a mesma precisão e/ou variar o número de réplicas dos tratamentos. Estes planos são denominados de Variance Balanced Block designs – VBBD.

Os BIBD são um caso particular deste tipo de planos onde o número de unidades experimentais em cada bloco é o mesmo. No entanto, em diversas experiências, os planos em blocos com diferentes dimensões de bloco podem ser necessários. Por exemplo, se o investigador pretender utilizar ninhadas (experiências com animais), famílias (testes psicológicos), turmas de alunos (experiências educacionais), ou cultivos agrícolas como blocos, estes poderão ter dimensões diferentes pois não é possível controlar o número de unidades experimentais de cada bloco. Por outro lado, o investigador poderá ter quantidades diferentes de material disponível ou até mesmo, material insuficiente para alguns tratamentos e por isso, o número de repetições dos tratamentos será diferente.

Consideremos um plano em blocos com  $v$  tratamentos e  $b$  blocos e,  $N$  a sua matriz de incidência. Será usada a mesma notação do capítulo 2.

Recorde-se que a matriz de informação para os efeitos dos tratamentos é dada por :

$$C = R - NK^{-1}N'$$

onde  $R = \text{diag}[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_v]$  e  $K = \text{diag}[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_b]$ . Esta matriz é bastante útil para determinar algumas propriedades dos Planos em Blocos, nomeadamente as condições de otimalidade destes planos.

Segundo Rao (1958), a condição necessária e suficiente para um plano em blocos ser um VBBD é dada por:

$$C = \eta \left[ I_v - \frac{1}{v} 1_v 1_v' \right]$$

onde  $\eta$  é o único valor próprio não nulo da matriz  $C$ , com multiplicidade  $v - 1$ .

Para Planos em Blocos binários, o valor próprio da matriz  $C$  é dado por  $\eta = \frac{\sum_{i=1}^v r_i - b}{v-1}$

(Kageyama e Tsuji, 1979) e, para o caso particular dos BIBD,  $\eta = \frac{vr-b}{v-1}$ .

Consideremos agora as seguintes definições:

**Definição 6.1:** Um plano em blocos diz-se próprio se  $k_j = k$ , para todo o  $j$ , em que  $k$  é a dimensão do bloco .

**Definição 6.2:** Um plano em blocos diz-se equireplicado se  $r_i = r$ , para todo o  $i$  , em que  $r$  é o nº de replicações do tratamento .

**Definição 6.3:** Um plano em blocos diz-se binário se nenhum tratamento é atribuído mais de uma vez em cada bloco, isto é,  $n_{ij}$  é 0 ou 1 para todo o  $i$  e para todo o  $j$ .

Assim, de todos os planos binários, equireplicados e próprios, os BIBD são a classe mais simples dos VBBD.

Neste trabalho apenas serão abordados os VBBD binários, com blocos de duas dimensões diferentes.

## 6.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS VBBD

A análise dos VBBD poderá ser feita através da análise dos BIBD recorrendo à ANOVA tal como já foi apresentado no capítulo 3. No entanto, a validade das conclusões poderá ser posta em causa caso não seja verificada a homocedasticidade da variância do erro para todos os blocos. Sabe-se que, quanto maior for a dimensão do bloco, maior será a variância do erro e por isso, caso seja possível, devem ser adotados planos com blocos de pequena dimensão.

Por outro lado, quando a diferença na dimensão dos blocos não é muito grande, é razoável assumir o pressuposto da homocedasticidade. E, para o caso de existirem observações omissas, os valores são estimados e os resultados serão usados na análise dos VBBD.

### 6.2.1 TABELA ANOVA

Para o caso geral dos VBBD (binários), serão agora apresentadas as tabelas ANOVA para o efeito dos tratamentos e para o efeito dos blocos, respetivamente:

**Tabela 2: Tabela ANOVA (efeito dos tratamentos) para VBBD**

Fonte de variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrados médios	$F_o$
Tratamentos (ajustados)	$\frac{1 \sum_{i=1}^v (Q_i)^2}{\eta}$	$v - 1$	$\frac{SQ_{trat(a_j)}}{v - 1}$	$\frac{QM_{trat(a_j)}}{QMe}$
Blocos	$\sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k_j} - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$b - 1$		
Erro	$SQ_T - SQ_{trat(a_j)} - SQ_b$	$N - v - b + 1$	$\frac{SQ_e}{N - v - b + 1}$	
Total	$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$N - 1$		

**Tabela 3: Tabela ANOVA (efeito dos blocos) para VBBD**

Fonte de variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrados médios	F <sub>o</sub>
Tratamentos	$\sum_{i=1}^v \frac{y_{io}^2}{r_i} - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$v - 1$		
Blocos (ajustados)	$SQ_{trat(a_j)} + SQ_b - SQ_{trat}$	$b - 1$	$\frac{SQ_b(a_j)}{b - 1}$	$\frac{QM_{b(a_j)}}{QM_e}$
Erro	$SQ_T - SQ_{trat} - SQ_b(a_j)$	$N - v - b + 1$	$\frac{SQ_e}{N - v - b + 1}$	
Total	$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$N - 1$		

Para qualquer comparação entre os pares, a diferença menos significativa será testada

por  $t_{\alpha, N-v-b+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{\eta} \hat{\sigma}^2}$

### 6.3 CONSTRUÇÃO DOS VBBD ATRAVÉS DOS BIBD

A construção dos VBBD tem sido estudada por alguns autores de entre os quais se destacam Rao (1958), Hedayat e Federer (1974), Kageyama e Tsuji (1979), Tyagi (1979), Khatri (1982), Gujarathi e Pravender (1995), e mais recentemente, Calinski e Kageyama (2000), Bronisław Ceranka e Małgorzata Graczyk (2007,2008). Neste trabalho, serão apenas apresentados alguns dos métodos que recorrem ao BIBD com e sem repetição de blocos para a construção dos VBBD.

O primeiro método apresentado neste trabalho, foi inicialmente desenvolvido por Tyagi(1979) e mais tarde foi generalizado por Khatri (1982). Nele são descritos os procedimentos para obter VBBD não-próprios equireplicados e não replicados.

O segundo método aqui apresentado deve-se aos autores Bronisław Ceranka e Małgorzata Graczyk (2007). Os autores apresentam no seu trabalho (2007,2008) vários métodos de construção dos VBBD equireplicados com blocos repetidos, os quais têm como base as matrizes de incidência dos BIBD com blocos repetidos.

#### **Método 1**

Seja um BIBD com os parâmetros  $[v, b = \binom{v}{k}, r = \binom{v-1}{k-1}, k, \lambda = \binom{v-2}{k-2}]$ . Consideremos  $p$  um inteiro tal que  $kp < v$ , tiram-se  $p$  blocos dos  $b = \binom{v}{k}$  blocos de forma a que nenhum par de blocos tenham qualquer tratamento em comum. Os  $kp$  tratamentos dos  $p$  blocos formam um novo bloco que se repete  $\lambda_0 p$  vezes, com  $\lambda_0 = \binom{kp-2}{k-2}$ . Depois de eliminar  $b_0 = \binom{kp}{k}$  blocos contendo  $k$  tratamentos dos  $kp$  tratamentos escolhidos, escolhem-se outros blocos de  $b = \binom{v}{k}$ . Obtém-se desta forma um VBBD com os parâmetros:

$$v' = v$$

$$b' = b - b_0 + \lambda_0 p$$

$$k'_j = \begin{cases} kp & \text{para } j = 1, 2, \dots, \lambda_0 p \\ k & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$r'_i = \begin{cases} \lambda_0 p + r - r_0 & \text{para } i = 1, 2, \dots, kp \\ r & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ com } r_0 = \binom{kp-1}{k-1}$$

A matriz é dada por  $C = qC_0$  onde  $q = \frac{v\lambda}{k} = \frac{b(k-1)}{v-1}$  e  $C_0 = \left[ I_v - \frac{1}{v} 1_v 1'_v \right]$ .

### Exemplo 6.1

Consideremos o BIBD de parâmetros  $v = 7$ ,  $b = 21$ ,  $r = 6$ ,  $k = 2$  e  $\lambda = 1$ . Escolhendo  $p = 2$ , temos que  $\lambda_0 = \binom{2}{0} = 1$ ,  $\lambda_0 p = 2$ , e  $b_0 = \binom{4}{2} = 6$ . Obtém-se assim um novo plano, cujos blocos são:

$$\begin{array}{l} 2(1,2,3,4) \quad (2,6) \quad (4,5) \quad (6,7) \\ (1,5) \quad (2,7) \quad (4,6) \\ (1,6) \quad (3,5) \quad (4,7) \\ (1,7) \quad (3,6) \quad (5,6) \\ (2,5) \quad (3,7) \quad (5,7) \end{array}$$

Verifica-se que o plano obtido é um VBD com blocos repetidos cujos parâmetros são  $v' = 7$ ,  $b' = 17$ ,  $k'_j = 4$  para  $j = 1, 2$  e  $k'_j = 2$  para os outros casos, e  $r'_i = 5$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $r'_i = 6$  para os outros casos. Para este exemplo, temos que a matriz  $C$  é dada por  $C = \frac{7}{2} \left[ I_7 - \frac{1}{7} 1_7 1'_7 \right]$ .

Este método pode ser aplicado para obter VBBD equireplicados, escolhendo inteiros  $p_1, p_2, \dots, p_s$  se  $kp < v$  e  $p = \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha$ . Posteriormente, dividir  $kp$  tratamentos diferentes em  $kp_1, kp_2, \dots, kp_s$  grupos de tratamentos diferentes. Os  $kp_\alpha$  tratamentos formam um bloco que será repetido  $\lambda_{0\alpha} p_\alpha$  vezes, com  $\lambda_{0\alpha} = \binom{kp_\alpha - 2}{k-2}$  para  $\alpha = 1, 2, \dots, s$ . Depois de eliminar todos os  $b_{0\alpha} = \binom{kp_\alpha}{k}$  que contêm os  $k$  tratamentos retirados dos  $kp_\alpha$  tratamentos escolhidos para  $\alpha = 1, 2, \dots, s$ , obtêm-se os blocos de dimensão  $k$ ,

através dos blocos originais  $b = \binom{v}{k}$ . De notar que, se  $p_\alpha = p_0$  para todos os  $\alpha = 1, 2, \dots, s$  e  $v = ksp_0$ , obtemos um VBBD equireplicado.

### Exemplo 6.2

Consideremos o BIBD de parâmetros  $v = 12, b = 66, r = 11, k = 2$  e  $\lambda = 1$ . Utilizando o procedimento em cima mencionado e, escolhendo  $p_\alpha = 2$  e  $s = 3$ , temos que  $\lambda_{0_1} = \lambda_{0_2} = \lambda_{0_3} = \binom{2}{0} = 1$  e  $b_{0_1} = b_{0_2} = b_{0_3} = \binom{4}{2} = 6$ . Um novo plano em blocos é obtido:

2(1,2,3,4)	(1,9)	(2,8)	(3,7)	(4,6)	(5,9)	(6,12)	(8,11)
2(5,6,7,8)	(1,10)	(2,9)	(3,8)	(4,7)	(5,10)	(7,9)	(8,12)
2(9,10,11,12)	(1,11)	(2,10)	(3,9)	(4,8)	(5,11)	(7,10)	
(1,5)	(1,12)	(2,11)	(3,10)	(4,9)	(5,12)	(7,11)	
(1,6)	(2,5)	(2,12)	(3,11)	(4,10)	(6,9)	(7,12)	
(1,7)	(2,6)	(3,5)	(3,12)	(4,11)	(6,10)	(8,9)	
(1,8)	(2,7)	(3,6)	(4,5)	(4,12)	(6,11)	(8,10)	

O VBBD obtido tem os seguintes parâmetros  $v' = 12, b' = 54, k'_j = 4$  para  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  e  $k'_j = 2$  para os outros casos, e  $r = 10$ . A matriz  $C$  é agora dada por  $C = 6 \left[ I_{12} - \frac{1}{12} 1_{12} 1'_{12} \right]$ .

### Método 2

Seja  $N_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, t$ , a matriz de incidência de um BIBD com blocos repetidos com os parâmetros  $v, b_i, r_i, k_i, \lambda_i, b_i^*$ , e seja  $C_i$  a matriz de informação do plano definida por  $N_i, i = 1, 2, \dots, t$ . A matriz  $N$  é assim formada por,

$$N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_t]$$

O plano em blocos com a matriz de incidência  $N$ , na forma em cima mencionada, é um VBBD com blocos repetidos de parâmetros:

$$v' = v, \quad b' = \sum_{i=1}^t b_i, \quad r' = \sum_{i=1}^t r_i, \quad k = [k_1 1'_{b_1} \quad k_2 1'_{b_2} \quad \dots \quad k_t 1'_{b_t}]',$$

$$\lambda' = \sum_{i=1}^t \lambda_i,$$

$$b'^* = \sum_{i=1}^t b^*$$

**Exemplo 6.3**

Consideremos  $D_1, D_2$  os BIBDR com os parâmetros  $v = 6, b_1 = 20, r_1 = 10, k_1 = 3, \lambda_1 = 4, b_1^* = 14$  e  $b_2 = 15, r_2 = 5, k_2 = 2, \lambda_2 = 1, b_2^* = 15$ , respectivamente. Com base no plano de blocos já ilustrado no exemplo 3.5.1 do capítulo 3, a matriz de incidência para o plano  $D_1$  é dada por:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para  $D_2$ , e tendo como base o plano de blocos,

- (1,2) (2,3) (3,5)
- (1,3) (2,4) (3,6)
- (1,4) (2,5) (4,5)
- (1,5) (2,6) (4,6)
- (1,6) (3,4) (5,6)

obtem-se a matriz de incidência  $N_2$ ,

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $N$  é agora formada com base em  $N_1$  e  $N_2$ , e corresponde à matriz incidência do VBBD com os parâmetros  $v' = 6$ ,  $b' = 35$ ,  $r' = 15$ ,  $k = [3 \cdot 1'_{20} \ 2 \cdot 1'_{15}]'$ ,  $\lambda' = 5$  e  $b'^* = 29$ . A matriz  $C$  é dada por  $C = 11 \left[ I_6 - \frac{1}{6} 1_6 1'_6 \right]$ .

Uma abordagem mais detalhada dos vários métodos de construção dos VBBD equireplicados, não equireplicados, com blocos de diferentes dimensões, poderá ser encontrada em Calinski e Kageyama (2000).

## **CAPÍTULO 7**

### **CASO PRÁTICO: APLICAÇÃO DOS BIBDR NA ÁREA DA EDUCAÇÃO EM CABO VERDE**

## **7 CASO PRÁTICO: APLICAÇÃO DOS BIBDR NA ÁREA DA EDUCAÇÃO EM CABO VERDE**

### **7.1 INTRODUÇÃO**

Apesar de ser objeto de estudo de investigadores em diversas áreas, o Planeamento de Experiências utilizando blocos incompletos e blocos incompletos equilibrados na área das Ciências da Educação, tem ainda muitas vertentes práticas que podem ser exploradas e que podem contribuir de forma significativa para o desenvolvimento de vários tipos de fenómenos pedagógicos.

A importância da Álgebra na Matemática escolar é desde há muito reconhecida por vários investigadores, pois envolve o trabalho com símbolos, com a linguagem algébrica, com relações matemáticas e com a generalização. É por isso importante que um estudante desenvolva, durante o seu percurso escolar, competências e habilidades algébricas que o permita conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar um problema matematicamente, obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado.

Nesse sentido, surge o conceito de pensamento algébrico, que é definido como sendo o raciocínio e o trabalho que permite estabelecer relações, de um modo geral e abstrato, utilizando uma linguagem simbólica (Ponte, 2005).

Neste capítulo, é demonstrado a aplicabilidade dos BIBDR como uma ferramenta útil na análise dos diversos domínios do raciocínio algébrico numa amostra de alunos do 1º ano do Ensino superior em Cabo Verde. É apresentado um estudo, cujo objetivo é comparar o raciocínio algébrico destes alunos em 5 domínios distintos: tecnicismo algébrico, generalização da aritmética, formulação de leis, geometrização da álgebra e resolução de problemas (Ponte, 2005).

Comparar o comportamento algébrico destes alunos que concluíram o ensino secundário onde a disciplina de matemática é obrigatória, poderá auxiliar o professor a planejar, aplicar e avaliar as suas metodologias ou formas de abordagem dos conteúdos. Assim, identificar os problemas associados ao desenvolvimento do pensamento algébrico poderá contribuir para o aprimoramento dos programas curriculares de matemática no ensino básico e secundário.

## **7.2 ENQUADRAMENTO GEOGRÁFICO E INSTITUCIONAL**

O ISCEE (Instituto Superior de Ciências Económicas e Empresariais) é um estabelecimento de Ensino Superior Particular e Cooperativo, com sede na cidade do Mindelo, ilha de São Vicente, Cabo Verde. Comemorou no dia 25 de Novembro de 2011, o seu vigésimo aniversário, data em que, no ano de 1991, foi assinado o Protocolo de Cooperação com vista à organização dos Cursos de Bacharelato em Gestão e Marketing e em Contabilidade. Desde então, o ISCEE tem vindo a fazer o lançamento de cursos de licenciatura e mestrado na área da Contabilidade e Administração, Gestão, Turismo e Marketing.

Atualmente, o ISCEE conta com quatro cursos de Licenciatura, já em cima mencionados, e com três programas de Mestrado na área da Gestão de Empresas, Turismo e Ciências da Educação. Para os cursos de Licenciatura em Contabilidade e Gestão, as condições de acesso à instituição são o 12º ano ou habilitação legalmente equivalente com a disciplina de Matemática. Estes cursos integram as disciplinas de Matemática I e II nos seus planos curriculares.

Assim sendo, a nossa amostra é constituída por 100 alunos, escolhidos aleatoriamente, nas turmas do 1º ano dos cursos de Licenciatura em Contabilidade e Gestão.

## **7.3 RECOLHA, ANÁLISE E TRATAMENTO DE DADOS**

Para este estudo, foi elaborado um questionário (ver anexo I), com 5 grupos de questões, que correspondem a 5 domínios do pensamento algébrico: Grupo 1 – Tecnicismo Algébrico, Grupo 2 – Generalização da Aritmética, Grupo 3 – Formulação de Leis, Grupo 4 – Geometrização da álgebra, Grupo 5 – Resolução de Problemas. Cada grupo de questões é constituído por 4 alíneas, fazendo assim um total de 20 questões.

O questionário foi aplicado a todos os alunos do 1º ano dos cursos de Licenciatura em Contabilidade e Gestão, e dos quais 100 foram selecionados aleatoriamente para a análise quantitativa dos dados.

Para a análise dos dados foi utilizado o software R (versão 2.12.1).

#### **7.4 MODELO APLICADO**

Tendo o questionário um elevado número de questões, delinear um plano em blocos, onde em cada bloco constariam todas as questões, tornaria o questionário muito extenso para os alunos. Assim, os alunos responderam apenas a 3 dos 5 grupos de questões, previamente escolhidos e de acordo com plano adotado. A escolha de blocos de menor dimensão permitiu diminuir o erro experimental aumentando desta forma a precisão dos resultados.

Por outro lado, cada um dos domínios só irá ser testado em 6 alunos e cada grupo de questões será respondido por 10 alunos, ou seja, será repetido 10 vezes. Assim, será adotado para análise dos dados, um Plano em Blocos Incompletos com repetições com os seguintes parâmetros  $(5, 10, 6, 3, 3 | b^* = 10)$ . Recorde-se que, a estrutura deste plano, enquadra-se na família 1 dos BIBDR com  $t = 10$ , ou seja, o BIBDR apresenta os parâmetros  $(5, 10t, 6t, 3, 3t | b^* = 10)$ .

A escolha deste tipo de plano, permitiu simplificar a concretização da experiência, no sentido em que diminuiu a quantidade de questionários a analisar e, conseqüentemente, facilitou a análise dos resultados obtidos.

## 7.5 ANÁLISE ESTATÍSTICA DO BIBDR

A estrutura do plano adotado foi obtida considerando a multiplicidade dos blocos igual a 10 e, reproduzindo cópias do plano original BIBD (5,10,6,3,3).

Assim, e recorrendo ao comando  $> \text{find.BIB}(5,10,3)$  do software R, obtivemos a seguinte estrutura:

```
> BIBD<-find.BIB(5,10,3)  
> BIBD  
[,1] [,2] [,3]  
[1,] 1 3 5  
[2,] 1 2 4  
[3,] 2 3 5  
[4,] 1 3 4  
[5,] 2 4 5  
[6,] 1 2 3  
[7,] 1 4 5  
[8,] 3 4 5  
[9,] 2 3 4  
[10,] 1 2 5
```

E portanto, temos os 10 blocos distintos,

(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5).

Como cada bloco tem multiplicidade 10, obtemos a estrutura para o  $(5, 100, 60, 3, 30 | b^* = 10)$ :

```
10(1,2,3), 10(1,2,4), 10(1,2,5), 10(1,3,4), 10(1,3,5)  
10(1,4,5), 10(2,3,4), 10(2,3,5), 10(2,4,5), 10(3,4,5)
```

Esquematizando as 10 repetições de cada bloco, e apresentando os resultados obtidos para cada questão numa escala de 0-100%, obtemos as seguintes tabelas:

**Tabela 4: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 1 e 2 do BIBDR(5,100,60,3,30|b\*=10)**

	Questão 1	Questão 2	Questão 3		Questão 1	Questão 2	Questão 4
<b>Bloco 1</b>	75	0	25	<b>Bloco 2</b>	60	50	90
	25	25	0		20	0	0
	15	80	20		75	0	0
	75	85	0		70	75	0
	20	25	65		65	25	0
	40	75	75		20	70	0
	90	75	100		55	85	0
	70	100	0		75	0	5
	60	75	25		35	90	0
	35	75	0		30	75	0

**Tabela 5: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 3 e 4 do BIBDR(5,100,60,3,30|b\*=10)**

	Questão 1	Questão 2	Questão 5		Questão 1	Questão 3	Questão 4
<b>Bloco 3</b>	45	75	35	<b>Bloco 4</b>	70	30	0
	80	25	35		80	0	10
	15	85	0		30	0	0
	100	100	80		45	25	0
	60	30	20		5	0	0
	85	100	45		55	100	0
	65	0	20		45	0	0
	0	90	0		90	90	80
	60	85	15		15	5	50
	60	0	25		40	80	35

**Tabela 6: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 5 e 6 do BIBDR(5,100,60,3,30|b\*=10)**

	Questão 1	Questão 3	Questão 5		Questão 1	Questão 4	Questão 5
<b>Bloco 5</b>	25	0	5	<b>Bloco 6</b>	50	0	55
	75	0	0		50	25	5
	45	0	5		55	15	55
	30	0	10		0	0	30
	70	0	30		50	0	10
	50	100	0		40	40	25
	80	20	45		45	0	5
	35	0	0		10	0	75
	20	35	0		35	0	0
	0	0	5		40	0	35

**Tabela 7: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 7 e 8 do BIBDR(5,100,60,3,30|b\*=10)**

	Questão 2	Questão 3	Questão 4
<b>Bloco 7</b>	85	25	0
	85	25	30
	85	0	0
	50	0	0
	85	0	0
	25	25	10
	25	65	0
	25	25	0
	25	20	15
	35	50	0

	Questão 2	Questão 3	Questão 5
<b>Bloco 8</b>	85	25	20
	90	40	10
	0	45	30
	30	25	55
	90	25	35
	0	0	5
	90	25	5
	25	50	70
	35	0	45
	90	80	40

**Tabela 8: Esquema de Estrutura para as 10 repetições dos blocos 9 e 10 do BIBDR(5,100,60,3,30|b\*=10)**

	Questão 2	Questão 4	Questão 5
<b>Bloco 9</b>	60	5	60
	85	0	15
	100	40	20
	25	0	5
	75	5	5
	80	0	30
	75	0	45
	90	0	5
	90	5	25
	0	60	5

	Questão 3	Questão 4	Questão 5
<b>Bloco 10</b>	100	35	70
	0	0	45
	75	35	10
	0	0	0
	0	0	5
	0	0	30
	0	0	55
	0	0	5
	45	55	5
	100	20	80

É apresentada no anexo II uma tabela com a estrutura completa do plano.

### 7.5.1 ANÁLISE DA VARIÂNCIA

Para verificar se existem ou não diferenças significativas entre os cinco domínios do pensamento algébrico (tratamentos) e entre os alunos (blocos) irá ser proceder-se à análise de variância do plano.

Testaremos agora as seguintes hipóteses:

$H_0$ : Não existem diferenças significativas devidas aos tratamentos

$$(\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5)$$

versus

$H_1$ : Existem diferenças nos resultados devidas aos tratamentos

$$(\tau_i \neq 0 \text{ para pelo menos um } i, \text{ com } i = 1,2,3,4,5)$$

O modelo que apresenta o efeito dos tratamentos ajustados e o efeito dos blocos ignorando os tratamentos é dado pelo seguinte comando *BIB.test()* do software R:

***análise<-BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.05,group=TRUE)***

Os resultados obtidos para a análise da variância são apresentados na tabela 7.6.

Tabela 7.6. Tabela ANOVA intra-bloco para o BIBDR(5, 100, 60, 3, 30| $b^* = 10$ )

---

***Analysis of Variance Table***

***Response: Nota***

	<i>Df</i>	<i>Sum Sq</i>	<i>Mean Sq</i>	<i>F value</i>	<i>Pr(&gt;F)</i>
<b><i>Blocos</i></b>	<b><i>99</i></b>	<b><i>112893</i></b>	<b><i>1140.3</i></b>	<b><i>1.6893</i></b>	<b><i>0.0009922 ***</i></b>
<b><i>Tratamentos</i></b>	<b><i>4</i></b>	<b><i>66595</i></b>	<b><i>16648.8</i></b>	<b><i>24.6639</i></b>	<b><i>&lt; 2.2e-16 ***</i></b>
<b><i>Residuals</i></b>	<b><i>196</i></b>	<b><i>132305</i></b>	<b><i>675.0</i></b>		

***Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1***

---

Através da tabela da ANOVA, verifica-se que, para os níveis de significância de 1%, 5% e 10%, há evidência estatística para rejeitar a hipótese nula, ou seja, podemos concluir que existem diferenças significativas nas notas obtidas para os diferentes domínios do pensamento algébrico.

Recorde-se que, para este modelo, pressupõe-se a normalidade da variável resposta e a homogeneidade das variâncias dos tratamentos.

Executando o teste de Kolmogorov-Smirnov para analisar a normalidade da variável resposta, neste caso as notas obtidas nos questionários, obtemos:

```
> ks.test(Nota,mean(Nota),sd(Nota))  
  
Two-sample Kolmogorov-Smirnov test  
  
data: Nota and mean(Nota)  
  
D = 0.5667, p-value = 0.9062  
  
alternative hypothesis: two-sided
```

Pode então constatar-se a normalidade da variável resposta para os níveis de significância 1%, 5% e 10%.

No entanto, verifica-se a violação do pressuposto da homogeneidade das variâncias. Com efeito, através do Teste de Levene<sup>2</sup> observa-se que a hipótese nula de igualdade de variâncias é rejeitada para os níveis de significância de 1%, 5% e 10%:

```
> levene.test(Nota,Tratamentos,"mean")  
  
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = "mean")  
  
      Df    F value    Pr(>F)  
group  4    10.747    3.817e-08 ***  
  
      295  
  
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Em termos práticos, a homogeneidade das variâncias só se torna importante quando as dimensões dos grupos são muito diferentes. Se as amostras não forem fortemente desequilibradas, o efeito da heterogeneidade das variâncias, mesmo se acentuada, é

---

<sup>2</sup> É dos testes mais potentes utilizados para a comparação das variâncias (Levene, 1960) e particularmente robusto a desvios de normalidade.

pouco significativo (Guimarães e Cabral, 1997). Assim, poderemos considerar os resultados obtidos pela ANOVA válidos.

### 7.5.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE TUKEY

Uma vez rejeitada a hipótese nula da igualdade de tratamentos, irão agora ser analisadas quais as diferenças mais significativas entre os cinco domínios do pensamento algébrico.

Recorde-se que, a correspondente matriz de incidência  $N = (n_{ij})$  para este plano é do tipo  $5 \times 100$ , onde  $n_{ij}$  representa o número de vezes que a  $i$ -ésima questão ocorre no  $j$ -ésimo bloco com  $i = 1, 2, \dots, 5$  e  $j = 1, 2, \dots, 100$ .

Para este modelo, a matriz de informação  $C$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{30.5}{3} \left( I_5 - \frac{1}{5} \cdot 1_5 \cdot 1_5' \right) \\
 &= 50 \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 40 & -10 & -10 & -10 & -10 \\ -10 & 40 & -10 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & 40 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 & 40 & -10 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & 40 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que  $R(C) = 4$  e portanto, todos os pares de contrastes de tratamentos são estimáveis (Chakrabarti, 1963) com a mesma precisão de  $\frac{\sigma^2}{25}$  e com um fator de eficiência de  $E \approx 0,83$ .

Recorrendo agora ao método de Tukey para comparação dos contrastes dos tratamentos, obteve-se através do comando *BIB.test()* o seguinte resultado para os níveis de significância de 1% e 5%, respetivamente:

<b>Tukey</b>	<b>Tukey</b>
<b>Alpha : 0.01</b>	<b>Alpha : 0.05</b>
<b>Std.err : 3.674303</b>	<b>Std.err : 3.674303</b>
<b>HSD : 17.14834</b>	<b>HSD : 14.30704</b>
<b>Means with the same letter are not significantly different.</b>	<b>Means with the same letter are not significantly different.</b>
<b>Comparison of treatments</b>	<b>Comparison of treatments</b>
<b>Groups, Treatments and means</b>	<b>Groups, Treatments and means</b>
<b>a 2 55.83333</b>	<b>a 2 55.83333</b>
<b>a 1 48.56667</b>	<b>a 1 48.56667</b>
<b>b 3 28.03333</b>	<b>b 3 28.03333</b>
<b>b 5 25.03333</b>	<b>bc 5 25.03333</b>
<b>b 4 11.03333</b>	<b>c 4 11.03333</b>

Donde se conclui que:

- Entre os tratamentos 1 e 2, 3 e 5, 4 e 5, não há evidência de diferenças significativas para os níveis de significância de 1% e 5%;
- Entre os tratamentos 3 e 4, ao nível de significância de 1%, não há evidência de diferenças significativas;
- Os restantes pares de tratamentos apresentam diferenças significativas aos níveis de significância de 1% e 5%.

## 7.6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Através dos resultados obtidos na análise efetuada, verifica-se que relativamente à Generalização da Aritmética (questão 2) e ao Tecnicismo Algébrico (questão 1), os alunos obtiveram os melhores resultados com aproximadamente 55,8% e 48,6%, respetivamente. Para os restantes domínios, as médias baixam consideravelmente chegando até a aproximadamente 11% para o domínio da Geometrização da álgebra.

O método de comparação múltipla de Tukey, indica-nos que existem diferenças significativas entre alguns dos domínios do pensamento algébrico. As diferenças são mais significativas entre os domínios da Generalização da Aritmética e Tecnicismo Algébrico com os restantes domínios. Para este facto, poderão existir algumas justificações:

- A abordagem da Álgebra nestes domínios é bastante representativa nos programas curriculares de matemática no ensino básico e secundário de Cabo Verde. Desta forma, os alunos tendem a adaptar-se com mais facilidade a técnicas de transformação de expressões (monómios, polinómios, frações algébricas) e processos de resolução de equações. Embora com médias a rondar os 55%, os alunos apresentaram alguma capacidade na manipulação de letras mas ainda assim têm dificuldades em fazer a transição da linguagem natural para a algébrica.
- Para os restantes domínios apresentados, o programa curricular de matemática apresenta várias lacunas. Nomeadamente na Geometrização da álgebra, que é quase inexistente no currículo do ensino da matemática. Apenas no 1º ciclo, os alunos têm contacto com a geometria na sua forma mais básica, como cálculo de áreas planas. A resolução de problemas surge quase como complemento de alguns temas e é abordado de uma forma muito ligeira.
- O recurso às novas tecnologias nas aulas de Matemática é ainda muito deficiente. Os alunos não possuem calculadoras gráficas o que os obriga a realizarem manualmente todos os cálculos e conseqüentemente, o tecnicismo da álgebra é sobrevalorizado.

- Também a forma como o Professor encara o ensino da Álgebra é fundamental neste processo. O Professor deve incentivar o estudante a pensar e a raciocinar ao invés de o apropriar mecanicamente de algoritmos. Deve propor aos alunos atividades que inter-relacionem diferentes aspetos da Álgebra como resolução de problemas, e não só atividades meramente mecânicas. Neste sentido, percebe-se que o Professor tem aqui um papel de extrema importância na forma como o aluno desenvolve o pensamento Algébrico.

## **CAPÍTULO 8**

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPETIVAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA**

## **8 CONSIDERAÇÕES E PERSPETIVAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA**

O Planeamento de Experiências tem sido fundamental em investigações científicas nas mais diversas áreas do conhecimento. Em particular, muitos dos investigadores, têm demonstrado a importância da aplicação dos Planos em Blocos Incompletos como contributo para o avanço da ciência.

Com este trabalho procurámos explorar as propriedades dos Planos em Blocos Incompletos, em particular, os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (BIBD) com e sem repetição, e com blocos de diferentes dimensões. Foi apresentada a relação entre os BIBD e a Teoria da Amostragem e foram abordados alguns dos métodos de construção mais usuais e também mais recentes para estes planos. Entre eles, o Método da Diagonalização Sucessiva e o Algoritmo Backtracking. Para cada método apresentámos, sempre que possível, exemplos originais.

No âmbito do caso prático, interessámo-nos em demonstrar a importância da aplicação dos BIBDR numa área ainda pouco explorada, a da Educação, procurando obter finalidades práticas para o desenvolvimento da Educação e do conhecimento científico em Cabo Verde.

Recorrendo ao software R para a análise estatística dos BIBDR, ilustrámos também a importância da utilização deste tipo de software estatístico como meio de obtenção dos resultados de uma forma mais rápida e eficiente.

De salientar que, relativamente à aplicação apresentada, os resultados possuem algumas limitações. Apesar da amostra ter sido escolhida de forma aleatória, para que possa ser representativa do universo dos alunos do 1º ano do ensino superior em Cabo Verde, deverá ser constituída por alunos provenientes de outras instituições e de outras ilhas. Também a pré-disposição dos alunos aquando a aplicação do questionário poderá ter influenciado os resultados. Com efeito, quando a questão lhes parecia difícil, não demonstravam muito empenho na sua resolução.

Pretendemos em trabalhos futuros ultrapassar as dificuldades encontradas e continuar a investigar a aplicabilidade dos BIBD e VBBD em estudos na área da Educação.

No que respeita a perspectivas futuras de investigação, ficam ainda muitas questões interessantes em aberto e que podem ser exploradas. Destacam-se:

- A análise de Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com diferentes números de réplicas;
- Os Métodos computacionais na construção dos BIBD com e sem repetição;
- O Estudo da relação entre a Matriz de informação e os critérios de otimalidade de planos experimentais, e os métodos de seleção desses critérios.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**AYELE, Z.** (2010): *Constructions of Partial Diallel Cross through Partially Balanced Incomplete Block Designs with block size two*, Master Thesis, Addis Ababa University.

**AVADHANI, M.S.; SUKHATME, B.V.** (1973): *Controlled sampling with equal probabilities and without replacement*, International statistical Review, 41, 175-182.

**BOSE, R. C.** (1939): *On the construction of Balanced Incomplete Block Designs*, Annals of Eugenics, Vol. 9, 353-399.

**BOSE, R. C.; NAIR, K. R.** (1939): *Partially Balanced Incomplete Block Designs*, Sankhya, Vol. 4, 337 – 373.

**BOSE, R. C.** (1951): *On the construction of Balanced Incomplete Block Designs*, Calcutta Statistical Association, Vol. 3, 120-125.

**BOSE, R.C.** (1950/51): *Least square aspects of analysis of variance*. Univ of North Carolina, Inst of Statistics Mimeo Ser nº 9.

**BOSE, R. C.** (1942): *A note on the resolvability of Balanced Incomplete Block Designs*, Sankhya, Vol. 6, 105 – 110.

**BOX, G.E.P.; HUNTER, J.S.** (1957): *Multifactor experimental designs for exploring response surfaces*. Ann. Math. Statist., 28, 195-241.

**BRANCO, N.** (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Tese de Mestrado, Univ. Lisboa).

**CALIŃSKI, T. ; KAGEYAMA, S.** (2000): *Block designs: A randomization approach*, Vol. I: Analysis. Lecture Notes in Statistics, 150, Springer-Verlag, New York.

**CALINSKI, T.; KAGAYAMA, S.** (2003): *Block Design: A Randomization Approach*, Volume II: Design, Lecture Notes in Statistics, Springer.

**CERANKA, B.; GRACZYK, M.** (2007): *Variance Balanced Block Designs with Repeated Blocks*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, n°. 55, 2727 – 2734.

**CERANKA, B.; GRACZYK, M.** (2008): *Some New Construction Methods of variance Balanced Block Designs with Repeated Blocks*, Metodoloski zvezki, Vol. 5, N°1-8.

**COCHRAN, G. W.; COX, G.** (1957): *Experimental Design*, John Wilwy and Sons.

**COLBOURN, C. J.; DINITZ, J. H.** (2006): *The CRC Handbook of Combinatorial Designs*, CRC Press. Chapman & Hall.

**COLQUHOUN, D.** (1963): *Balanced Incomplete Block Designs in Biological assay illustred by the assay of gastrin using a Youden Square*. Brit. J. Pharmacol.,21,67-77.

**CHAI, F.; MUKERERJEE, R.** (1999): *Optimal Designs for Diallel Crosses with specific combining abilities*; Biometrika, Vol. 86, 2, 453- 458.

**CHAKRABARTI, S.; KHANNA, R.K.** (2006): *A new visual cryptography scheme for STS based access structures*. Journal of Discrete Mathematical Sciences And Cryptography, Vol. 9, n°1, 9-23.

**CHAKRABARTI, M.C.** (1963): *On the use of incidence matrices in sampling from finite populations*. J.Ind. Statist.Assoc., 1, 78-85.

**CHAKRABARTI, M. C.** (1963): *On the C-matrix in design of experiments*. J Indian Statist Assoc 1:8-23.

**DAS, M.N.; MOHANTY, S.** (1973): *On PPS Sampling without replacement ensuring selection probabilities exactly proportional to sizes*. Austral,J. statist, 15(2), 87– 94.

**DOCSÁNYI, D. A.; PREECE, D. A.; SOICHER, L. H.** (to appear): *On balanced incomplete blocks designs with repeated blocks*.

**ECCLESTON, J.A.; HEDAYAT, A.S.** (1974): *On the theory of connected designs: Characterization and optimality*, Ann Statist 2:1238-1255.

**FARAWAY, JULIAN J.** (2002); *Practical Regression and Anova using R*, 213p. Disponível em: <http://cran.r-project.org/doc/contrib/Faraway-PRA.pdf>.

Acedido a 03 de Março de 2012.

**FARNSWORTH, GRANT V.** (2008): *Econometrics in R*. Disponível em: <http://cran.rproject.org/doc/contrib/Farnsworth-EconometricsInR.pdf>.

Acedido a 07 de Março de 2012.

**FERNANDES, E.** (1999): *Estatística Aplicada*, Universidade do Minho.

**FIENBERG, S.; TANUR, J.** (1987): *Experimental and Sampling Structures: Parallels Diverging and Meeting*, International Statistical Review, Vol 1, nº 55, 75-96.

**FISHER, R. A.** (1925): *Statistical methods for research workers*, Oliver and Boyd Edinburgh.

**FISHER, R. A.** (1935): *The design of experiments*, Oliver and Boyd Edinburgh.

**FISHER, R. A.; YATES, F.** (1963): *Statistical tables for biological, Agricultural, and Medical research*, Hafner Publishing Co, New York.

**FOODY, W.; HEDAYAT, A.** (1977): *On theory and applications of BIB Designs with repeated blocks*, The Annals of Statistics, Vol. 5, nº 5, 932 – 945.

**GHOSH; SHRIVASTAVA** (2001): *A class of BIB designs with repeated blocks*, Journal of Applied Statistics, Vol. 28, nº 7, 821-833.

**GUIMARÃES, RUI CAMPOS; CABRAL, JOSÉ A. SANSFIELD** (1997): *Estatística*, McGraw-Hill, Lisboa.

**GUJARATHI; PRAVENDER** (1995): *Construction of efficiency balanced designs*. Communicated.

**GUPTA, V.K.; A.K.; NIGAM A.K.; KUMAR, P.** (1982): *On a family of sampling schemes with inclusion probability proportional to size*. Biometrika, 69, 191-196.

**HANANI, H.** (1961): *The existence and construction of Balanced Incomplete Block Designs*, The Ann. Math. Statist, Vol. 32, 361 – 386.

**HEDAYAT, A. S.; HWANG, H. L.** (1984): *BIB (8, 56, 21, 36) and BIB (10, 30, 9, 3, 2) Designs with repeated Blocks*, Journal of Combinatorial Theory, series A 36, 73 – 91.

**HEDAYAT, A. S.; LANDGEV, I. N.; TONCHEV, V. D.** (1989): *Results on the support of BIB designs*, Journal of Statistical Planning and Inference, 22, 295-306.

**HEDAYAT, A.; SHUO-YEN, R. LI** (1979): *The trade off method in the construction of BIB Design with variable support sizes*, The Annals of Statistic, Vol. 7, Issue 6, 1277 – 1287.

**HEDAYAT, A.; FEDERER, W. T.** (1974): *Pairwise and Variance Balanced Incomplete Block designs*, Ann. Inst. Statist. Math. 26, 331-338.

**HEDAYAT, A.S; MAJUMDAR, D.** (1995): *Generating desirable sampling plans by the technique of trade-off in experimental design*. J. Statist. Plann. Inf. 44, 237-247.

**HEILIGERS, B.** (1991): *A Note on Connectedness of Block Designs*, Metrika, Vol. 38, 377-381.

**HINKELMANN, K.; KEMPTHORNE, O.** (1994). *Design and Analysis of Experiments. Vol.1: Introduction to Experimental Design*. John Wiley.

**HINKELMANN, K.; KEMPTHORNE, O.** (2005): *Design and Analysis of Experiments, Advanced Experimental Design*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley-Interscience.

**PONTE, J. P.** (2005): *Álgebra no currículo escolar*, Educação & Matemática: Revista da Associação de professores de matemática. nov-dez. 2005. p. 36-42.

**JOHN, P. W. M.** (1971): *Statistical Design and Analysis of Experiments*, Macmillan, New York.

**JULIAN, R.; ABEL, R.** (2004): *Balanced incomplete block designs with block size 9: Part III*, Australasian Journal of combinatorics, Vol. 30, 57-73.

**KAGEYAMA, S.** (1972): *On the reduction of associate classes for certain PBIB designs.* Ann. Math. Statist., 43, 1528–1540.

**KAGEYAMA, S.; TSUJI, T.** (1979): *Inequality for equireplicated  $n$ -array block designs with unequal block sizes.* Journal of Statistical Planning and Inferences, 3, 101-107.

**KANG, I.** (2006); *New Digital Fingerprint Code Construction Scheme Using Group-Divisible Design.* IEICE TRANS. Fundamentals, volE89-A,NO.12 , 3732-3735.

**KHATRI, C. G.** (1982): *A note of variance balanced designs,* Journal of Statistical Planning and Inferences, 6, 173-177.

**KEMPTHORNE, O.** (1952): *The Design and Analysis of Experiments,* Wiley, New York.

**KEMPTHORNE, O.** (1956a): *The Efficiency Factor of an Incomplete Block Design,* Ann. Math. Statist., 27, 846 – 849.

**KHARE, M.; W. T. FEDERER** (1981): *A simple construction procedure for resolvable incomplete block designs for any number of treatments.* Biom. J., 23, 121–132.

**KIRKMAN, T. P.** (1847): *On a problem in combinations,* Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 2, 191-204.

**KOSKE, J.K.; KOSGEL, M.K.; MUTISO, J.M.** (2011): *A new third order rotatable design in five dimensions through Balanced Incomplete Block Designs.* JAGST Vol. 13(1) 2011.

**KUMAR, M.R.; PATHAK, S.S.; CHAKRABARTI, N.B.** (2007): *A new multi wavelength-optical code division multiple access code design based on Balanced Incomplete Block Design.* Proceedings of International Conference on Industrial and Information Systems, 2007. ICIIS 2007.

**KUMAR, P.; GUPTA,V.K.; NIGAM, A.K.** (1985): *On inclusion probability proportional to size sampling scheme.* Jour. Statist Plan. Infer. 12, 127-131.

**MANN, H. B.** (1969): *A note on balanced incomplete block designs*, The Annals of Math. Statist., Vol. 40, nº 2, 679-680.

**MASCARENHAS, V.** (2008): *Planos em blocos incompletos parcialmente equilibrados*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

**MATOS, A.; BRANCO, N.; PONTE, J.** (2005): *Como vai o pensamento algébrico dos alunos?* In: Educação & Matemática: Revista da Associação de professores de matemática. nov-dez. 2005. p. 54-60.

**MENDIBURU, F.** (2010): *Statistical Procedures for Agricultural Research*, Disponível em <http://tarwi.lamolina.edu.pe/~fmendiburu>.  
Acedido em 03 de Março de 2012

**MONTGOMERY, DOUGLAS** (2001): *The Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, 5ª Ed.

**MOORE, E. H.** (1893): *Concerning Triple Systems*, Math. Ann. 43, 271-85.

**OLIVEIRA, T.** (1994): *Planos de Blocos Equilibrados Incompletos com repetições*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

**OLIVEIRA, T.; SOUSA, M.** (2002): *Some correspondence between Diallel Crosses and BIB Designs*, Proceedings of the 17th International Workshop on Statistical Modelling, 515-520, Editors Mikis Stasinopoulos and Giota Touloumi.

**OLIVEIRA, T.; SOUSA, M.** (2004): *BIBDR: Some analysis on BIBD (9, 24, 8, 3, 2) cardinalities*, Colloquium Biometryczne, Tom 34a, 161-170.

**OLIVEIRA, T.; SOUSA, M.** (2004): *BIBD with repeated block: some analysis on BIBD(12,44,11,3,2) with different structures*. Colloquium Biometryczne, 34a, 131-140.

**OLIVEIRA, T. A.** (1999): *Planeamento de Experiências*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

**OLIVEIRA, T. A.** (2011): *Planos em Blocos Incompletos Equilibrados e Parcialmente Equilibrados (BIB e PBIB Designs): Na fronteira entre a Estatística e a Matemática*.

Proceedings of ENSPM 2010, 8-10 July 2010, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Leiria.

**OLIVEIRA, T. A.; CERANKA, B.; GRACZYK, M.** (2006): *The variance of the difference of block effects in the balanced incomplete block designs with repeated blocks*, Colloquium Biometryczne 36, 115-124.

**OLIVEIRA, T. A.** (2010): *BIB designs with repeated blocks: review and perspectives*, The Islamic Countries Society of Statistical Sciences, Vol. I, 82-96.

**PILARCZYK, W.** (2008): *On Efficiency of Incomplete Blocks and Confidence Bounds for Precision of Trials on Cereals and Oil Rape in Poland*, Department of Mathematical and Statistical Methods. Agricultural University.

**RAGHAVARAO, D.** (1971): *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, John Wiley and Sons, New York.

**RAGHAVARAO, D.; SINGH, R.** (1975): *Applications of PBIB designs in cluster sampling*. Proceedings of the Indian National Science Academy, 41A, 281-288.

**RAGHAVARAO, D. AND PADGETT, L.V.** (2005): *Block Designs: Analysis, Combinatorics and Applications*. Series on Applied Mathematics, World Scientific Publishing Co.

**RAGHAVARAO, D.; FEDERER, W.T.; SCHWAGER, S. J.** (1986): *Characteristics for distinguish among balanced incomplete block designs with repeated blocks*. Journal of Statistical Planning and Inference 13, 151-163.

**RAO, J.N.K; VIJAYAN, K.** (2008): *Application of Experimental Design in Survey Sampling*. J. Ind. Soc. Agril. Statist., 62(2), 126-131.

**RAO, V.R.** (1958): *A note on balanced designs*. Ann. Math. Statist., 29,290-294.

**SEBERRY, J.; YAMADA, M.** (1992): *Hadamard matrices, sequences, and block designs*. *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys*, (edited by J. H. Dinitz and D. R. Stinson) Chapter 11, Wiley.

**SHARMA, M.K.; FANTA, S.** (2009): *Application of Partially Balanced Incomplete Block Design in Probability Proportional to Size Sampling*. JESA, Vol. XVIII, 22-31.

**SHRIKHANDE, S.; RAGHAVARAO, D.** (1963): *A method of construction of incomplete block designs*, Sankhya A 25 (1963), 399-402.

**SRIVASTAVA, J.; OUYANG, Z.** (1992): *Sampling theory using experimental design concepts*, Lecture notes-Monograph series, Institute of Mathematical Statistics, vol 17, 241-264.

**SILVA, P** (2009): *Modelos de Planos em Blocos Incompletos: revisão e perspectivas*, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

**SINGH, R.; RAGHAVARAO, D.; FEDERER, W.T.** (1976): *Applications of higher order associate class PBIB designs to multidimensional cluster sampling*. Estadística, 30, 202-209.

**TYAGI, S. N.** (1979): *On a class of Variance Balanced Block Design*, J. Statist. Plann. Inference 3, 333-336.

**TEFERA, Y.** (2007): *Application of balanced incomplete Block design in pps sampling without Replacement*, Addis ababa university.

**TORGO, LUÍS** (2009): *A linguagem R, Programação para a análise de dados*, Escolar Editora, Lisboa.

**VAN DER LINDEN, W.J.; VELDKAMP, B.P.; CARLSON, J.E.** (2004): *Optimizing Balanced Incomplete Block Designs for Educational Assessments*. Applied Psychological Measurement, Vol.28, nº5,317-331.

**VAN LINT, J. H.** (1973): *Block Designs with repeated blocks and  $(b, r, \lambda) = 1$* . J. Combinatorial Theory Ser A 15, 288 - 309.

**VAN LINT, J. H.; RYSER, H. J.** (1972): *Block Designs with repeated blocks*, Discrete Math., Vol. 3, 381 – 396.

**YOKOYA, D.; YAMADA, T.** (2010): *A mathematical programming approach to the construction of BIBDs*, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 00, No. 0, 1-16.

**YANG, J.** (1985): *An example of the application of a Balanced Incomplete Block Design*. Assessment and Evaluation in Higher Education, Vol. 10, Issue 3, pages 250-253.

**YATES, F.** (1936a): *Incomplete randomized blocks*, Annals of Eugenics, 7, 121-140.

**YATES, F.** (1940): The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs, Annals of Eugenics, 10, 317-325.

**YOUNG, J.C.** (1996): Blocking, Replication, and Randomization - The Key to Effective Experimentation: A Case Study. Quality Engineering, 9(2), 269-277.

**WYNN, H.P.** (1977): Convex sets of finite population plans. Ann. Statist., Vol.5, 2, 414-418.

**ZHANG, T-F.; YANG, J-F; LIN, K.J.D.** (2011): Small Box-Behnken design. Statistics and Probability Letters, 81, 1027-1033.

**ANEXOS**

# ANEXO I – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

## UNIVERSIDADE ABERTA

### MESTRADO EM ESTATÍSTICA, MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO (ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA COMPUTACIONAL)

#### QUESTIONÁRIO

O presente questionário foi elaborado no âmbito da tese do Mestrado em Estatística, Matemática e Computação da Universidade Aberta de Portugal e tem como objetivo investigar e comparar o desenvolvimento dos diferentes domínios do pensamento algébrico nos alunos do 1º ano do Ensino Superior.

Agradecemos a sua participação e o maior rigor possível nas suas respostas. Todas os dados são confidenciais, pelo que, o seu anonimato está assegurado.

Obrigado pela colaboração!

#### DADOS PESSOAIS

Sexo:

Masculino .....

Feminino .....

Idade:

18 – 20 .....

21 – 23 .....

24 – 26 .....

Mais de 26 .....

Nota de acesso ao Ensino Superior na disciplina de Matemática: \_\_\_\_\_

Data de conclusão do 12º ano: \_\_\_\_\_ (ano letivo)

**Responda às questões que se seguem apresentando sempre todos os cálculos e justificações que considerar necessário.**

**Questão 1 – (Técnicismo algébrico)**

Efetue os cálculos:

**1.1**  $(x - 1)^2(x + 2)$

Simplifique a fração:

**1.2**  $\frac{(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)(2x - 2)}$

Resolva a equação:

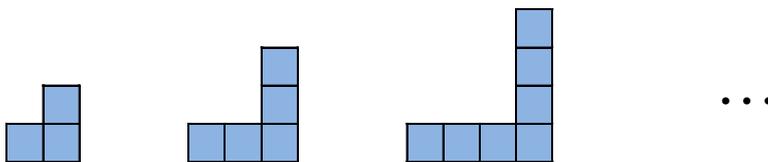
**1.3**  $\frac{4}{5}x^2 = 3x$

Resolva a inequação:

**1.4**  $\frac{x + 2}{10} - 1 \leq \frac{1 - x}{4}$

**Questão 2 – (Generalização da aritmética)**

Observe a seguinte figura:



**2.1** Desenhe a próxima figura. Quantos quadrados tem?

**2.2** Quantos quadrados tem a 10ª figura?

**2.3** E a 18ª figura?

**2.4** Como descobrir a quantidade de quadrados de qualquer figura da sequência?

Escreva uma regra.

### Questão 3 – (Formulação de Leis)

Uma sequência de números pode ser apresentada pelos números ou por uma expressão geral (= fórmula), que representa os números da sequência, denominada, “lei de formação” ou “termo geral” da sequência.

Por exemplo: 2, 4, 6, 8, 10 ...; a expressão geral é dada pela fórmula:  $2n$ .

Investigue qual é a “Lei de Formação” para as seguintes sequências:

3.1 números ímpares;

3.2  $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

3.3  $1; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{5}{9}; \dots$

3.4 2; 4; 8; 16; 32 ; ...

### Questão 4 – (Geometrização da álgebra)

Recorde como se calculam as áreas de algumas figuras planas elementares:

Quadrado  $\rightarrow lado \times lado$     Triângulo  $\rightarrow \frac{base \times altura}{2}$     Retângulo  $\rightarrow base \times altura$

Observe as figuras e, para cada uma delas, encontre uma expressão que permita encontrar a área a sombreado:

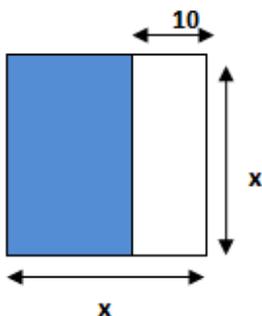


Figura 1

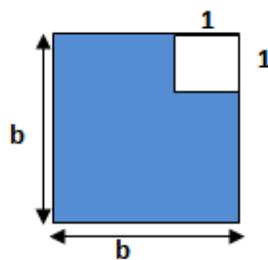


Figura 2

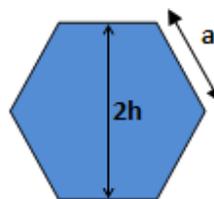


Figura 3

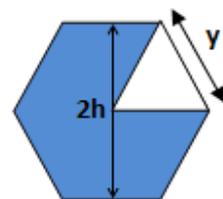


Figura 4

**Questão 5 – (Resolução de problemas)**

**5.1** A soma de um número com o seu triplo e a sua metade é igual a 49. Qual é esse número?

**5.2** A Sandra e o João têm 100 livros. Se tirarmos 25 livros à Sandra e dermos ao João, eles ficarão com o mesmo nº de livros. Quantos livros têm cada um?

**5.3** Determine o nº que multiplicado pelo seu triplo é igual a 432.

**5.4** O quadrado da idade da Ana menos a idade dela há 20 anos atrás é igual a 2000. Quantos anos tem a Ana?

**FIM**

## ANEXO II – TABELA COM A ESTRUTURA COMPLETA DO

**BIBDR**(5, 100, 60, 3, 30| $b^* = 10$ )

		Tratamentos					Total Blocos
		Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	
10 repetições do Bloco (1,2,3)	$B_1$	75	0	25			100
	$B_2$	25	25	0			50
	$B_3$	15	80	20			115
	$B_4$	75	85	0			160
	$B_5$	20	25	65			110
	$B_6$	40	75	75			190
	$B_7$	90	75	100			265
	$B_8$	70	100	0			170
	$B_9$	60	75	25			160
	$B_{10}$	35	75	0			110
10 repetições do Bloco (1,2,4)	$B_{11}$	60	50		90		200
	$B_{12}$	20	0		0		20
	$B_{13}$	75	0		0		75
	$B_{14}$	70	75		0		145
	$B_{15}$	65	25		0		90
	$B_{16}$	20	70		0		90
	$B_{17}$	55	85		0		140
	$B_{18}$	75	0		5		80
	$B_{19}$	35	90		0		125
	$B_{20}$	30	75		0		105
10 repetições do Bloco (1,2,4)	$B_{21}$	45	75			35	155
	$B_{22}$	80	25			35	140
	$B_{23}$	15	85			0	100
	$B_{24}$	100	100			80	280
	$B_{25}$	60	30			20	110
	$B_{26}$	85	100			45	230

	$B_{27}$	65	0			20	85
	$B_{28}$	0	90			0	90
	$B_{29}$	60	85			15	160
	$B_{30}$	60	0			25	85
10 repetições do Bloco (1,3,4)	$B_{31}$	70		30	0		100
	$B_{32}$	80		0	10		90
	$B_{33}$	30		0	0		30
	$B_{34}$	45		25	0		70
	$B_{35}$	5		0	0		5
	$B_{36}$	55		100	0		155
	$B_{37}$	45		0	0		45
	$B_{38}$	90		90	80		260
	$B_{39}$	15		5	50		70
	$B_{40}$	40		80	35		155
10 repetições do Bloco (1,3,5)	$B_{41}$	25		0		5	30
	$B_{42}$	75		0		0	75
	$B_{43}$	45		0		5	50
	$B_{44}$	30		0		10	40
	$B_{45}$	70		0		30	100
	$B_{46}$	50		100		0	150
	$B_{47}$	80		20		45	145
	$B_{48}$	35		0		0	35
	$B_{49}$	20		35		0	55
	$B_{50}$	0		0		5	5
10 repetições do Bloco (1,4,5)	$B_{51}$	50			0	55	105
	$B_{52}$	50			25	5	80
	$B_{53}$	55			15	55	125
	$B_{54}$	0			0	30	30
	$B_{55}$	50			0	10	60
	$B_{56}$	40			40	25	105

	$B_{57}$	45			0	5	50
	$B_{58}$	10			0	75	85
	$B_{59}$	35			0	0	35
	$B_{60}$	40			0	35	75
10 repetições do Bloco (2,3,4)	$B_{61}$		85	25	0		110
	$B_{62}$		85	25	30		140
	$B_{63}$		85	0	0		85
	$B_{64}$		50	0	0		50
	$B_{65}$		85	0	0		85
	$B_{66}$		25	25	10		60
	$B_{67}$		25	65	0		90
	$B_{68}$		25	25	0		50
	$B_{69}$		25	20	15		60
	$B_{70}$		35	50	0		85
10 repetições do Bloco (2,3,5)	$B_{71}$		85	25		20	130
	$B_{72}$		90	40		10	140
	$B_{73}$		0	45		30	75
	$B_{74}$		30	25		55	110
	$B_{75}$		90	25		35	150
	$B_{76}$		0	0		5	5
	$B_{77}$		90	25		5	120
	$B_{78}$		25	50		70	145
	$B_{79}$		35	0		45	80
	$B_{80}$		90	80		40	210
10 repetições do Bloco (2,4,5)	$B_{81}$		60		5	60	125
	$B_{82}$		85		0	15	100
	$B_{83}$		100		40	20	160
	$B_{84}$		25		0	5	30
	$B_{85}$		75		5	5	85
	$B_{86}$		80		0	30	110

10 repetições do Bloco (3,4,5)	<i>B<sub>87</sub></i>		75		0	45	120
	<i>B<sub>88</sub></i>		90		0	5	95
	<i>B<sub>89</sub></i>		90		5	25	120
	<i>B<sub>90</sub></i>		0		60	5	65
	<i>B<sub>91</sub></i>			100	35	70	205
	<i>B<sub>92</sub></i>			0	0	45	45
	<i>B<sub>93</sub></i>			75	35	10	120
	<i>B<sub>94</sub></i>			0	0	0	0
	<i>B<sub>95</sub></i>			0	0	5	5
	<i>B<sub>96</sub></i>			0	0	30	30
<i>B<sub>97</sub></i>			0	0	55	55	
<i>B<sub>98</sub></i>			0	0	5	5	
<i>B<sub>99</sub></i>			45	55	5	105	
<i>B<sub>100</sub></i>			100	20	80	200	
<b>Total tratamentos</b>		2860	3415	1665	665	1505	<b>10110</b>

## ANEXO III – OUTPUTS DO SOFTWARE R

```
> BIBD<-find.BIB(5,10,3)
```

```
> BIBD
```

```
[,1] [,2] [,3]
```

```
[1,] 1 3 5
```

```
[2,] 1 2 4
```

```
[3,] 2 3 5
```

```
[4,] 1 3 4
```

```
[5,] 2 4 5
```

```
[6,] 1 2 3
```

```
[7,] 1 4 5
```

```
[8,] 3 4 5
```

```
[9,] 2 3 4
```

```
[10,] 1 2 5
```

<b>&gt; dados</b>											
Blocos	Tratamentos	Nota									
1	B1	q1	75	65	B22	q2	25	131	B44	q3	0
2	B1	q2	0	66	B22	q5	35	132	B44	q5	10
3	B1	q3	25	67	B23	q1	15	133	B45	q1	70
4	B2	q1	25	68	B23	q2	85	134	B45	q3	0
5	B2	q2	25	69	B23	q5	0	135	B45	q5	30
6	B2	q3	0	70	B24	q1	100	136	B46	q1	50
7	B3	q1	15	71	B24	q2	100	137	B46	q3	100
8	B3	q2	80	72	B24	q5	80	138	B46	q5	0
9	B3	q3	20	73	B25	q1	60	139	B47	q1	80
10	B4	q1	75	74	B25	q2	30	140	B47	q3	20
11	B4	q2	85	75	B25	q5	20	141	B47	q5	45
12	B4	q3	0	76	B26	q1	85	142	B48	q1	35
13	B5	q1	20	77	B26	q2	100	143	B48	q3	0
14	B5	q2	25	78	B26	q5	45	144	B48	q5	0
15	B5	q3	65	79	B27	q1	65	145	B49	q1	20
16	B6	q1	40	80	B27	q2	0	146	B49	q3	35
17	B6	q2	75	81	B27	q5	20	147	B49	q5	0
				82	B28	q1	0	148	B50	q1	0
								197	B66	q3	25
								198	B66	q4	10
								199	B67	q2	25
								200	B67	q3	65
								201	B67	q4	0
								202	B68	q2	25
								203	B68	q3	25
								204	B68	q4	0
								205	B69	q2	25
								206	B69	q3	20
								207	B69	q4	15
								208	B70	q2	35
								209	B70	q3	50
								210	B70	q4	0
								211	B71	q2	85
								212	B71	q3	25
								213	B71	q5	20
								214	B72	q2	90
								263	B88	q4	0
								264	B88	q5	5
								265	B89	q2	90
								266	B89	q4	5
								267	B89	q5	25
								268	B90	q2	0
								269	B90	q4	60
								270	B90	q5	5
								271	B91	q3	100
								272	B91	q4	35
								273	B91	q5	70
								274	B92	q3	0
								275	B92	q4	0
								276	B92	q5	45
								277	B93	q3	75
								278	B93	q4	35
								279	B93	q5	10
								280	B94	q3	0

18	B6	q3	75	83	B28	q2	90	149	B50	q3	0	215	B72	q3	40	281	B94	q4	0
19	B7	q1	90	84	B28	q5	0	150	B50	q5	5	216	B72	q5	10	282	B94	q5	0
20	B7	q2	75	85	B29	q1	60	151	B51	q1	50	217	B73	q2	0	283	B95	q3	0
21	B7	q3	100	86	B29	q2	85	152	B51	q4	0	218	B73	q3	45	284	B95	q4	0
22	B8	q1	70	87	B29	q5	15	153	B51	q5	55	219	B73	q5	30	285	B95	q5	5
23	B8	q2	100	88	B30	q1	60	154	B52	q1	50	220	B74	q2	30	286	B96	q3	0
24	B8	q3	0	89	B30	q2	0	155	B52	q4	25	221	B74	q3	25	287	B96	q4	0
25	B9	q1	60	90	B30	q5	25	156	B52	q5	5	222	B74	q5	55	288	B96	q5	30
26	B9	q2	75	91	B31	q1	70	157	B53	q1	55	223	B75	q2	90	289	B97	q3	0
27	B9	q3	25	92	B31	q3	30	158	B53	q4	15	224	B75	q3	25	290	B97	q4	0
28	B10	q1	35	93	B31	q4	0	159	B53	q5	55	225	B75	q5	35	291	B97	q5	55
29	B10	q2	75	94	B32	q1	80	160	B54	q1	0	226	B76	q2	0	292	B98	q3	0
30	B10	q3	0	95	B32	q3	0	161	B54	q4	0	227	B76	q3	0	293	B98	q4	0
31	B11	q1	60	96	B32	q4	10	162	B54	q5	30	228	B76	q5	5	294	B98	q5	5
32	B11	q2	50	97	B33	q1	30	163	B55	q1	50	229	B77	q2	90	295	B99	q3	45
33	B11	q4	90	98	B33	q3	0	164	B55	q4	0	230	B77	q3	25	296	B99	q4	55
34	B12	q1	20	99	B33	q4	0	165	B55	q5	10	231	B77	q5	5	297	B99	q5	5
35	B12	q2	0	100	B34	q1	45	166	B56	q1	40	232	B78	q2	25	298	B100	q3	100
36	B12	q4	0	101	B34	q3	25	167	B56	q4	40	233	B78	q3	50	299	B100	q4	20
37	B13	q1	75	102	B34	q4	0	168	B56	q5	25	234	B78	q5	70	300	B100	q5	80
38	B13	q2	0	103	B35	q1	5	169	B57	q1	45	235	B79	q2	35				
39	B13	q4	0	104	B35	q3	0	170	B57	q4	0	236	B79	q3	0				
40	B14	q1	70	105	B35	q4	0	171	B57	q5	5	237	B79	q5	45				
41	B14	q2	75	106	B36	q1	55	172	B58	q1	10	238	B80	q2	90				
42	B14	q4	0	107	B36	q3	100	173	B58	q4	0	239	B80	q3	80				
43	B15	q1	65	108	B36	q4	0	174	B58	q5	75	240	B80	q5	40				
44	B15	q2	25	109	B37	q1	45	175	B59	q1	35	241	B81	q2	60				
45	B15	q4	0	110	B37	q3	0	176	B59	q4	0	242	B81	q4	5				
46	B16	q1	20	111	B37	q4	0	177	B59	q5	0	243	B81	q5	60				
47	B16	q2	70	112	B38	q1	90	178	B60	q1	40	244	B82	q2	85				
48	B16	q4	0	113	B38	q3	90	179	B60	q4	0	245	B82	q4	0				
49	B17	q1	55	114	B38	q4	80	180	B60	q5	35	246	B82	q5	15				
50	B17	q2	85	115	B39	q1	15	181	B61	q2	85	247	B83	q2	100				
51	B17	q4	0	116	B39	q3	5	182	B61	q3	25	248	B83	q4	40				
52	B18	q1	75	117	B39	q4	50	183	B61	q4	0	249	B83	q5	20				
53	B18	q2	0	118	B40	q1	40	184	B62	q2	85	250	B84	q2	25				
54	B18	q4	5	119	B40	q3	80	185	B62	q3	25	251	B84	q4	0				
55	B19	q1	35	120	B40	q4	35	186	B62	q4	30	252	B84	q5	5				
56	B19	q2	90	121	B41	q1	25	187	B63	q2	85	253	B85	q2	75				
57	B19	q4	0	122	B41	q3	0	188	B63	q3	0	254	B85	q4	5				
58	B20	q1	30	123	B41	q5	5	189	B63	q4	0	255	B85	q5	5				

59	B20	q2	75	124	B42	q1	75	190	B64	q2	50	256	B86	q2	80
60	B20	q4	0	125	B42	q3	0	191	B64	q3	0	257	B86	q4	0
61	B21	q1	45	126	B42	q5	0	192	B64	q4	0	258	B86	q5	30
62	B21	q2	75	127	B43	q1	45	193	B65	q2	85	259	B87	q2	75
63	B21	q5	35	128	B43	q3	0	194	B65	q3	0	260	B87	q4	0
64	B22	q1	80	129	B43	q5	5	195	B65	q4	0	261	B87	q5	45
				130	B44	q1	30	196	B66	q2	25	262	B88	q2	90

```
> attach(dados)
```

```
The following object(s) are masked '_by_' 'GlobalEnv':
  Blocos, Tratamentos
```

```
> Blocos<-factor(Blocos)
```

```
> Tratamentos<-factor(Tratamentos)
```

```
> is.factor(Blocos)
```

```
[1] TRUE
```

```
> is.factor(Tratamentos)
```

```
[1] TRUE
```

```
>análise<-BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.05,group=TRUE)
```

```
ANALYSIS BIB: Nota
```

```
Class level information
```

```
Block: B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9 B10 B11 B12 B13 B14 B15 B16 B17 B18 B19 B20 B21 B22 B23
B24 B25 B26 B27 B28 B29 B30 B31 B32 B33 B34 B35 B36 B37 B38 B39 B40 B41 B42 B43 B44 B45
B46 B47 B48 B49 B50 B51 B52 B53 B54 B55 B56 B57 B58 B59 B60 B61 B62 B63 B64 B65 B66 B67
B68 B69 B70 B71 B72 B73 B74 B75 B76 B77 B78 B79 B80 B81 B82 B83 B84 B85 B86 B87 B88 B89
B90 B91 B92 B93 B94 B95 B96 B97 B98 B99 B100
```

```
Trt : 1 2 3 4 5
```

```
Number of observations: 300
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Response: Nota
```

```
      Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
block.unadj  99 112893  1140.3  1.6893 0.0009922 ***
trt.adj      4  66595  16648.8 24.6639 < 2.2e-16 ***
```

Residuals 196 132305 675.0  
 Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1  
 coefficient of variation: 77.1 %  
 Nota Means: 33.7

Tratamentos, statistics			Tukey
means	mean.adj	StdError.adj	
1	47.66667	48.56667	3.612545
2	56.91667	55.83333	3.612545
3	27.75000	28.03333	3.612545
4	11.08333	11.03333	3.612545
5	25.08333	25.03333	3.612545

Tukey  
 Alpha : 0.05  
 Std.err : 3.674303  
 HSD : 14.30704  
 Parameters BIB  
 Lambda : 30  
 treatmeans : 5  
 Block size : 3  
 Blocks : 100  
 Replication: 60  
 Efficiency factor 0.8333333  
 <<< Book >>>  
 Means with the same letter are not significantly different.  
 Comparison of treatments  
 Groups, Treatments and means  
 a 2 55.83333  
 a 1 48.56667  
 b 3 28.03333  
 bc 5 25.03333  
 c 4 11.03333

**>análise<-BIB.test(Blocos,Tratamentos,Nota,method="tukey",alpha=0.01,group=TRUE)**

Tukey  
 Alpha : 0.01  
 Std.err : 3.674303  
 HSD : 17.14834  
 Parameters BIB  
 Lambda : 30  
 treatmeans : 5  
 Block size : 3  
 Blocks : 100  
 Replication: 60  
 Efficiency factor 0.8333333  
 <<< Book >>>  
 Means with the same letter are not significantly different.  
 Comparison of treatments  
 Groups, Treatments and means  
 a 2 55.83333  
 a 1 48.56667  
 b 3 28.03333  
 b 5 25.03333  
 b 4 11.03333

>durbin.test(Blocos,Tratamentos,Nota)

	Durbin Test
	=====
	Value : 50.13115
	Df 1 : 4
	P-value : 3.390213e-10
	Alpha : 0.05
	Df 2 : 196
	t-Student : 1.972141
	Least Significant Difference
	between the sum of ranks: 18.07036
	Parameters BIB
	Lambda : 30
	treatmeans : 5
	Block size : 3
	Blocks : 100
	Replication: 60
	Groups, Treatments and sum of the ranks
Study:	
Tratamentos, Sum of ranks	
sum	
1 148.0	a 1 148
2 139.0	a 2 139
3 108.0	b 5 116.5
4 88.5	b 3 108
5 116.5	c 4 88.5

> ks.test(Nota,mean(Nota),sd(Nota))

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test  
 data: Nota and mean(Nota)  
 D = 0.5667, p-value = 0.9062  
 alternative hypothesis: two-sided

> levene.test(Nota,Tratamentos,"mean")

Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = "mean")

	Df	F value	Pr(>F)
group	4	10.747	3.817e-08 ***
	295		

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1