



***INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO***

*Departamento de Ciência & Tecnologia*

ANA HELENA TAVARES SILVA

**ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA NO  
CÁLCULO NUMÉRICO**

***LICENCIATURA EM ENSINO DE MATEMÁTICA***



***INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO***

*Departamento de Ciência & Tecnologia*

ANA HELENA TAVARES SILVA

**ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA NO  
CÁLCULO NUMÉRICO**

Trabalho Científico apresentado ao I.S.E para obtenção do grau de Licenciada em Ensino de Matemática, sob orientação da professora, Doutora Natália V.K. Dias Furtado



***INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO***

*Departamento de Ciência & Tecnologia*

**ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA NO  
CÁLCULO NUMÉRICO**

Aprovado pelos membros do Júri, homologado pelo conselho científico em \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

O Júri

---

---

---

Praia, aos \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2008

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus.

À minha mãe, por me ter apoiado durante todo os momentos.

À minha irmã Florestina por estar sempre presente, incentivando e ajudando sempre que possível.

A todos os meus irmãos pelo carinho, e por estarem sempre do meu lado.

À minha Professora e Orientadora Doutora Natália.

A todos os meus professores e colegas que me apoiaram imenso durante a elaboração deste trabalho

A todos aqueles que de uma forma ou outra contribuíram, com o seu apoio, para que este trabalho se efectivasse.

## DEDICATÓRIA

*À memória do meu pai, Braz G. Silva  
À minha mãe, Júlia Silva  
dedico*

## Índice

<b>Introdução .....</b>	<b>07</b>
<b>I.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>08</b>
1.1 Valores e vectores próprios.....	08
1.2 Quociente de Rayleigh.....	29
1.3 Localização dos valores próprios.....	32
<b>II. MÉTODOS PRÁTICOS PARA O CÁLCULO DE VALORES PRÓPRIOS.....</b>	<b>35</b>
2.1 Método das potências directas .....	35
2.2 Translações espectrais.....	38
2.3 Método das potencias inversas.....	39
2.4 Iterações em subespaços.....	40
2.5 Método de Jacobi clássico.....	41
2.6 Tridiagonalização de matrizes.....	46
2.6.1 Rotações de Givens.....	46
2.6.2 Reflexões de Householder.....	48
2.6.3 Valores próprios de Matrizes tridiagonais.....	50
2.6.4 Vectores próprios de Matrizes tridiagonais.....	55
Conclusão .....	57
Bibliografia.....	58
Anexo.....	59

## Introdução

Este trabalho é apresentado ao ISE para obtenção do grau de licenciada em Matemática (ramo ensino).

Para além do aprofundamento dos conhecimentos adquiridos na disciplina curricular “Álgebra Linear e Geometria Analítica”, pretende-se, com este trabalho, elaborar um material de apoio no estudo dos valores e vectores próprios para cursos de Engenharia.

Com o desenvolvimento da teoria quântica nas décadas de 1920 e 1930, o estudo de matrizes tornou-se de grande importância. No final da década de 1940, alguns Matemáticos se perguntavam como o computador digital poderia ser empregado para resolver o problema de valores próprios de matrizes. A determinação dos valores próprios de uma matriz tem merecido grande atenção, devido a sua grande aplicação aos diversos ramos das Ciências Aplicadas, como, por exemplo:

- A teoria das vibrações, quer sejam mecânicas ou eléctricas, dos tipos macroscópica ou microscópica;
- As vibrações de pontes ou outra estrutura sólida;
- As vibrações das asas de um avião;
- A teoria dos operadores lineares diferenciais e integrais, etc....

A obtenção dos valores próprios  $\lambda$  de uma matriz quadrada de ordem  $n$  envolve cálculos complexos por serem os zeros do polinómio característico  $\det(A - \lambda I) = 0$ , que é um polinómio de grau  $n$  em  $\lambda$ . A busca de soluções para este problema acarretou o desenvolvimento de uma série de algoritmos, os mais diversos, cada vez mais poderosos e mais eficientes. O primeiro a surgir foi o mais óbvio, composto de apenas dois passos. Primeiro, calcula-se os coeficientes do polinómio característico e, então, as raízes desse polinómio.

Neste trabalho consideram-se:

- Fundamentação teórica;
- Métodos práticos para determinação dos valores e vectores próprios;
- Exemplos (ao longo do trabalho);
- Problemas resolvidos (em anexo);

# I. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 1.1 – Valores e vectores próprios

A fim de mostrar a origem deste tipo de problemas vamos mostrar alguns exemplos muito simples.

**Exemplo 1.1** *Determinação das direcções invariantes de uma matriz*

Consideremos uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Como sabemos, uma matriz de ordem  $n$  pode ser encarada como um operador linear que transforma vectores de  $\mathbb{R}^n$  em vectores de  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $x \neq 0$  for um vector qualquer e  $y = Ax$  diz-se que  $y$  é o transformado de  $x$  sob a acção de  $A$ . Em geral a direcção do vector transformado é diferente da direcção de  $x$ . Pode acontecer, no entanto, que, para certos vectores  $x$ , as direcções de  $x$  e de  $y = Ax$  sejam idênticas.

Para que as direcções se mantenham inalteradas,  $x$  e  $y$  devem ser vectores paralelos, o que implica que  $y = \lambda x$  para um certo  $\lambda$ . Então, o problema de determinar as direcções que permanecem invariantes pode formular-se assim: Determinar os valores de  $\lambda$  para os quais o sistema de equações lineares

$$Ax = \lambda x \quad (1.1)$$

possui soluções  $x \neq 0$ . (Obviamente  $x = 0$  é sempre solução mas o vector nulo não define direcção alguma!)



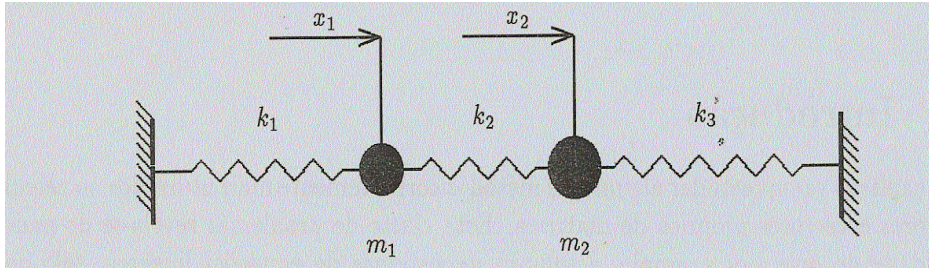


Fig.1.1

Aos valores de  $\lambda$  e  $x$ , soluções deste problema, dá-se o nome de *valores e vectores próprios*, respectivamente, da matriz  $A$ . Outras designações também usadas são valores e vectores característicos ou valores e vectores principais. Quando  $x$  for também um vector unitário diz-se que é uma direcção própria, característica ou principal.

**Exemplo 1.2** *Vibrações mecânicas de um sistema de massas e molas*

Consideremos o sistema mecânico formado por massas pontuais actuadas por molas conforme está esquematizado em 1.1 suponhamos que as massas, inicialmente em equilíbrio, são afastadas desta posição e libertadas, dando assim origem a um certo movimento cuja equação vamos estabelecer. Para tal, faremos as seguintes hipóteses, aliás habituais neste tipo de problemas:

- As forças exercidas pelas molas são proporcionais ao seu alongamento medido a partir da posição de equilíbrio;
- Não existem outras forças actuantes (gravidade, atrito, etc.).

Nestas condições, as equações do movimento (massa  $\times$  aceleração = resultante das forças aplicadas) são simplesmente

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

Estamos assim, perante duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que se escrevem, em notação matricial, do seguinte modo

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx$$

em que pusemos

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e  $k_{11} = k_1 + k_2, k_{22} = k_2 + k_3, k_{12} = k_{21} = -k_2$ .  $M$  é conhecida pela designação de matriz de massas;  $K$  pela matriz de rigidez, e  $x$ , pela matriz de vector de deslocamentos.

Um problema de enorme interesse pratico é o de saber se este sistema admite movimentos vibratórios, isto é, movimentos do tipo

$$x = a \cos(\varpi t + \phi)$$

em que  $a$  designa a amplitude,  $\varpi$ , a frequência, e  $\phi$  a fase do movimento vibratório.

Derivando em ordem ao tempo, vem que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varpi^2 \cos(\varpi t + \phi)a$$

donde, substituindo na equação do movimento, obtemos a expressão

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varpi^2 \cos(\varpi t + \phi)Ma = Ka \cos(\varpi t + \phi)$$

que deve ser válida para todos os instantes de tempo. Tal só é possível se

$$Ka = \varpi^2 Ma$$

Pondo  $\lambda = \varpi^2$  e  $A = M^{-1}K$ , recuperamos exactamente a mesma forma de equações do exemplo anterior. Os valores próprios da matriz  $A$  são agora o quadrado das frequências próprias  $\varpi$  e os vectores próprios determinam os modos de vibração do sistema em estudo.

No exemplo que acabamos de apresentar, a matriz  $M$  assumia a forma diagonal, o que torna a sua inversão muito fácil. Em casos mais complexos, a matriz de massas não é diagonal e a sua inversão é contra-indicada. Nestas situações é preferível deixar as equações na forma

$$Ka = \lambda Ma \tag{1.2}$$

dizendo-se, então, que se trata de um problema de valores e vectores próprios generalizado. É importante ter presente que em nenhum dos casos apresentados nos exemplos está garantida a existência de valores e vectores próprios. No entanto, para que a equação (1.1) possua soluções é necessário e suficiente que exista um vector  $x \neq 0$  tal que:

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{1.3}$$

o que implica que a matriz  $A - \lambda I$  tenha de ser singular. Consequentemente, os valores e vectores próprios devem satisfazer a equação

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.4}$$

**Exemplo 1.3** Determinar os valores e vectores próprios da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Aplicando as ideias anteriores, temos que

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio  $\lambda_2$  são as soluções do sistema (1.3) que neste caso toma a forma

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema (singular) obtemos  $x_2 = 2x_1$ . Sendo este sistema indeterminado, e, esta indeterminação resulta directamente da definição de vector próprio. De facto, se  $x$  for um vector próprio então  $cx$ , para qualquer  $c \neq 0$ , é também um vector próprio. Para evitar esta indeterminação é frequente exigir que os vectores próprios satisfaçam alguma condição como, por exemplo, terem norma unitária. Se assim procedermos, o vector próprio unitário associado ao valor próprio  $\lambda_2$  é  $x = [1/\sqrt{5} \quad 2/\sqrt{5}]^T$ .

A determinação do vector próprio correspondente ao valor próprio  $\lambda_1$  segue os mesmos passos, obtendo assim  $x_2 = -x_1$  e, conseqüentemente,  $x = [1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2}]^T$ .

Um aspecto a considerar é que nada impede que as soluções da equação (1.4) sejam números complexos, mesmo que  $A$  seja uma matriz real e, portanto, que os vectores próprios sejam também vectores complexos. Decorre daqui que o problema de valores e vectores próprios deva ser formulado de modo a não excluir estas situações e que se tenha de adoptar a seguinte definição que poderia parecer, à primeira vista, demasiado geral.

**Definição 1.1** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $x \in \mathbb{C}^n$ . Diz-se que  $x$  é um vector próprio da matriz  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda \in \mathbb{C}$  se*

$$x \neq 0 \text{ e } Ax = \lambda x. \quad (1.5)$$

Se  $\lambda$  for um valor próprio, e  $x$ , um vector próprio associado, diz-se que  $(\lambda, x)$  é um par próprio da matriz  $A$ . O conjunto dos valores próprios de  $A$  é o espectro de  $A$ , que será denotado por  $\sigma(A)$ , isto é,

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : Ax = \lambda x \text{ para algum } x \neq 0 \} \quad (1.6)$$

Designa-se por *raio espectral* de  $A$ , denotado por  $\rho(A)$ , o valor

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} \quad (1.7)$$

Aos vectores próprios unitários damos o designação de direcções próprias de  $A$ .

Notemos que a condição  $x \neq 0$  na expressão (1.1.5) se destina a evitar que qualquer número possa ser valor próprio de  $A$  associado ao vector  $x = 0$ , o que seria trivial.

Como vimos no exemplo 1.1, um vector próprio define uma direcção invariante da transformação  $A$ . No entanto é possível afirmar ainda mais. Suponhamos que  $x_1$  e  $x_2$  são dois vectores próprios associados ao valor próprio  $\lambda$ . Então é fácil verificar que, para quaisquer  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  não simultaneamente nulos, o vector  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  é ainda um vector próprio associado ao valor próprio  $\lambda$ . Este resultado generaliza-se sem dificuldades do seguinte modo: qualquer combinação linear com coeficientes não todos nulos de vectores próprios associados ao valor próprio  $\lambda$  é também um vector próprio associado a este valor próprio.

Esta proposição justifica a seguinte definição:

**Definição 1.2** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\lambda \in \sigma(A)$ . Designa-se por subespaço próprio ou subespaço invariante associado ao valor próprio  $\lambda$  o conjunto*

$$S(\lambda) = \{x : Ax = \lambda x\}.$$

*À dimensão do subespaço próprio  $S(\lambda)$  dá-se o nome de multiplicidade geométrica do valor próprio  $\lambda$ .*

É conveniente notar que nesta definição não se requer  $x \neq 0$  a fim de que  $S(\lambda)$  seja, de facto, um subespaço de  $\mathbb{C}^n$ , o que exige, como se sabe, que o vector 0 pertença a  $S(\lambda)$ .

### Propriedades dos valores e vectores próprios

Nesta subsecção vamos apresentar alguns resultados necessários ao desenvolvimento dos métodos de cálculo de pares próprios que apresentaremos mais adiante. Começaremos por justificar completamente a condição (1.4).

**Teorema 1.1** *Um número  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um valor próprio da matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sse*

$$\rho_A(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.8)$$

**Demonstração:** primeiro vamos provar que (1.8) é condição necessária para  $\lambda$  ser um valor próprio de  $A$ .

Pela definição 1.1 deve existir um vector  $x \neq 0$  tal que

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (1.9)$$

o que implica que a matriz  $A - \lambda I$  seja singular, o que, por sua vez, impõe que o seu determinante deve ser nulo, i.e., (1.8) deve verificar-se. A condição de suficiência demonstra-se partindo da observação de que, se expressão (1.8) for verdadeira para algum  $\lambda$ , então  $A - \lambda I$  é singular e, por conseguinte, existe um vector  $x \neq 0$  tal que (1.9) também se verifica e, portanto, ainda pela definição 1.1,  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$ .

A expressão (1.8) é conhecida como a equação característica de  $A$ . Se recordarmos a definição do determinante, facilmente concluímos que o primeiro membro é um polinómio de grau  $n$  em  $\lambda$ , que se designa por polinómio característico e é denotado por  $\rho_A$ . Como um polinómio de grau  $n$  possui  $n$  zeros (contando multiplicidades), então podemos concluir que uma matriz de ordem  $n$  possui também  $n$  valores próprios (não necessariamente todos distintos). Diz-se que  $\lambda$  é um valor próprio de multiplicidade algébrica  $m$  se  $\lambda$  for um zero também de multiplicidade  $m$  do polinómio característico  $\rho_A$ .

Em particular se  $m = 1$  o valor próprio diz-se simples; se  $m = 2$ , duplo, etc.

As multiplicidades algébricas e geométricas de um valor próprio não são necessariamente iguais, como se pode confirmar pelo exemplo seguinte.

**Exemplo 1.3** *Mostrar que as multiplicidades algébrica e geométrica podem ser diferentes.*

Seja dada a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como  $\rho_A = |A - \lambda I| = (2 - \lambda)^3$ , concluímos que  $\lambda = 2$  é um valor próprio de multiplicidade algébrica igual a 3. Os vectores próprios associados devem satisfazer ao sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é  $x_2 = x_3 = 0$ , e  $x_1$ , qualquer. Logo, os vectores próprios associados a este valor próprio são múltiplos do vector  $e_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$  na base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Concluímos assim que a multiplicidade geométrica deste valor próprio é um.

Note-se que a multiplicidade geométrica nunca é superior à algébrica.

Um vector com multiplicidade geométrica superior à multiplicidade algébrica diz-se defeituoso. Uma matriz que possua um valor próprio defeituoso diz-se defeituosa.

Convém ter em conta que, mesmo que  $A$  seja real e, portanto, o seu polinómio característico tenha coeficientes reais, os valores próprios de  $A$ , sendo os zeros do polinómio característico, podem ser números complexos. Então, como os zeros complexos de polinómios de coeficientes reais aparecem aos pares conjugados, também os valores próprios de matrizes reais, quando complexos, surgem aos pares conjugados.

O cálculo de valores próprios por via de determinação dos zeros do polinómio característico, método que poderia parecer o mais natural, revela-se, no entanto, pouco atraente do ponto de vista computacional. Para nos convenceremos que assim deve ser, basta que o cálculo de determinante por meio de condensação da matriz  $A$  (nem vale a pena considerar o cálculo pela definição de determinante!) requer  $O(n^3)$  operações aritméticas.

Como a pesquisa de um zero envolve um processo iterativo (secante, Muller, etc.) em que é necessário calcular o determinante pelo menos uma vez por iteração, facilmente nos apercebemos do enorme esforço computacional requerido. Por isso, este método só poderá ser usado para matrizes de ordem muito pequena ou com uma estrutura especial (como, por exemplo, tridiagonal) que torne o cálculo do determinante fácil e nunca como um método de aplicação geral. Um dos objectivos do presente capítulo é precisamente o de desenvolver alternativas mais eficazes.

Como os zeros de um polinómio são funções contínuas dos seus coeficientes, também os valores próprios dependem de forma contínua dos elementos da matriz. No entanto, pode acontecer que os vectores próprios sejam extremamente sensíveis, e pequenas perturbações dos coeficientes da matriz possam produzir grandes alterações nos pares próprios, facto que tem consequências computacionais óbvias a que é preciso estar atento. O exemplo seguinte exhibe um caso destes.

**Exemplo 1.4** *Mostrar a sensibilidade dos pares próprios de matrizes a pequenas perturbações dos coeficientes.*

Consideremos a matriz  $A$  e a perturbação  $E$  dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon, \delta \neq 0$$

É imediato que 1 é um valor próprio duplo de  $A$ , os valores próprios associados a 1 são todos os vectores não nulos de  $\mathbb{R}^2$ . Os valores próprios de  $A+E$  são 1 e  $1+\varepsilon$  (um valor próprio múltiplo deixou de o ser), e os vectores próprios são, respectivamente,

$$\frac{1}{(\varepsilon^2 + \delta^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} -\delta \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Enquanto os valores próprios variam “pouco”, o primeiro vector próprio pode apontar na direcção que se quiser, bastando para o efeito que  $\varepsilon$  e  $\delta$  assumam valores convenientes.

A possibilidade de surgirem pares próprios complexos obriga-nos a generalizar algumas noções já conhecidas para o caso real. Assim denotamos o conjugado de um escalar, de uma matriz ou de um vector por uma barra, por exemplo,  $\bar{a}$ ,  $\bar{A}$  e  $\bar{x}$ . O transposto do conjugado, que é igual ao conjugado do transposto, será designado por transconjugado e pelo índice superior  $H$ ,  $x^H = \bar{x}^T = \overline{(x^T)}$ .

**Definição 1.3** *Sejam  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . O produto desses vectores, denotado por  $(x, y)$  é o numero*

$$(x, y) = y^H x \quad (1.10)$$

*e a norma euclidiana do vector  $x$  é denotada por  $\|x\|_2$ , é definida por*

$$\|x\|_2 = (x, x)^{1/2} = (x^H x)^{1/2} \quad (1.11)$$

Tal como no caso real, dois vectores dizem-se ortogonais se o seu produto interno for nulo, e um vector diz-se unitário se tiver norma unitária, isto é, igual a um. Também é fácil verificar as seguintes propriedades,

$$(A^H)^H = A \quad (1.12)$$

$$(AB)^H = B^H A^H \quad (1.13)$$

$$(cA)^H = \bar{c} A^H \quad (1.14)$$

**Definição 1.4** *Uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diz-se hermitiana se  $A^H = A$ , e anti-hermitiana se  $A^H = -A$ .*

Uma matriz real hermitiana é simétrica como facilmente se prova. Uma outra propriedade das matrizes hermitianas é dada no teorema seguinte.

**Teorema 1.2** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Uma matriz hermitiana. Então, o escalar  $x^H A x$  é real para todos os vectores  $x \in \mathbb{C}^n$ .*

**Demonstração** Se  $A$  é hermitiana, então os elementos diagonais são reais e os elementos não diagonais são complexos conjugados, isto é,  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ,

Se  $x \in \mathbb{C}^n$  e  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   $x^H Ax = \sum_{i,j=1}^n \overline{x_{ij}} a_{ij} x_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , ou seja, consideremos um

vector  $x \in \mathbb{C}^n$  de ordem  $n$   $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  onde

$$x^H Ax = \begin{bmatrix} x_1^H \\ x_2^H \\ \vdots \\ x_n^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$\left[ x_1^H a_{11} + x_2^H a_{21} + \dots + x_n^H a_{n1} \quad x_1^H a_{12} + x_2^H a_{22} + \dots + x_n^H a_{n2} \quad \dots \quad x_1^H a_{1n} + x_2^H a_{n2} + \dots + x_n^H a_{nn} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= (x_1^H a_{11} + x_2^H a_{21} + \dots + x_n^H a_{n1})x_1 + (x_1^H a_{12} + x_2^H a_{22} + \dots + x_n^H a_{n2})x_2 +$$

$$+ (x_1^H a_{1n} + x_2^H a_{n2} + \dots + x_n^H a_{nn})x_n = (x_1^H a_{11}x_1 + x_2^H a_{22}x_2 + \dots + x_n^H a_{nn}x_n) +$$

$$+ ((x_1^H a_{12}x_2 + x_2^H a_{21}x_1) + \dots + (x_1^H a_{1n}x_n + x_n^H a_{n1}x_1) + \dots + (x_2^H a_{n2}x_n + x_n^H a_{2n}x_2))$$

$$= (x_1^H x_1 a_{11} + x_2^H x_2 a_{22} + \dots + x_n^H x_n a_{nn}) + (x_1^H a_{12}x_2 + \overline{x_1^H a_{12}x_2}) +$$

$$+ \dots + (x_1^H a_{1n}x_n + \overline{x_1^H a_{1n}x_n}) + \dots + (x_2^H a_{n2}x_n + \overline{x_2^H a_{n2}x_n}) \in \mathbb{R}$$

como queríamos demonstrar.

As definições seguintes introduzem algumas classes de matrizes muito frequentes nas aplicações.

**Definição 1.5** Uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitiana diz-se:

Definida positiva se  $x^H Ax > 0$ ;

Definida semipositiva se  $x^H Ax \geq 0$ ;

Definida negativa se  $x^H Ax < 0$ ;

Definida seminegativa se  $x^H Ax \leq 0$ ;

para todos os vectores  $x \neq 0$ .

**Definição 1.5** Uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diz-se unitária se

$$A^H A = I \quad (1.15)$$

Uma matriz unitária real que, portanto, verifica

$$A^T A = I \quad (1.16)$$

diz-se ortogonal.

Quer num caso quer no outro as colunas de  $A$  formam um sistema de vectores ortonormados. É também fácil ver que se  $A$  for unitária

$$A^{-1} = A^H \quad (1.17)$$



pelo que a obtenção da matriz inversa de uma matriz unitária é muito fácil. Esta propriedade confere a esta classe de matrizes uma grande importância computacional, como teremos oportunidade de ver. Uma outra propriedade com muito interesse é a de que as matrizes unitárias são transformações que preservam os produtos internos, pois, para quaisquer vectores  $x$  e  $y$ , é verdade que

$$(Ay)^H (Ax) = y^H (A^H A)x = y^H x. \quad (1.18)$$

Em particular, as matrizes unitárias deixam invariantes a norma euclidiana de vectores e o ângulo entre vectores. Também pode-se deduzir que, para  $A$  unitária

$$I = AA^{-1} = A(A^H A)A^{-1} = (AA^H)(AA^{-1}) = AA^H \quad (1.19)$$

ou seja, se  $A$  é unitária, também  $A^H$  o é.

Deixa-se como exercício verificar esta outra propriedade das matrizes unitárias

$$\|A\|_2 = 1 \quad (1.20)$$

Será que quando duas matrizes estão relacionadas de alguma maneira essa relação reflecte nos respectivos pares próprios? Os teoremas que se seguem abordam os casos mais correntes.

**Teorema 1.3** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Então são válidas as seguintes propriedades:*

$$\sigma(A^T) = \sigma(A) \quad (1.21)$$

$$\sigma(A^H) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\} \quad (1.22)$$

**Demonstração** Pelo Teorema 1.1,  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$  sse a matriz  $A - \lambda I$  for singular. Mas esta matriz é singular sse  $(A - \lambda I)^T$  também for. Mas  $(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$  pelo que  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$  sse for também de  $A^T$ , o que prova a proposição (1.21). Analogamente,  $A - \lambda I$  é singular sse  $(A - \lambda I)^H$  também for. Mas  $(A - \lambda I)^H = A^H - \bar{\lambda} I$ , pelo que  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$  sse  $\bar{\lambda}$  for um valor próprio de  $A^H$ , o que demonstra (1.22).

Convém notar que este teorema nada diz quanto aos vectores próprios de  $A^T$  ou  $A^H$ , os quais podem ser, e em geral são, diferentes dos de  $A$ . Em virtude de (1.22)  $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^H)$ , o que implica a existência de um vector  $y \neq 0$  tal que  $A^H y = \bar{\lambda} y$  o que equivale escrever  $y^H A = \lambda y^H$ .

Diz-se neste caso que  $y$  é um vector próprio esquerdo da matriz  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ . Os vectores próprios usuais, tal como foram introduzidos pela Definição 1.2.1 são designados, quando houver necessidade de fazer distinção, por vectores próprios direitos.

**Teorema 1.4** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e hermitiana. Então os seus valores próprios são reais. Se, além disso,  $A$  for semidefinida positiva os seus valores próprios são não-negativos, e se  $A$  for definida positiva os seus valores próprios são positivos.*

**Teorema 1.5** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz invertível, e  $(\lambda, x)$ , um seu par próprio. Então,  $\lambda \neq 0$  e  $(\lambda^{-1}, x)$  é um par próprio de  $A^{-1}$ .*

**Demonstração** se  $A$  invertível existe uma matriz a sua matriz inversa é dada por  $A^{-1}$ , sendo  $(\lambda, x)$ , um par próprio de  $A$  então

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ \Leftrightarrow A^{-1}Ax &= A^{-1}\lambda x \Leftrightarrow Ix = \lambda A^{-1}x \\ \Leftrightarrow \lambda A^{-1}x &= x \Leftrightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x \end{aligned}$$

Logo,  $(\lambda^{-1}, x)$  é um par próprio de  $A^{-1}$ , como queríamos demonstrar.

O próximo teorema amplia bastante a classe dos matizes cujos pares próprios estão intimamente relacionados com os da matriz  $A$ .

**Teorema 1.6** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $(\lambda, x)$ , um seu par próprio. Então,*

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha\lambda, x) \\ (\lambda^m, x) \\ (p(\lambda), x) \end{array} \right\} \text{ é um par próprio de } \left\{ \begin{array}{l} \alpha A \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \\ A^m \quad \forall m \geq 0, m \text{ inteiro} \\ p(A) \text{ polinómio } p \end{array} \right.$$

**Demonstração** Para provar a primeira relação basta notar que

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (\alpha A)x = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x$$

Para demonstrar a segunda relação vamos proceder por indução em  $m$ . Para  $m=0$  temos  $A^0 = I$ , e para  $m=1$  vem simplesmente  $A^1 = A$ , pelo que a relação é verdadeira em ambos casos. Suponhamos que é válida para um dado  $m$ , i.e.,

$$A^m x = \lambda^m x.$$

Multiplicando ambos membros desta igualdade por  $A$  e efectuando as manipulações simples obtemos

$A^{m+1}x = A(A^m x) = A(\lambda^m x) = \lambda^m (Ax) = \lambda^m (\lambda x) = \lambda^{m+1}x$  pelo que a relação mantém válida para  $m+1$ . Para demonstrar a terceira relação, consideremos um polinómio de grau  $\leq k$  dado por

$$p(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_k s^k$$

Então, fazendo o uso da relação que acabamos de obter, podemos deduzir que

$$\begin{aligned} p(A)x &= (a_0I + a_1A + \dots + a_k A^k)x \\ &= a_0x + (a_1A)x + \dots + (a_k A^k)x \\ &= a_0x + a_1\lambda x + \dots + a_k\lambda^k x \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \dots + a_k\lambda^k)x \\ &= p(\lambda)x \end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

Existem algumas classes das matrizes para as quais a determinação de valores próprios é fácil, ou mesmo, trivial. O caso a seguir é um deles.

**Definição 1.7** uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diz-se triangular superior por blocos se puder ser particionada na forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

em que os blocos diagonais são matrizes quadradas. Se os blocos diagonais forem de ordem superior a dois, diz-se que a matriz  $A$  é quase triangular. Uma definição idêntica existe para matrizes triangulares inferiores por blocos.

O interesse prático dessas matrizes fundamenta-se no teorema seguinte.

**Teorema 1.7** *O espectro de uma matriz triangular por blocos é a união dos espectros dos seus blocos diagonais, isto é,*

$$\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^m \sigma(A_{ii})$$

**Demonstração** É fácil reconhecer que a matriz  $A - \lambda I$  é também triangular por blocos, sendo os blocos diagonais  $A_{ii} - \lambda I$  (sendo as matrizes identidade de ordens diferentes). Então,  $A - \lambda I$  é singular, e  $\lambda$ , um valor próprio de  $A$  sse pelo menos uma das matrizes  $A_{ii} - \lambda I$  for singular, ou seja, sse  $\lambda$  for valor próprio de algum bloco diagonal.

Uma outra propriedade importante é a seguinte.

**Teorema 1.8** *Dados  $k$  vectores próprios  $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}$ , da matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , associados aos valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , todos distintos, então os vectores próprios são linearmente independentes.*

**Demonstração** Vamos recorrer ao método de indução finita em  $k$ . Para  $k = 1$ , como o vector próprio  $\vec{x}_1$  é não nulo (por definição de vector próprio), conclui-se que a proposição é verdadeira. Admitamos que a proposição seja verdadeira para  $k$ , prove-se que é igualmente verdadeira para  $k + 1$ . A validade da proposição para o inteiro  $k$  significa que, nas condições do enunciado,

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Consideremos então  $k + 1$  vectores próprios nas condições do enunciado e admitamos que eles podem ser dependentes. Existem então escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$  não todos nulos tais que  $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k + \alpha_{k+1} \vec{x}_{k+1} = \vec{0}$

Claro que não pode ser  $\alpha_{k+1} = 0$  porque então a independência de  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  obrigaria a que também  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$  e, nessas condições, os  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, r + 1$ ) seriam todos nulos. Da igualdade anterior obtém-se

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \vec{x}_{k+1} = \vec{0}$$

e ao mesmo tempo

$$\alpha_{k+1} \vec{x}_{k+1} = -\alpha_1 \vec{x}_1 - \alpha_2 \vec{x}_2 - \dots - \alpha_k \vec{x}_k$$

donde se tira

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k + \lambda_{k+1} (-\alpha_1 \vec{x}_1 - \dots - \alpha_k \vec{x}_k) = \vec{0}$$

ou

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \vec{x}_k = \vec{0}$$

A independência de  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  obriga a que

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \dots = \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

e como os  $\lambda_i$  são todos distintos vem que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ ; então

$$\alpha_{k+1} \vec{x}_{k+1} = -\alpha_1 \vec{x}_1 - \dots - \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0}$$

e como  $\vec{x}_{k+1} \neq \vec{0}$  (por ser um vector próprio) necessariamente  $\alpha_{k+1} = 0$ , o que é contrário à hipótese de  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}$  serem linearmente dependentes. Logo os vectores são linearmente independentes.

Decorre imediatamente deste teorema que, se uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  possuir  $n$  valores próprios distintos, então é possível extrair do conjunto dos seus vectores próprios um

subconjunto que forme uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Costuma dizer-se que o conjunto dos vectores próprios forma um sistema completo. Sejam, então,  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$  vectores próprios associados aos valores próprios distintos  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ . Pondo

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_k \end{bmatrix}, \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Lambda = \text{diag} \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_k \end{bmatrix}, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

podemos, nestas circunstâncias, escrever que

$$AX = X\Lambda \quad (1.23)$$

como a matriz  $X$  possui colunas linearmente independentes, é invertível. Por conseguinte, é lícito dizer que

$$X^{-1}AX = \Lambda \quad (1.24)$$

Esta expressão sugere o seguinte conceito.

**Definição 1.8** Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diz-se diagonalizável se existir uma matriz  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertível tal  $X^{-1}AX$  seja diagonal.

Como vimos, o Teorema 1.8 garante que uma matriz com valores próprios distintos é diagonalizável.

**Teorema 1.9** A matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é não defeituosa sse for diagonalizável.

**Demonstração:** Se  $A$  for diagonalizável, então existe uma matriz invertível  $X$  tal que  $AX = X\Lambda$

Seja  $x_i$  a coluna  $i$  de  $X$ , então a expressão anterior é equivalente a

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

como  $X$  é invertível, as colunas formam um conjunto de vectores linearmente independentes, em que cada valor próprio  $\lambda_i$  está associado a um vector próprio  $x_i$ . Logo  $A$  não é defeituosa.

Vamos supor agora que  $A$  não é defeituosa, e demonstrar neste caso que é diagonalizável. Denotemos os seus valores próprios por  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ , em que  $r \leq n$ , e por  $m_1, m_2, \dots, m_r$  as respectivas multiplicidades algébricas que devem satisfazer  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ .

Como, por hipótese,  $A$  não é defeituosa, o subespaço próprio  $S(\mu_i)$  tem exactamente dimensão  $m_i$  (multiplicidade algébrica = multiplicidade geométrica), o que significa que existem vectores  $x_i$  com  $i = 1, \dots, m_i$  que constituem uma base deste subespaço. Organizemos

estes vectores de modo a formarem as colunas de uma matriz  $X_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ . Então o que acabamos de dizer pode traduzir-se na expressão

$AX_i = X_i \Lambda_i$  em que  $\Lambda_i = \text{diag}(\mu_i, \mu_i, \dots, \mu_i) \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ . Pondo  $X = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_r)$ , concluímos que  $AX = X\Lambda$  em que  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . As colunas de  $X$  são linearmente independentes, pois, se não fossem, devia existir um vector  $c \neq 0$  tal que  $Xc = 0$  o que implicaria, particionando  $c$  em conformidade com  $X$ , que

$$X_1 c_1 + X_2 c_2 + \dots + X_r c_r = 0$$

Mas, como  $c \neq 0$ , deve existir pelo menos um  $c_i \neq 0$  e, portanto,  $X_i c_i = 0$ , o que significaria que os vectores próprios de  $X_i$  seriam linearmente dependentes, o que é contrário à hipótese de  $A$  ser não defeituosa.

Se a matriz  $A$  for hermitiana, é possível formular uma versão mais forte do Teorema 1.8.

**Teorema 1.10** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz hermitiana. Então, os respectivos vectores próprios associados aos valores próprios são ortogonais.*

**Demonstração** Sejam  $x_1$  e  $x_2$  vectores próprios associados aos valores próprios distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Por definição, temos que

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

Premultiplicando a primeira igualdade por  $x_2^H$ , e a segunda por  $x_1^H$ , obtemos as relações

$$x_2^H Ax_1 = \lambda_1 x_2^H x_1, \quad x_1^H Ax_2 = \lambda_2 x_1^H x_2$$

Mas, como  $A$  é hermitiana, o Teorema 1.2 garante que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais. Então,

$$\left(x_1^H Ax_2\right)^H = x_2^H Ax_1 = \left(\lambda_2 x_1^H x_2\right)^H = \lambda_2 x_2^H x_1 = \lambda_1 x_2^H x_1$$

donde se tira que

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_2^H x_1 = 0$$

Como, por hipótese,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então  $x_2^H x_1 = 0$ , ou seja,  $x_1$  e  $x_2$  são ortogonais.

## Decomposição espectral de uma matriz

Se  $A$  não for defeituosa, então

$$A = X \Lambda X^{-1} \Rightarrow A^H = X^{-H} \Lambda X^H \Rightarrow A^H X^{-H} = X^{-H} \Lambda$$

ou seja, as colunas da matriz  $Y = X^{-H}$  são os vectores próprios esquerdos de  $A$ , pois  $A^H Y = Y \Lambda$ . Se considerarmos as matrizes  $X$  e  $Y$  participadas por colunas, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^H \\ \vdots \\ y_n^H \end{bmatrix}$$

Efectuando as operações, deduz-se a seguinte decomposição espectral da matriz não defeituosa  $A$

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i^H \quad (1.25)$$

## Similaridade

**Corolário 1.1** (Teorema 1.7) os valores próprios de uma matriz triangular são os respectivos elementos diagonais.

Este corolário sugere uma via para determinar os valores próprios, que é a de transformá-la numa matriz triangular mas de tal modo que os valores próprios sejam preservados.

Quais as transformações deixam invariantes os valores próprios? Questão esta que será respondida a seguir.

**Definição 1.9** Uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diz-se similar ou semelhante a uma matriz  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se existir uma matriz  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertível tal que  $B = P^{-1}AP$ .

À matriz  $P$  dá-se o nome de transformação de similaridade ou de semelhança.

O exemplo seguinte ajuda a dissipar a ideia de que a designação de matrizes semelhantes pode induzir que estas sejam, de alguma forma, “parecidas”.

**Exemplo 1.7** mostrar que matrizes semelhantes podem ser muito “diferentes”, e que matrizes “parecidas” podem não ser semelhantes.

As matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , e  $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  São similares, pois, como se pode verificar,  $B = P^{-1}AP$

com

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pelo contrário, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com  $\varepsilon \neq 0$ , não podem ser similares. De facto, se fossem similares existiria, por definição, uma matriz  $P$  invertível tal que  $A = P^{-1}BP=0$ , o que é uma contradição.

No entanto matrizes similares partilham qualquer coisa em comum.

**Teorema 1.11** *Sejam  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes similares. Então,  $(\lambda, x)$  é um par próprio de  $A$  sse  $(\lambda, P^{-1}x)$  for um par próprio de  $B$ .*

**Demonstração** É fácil ver que se  $P$  é invertível, a relação  $Ax = \lambda x$  é equivalente a

$$P^{-1}(Ax) = P^{-1}(\lambda x) = \lambda(P^{-1}x)$$

Mas por outro lado,

$$P^{-1}(Ax) = P^{-1}A(PP^{-1})x = P^{-1}AP(P^{-1}x) = B(P^{-1}x)$$

Como  $P$  é invertível,  $x \neq 0 \Rightarrow P^{-1}x \neq 0$  e daqui decorre que, se  $(\lambda, x)$  é um par próprio de  $A$ , então  $(\lambda, P^{-1}x)$  é um par próprio de  $B$  e vice-versa, o que demonstra o teorema.

Como veremos adiante, este resultado pode constituir um ponto de partida para a elaboração de métodos práticos de cálculo de pares próprios. Para tal, torna-se necessário encontrar transformações de similaridade que reduzam a matriz  $A$  a formas suficientemente simples para as quais os valores próprios sejam susceptíveis de uma determinação imediata. É este o caso das formas triangulares a que aludimos atrás.

As transformações de similaridade preservam não só os valores próprios mas também a respectiva multiplicidade algébrica, como vamos verificar em seguida.

**Teorema 1.12** *As matrizes similares possuem o mesmo polinómio característico*

**Demonstração** O Teorema 1.10 diz-nos que a matrizes  $A$  e  $B$  similares possuem o mesmo espectro. Todavia pela propriedade dos determinantes, é válido escrever que

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \\ &= \det P^{-1} \det(\lambda I - A) \det P = \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$



O que prova a afirmação feita.

É possível extrair do teorema duas conclusões importantes:

- Duas matrizes similares, uma vez que possuem o mesmo polinómio característico, têm os mesmos valores próprios com idêntica multiplicidade algébrica, o que não era evidente antes deste teorema.
- Os coeficientes do polinómio característico são invariantes relativamente a transformação de similaridade.

Vamos mostrar em seguida que, uma vez conhecido um par próprio de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , é possível reduzir o problema ao de determinar os pares próprios de uma matriz de ordem  $n-1$ .

Assim, suponhamos que por um processo qualquer tínhamos determinado o par próprio  $(\lambda, x)$  de  $A$  e que  $x^H x = 1$ , isto é, o vector próprio  $x$  é unitário. Seja  $U \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$  tal que a matriz  $P = [x \ U]$  resulte unitária. Tal significa que  $x$  e as  $n-1$  colunas de  $U$  devem formar um conjunto de vectores ortonormados, o que, como facilmente se reconhece, é sempre possível. Nestas condições usando  $P$  como uma transformação de similaridade, obtemos

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^H AP = [x \ U]^H A [x \ U] = \begin{bmatrix} x^H \\ U^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax & AU \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda x^H x & x^H AU \\ \lambda U^H x & U^H AU \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & x^H AU \\ 0 & U^H AU \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta ultima matriz é triangular superior por blocos e, pelo Teorema 1.7, os seus valores próprios são  $\lambda$  e os valores próprios da matriz  $U^H AU$  de ordem  $n-1$ . Então a determinação dos restantes valores próprios, além de  $\lambda$  pode fazer-se agora trabalhando apenas com esta matriz de menor dimensão. Um processo de eliminação de valores próprios já conhecidos com redução da dimensão do problema é conhecido em geral pela designação de deflação, e o caso particular apresentado em que empregamos uma transformação de similaridade designa-se deflação por similaridade. Este processo de deflação pode ser efectuado repetidamente a medida que os sucessivos valores próprios forem sendo calculados, e uma consequência importante deste facto é analisada no próximo teorema.

**Teorema 1.13 (Schur)** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , os seus valores próprios. Então, existe uma matriz unitária  $U$  tal que  $U^H AU$  é triangular e cujos elementos diagonais são aqueles valores próprios.*

**Demonstração** Este enunciado pode ser reformulado dizendo-se que, qualquer matriz é similar a uma matriz triangular por meio de uma transformação unitária. A demonstração vai ser efectuada para o caso da matriz triangular superior e por indução na ordem da matriz. O teorema é trivialmente verdadeiro para  $n = 1$ . Suponhamos que é válido para todas as matrizes de ordem  $n - 1$ . Recorrendo ao processo da deflação que acabamos de descrever, podemos construir uma matriz unitária  $R$  tal que

$$R^H AR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^H \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

em que os valores próprios de  $C \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$  são  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Pela hipótese de indução podemos determinar uma matriz unitária  $S \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$  tal que  $S^H AS$  seja triangular superior e cujos elementos diagonais são precisamente  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Ponhamos agora

$$U = R \begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Então, cálculos simples conduzem às expressões

$$\begin{aligned} U^H AU &= \begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ 0 & S^H \end{bmatrix} R^H AR \begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ 0 & S^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^H \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^H \\ 0 & S^H C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^H S \\ 0 & S^H C S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta última matriz é triangular superior, o que mostra que o teorema é válido para matrizes de ordem  $n$ .

As colunas de  $U$  são conhecidas pela designação de *vectores de Schur*.

O Teorema de Schur permite deduzir conclusões muito úteis para matrizes hermitianas, as quais reforçam o carácter muito especial desta classe de matizes. Vejamos algumas das que têm incidência sobre o tema em estudo.

**Teorema 1.14** Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e hermitiana. Então os seus vectores próprios formam um sistema completo e podem ser normalizados de modo a que a matriz  $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  seja unitária.

**Demonstração** Pelo Teorema de Schur existe uma matriz  $U$  unitária tal que  $U^H AU = T$  em que  $T$  é triangular (superior, por exemplo). Mas sendo  $A$  hermitiana, é verdade que

$$T^H = (U^H A U)^H = U^H A^H U = U^H A U = T$$

o que permite concluir que  $T$  é simultaneamente triangular superior e inferior, o que é mesmo que dizer que é diagonal. Portanto,

$$T = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n] = \Lambda$$

notemos pelo Teorema 1.4,  $\Lambda$  é real. Por outro lado,

$$U^H A U = \Lambda \Rightarrow A U = U \Lambda$$

ou seja, as colunas de  $U$  são os vectores próprios da matriz  $A$ . Como  $U$  é unitária, as suas colunas formam um sistema de  $n$  vectores ortonormados que constituem uma base de  $\mathbb{C}^n$ .

Do teorema anterior podemos dizer que:

Uma matriz hermitiana é sempre diagonalizável por transformações similares unitárias e, portanto, nunca é defeituosa.

**Teorema 1.15** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e hermitiana. Então,  $A$  é semidefinida positiva sse os seus valores próprios forem não negativos, e definida positiva sse os seus valores próprios forem positivos.*

**Demonstração** Consideremos o caso de  $A$  ser definida positiva, já que para o outro caso é idêntica. Pelo teorema anterior existe uma matriz  $X$  unitária e, portanto, invertível tal que  $X^H A X = \Lambda$ . Se  $A$  for definida positiva, então

$$y^H A y > 0, \quad \forall y \neq 0$$

mas podemos dizer neste caso que

$$0 < y^H A y = y^H (X^H \Lambda X) y = (Xy)^H \Lambda (Xy) = z^H \Lambda z \quad \forall z \neq 0, \text{ pondo } z = Xy. \text{ Daqui}$$

concluimos que  $\Lambda$  é definida positiva. Analogamente se demonstra a proposição inversa.

Neste momento, sabemos que as matrizes hermitianas são unitariamente diagonalizáveis.

**Definição 1.10** *Uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diz-se normal se  $A^H A = A A^H$ .*

A resposta à questão anterior é dada pelo teorema seguinte.

**Teorema 1.16 (Schur Toeplitz)** *Uma matriz é unitariamente similar a uma matriz diagonal sse for normal.*

## Polinómio minimal

Já tivemos oportunidade de encontrar polinómio de matrizes a propósito do polinómio característico e do teorema de Cayley-Hamilton, por exemplo. Vamos elaborar um pouco mais sobre este tema, começando por notar que um polinómio  $p \in P_k$  induz o polinómio

$$\text{matricial } p(A) = \sum_{i=1}^k a_i A^i$$

**Definição 1.11** A sucessão  $\{x, Ax, \dots, A^{k-1}x, \dots\}$  designa-se por sucessão de Krylov. A matriz dada por  $K_m(A, x) = (x \quad Ax \quad \dots \quad A^{m-1}x)$  designa-se por matriz de Krylov. O subespaço  $K^m(A, x) = R(K_m(A, x))$  é conhecido por subespaço de Krylov. Todas estas noções estão associadas à matriz  $A$  e ao vector  $x$ .

Vamos utilizar as notações  $K_m(x)$ ,  $K_m(A)$ ,  $K^m(x)$  e  $K^m$ . É imediato que,  $\dim K^k \leq m \leq n$ .

**Definição 1.12** Um polinómio  $p$  tal que

$$p(A)x = 0$$

diz-se que é um polinómio aniquilador de  $x$ . Um polinómio tal que

$$p(A) = 0, \quad \forall x$$

diz-se que é um polinómio aniquilador de  $A$ .

O teorema de Cayley-Hamilton afirma que  $p_A(A) = 0$ , o que revela ser o polinómio característico um polinómio aniquilador.

**Teorema 1.18** Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Então existe um único polinómio aniquilador mónico  $q_A$  de grau mínimo. O grau  $m$  deste polinómio satisfaz  $m \leq n$ . Se  $p$  for um polinómio aniquilador de  $A$  então,  $q_A$  divide  $p$ .

**Demonstração** O polinómio característico  $p_A$  é mónico, é de grau  $n$  e é aniquilador de  $A$ . Portanto, na pior das hipóteses, será polinómio aniquilador de grau mínimo. Se  $p$  aniquilar  $A$  e  $q$  for um polinómio aniquilador mónico de grau mínimo, devemos ter então, que por definição  $\deg q \leq \deg p$ . Nestas condições, existe um polinómio “quociente”  $s$  e um polinómio “resto”  $r$ , ambos de grau inferior a  $\deg q$ , tais que  $p = sq + r$ . Se  $r(A)$  não for identicamente nulo, podemos por meio de uma normalização construir a partir dele um

polinómio mónico aniquilador de  $A$  de grau inferior a  $\deg q$ , o que contradiz a hipótese de  $q$  ter grau mínimo. Deste modo,  $r \equiv 0$ , e que  $q$  divide  $p$ .

Falta provar a unicidade do polinómio aniquilador de grau mínimo. Se existirem dois destes polinómios, então, de acordo com o resultado acabado de obter, cada um deles divide o outro. Como têm ambos mesmo grau, isto significa que um é múltiplo escalar do outro, mas sendo ambos mónicos, tal só é possível se o escalar for 1, pelo que os dois polinómios são idênticos.

Este teorema justifica que o polinómio mónico de grau mínimo aniquilador da matriz  $A$ ,  $q_A$ , seja designado por *polinómio minimal* de  $A$ .

**Teorema 1.19** *As matrizes similares têm o mesmo polinómio minimal.*

**Demonstração** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes similares. Pelo teorema 1.12 possuem o mesmo polinómio característico, o que quer dizer,  $p_A = p_B$ , logo pelo teorema anterior  $A$  e  $B$  têm o mesmo polinómio minimal.

**Teorema 1.20** *O polinómio minimal  $q_A$  divide  $p_A$ . Além disso, os zeros de  $q_A$  são valores próprios de  $A$ , embora eventualmente com multiplicidade algébrica diferente*

Este teorema mostra que os polinómios característico e minimal assumem as formas

$$p_A = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad q_A = (\lambda - \lambda_1)^{\beta_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\beta_k}$$

em que  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, k$ . A partir deste resultado não é difícil obter o teorema seguinte:

**Teorema 1.21** *Se os valores próprios de uma matriz forem distintos, então o seu polinómio característico e o seu polinómio minimal coincidem.*

## 1.2– Quociente de Rayleigh

Um escalar importante relacionado com os valores próprios é o quociente de Rayleigh definido, para qualquer vector  $x \neq 0$ , por

$$R(x) = \frac{x^H Ax}{x^H x} \quad (1.28)$$

o seu valor é, em geral, complexo. No entanto, se  $A$  for hermitiana, o quociente de Rayleigh é real e goza propriedades interessantes tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista computacional.

Suponhamos que obtivemos por um processo qualquer, uma aproximação de  $u$  a um vector próprio  $x \in A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Uma pergunta que se coloca é a de saber qual o valor de  $\mu \in \mathbb{C}$  que deveríamos tomar como aproximação de  $\lambda$  associado a  $x$ . Por outras palavras, se  $(\lambda, x)$ , for um par próprio, qual o par próprio aproximado  $(\mu, u)$  que deve ser considerado na hipótese  $u$  ser conhecido? Uma resposta a esta questão é a de tomar para  $\mu$  o valor de minimizar uma norma apropriada do resíduo

$$r(\mu, u) = Au - \mu u \quad (1.29)$$

ora, a norma que se revela simples para este efeito é a norma euclidiana, pelo que  $\mu$  deve ser minimizador da função

$$f(\mu) = \|r(\mu, u)\|_2^2 = \|Au - \mu u\|_2^2 \quad (1.30)$$

Algumas manipulações conduzem – nos a

$$\begin{aligned} f(\mu) &= (Au - \mu u)^H (Au - \mu u) \\ &= u^H A^H Au - 2 \operatorname{Re}(\mu u^H A^H u) + \mu \bar{\mu} u^H u \end{aligned}$$

se  $A$  for hermitiana (e esta premissa é crucial para o desenvolvimento que vamos fazer), a função  $f$  simplifica-se, vindo

$$f(\mu) = u^H A^2 u - 2\mu u^H A u + 2\mu \bar{\mu} u^H u \text{ daqui se extrai que}$$

$$f'(\mu) = -2u^H A u + 2\mu u^H u$$

e, portanto, o valor de  $\mu$  que torna  $f$  estacionária é

$$\mu = \frac{u^H A u}{u^H u} = R(u).$$

Falta provar que este valor é, de facto, um minimizador, o que constitui o objectivo do próximo teorema.

**Teorema 1.22** Para  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e hermitiana e  $u \in \mathbb{C}^n$  dado, é válida a seguinte relação

$$\|Au - R(u)u\|_2 \leq \|Au - \mu u\|_2, \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

A conclusão que daqui se tira é de que  $R(u)$  é o melhor valor aproximado para o valor próprio associado a  $u$ .

**Teorema 1.23 (Rayleigh-Ritz)** Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hermitiana, e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , os seus valores próprios (reais) ordenados por ordem decrescente, i.e.,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

Então,

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} R(x), \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} R(x) \quad (1.31)$$

**Demonstração1** Como  $\sigma(A - \lambda_1 I) = \sigma(A) - \lambda_1$  vem que

$$\sigma(A - \lambda_1 I) = \{0, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1\}$$

e, portanto, a matriz  $A - \lambda_1 I$  possui valores próprios não positivos. Aplicando o Teorema 1.15, podemos afirmar que esta matriz é semidefinida negativa, o que permite escrever que

$$x^H (A - \lambda_1 I)x \leq 0, \quad \forall x \neq 0$$

$$\text{ou, de modo equivalente } \lambda_1 \geq \frac{x^H Ax}{x^H x}, \quad \forall x \neq 0$$

mas se isto se verifica, também é válida a seguinte desigualdade,

$$\lambda_1 \geq \max_{x \neq 0} \frac{x^H Ax}{x^H x}$$

Como o quociente de Rayleigh  $\frac{x^H Ax}{x^H x}$  é igual a  $\lambda_1$  quando tomarmos para  $x$  o vector próprio  $x_1$  associado a  $\lambda_1$ , concluímos que a desigualdade anterior forçosamente tem de ser uma igualdade, pelo que (1.31)<sub>1</sub> é verdadeira.

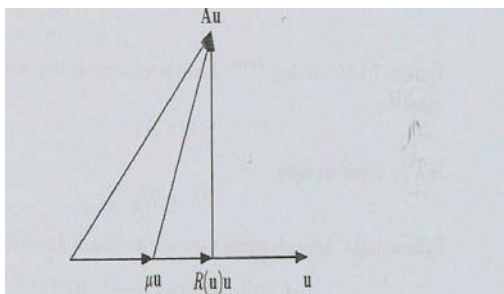


Fig.1.2

**Demonstração2**  $\lambda_n = \min_{x \neq 0} R(x)$ , pois sendo  $\sigma(A - \lambda_n I) = \sigma(A) - \lambda_n$

$$\sigma(A - \lambda_n I) = \{\lambda_1 - \lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \dots, 0\}$$

e, portanto, a matriz  $A - \lambda_n I$  possui valores próprios não negativos. Aplicando o Teorema 1.15, podemos afirmar que esta matriz é semi-definida positiva, o que permite escrever que  $x^H (A - \lambda_n I)x \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$ , ou seja,  $\lambda_n \leq \frac{x^H A x}{x^H x}$ , donde é válida

$$\lambda_n \leq \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x} \text{ obtendo assim } \lambda_n = \min_{x \neq 0} R(x)$$

### 1.3 – Localização de valores próprios

Alguns métodos do cálculo de valores próprios requerem a localização destes valores. Vejamos alguns resultados úteis neste sentido.

Uma relação importante entre raio espectral e normas é apresentada no teorema seguinte, onde se prova que  $\|A\|$  é um majorante do raio espectral, qualquer que seja a norma utilizada.

**Teorema 1.23** *seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , então o raio espectral desta matriz verifica a seguinte desigualdade.*

$$\rho(A) \leq \|A\|. \text{ Se } A \text{ for hermitiana, então } \rho(A) \leq \|A\|_2$$

**Demonstração** Aplicando norma ambos membros de  $Ax = \lambda x$ , temos que

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$$

como esta igualdade é verdadeira para qualquer  $\lambda \in \sigma(A)$ , é também verdadeira para o valor próprio com maior valor absoluto.

A segunda parte deste teorema deduz-se directamente da expressão (1.31)<sub>1</sub> e da definição de norma matricial.

É claro que para a localização de valores próprios, interessa utilizar normas fáceis de calcular, como sejam  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_1$ , ou  $\|\cdot\|_F$ .

**Teorema 1.24** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Então,*

$$(\rho(A))^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$$

**Demonstração**



$$\begin{aligned} (p(A))^2 &\leq \|A\|_2^2 = \|A^H A\|_2 = p(A^H A) \\ &\leq \|A^H A\|_1 \leq \|A\|_1 \|A^H\|_1 = \|A\|_1 \|A\|_\infty \end{aligned}$$

o que prova afirmação.

**Teorema 1.25 (Gershgorin)** Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\zeta_i$  o círculo (no plano complexo) centrado em  $a_{ii}$  e raio

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

por vezes designado por círculo de Gershgorin,  $\zeta_i(A) = \bigcup_{i=1}^n \zeta_i$ , a região Gershgorin.

Então todos os valores próprios de  $A$  estão contidos no domínio  $\zeta(A)$ , i.e.,  $\sigma(A) \subset \zeta(A)$ .

**Demonstração** se  $\lambda \in \sigma(A)$ , a matriz  $B = A - \lambda I$  é singular. Isto significa que existe um vector  $x \neq 0$  tal que  $Bx = 0$ , ou seja,

$$\sum_{j=1}^n b_{kj} x_j = 0 = b_{kk} x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{kj} x_j$$

Donde se pode obter:

$$b_{kk} x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{kj} x_j$$

seja  $x_i$  a maior componente em valor absoluto de do vector  $x$ . Então, podemos proceder às seguintes majorações

$$|b_{ii} x_i| = |b_{ii}| |x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}| |x_j|$$

portanto, como por hipótese  $x_i \geq x_j$  para qualquer  $j \in \{1, \dots, n\}$ , vem que

$$|b_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}| \Rightarrow |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

fica assim provado que existe um círculo  $\zeta_i$ , centrado em  $a_{ii}$  e raio  $r_i$  que contém o valor próprio  $\lambda$  o que implica que qualquer valor próprio terá de estar contido na união destes círculos.

**Teorema 1.26** *Se  $k$  círculos de Gershgorin forem disjuntos dos restantes, então, existem exactamente  $k$  valores próprios na união.*

## II. MÉTODOS PRÁTICOS PARA A DETERMINAÇÃO DOS VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

Consideremos que os valores próprios de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  estão ordenados de modo que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

### 2.1 – Método das potências directas

Suponhamos que  $A$  possui  $n$  direcções próprias linearmente independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , as quais constituem, portanto, uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Designemos por  $x^{(0)}$  um vector arbitrário, e seja

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

a sua representação na base formada por aquelas direcções próprias de  $A$ . Construamos um vector  $x^{(1)}$  premultiplicando  $x^{(0)}$  por  $A$ . Então, como facilmente se vê,

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = A \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i Ax_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i x_i$$

Se  $\lambda_1 \neq 0$ , então esta expressão pode escrever-se ainda

$$x^{(1)} = \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) x_i \right)$$

Se  $\lambda_1$  for um valor próprio dominante, i.e.,  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  e se  $a_1 \neq 0$ , a operação efectuada reforça a componente segundo a direcção  $x_1$  relativamente às restantes. Por outras palavras, a premultiplicação de um vector por  $A$  produz um vector ‘mais alinhado’ com a direcção própria associada ao valor próprio dominante. Tirando vantagem desta circunstância, podemos construir uma sucessão de vectores por meio da fórmula

$$x^{(m)} = Ax^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Concluindo, assim, que

$$x^{(m)} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^m x_i = \lambda_1^m \left( \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m x_i \right).$$

Supondo ainda que  $a_1 \neq 0$ , deduz-se

$$\frac{x^{(m)}}{a_1 \lambda_1^m} - x_1 = \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{a_1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m x_i$$

Aplicando normas a ambos membros desta igualdade e majorando, vem que

$$\left\| \frac{x^{(m)}}{a_1 \lambda_1^m} - x_1 \right\|_2 = c \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m \quad (2.1)$$

em que  $c$  depende de  $x^{(0)}$  através dos  $a_i$  e do espectro de  $A$ , mas é independente de  $m$ .

Esta expressão mostra que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{x^{(m)}}{a_1 \lambda_1^m} - x_1 \right\|_2 = 0$$

donde se deduz que o vector  $\frac{x^{(m)}}{a_1 \lambda_1^m}$  converge para  $x_1$ . Dado que  $\frac{x^{(m)}}{a_1 \lambda_1^m}$  e  $x^{(m)}$  possuem a

mesma direcção, com uma leitura alternativa de (2.1) permite dizer que uma versão adequada escalada de  $x^{(m)}$  converge para a direcção de  $x_1$ .

É importante ter em conta que este algoritmo pressupõe que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  e  $a_1 \neq 0$ , condições estas que são geralmente difíceis de se verificar à partida.

A convergência deste algoritmo é tanto mais rápida quanto ‘mais dominante’ for  $\lambda_1$ . Se  $a_1 \neq 0$  for ‘pouco dominante’ podem ser necessárias várias iterações para produzir pares próprios com precisão desejada. Como, por outro lado, o número de flops necessário é  $O(n^2)$  por iteração, o algoritmo só é eficaz se pretendermos determinar alguns pares próprios.

Um outro aspecto a ter em conta é que a matriz  $A$  participa neste algoritmo só para premultiplicar vectores, o que torna relativamente fácil a exploração da sua eventual esparsidade para economizar memória e operações aritméticas. O método é, por isso mais interessante para matrizes esparsas.

Se  $A$  for hermitiana é possível acelerar a convergência recorrendo ao quociente de Rayleigh que neste caso é, pelo teorema 1.2, um número real. O seu valor na iteração  $m$  é dado por

$$R(x^{(m)}) = \frac{(x^{(m)})^H A x^{(m)}}{(x^{(m)})^H x^{(m)}} = \frac{(x^{(m)})^H x^{(m+1)}}{(x^{(m)})^H x^{(m)}} \quad (2.2)$$

Mas, atendendo a que

$$x^{(m)} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^m x_i, \quad x^{(m+1)} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^{m+1} x_i \quad (2.3)$$

e ao facto de que os vectores próprios de  $A$  são linearmente independentes (ver teorema 1.10), obtemos

$$\begin{aligned} R(x^{(m)}) &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2m+1}}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2m}} = \\ &= \lambda_1 \left[ 1 + \sum_{i=2}^n \left( \frac{a_i}{a_1} \right)^2 \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2m+1} \right] / \left[ \left( 1 + \sum_{i=2}^n \left( \frac{a_i}{a_1} \right)^2 \right) \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2m} \right] \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} R(x^{(m)}) - \lambda_1 &= \\ &\lambda_1 \left[ \sum_{i=2}^n \left( \frac{a_i}{a_1} \right)^2 \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2m+1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} - 1 \right) \right] / \left[ \left( 1 + \sum_{i=2}^n \left( \frac{a_i}{a_1} \right)^2 \right) \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2m} \right] \end{aligned}$$

tomando valores absolutos de ambos membros desta expressão e majorando, temos

$|R(x^{(m)}) - \lambda_1| \leq c \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2m}$ . Em que tal como atrás  $v$  não depende de  $m$ . Agora a convergência é determinada por  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2m}$  em vez de  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^m$  como acontece quando  $A$  não é hermitiana, e é, portanto, mais rápida.

## 2.2 – Translações espectrais

Passamos da terminação dos valores próprios de  $A$  para determinarmos os valores próprios de  $A - pI$  (teorema 1.6), em que  $p$  é um escalar que está à nossa disposição. Operação esta que é conhecida como translação espectral, ou mudança de origem.

**Exemplo 2.1** *Aceleração do método das potências directas por translações espectrais.*

Suponhamos que uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  possui um espectro  $\sigma(A) = \{14, 13, 12, 11\}$ . O método das potências directas converge com uma taxa determinada por  $|\lambda_2/\lambda_1| = 13/14 \approx 0.93$ , faz com que o método convirja lentamente. No entanto, se fizermos uma translação espectral com  $p = 12$ , temos que  $\sigma(A - pI) = \{2, 1, 0, -1\}$  e a taxa de convergência passa agora a depender de 0.5, bastante mais favorável. No final há que desfazer a translação.

A técnica acabada de exemplificar é conhecida por *Método de Wilkinson das translações espectrais*.

Uma vez obtido  $\lambda_1$ , nada impede que tomemos  $p = \lambda_1$ . Neste caso  $\lambda_n - p$  será o valor próprio dominante de  $A - pI$ . Se este valor próprio for simples, então é possível utilizar método das potências para determinar  $\lambda_n - p$ , e, por esta via,  $\lambda_n$  e também o vector próprio  $x_n$ .

### 2.3 – Método das potências inversas

A rapidez do método das potências depende do afastamento do valor próprio dominante  $\lambda_1$  relativamente ao valor próprio mais próximo. Neste sub-capítulo vamos mostrar que uma combinação judiciosa deste método conduzido com a matriz  $A^{-1}$  em vez de  $A$  e com translações espectrais pode oferecer uma alternativa mais atraente. Assim, seja  $x^{(0)}$  um vector inicial do processo iterativo seguinte

$$x^{(m)} = A^{-1}x^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

a sucessão  $x^{(m)}$  converge para o valor próprio dominante de  $A^{-1}$ , o qual, pelo teorema 1.5 é  $1/\lambda_n$ . O que quer dizer que as iterações (2.4) permitem calcular o par próprio  $(\lambda_n, x_n)$ .

Na realização prática deste método não se deve calcular  $A^{-1}$ , mas assim resolver o sistema

$$Ax^{(m)} = x^{(m-1)} \quad (2.5)$$

por um método apropriado. Neste caso, a factorização triangular, na medida em que a fase de factorização necessita de ser efectuada uma única vez e pode ser utilizada em todas as iterações. Concretizando, a factorização triangular produz as matrizes triangulares inferior  $L$  e superior  $U$  tais que  $PA = LU$  em que  $P$  é a matriz que incorpora as eventuais trocas de linha. A determinação de  $x^{(m)}$  segue agora o processo habitual

$$Ly^{(m)} = Px^{(m)}, \quad Ux^{(m)} = y^{(m)}$$

em que  $y^{(m)}$  funciona meramente como vector auxiliar. Deste modo cada iteração requer  $O(n^2)$  flops.

O método das potências inversas não se limita, contudo, ao cálculo do menor valor próprio em valor absoluto  $\lambda_n$ . De facto, se combinarmos este método com translações espectrais podemos em principio determinar qualquer outro valor próprio. Assim, seja  $p$  um escalar, efectuem as iterações (1.2.4) com a matriz  $A - pI$  em vez de  $A$ , vindo

$$x^{(m)} = (A - pI)^{-1} x^{(m-1)} \quad (2.6)$$

Se houver convergência esta sucessão  $x^{(m)}$  convergirá para o vector próprio associado ao valor próprio de menor valor absoluto da matriz  $A - pI$ , ou seja, permite aproximar o valor próprio de  $A$  mais próximo de  $p$ . Se  $p$  for uma boa aproximação dum certo valor

próprio  $\lambda$ , é de se esperar que se produza em poucas iterações um valor bastante preciso para  $\lambda$ . Refazendo a análise de 1.2.1, podemos escrever que a estimativa inicial tem a seguinte representação

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (2.7)$$

e as iterações vêm dadas por

$$x^{(m)} = \sum_{i=1}^n (A - pI)^{-m} a_i x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - p)^{-m} a_i x_i \quad (2.8)$$

a componente  $x^{(m)}$  associada ao vector próprio  $x_i$  associado ao valor próprio mais próximo de  $p$  é reforçada em cada iteração em relação às outras e tanto mais quanto menor for  $\lambda_i - p$ , i.e., quanto melhor  $p$  aproximar  $\lambda_i$ .

É conveniente notar que se existir um grupo de valores próprios muito próximos uns dos outros, este método pode sentir dificuldades de convergência.

O método das potências inversas, tal como o das potências directas, é eficaz quando se pretende calcular alguns pares próprios, mas perde interesse se o objectivo for calculá-los a todos, caso em que é preferível recorrer a outros mais rápidos.

## 2.4 – Iterações em subespaços

O método das potências produz um par próprio em cada iteração. Pode haver a necessidade de determinar vários valores próprios em simultâneo. Tal só acontece quando não se tem a certeza de haver um valor próprio dominante ou a separação entre os valores próprios ser pequena e conduzir a uma convergência demasiado lenta. A ideia que ocorre é de tomar várias alternativas iniciais  $q^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p \leq n$  para os valores próprios. Assim, no entanto se não forem tomados cuidados especiais, as sucessões assim geradas, ou não convergem ou convergem todas para o mesmo vector próprio dominante.

A precaução a tomar é manter estes vectores ortogonais entre si.

Assim tomemos  $p$  estimativas iniciais ortonormadas e organizemo-las como colunas de uma matriz  $Q^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . O método das potências directas consiste em ter  $Y^{(1)} = A Q^{(0)}$ . Como



$Y^{(1)}$  não terá colunas ortonormadas é preciso proceder à sua ortonormalização, que se pode efectuar pelo método de Gram-Schmidt. Processo esse que é repetido, pelo que, em termos algoritmos, se pode descrever:

## 2.5 – Método de Jacobi clássico

**Teorema 2.1** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e simétrica. Então, existe uma matriz ortogonal  $R$  que reduz  $A$  por similaridade à forma*

$$RAR^T = D$$

em que  $D$  é uma matriz diagonal.

**Demonstração** É imediata invocando o teorema 1.16 e o facto de  $A$  ser real e simétrica.

Nota: toda matriz real simétrica é similar a uma matriz diagonal real, o que significa que  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . A dificuldade reside, assim, na construção da matriz ortogonal  $R$ , e efectua a redução de à forma diagonal.

**Exemplo 2.2** *Rotações planas*

Consideremos uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e simétrica, escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

A matriz  $R = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$  com  $\begin{cases} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{cases}$  efectua-se uma rotação de um ângulo  $\theta$  de

todos os vectores de  $\mathbb{R}^2$ . Por outro lado, levando a cabo as necessárias operações, chegamos à conclusão de que

$$\begin{aligned} RAR^T &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha c^2 + \beta s^2 - 2\gamma sc & (c^2 - s^2)\gamma + (\alpha - \beta)sc \\ (c^2 - s^2)\gamma + (\alpha - \beta)sc & \alpha s^2 + \beta c^2 + 2\gamma sc \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para tornar esta matriz diagonal basta que  $(c^2 - s^2)\gamma + (\alpha - \beta)sc = 0$

é possível concluir que o ângulo de rotação  $\theta$  deve satisfazer a condição

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2cs}{c^2 - s^2} = \frac{2\gamma}{\beta - \alpha}$$

Rutishauser propôs que, pusesse  $t = \tan \theta$  e  $a = (\beta - \alpha)/2\gamma$  na expressão acima, obtendo assim,

$$t^2 + 2at - 1 = 0$$

e daí tem-se as seguintes soluções para  $t$

$$t = -a \pm (1 + a^2)^{1/2}$$

$$t = \operatorname{sign} a / \left( |a| + (1 + a^2)^{1/2} \right)$$

uma vez obtido o valor de  $t$ , os valores de  $c$  e  $s$  podem calcular-se pelas expressões

$$c = 1 / (1 + a^2)^{1/2}, \quad s = ct$$

em que  $c$  deve ser tomado como positivo. Nestas condições, conforme se pode verificar, o ângulo de rotação  $|\theta| \leq \pi/4$ .

Após algumas simplificações a matriz toma a forma

$$D = RAR^T = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma t & 0 \\ 0 & \beta + \gamma t \end{pmatrix}$$

os valores próprios podem ser lidos na diagonal de  $D$ ; logo

$$\sigma(A) = \{\alpha - \gamma t, \beta + \gamma t\}.$$

O método de Jacobi consiste em tirar partido das rotações planas para, em operações sucessivas, ir anulando os elementos não diagonais de  $A$ .

**Definição 2.1** uma matriz  $R(p, q, \theta)$  diz-se que é uma rotação plana de um ângulo  $\theta$  no plano  $(p, q)$  se

$$r_{pp} = c = \cos \theta, \quad r_{pq} = -s = -\sin \theta$$

$$r_{qp} = s = \sin \theta, \quad r_{qq} = c = \cos \theta$$

$$r_{ii} = 1, \quad \text{se } i \neq p, q$$

e os restantes elementos forem nulos.

O produto  $R(p, q, \theta)$  por  $A$  altera as linhas  $p$  e  $q$ , e o produto de  $A$  por  $R^T(p, q, \theta)$  altera as colunas  $p$  e  $q$ , pelo que  $R(p, q, \theta)$  difere de  $A$  apenas nas linhas e colunas  $p$  e  $q$ .

**Exemplo 2.3** Aplicar uma rotação plana no plano  $(2, 4)$  à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

de modo a anular os elementos  $a_{24} = a_{42}$ .

De acordo com o que acabámos de dizer, a matriz a utilizar para efectuar a rotação pretendida tem a forma

$$R \equiv R(2, 4, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando as multiplicações de matrizes, chegamos às expressões

$$RA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ c & 2c - 3s & c - s & 3c - 2s & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3c + 2s & c + s & 3s + 2c & c \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e, ainda,

$$RAR^T = \begin{bmatrix} 1 & c & -2 & 0 & 0 \\ c & 2c^2 + 2s^2 - 6cs & c - s & 3c^2 - 3s^2 & 0 \\ -2 & c - s & 4 & c + s & 5 \\ s & 3c^2 - 3s^2 & c + s & 2c^2 + 2s^2 + 6cs & c \\ 0 & -s & 5 & c & 3 \end{bmatrix}$$

Para anular os elementos nas posições (2,4) e (4,2) basta escolher

$\theta$  de modo que  $3c^2 - 3s^2 = 0$ , ou seja, tendo em conta o que se disse atrás,  $\theta = \pm\pi/4$ .

No caso geral, os elementos da matriz  $RAR^T \equiv R(p, q, \theta)AR^T(p, q, \theta)$  situados nas linhas e colunas  $p$  e  $q$  assumem a seguinte forma

$$(RAR^T)_{pp} = c^2 a_{pp} - 2cs a_{pq} + s^2 a_{qq}$$

$$(RAR^T)_{qq} = s^2 a_{qq} + 2cs a_{pq} + c^2 a_{pp}$$

$$(RAR^T)_{pq} = (c^2 - s^2)a_{pq} + cs(a_{pp} - a_{qq}) \quad (2.9)$$

$$(RAR^T)_{ip} = ca_{ip} - sa_{iq}, \quad i \neq p, q$$

$$(RAR^T)_{iq} = ca_{iq} + sa_{ip}, \quad i \neq p, q$$

Escolhendo o ângulo de rotação de acordo com o exposto atrás, podemos anular os elementos nas posições  $(p, q)$  e  $(q, p)$ . Diz-se neste caso que se efectuou uma rotação de Jacobi.

Nestas condições, os restantes elementos podem ser calculados pelas seguintes expressões deduzidas por Rutishauser de (2.9) com o objectivo de reduzir o efeito de arredondamento,

$$(RAR^T)_{pp} = a_{pp} - ta_{pq}$$

$$(RAR^T)_{qq} = a_{qq} + ta_{pq}$$

$$(RAR^T)_{pq} = 0 \quad (2.10)$$

$$(RAR^T)_{ip} = a_{ip} - s(a_{iq} + \tau a_{ip}), \quad i \neq p, q$$

$$(RAR^T)_{iq} = a_{iq} + c(a_{ip} - \tau a_{iq}), \quad i \neq p, q$$

$$\text{com } \tau = \tan(\theta/2) = s/(1+c)$$

O método de Jacobi clássico consiste em anular os elementos por ordem decrescente dos seus respectivos valores absolutos.

**Teorema 2.2** *O método de Jacobi é convergente.*

**Demonstração** O ponto de partida é a propriedade de as transformações ortogonais preservarem a norma de Frobenius, i.e.,

$$\|A\|_F = \|QAQ^T\|_F$$

para qualquer matriz ortogonal  $Q$ . Consideremos uma matriz  $A^{(k)}$  decomposta na sua parte diagonal  $\hat{D}^{(k)}$  e na sua parte não diagonal  $\hat{A}^{(k)}$ , ou seja.,  $A^{(k)} = \hat{D}^{(k)} + \hat{A}^{(k)}$ . Em seguida comparemos a evolução de  $\|\hat{D}^{(k)}\|_F$  e  $\|\hat{A}^{(k)}\|_F$  ao longo das iterações de Jacobi e verifiquemos se esta última quantidade tende ou não para zero. Em primeiro lugar, registemos que

$$\left\| \widehat{D}^{(k)} \right\|_F^2 = \sum_{i=1}^n (a_{ii}^{(k)})^2 \quad e$$

$$\left\| \widehat{A}^{(k)} \right\|_F^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (a_{ij}^{(k)})^2$$

Para cada rotação de Jacobi  $R^{(k)}$  podemos verificar, efectuando os cálculos, que

$$\left\| \widehat{D}^{(k+1)} \right\|_F^2 = \left\| \widehat{D}^{(k)} \right\|_F^2 + 2(a_{pq}^{(k)})^2$$

$$\left\| \widehat{A}^{(k+1)} \right\|_F^2 = \left\| \widehat{A}^{(k)} \right\|_F^2 - 2(a_{pq}^{(k)})^2$$
(2.11)

Como  $a_{pq}^{(k)} \neq 0$  a quantidade  $\left\| \widehat{A}^{(k)} \right\|_F$  decresce monotonamente com  $k$  ao longo das iterações.

Ora designado por  $N = n(n-1)$  o número de elementos não diagonais de uma matriz de ordem  $n$ , podemos escrever, em virtude do critério de escolha do elemento a anular ser o de seleccionar o maior elemento em valor absoluto de  $\widehat{A}^{(k)}$ , que

$$\left| \widehat{a}_{pq}^{(k)} \right| \geq \left| \widehat{a}_{ij}^{(k)} \right|, \quad \forall i, j \text{ e, portanto, } \left| \widehat{a}_{pq}^{(k)} \right| \geq \left\| \widehat{A}^{(k)} \right\|_F / N$$

$$\text{resulta daqui e de (2.11) que } \left\| \widehat{A}^{(k+1)} \right\|_F^2 \leq \left( 1 - \frac{2}{N} \right) \left\| \widehat{A}^{(k)} \right\|_F^2 / N$$

por indução em  $k$ , deduzimos que é também válida a desigualdade

$$\left\| \widehat{A}^{(k)} \right\|_F^2 \leq \left( 1 - \frac{2}{N} \right)^k \left\| \widehat{A}^{(0)} \right\|_F^2, \text{ Permitindo assim, concluir que as matrizes } A^{(k)} \text{ geradas pelo}$$

método de Jacobi clássico tendem para a forma diagonal, podem não convergir para uma matriz diagonal com elementos diagonais fixos.

Atendendo às expressões (2.10) podemos escrever que

$$a_{pp}^{(k+1)} - a_{pp}^{(k)} = t_k a_{pq}^{(k)} \text{ em que pusemos } t_k = \tan \theta_k. \text{ Como este ângulo foi escolhido de}$$

$$\text{modo que } |t_k| \leq 1 \text{ vem que } \left| a_{pp}^{(k+1)} - a_{pp}^{(k)} \right| \leq |t_k| a_{pq}^{(k)}.$$

Se tivermos atingido uma iteração  $m$  tal que os elementos não diagonais de  $A^{(m)}$  seja em valor absoluto inferiores a uma quantidade  $\varepsilon < 1$ , deduzimos que

$$\left| a_{pp}^{(k+m)} - a_{pp}^{(m)} \right| \leq \varepsilon^k \text{ o que nos permite concluir que cada elemento } a_{pp}^{(k)} \text{ individualmente}$$

tende para um limite.

Ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = D$  o que prova o teorema.

O método de Jacobi constrói a matriz ortogonal  $R$  do teorema 2.1 à custa das rotações planas  $R^{(k)}$  de tal modo que

$$R = \dots R^{(k)} R^{(k-1)} \dots R^{(2)} R^{(1)} \quad (2.12)$$

Uma vez obtidos os valores próprios de  $A$ , que aparecem na diagonal da matriz  $D$ , os vectores próprios podem ser calculados pelo processo seguinte. As matrizes  $A$  e  $D$  são similares por construção, e  $(\lambda_i, e_i)$  é um par próprio de  $D$ ; logo,

$Rx_i = e_i \Rightarrow x_i = R^T e_i$ , ou seja, o vector  $x_i$  pode ser obtido aplicando a matriz  $R^T$  ao vector  $e_i$ . Esta aplicação pode fazer-se construindo a matriz  $R$  através de (2.12) e aplicando-a no fim aos vectores  $e_i$  ou, em alternativa, aplicando imediatamente a estes vectores as rotações planas  $R^{(k)}$  à medida que estas forem sendo estabelecidas. Se pretendermos obter muitos vectores próprios de  $A$  e economizar memória, é preferível formar  $R$  explicitamente. Se estivermos interessados em apenas alguns vectores próprios e não houver limitações severas de memória, é mais vantajoso guardar as rotações planas à medida que vão sendo determinadas, e aplicá-las no fim.

O método de Jacobi não respeita a esparsidade da matriz  $A$ , o que significa que, para este método, todas as matrizes tenham de ser consideradas cheias. Esta característica restringe a sua aplicação a matrizes de dimensão moderada, o que constitui uma desvantagem deste método.

## 2.6 – Tridiagonalização de matrizes

### 2.6.1 – Rotações de Givens

Retomando o exemplo 2.3, podemos observar que a rotação plana  $R(2, 4, \theta)$  havia sido escolhida de modo a anular o elemento na posição  $(2, 4)$  e, por simetria, também o elemento na posição  $(4, 2)$ . No entanto, podíamos ter optado por anular os elementos nas posições  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$ , ou  $(4, 5)$  e os respectivos simétricos. Assim, para anular o elemento  $a_{23}$  do exemplo 3.2, basta escolher uma rotação plana cujo ângulo satisfaça  $c = s$ , ou seja,

$\theta = \pm\pi/4$ . De um modo geral, se pretendermos anular o elemento  $a_{ip}$ , com  $i \neq p, q$  devemos escolher, de acordo com a expressão (2.10), uma rotação tal que  $ca_{ip} - sa_{iq} = 0$  e, portanto,  $t = \tan \theta = a_{ip} / a_{iq}$ . Recorrendo a relações trigonométricas elementares,  $c$  e  $s$  podem ser calculadas através das expressões

$$\begin{aligned} c &= a_{iq} / r \\ s &= a_{ip} / r \end{aligned} \quad \text{com } r = (a_{ip}^2 + a_{iq}^2)^{1/2} \quad (2.13)$$

que evitam o cálculo explícito de  $\theta$  e, por conseguinte, dispensam o recurso a funções trigonométricas inversas. O método de Givens consiste em utilizar rotações planas  $R(p, q, \theta)$  para anular o elemento na posição  $(p-1, q)$  (as chamadas *rotações de Givens*) e com os elementos a serem anulados pela seguinte ordem:  $(1,3), (1,4), \dots, (1,n), (2,4), \dots, (2,n), \dots, (n-2, n)$ . A matriz  $A$  fica tridiagonalizada ao fim de  $(n-1)(n-2)/2$  rotações.

Uma vantagem deste método, derivada do facto de que este processo respeita os zeros criados, é a de que podemos utilizar as respectivas posições para guardar a rotação efectuada através, por exemplo, do armazenamento do valor de  $c$ .

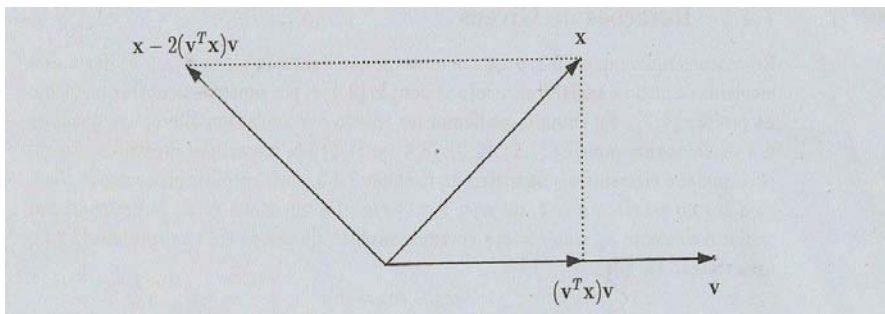


Figura 2.1. Reflexão de Householder

## 2.6.2 – Reflexões de Householder

**Definição 2.2** Uma matriz  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  da forma

$$H = I - 2vv^T \quad \text{com } vv^T = 1$$

diz-se que é uma transformação ou reflexão de Householder.

Estas matrizes são simétricas e ortogonais, portanto,  $H = H^T = H^{-1}$ , o que constitui um conjunto de propriedades importantes:  $H$  é igual à sua transposta e à sua inversa!

A designação de reflexão de justifica-se tendo em atenção que para qualquer vector  $x$ , se verifica que

$$y = Hx = (I - 2vv^T)x = x - 2v(v^T x) = x - 2(x^T v)v$$

A figura 2.1 mostra que  $y$  é, de facto, o vector que se obtém por reflexão de  $x$  ao longo da direcção de  $v$ .

Vejamos como tirar partido destas transformações para tridiagonalizar  $A$ . Para tal, consideremos esta matriz e a transformação de similaridade  $P$  particionadas do seguinte modo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & B \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H \end{pmatrix},$$

em que  $H$ , e conseqüentemente também  $P$ , é uma reflexão de Householder. Nestas condições a matriz transformada  $\bar{A}$  vem dada por

$$\bar{A} = PAP = \begin{pmatrix} \alpha & a^T H \\ Ha & HBH \end{pmatrix}$$

Se pretendermos que esta transformação produza uma primeira linha (e por simetria uma primeira coluna) tridiagonal, basta escolher  $H$  de ordem  $n-1$  e de tal modo que  $Ha = \beta e_1$ , em que  $e_1$  é um versor na direcção 1 de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . A matriz  $\bar{A}$  ficará então com o seguinte aspecto (o símbolo  $\times$  indica os elementos genéricos não necessariamente nulos)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

Tomemos  $H$  como uma reflexão de Householder escrita na forma

$$H = I - \gamma ww^T \quad \text{Com } \gamma = 2/\|w\|_2^2 \quad \text{em que } w \text{ é um vector a determinar. Então,}$$

$$Ha = (I - \gamma ww^T)a = a - \gamma(w^T a)w = \beta e_1 \quad (2.14)$$

onde  $\beta = \pm \|a\|_2$ .



De (2.14) temos que  $\gamma(w^T a)w = a - \beta e_1$ . Daí que  $w$  tem a direcção do vector  $a - \beta e_1$ , o que nos permite tomar  $w = a - \beta e_1$  e, portanto,  $\|w\|_2^2 = w^T w = 2(\|a\|_2^2 - \beta a_{21})$

e também  $\gamma = (\|a\|_2^2 - \beta a_{21})^{-1}$  tomando  $\beta = -\text{sign}(a_{21})\|a\|_2$ , temos que  $\gamma = (\|a\|_2^2 + |a_{21}|\|a\|_2)^{-1}$ .

Uma vez calculados  $w$  e  $\gamma$ , a reflexão de Householder fica determinada.

$$\begin{aligned}\bar{B} &= HBH = (I - \gamma ww^T)B(I - \gamma ww^T) \\ &= (I - \gamma ww^T)(B - \gamma Bww^T) \\ &= B - \gamma Bww^T - \gamma ww^T B + \gamma^2 ww^T Bww^T\end{aligned}\tag{2.15}$$

introduzindo um vector auxiliar  $b = \gamma Bw$  obteremos:

$$\bar{B} = B - bw^T - wb^T + \gamma(w^T b)ww^T$$

No entanto, Wilkinson mostrou que se podia fazer ainda melhor. De facto, conforme facilmente se pode deduzir,

$$\bar{B} = B - \left(b - \frac{\gamma}{2} w(w^T b)\right)w^T - w\left(b - \frac{\gamma}{2} w(w^T b)\right)^T$$

Pondo

$$q = b - w(\gamma w^T b)/2$$

vem que

$\bar{B} = B - qw^T - wq^T$  o cálculo de  $\bar{B}$  por meio desta fórmula requer apenas  $O(n^2)$  operações aritméticas, o que representa um ganho apreciável relativamente ao cálculo pelo simples produto de matrizes.

Uma vez tridiagonalizada a primeira linha e a primeira coluna, podemos prosseguir considerando agora apenas a matriz  $\bar{B}$ . Podemos levar a cabo a tridiagonalização completa da matriz  $A$  com  $n - 2$  reflexões de Householder. Introduzamos a notação  $A^{(k)}$  para designar as sucessivas matrizes transformadas, e  $P^{(k)}$ ,  $H^{(k)}$ , transformações de Householder, e convencionemos que  $A^{(0)} = A$  e  $A^{(1)} = \bar{A}$ . Particionemos esta última matriz da seguinte forma

$$A^{(1)} = \bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0^T \\ \beta_1 & \alpha_2 & a_2^T \\ 0 & a_2 & B \end{pmatrix}$$

e a segunda reflexão de Householder em conformidade

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^T \\ 0 & 1 & 0^T \\ 0 & 0 & H_2 \end{pmatrix}$$

efectuando as multiplicações necessárias, chega-se, sem dificuldade, a

$$A^{(2)} = P^{(2)} A^{(1)} P^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0^T \\ \beta_1 & \alpha_2 & a_2^T H_2 \\ 0 & H_2 a_2 & H_2 B H_2 \end{pmatrix}.$$

Como se pode verificar os zeros criados na primeira linha e na primeira coluna matem-se inalterados. Para tridiagonalizar em segunda linha e segunda coluna basta escolher um vector  $H_2$  de modo a que  $H_2 a_2 = \beta_2 e_2$  recorrendo a processo em tudo idêntico ao utilizado anteriormente. Ao fim de  $n-2$  reflexões obteremos uma matriz tridiagonal simétrica. A reflexão de Householder  $H^{(k)}$  é definida pelo vector  $w^{(k)}$  cujas primeiras componentes são nulas, e, como tal, não precisam ser armazenadas. As  $n-k$  componentes não nulas de  $w^{(k)}$  podem ir ocupar um dos triângulos da matriz  $A$  desde que optemos por criar um espaço adicional para a diagonal  $\alpha_k$  e para a codiagonal  $\beta_k$ . Ainda sobram as posições da diagonal de  $A$  que podem ser usadas para guardar os valores de  $\|w^{(k)}\|_2$  evitando de os recalculer mais tarde.

### 2.6.3 – Valores próprios de matrizes tridiagonais simétricas

Denotemos as matrizes reais tridiagonais simétricas de ordem  $n$  por

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\det T_n = \alpha_n \det T_{n-1} - \beta_{n-1}^2 \det T_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

em que por convenção fazemos  $\det T_0 = 1$ .

Designando o polinómio característico de  $T_n$  por  $p_n$ , obtemos a partir de (2.16) que

$$p_n(\lambda) = (\lambda - \alpha_n)p_{n-1}(\lambda) - \beta_{n-1}^2 p_{n-2}(\lambda), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

e onde também por convenção fazemos  $p_0(\lambda) = 1$ . O cálculo de  $p_n$  para  $\lambda$  dado precisa de  $O(5n)$  flops (ou  $O(4n)$ , se acharmos conveniente calcular previamente o quadrado dos  $\beta_i$ ). Este método é perfeitamente razoável, pelo que é legítimo encarar as hipóteses de obter os valores próprios de  $T_n$  através dos métodos de resolução de equações lineares. Acresce ainda que a sucessão dos polinómios  $p_0, p_1, \dots, p_n$  goza de propriedades notáveis que podem ser exploradas para facilitar a pesquisa dos zeros de  $p_n$ . Vamos estudar alguma delas.

**Teorema 2.3** Seja  $T_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz tridiagonal simétrica cujos elementos não diagonais  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  são todos diferentes de zero. Então o seu polinómio característico tem  $n$  zeros reais simples, e  $T_n$  possui, portanto  $n$  valores próprios reais distintos. Além disso, os zeros de  $p_k$  separam os de  $p_{k+1}$ , para  $1 \leq k \leq n-1$ .

**Demonstração** Designemos os zeros de  $p_k$  por  $\lambda_i^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Decorre do facto de  $T_n$  ser uma matriz real e simétrica que esses valores próprios são reais.

Consideremos os  $\lambda_i^{(k)}$  ordenados de modo que  $\lambda_1^{(k)} \geq \lambda_2^{(k)} \geq \dots \geq \lambda_k^{(k)}$ . O resto da demonstração vai ser por indução em  $k$ .

Para  $k = 1$  e  $k = 2$  temos simplesmente que

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \lambda - \alpha_1 \\ p_2(\lambda) &= (\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_1) - \beta_1^2 \end{aligned}$$

donde se tira que

$$\lambda_1^{(1)} = \alpha_1, \quad p_2(\lambda_1^{(1)}) = -\beta_1^2$$

Por outro lado,  $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \dots$ , o que implica que  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} p_2(\lambda) \rightarrow +\infty$  e, portanto, um dos zeros de  $p_2$  tem de estar à esquerda de  $\lambda_1^{(1)}$ , e o outro à direita conforme a Figura 1.4.2 a expõe. Para estes  $k$  o teorema é verdadeiro. Suponhamos agora que o teorema é verdadeiro para ordem  $k$  qualquer, e mostrar que continua valido para a ordem  $k+1$ .

Fazendo  $n = k+1$  em (1.4.5), obtemos a seguinte expressão

$$p_{k+1}(\lambda_i^{(k)}) = (\lambda_i^{(k)} - \alpha_{k+1}) p_k(\lambda_i^{(k)}) - \beta_k^2 p_{k-1}(\lambda_i^{(k)}) \quad (2.18)$$

$$p_{k+1}(\lambda_i^{(k)}) = -\beta_k^2 p_{k-1}(\lambda_i^{(k)}) \neq 0 \quad (2.19)$$

Esta ultima expressão mostra que num de  $p_k$  os polinómios ‘adjacentes’ assumem valores de sinais contrários.

Também de (2.19) decorre que

$$p_{k-1}(\lambda_{i-1}^{(k)}) = -\beta_k^2 p_{k-1}(\lambda_{i-1}^{(k)}) \neq 0$$

Como por hipótese da indução  $p_{k-1}$  tem um só zero entre  $\lambda_{i-1}^{(k)}$  e  $\lambda_i^{(k)}$ , o sinal de  $p_{k-1}$  em  $\lambda_i^{(k)}$  tem de ser diferente do sinal em  $\lambda_{i-1}^{(k)}$ . Concluimos assim, que

$$\text{sign} p_{k+1}(\lambda_i^{(k)}) = -\text{sign} p_{k+1}(\lambda_{i-1}^{(k)}) \neq 0 \quad (1.4.8)$$

a expressão acima implica que  $p_{k+1}$  tem em cada intervalo  $(\lambda_i^{(k)}, \lambda_{i-1}^{(k)})$  um numero ímpar de zeros. Os intervalos  $(\lambda_k^{(k)}, +\infty)$  e  $(-\infty, \lambda_k^{(k)})$  precisam de um tratamento específico. Começando pelo primeiro, resulta de (1.4.7) que também  $p_{k+1}(\lambda_1^{(k)}) = -\beta_k^2 p_{k-1}(\lambda_1^{(k)}) \neq 0$ .

Por outro lado sendo  $p_{k-1}$  e  $p_k$  polinómios mónicos tendem ambos para  $v$ . O que quer dizer que para  $\lambda$  suficientemente grande assumem o mesmo sinal, positivo. Como  $\lambda_1^{(k)}$  está à direita de  $\lambda_1^{(k-1)}$ ,  $p_{k-1}(\lambda_1^{(k)})$  só pode ser positivo e  $p_{k+1}(\lambda_1^{(k-1)})$  terá de ser negativo, e consequentemente,  $p_{k+1}$  há-de mudar de sinal  $v$  o intervalo  $(\lambda_k^{(k)}, +\infty)$  raciocinando de modo análogo se pode concluir que o mesmo se sucede em  $(-\infty, \lambda_k^{(k)})$ .

Resumidamente, podemos afirmar que o polinómio  $p_{k+1}$  possui um número de zeros ímpar nos intervalos:  $(-\infty, \lambda_k^{(k)})$ ,  $(\lambda_i^{(k)}, \lambda_{i-1}^{(k)})$ ,  $(i = k, k-1, \dots, 2)$  e  $(\lambda_1^{(k)}, +\infty)$ . Como  $p_{k+1}$  é um polinómio de grau  $k+1$  e o número destes intervalos é também  $k+1$ , então o número de zeros de cada um destes intervalos só pode ser exactamente um.

**Teorema 2.4** O número de vectores próprios de uma matriz real simétrica tridiagonal  $T_n$  no intervalo  $[a, b]$  (limitado ou ilimitado) é dado por  $m = V(a) - V(b)$ , em que  $V(x)$  designa o numero de variações de sinal das sucessões  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ .

**Demonstração** consideremos a função  $V(x)$  quando a variável  $x$  percorre a recta real de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Como os polinómios  $p_k$  são funções contínuas,  $V$  só muda de sinal quando e so quando  $x$  passa por um dos zeros de alguns destes polinómios. Ora,  $p_0 = 1$ , portanto, nunca muda de sinal, pelo que concentraremos apenas nas sucessões  $p_1(x), \dots, p_n(x)$ . Seja  $z$

um zero de qualquer destes polinómios ‘interiores’  $p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ , e depois, caso em que  $z$  é um zero de  $p_n$ . Denotemos por  $h > 0$  um valor suficientemente pequeno.

$z$  é um zero de  $p_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ . Um momento de atenção mostra que só são possíveis as seguintes configurações de sinais:

$x$	$p_{k+1}(x)$	$p_k(x)$	$p_{k-1}(x)$	$p_{k+1}(x)$	$p_k(x)$	$p_{k-1}(x)$
$z-h$	+	$\pm$	-	-	$\pm$	+
$z$	+	0	-	-	0	+
$z+h$	+	$\mp$	-	-	$\mp$	+

Como se pode verificar,  $V$  não se altera quando  $x$  passa por qualquer dos zeros dos polinómios interiores.

$z$  é um zero de  $p_n$ . Agora as configurações de sinais possíveis são:

$x$	$p_n(x)$		$p_n(x)$	
	$p_{n-1}(x)$		$p_{n-1}(x)$	
$z-h$	-	+	+	-
$z$	0	+	0	-
$z+h$	+	+	-	-

Desta feita, o número  $V$  de variações sofre um decréscimo de uma unidade.

Resumidamente,  $V(x)$  sofre uma diminuição de uma unidade quando e so quando  $x$  passa por um dos zeros de  $p_n$ . Como  $V(+\infty) = 0$  resulta que  $V(a)$  é igual ao numero de zeros de  $p_n$  superiores a  $a$ . Daqui se infere imediatamente que  $m = V(b) - V(a)$  dá o número de zeros de  $p_n$  no intervalo  $[a, b]$  e, portanto, também o numero de valores próprios de  $T_n$  neste mesmo intervalo.

**Exemplo 2.4** Determinar quantos valores próprios da matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

estão contidos no intervalo  $[0, 2]$ .

Formado as sucessão de polinómios  $p_0, p_1, \dots, p_4$  de acordo com a expressão (2.19) para  $\lambda = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 1 \\ p_1(0) &= 0 - 1 = -1 \\ p_2(0) &= (0 - 2) \times (-1) - 1 \times 1 = 1 \\ p_3(0) &= (0 - 2) \times 1 - 1 \times (-1) = -1 \\ p_4(x) &= (0 - 4) \times (-1) - 1 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

Logo  $V(0) = 4$ , ou seja, a matriz  $T$  tem todos os valores próprios maiores do que zero.

Repetindo os cálculos para  $\lambda = 2$ , chegamos agora a

$$\begin{aligned} p_0(2) &= 1 \\ p_1(2) &= 2 - 1 = 1 \\ p_2(2) &= (2 - 2) \times 1 - 1 \times 1 = -1 \\ p_3(2) &= (2 - 2) \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 \\ p_4(2) &= (2 - 4) \times (-1) - 1 \times (-1) = 2 \end{aligned}$$

pelo que  $V(2) = 2$ . Como  $V(0) - V(2) = 2$  concluímos que a matriz possui exactamente dois valores próprios no intervalo  $[0, 2]$ .

O Teorema 2.4 proporciona a base para uma aplicação inteligente do método da bissecção à determinação de todos os valores próprios de  $T_n$  contidos num intervalo  $[a, b]$  dado. Calculemos  $m = V(b) - V(a)$ . Se  $m = 0$  não há valores próprios nesse intervalo, e se  $m = 1$  existe apenas um, que podemos localizar tão bem quanto quisermos por bissecções sucessivas no intervalo inicial. Se  $m > 1$ , então também por bissecções sucessivas podemos ir determinando intervalos cada vez mais pequenos que contenham apenas um valor próprio, e proceder como anteriormente.

**Exemplo 2.5** Usar o método da bissecção para isolar todos os valores próprios da matriz do exemplo anterior no intervalo  $[0, 2]$ .

Bissectando o intervalo  $[0, 2]$ , construímos dois subintervalos  $[0, 1]$  e  $[1, 2]$ . Como

$$\begin{aligned} p_0(1) &= 1 \\ p_1(1) &= 1 - 1 = 0 \\ p_2(1) &= (1 - 2) \times 0 - 1 \times 1 = -1 \\ p_3(2) &= (1 - 2) \times (-1) - 1 \times (0) = 1 \\ p_4(2) &= (1 - 4) \times 1 - 1 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

Resulta que  $V(1) = 3$  e, por conseguinte,  $V(0) - V(1) = 1$ . Então podemos concluir que existe um valor próprio no intervalo  $[0, 1]$ , e outro, no intervalo  $[1, 2]$ . Bissectando cada um destes intervalos tantas vezes quantas as necessárias, conseguiremos uma localização dos valores próprios tão boa quanto for preciso.

#### 2.6.4 – Vectores próprios de matrizes tridiagonais

Uma vez calculado um valor próprio da matriz tridiagonal  $T$ , utilizando qualquer dos métodos acabados de referir, o vector próprio associado, por definição satisfaz o sistema de equações lineares

$$(T - \lambda I)x = 0$$

o qual, equivale às relações

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \lambda)x_1 + \beta_1 x_2 &= 0 \\ \beta_{i-1}x_{i-1} + (\alpha_i - \lambda)x_i + \beta_{i+1}x_{i+1} &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ \beta_{n-1}x_{n-1} + (\alpha_n - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

A componente  $x_1 \neq 0$ . Assim, uma vez que  $x_1 \neq 0$ , podemos optar por fazer  $x_1 = 1$  tirando partido do facto de que um vector próprio é definido a menos de uma constante multiplicativa. Por substituições descendentes no sistema (1.4.9), obtemos as restantes componentes  $x_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Um processo idêntico podia ser adoptado para  $x_n$  em vez de  $x_1$ .

Embora tenhamos citado por serem, sem dúvida, os que pareceriam mais naturais, detecta-se na prática que qualquer destes métodos é instável, fornecendo vectores muito afastados dos vectores próprios exactos.

Um método alternativo que não sofre deste inconveniente é o método das potências inversas, que neste caso se resume a determinar iterativamente o vector próprio  $x$  através de

$$(T - \lambda I)x^{(k+1)} = x^k, \quad k = 0, 1, \dots \text{ partindo de uma estimativa inicial apropriada. A}$$

factorização de  $T - \lambda I$  é fácil, já que se trata de uma matriz tridiagonal. No entanto, esta

matriz é, de facto, singular, o que significa que em aritmética de ponto flutuante aparecerá como mal condicionada sendo por isso imperativo proceder à escolha de pivot.

Para terminar, recordamos que, após a obtenção de vectores próprios de  $T$ , é ainda necessário recuperar os vectores próprios da matriz original  $A$  desfazendo a transformação de similaridade.



## Conclusão

É sempre bom chegar ao fim de um trabalho e ter a sensação de que foi missão cumprida, ou seja, os objectivos preconizados foram cumpridos.

Como foi dito na introdução, que o objectivo deste trabalho é aprofundar os conhecimentos adquiridos na disciplina curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica, pois com este trabalho conhecemos muitas propriedades dos valores próprios e alguns métodos utilizados na sua determinação, cada um mais eficaz que o outro, tendo em conta que cada método é mais eficaz para um certo tipo de matriz.

Ainda neste trabalho demonstrámos algumas das propriedades dos valores e vectores próprios, que não conseguiríamos demonstrar caso não tivéssemos conhecimento de alguns conceitos durante o curso.

Mas com a ajuda do Matlab, um software, podemos aplicar os métodos apresentados, ou alguns deles, e, conseqüentemente, resolver os problemas relativos à determinação dos valores e vectores próprios.

## Bibliografia

F.R., Dias Agudo. **Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica**. Lisboa. Escolar Editora. 1988.

G., Emília, F., Vítor & S. M. Paula Marques. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. Lisboa. Mc Graw Hill LTDA. 1995

L., Ph. D Seymour. **Álgebra Linear Teoria e problemas**. 3ª Edição revista e Ampliada. São Paulo. MC Graw Hill. 1994

P. G., António Monteiro & M. Catarina. **Álgebra Linear e Geometria Analítica, Problemas e Exercícios**. Lisboa. Schaum Mc Graw Hill LTDA. 1997

P., Heitor, **Métodos Numéricos**. Lisboa. Mc Graw – Hill. Lisboa. 1995.

R., José Alberto. **Métodos Numéricos**. Lisboa. Sílabo. 2003

<http://www.archive.orgquery>

<http://www.biopsychology.org>

<http://www.coc.ufrj.br>

<http://www.est.ipcb.pt>

<http://www.matematicas.unal.edu.co>

<http://www.sc.ehu.es>

<http://www.universia.com.br/mit>

# ANEXOS

### Problemas Resolvidos

1. Usando o teorema de Gershgorin, localize os valores próprios das matrizes

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

**Resolução:** Se  $A \in C^{n \times n}$   $\sigma(A) \in \zeta(A)$ , sendo  $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ , existe um círculo de

Gershgorin centrado em 1 e raio 3,  $\zeta_1(1,3) \Rightarrow |\lambda - 1| \leq 3$ , e dois círculos centrados em 2, isto é

$$\zeta_2(2,3) \Rightarrow |\lambda - 2| \leq 3$$

$$\zeta_3(2,6) \Rightarrow |\lambda - 2| \leq 6$$

dado que estes círculos não são disjuntos existem três valores próprios para a matriz  $A$ . O que quer dizer que os valores próprios estão localizados círculo centrado em 2 e raio igual a 6,  $\zeta_3(2,6)$ .

Usando as mesmas definições para  $B$  temos três círculos de Gershgorin,

$$\zeta_1(-4,2) \Rightarrow |\lambda + 4| \leq 2$$

$$\zeta_2(1,1) \Rightarrow |\lambda - 1| \leq 1 \quad \text{donde se pode concluir que existe um valor próprio em } \zeta_1(-4,2) \text{ e as}$$

$$\zeta_3(3,4) \Rightarrow |\lambda - 3| \leq 4$$

dois restantes valores próprios estão contidos em  $\zeta_3(3,4)$ .

2. Seja a matriz  $B$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Quantos valores próprios positivos tem a matriz  $B$ ?

**Resolução:** a) sendo  $B$  uma matriz tridiagonal simétrica os seus valores próprios são reais. Verifiquemos se existem zeros, por exemplo, no intervalo  $[-1, 0]$

$$\begin{array}{ll} p_0(-1) = 1 & p_0(0) = 1 \\ p_1(-1) = -1 - 2 = -3 & p_1(0) = 0 - 2 = -2 \\ p_2(-1) = -3(-1 - 1) - 1^2 = 5 & p_2(0) = -2(-1) - 1 = 1 \\ p_3(-1) = 5(-1 - 1) - (-1)^2(-3) = -7 \text{ e } p_3(0) = 1(-1) - (-1)^2(-2) = 1 \\ p_4(-1) = -7(-1 - 4) - 2^2 * 5 = 15 & p_4(0) = 1(-4) - 2^2 = -8 \\ V(-1) = 4 & V(0) = 3 \\ & V(0) = V(-1) - V(0) = 1 \end{array}$$

Pelo teorema de Gershgorin temos quatro círculos, donde se pode concluir que temos 3 valores próprios são positivos.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Utilize o método das potências directas para aproximar os valores e os vectores próprios de  $A$ .

**Resolução:** Seja um vector como aproximação inicial, por exemplo,

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Calculemos: } x^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}, \text{ pelo mesmo processo,}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 84 \\ 94 \\ 78 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 680 \\ 716 \\ 652 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 5456 \\ 5592 \\ 5336 \end{bmatrix}$$

Determinemos o valor próprio de maior valor absoluto:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|x^{(3)}\|}{\|x^{(2)}\|} \approx \sqrt{\frac{5456^2 + 5592^2 + 5336^2}{680^2 + 716^2 + 652^2}} \approx \frac{9461.04}{1183.28} \approx 8.0,$$

Aproximemos o vector próprio,

$$x_1 \approx \frac{x^{(3)}}{\|x^{(3)}\|} \approx \frac{1}{5456^2 + 5592^2 + 5336^2} \begin{bmatrix} 5456 \\ 5592 \\ 5336 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.59 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

4. Mostre que, se a matriz  $A$  é diagonalizável, então existe uma matriz  $P$  tal que  $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal.

**Resolução:** se  $A$  é diagonalizável, uma matriz regular  $Q$  tal que  $D = Q^{-1}AQ$ , e  $D$  é uma matriz diagonal. Multiplicando à esquerda de cada termo por  $Q$  e à direita por  $Q^{-1}$  obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} D &= Q^{-1}AQ \Leftrightarrow QDQ^{-1} = QQ^{-1}AQQ^{-1} \\ &\Leftrightarrow QDQ^{-1} = IAI \Leftrightarrow A = QDQ^{-1} \end{aligned}$$

elevando  $A$  à potencia de ordem  $n$  temos

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{(QDQ^{-1})^n}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(QDQ^{-1})(QDQ^{-1}) \dots (QDQ^{-1})(QDQ^{-1})}_{n \text{ factores}} \\ &= QD(Q^{-1}Q)DQ^{-1} \dots QD(Q^{-1}Q)DQ^{-1} = \underbrace{QDD \dots QDDQ^{-1}}_{n \text{ factores}} \end{aligned}$$

resultando, assim  $A^n = QD^n Q^{-1}$ , substituindo  $Q$  por  $P$  e  $D$  por  $\Lambda$  obteremos  $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ .

5. Considere a matriz conhecida, quadrada de ordem  $n$ , com  $n$  valores próprios distintos. Considere a equação matricial  $AZ = ZA$ .

- Supondo que  $x$  é um vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ , mostre que  $Zx$  é também um vector próprio de  $A$  associado ao mesmo valor próprio.
- Prove que  $x$  é também vector próprio de  $Z$ .

**Resolução:**

- Pretende-se mostrar que  $(A - \lambda I)Zx = 0$  sabendo que  $(A - \lambda I)x = 0$ .

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)Zx &= AZx - \lambda Zx \\ &= ZAx - Z(\lambda x) \\ &= Z(Ax - \lambda x) \\ &= Z(A - \lambda I)x = 0 \end{aligned}$$

b) Sabemos  $(A - \lambda I)Zx = 0$  e que  $(A - \lambda I)x = 0$  por a). Subtraindo a primeira da segunda equação obtém-se:

$$\begin{aligned} Z(A - \lambda I)x - (A - \lambda I)x &= 0 \\ \Leftrightarrow (A - \lambda I)(Zx - x) &= 0 \end{aligned}$$

Note-se que a matriz tem  $n$  valores próprios distintos o que implica que os subespaços próprios têm dimensão 1. O subespaço associado ao valor próprio  $\lambda$  terá como base um único elemento: dado que  $x$  é um vector próprio associado a  $\lambda$  poderemos tomar aquele como base do subespaço próprio. Ora, a equação  $(A - \lambda I)(Zx - x) = 0$  mostra que  $(Zx - x)$  é um vector próprio associado a  $\lambda$  e, portanto, pertencerá ao subespaço próprio respectivo.

Este subespaço próprio tem como base  $\{x\}$  logo  $\exists \alpha \in \mathbb{C} : Zx - x = \alpha x$ .

Reescrevendo esta última expressão temos:

$$\begin{aligned} Zx - x &= \alpha x \\ \Leftrightarrow Zx - x - \alpha x &= 0 \\ \Leftrightarrow (Z - (I + \alpha))x &= 0 \end{aligned}$$

Concluimos assim que  $x$  é vector próprio de  $Z$  associado ao valor próprio  $1 + \alpha$ .

### Algoritmos utilizados no cálculo de valores e vectores próprios

#### Algoritmo (método das potências directas)

Inicialização:

Escolher  $x^{(0)}$  tal que:  $\|x^{(0)}\|_2 = 1$ , e  $a_1 \neq 0$

Estipular uma tolerância  $\tau$

$$y^{(1)} = Ax^{(0)}$$

para  $m = 1, 2, \dots$  fazer:

$$x^{(m)} = y^{(m)} / \|y^{(m)}\|_2$$

$$y^{(m+1)} = Ax^{(m)}$$

$$\lambda^{(m)} = (x^{(m)})^H y^{(m+1)}$$

fim do ciclo  $m$ :

$$\text{terminar quando } |\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}| < \tau |\lambda^{(m)}|$$

### Algoritmo (Iterações ortogonais)

Inicialização:

Escolher  $Q^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $p \leq n$

com colunas ortonormadas

Estipular uma tolerância  $\tau$

para  $m = 1, 2, \dots$  fazer:

$$Q^{(m)} R^{(m)} = Y^{(m)} \quad (\text{Gram-Schmidt})$$

fim do ciclo  $m$ :

$$\text{terminar quando } \|R^{(m)} - R^{(m-1)}\|_{\infty} < \tau \|R^{(m)}\|_{\infty}$$

#### MÉTODO DAS POTÊNCIAS

$$\mathbf{v}_0 \text{ (dado); } \quad \mathbf{v}_k = S_{p+1}^k \mathbf{v}_0 = S_{p+1} \mathbf{v}_{k-1}, \quad k > 0$$

$$\left| \lambda_{p+1}^{(k)} \right| = \frac{\|\mathbf{v}_k\|}{\|\mathbf{v}_{k-1}\|}; \quad \left( \frac{\alpha_{p+1} \mathbf{x}_{p+1}}{\|\alpha_{p+1} \mathbf{x}_{p+1}\|} \right)^{(k)} = \frac{S_{p+1}^k \mathbf{v}}{\|S_{p+1}^k \mathbf{v}\|}$$



Vvprop()

```

(aa)                                aa é uma matriz simétrica
Prgm
Local nv,c,nd,ww,11,vv,it
Local stvv,sit,lvv

dim(aa)[1]-nd                        determinação da dimensão da matriz

newList(nd)-11:newList(nd)-1vv
newMat(nd,1)-ww
newMat(nd,1)-vv
0-nv
ClrIO:ClrHome

Lbl e0
ToolBar
Title "Dados"
Item "vector inicial",d1
Title "iterar",e1
Title "Resultado",e2
Title "Terminar",f1
EndTBar

@Dados
Lbl d1
ClrIO:ClrHome
Request "vector inicial",stvv
{"&stvv&"}-stvv: expr(stvv)-1vv
list*mat(lvv,1)-vv
0-it

If nv > 0 Then                        construção de  $S_p$ 
  For i,1,nd
  For j,1,nd
  aa[i,j]-11[nv]*ww[i,1]*ww[j,1]-aa[i,j]
  Endfor
  EndFor
EndIf
nv+1-nv
Goto e0

Lbl e1                                iterações
it+1-it
vv-ww

aa*vv-vv

string(it)-sit
"S"&sit&"v="&string(mat*list(vv))-sit
Disp sit

Goto e0

Lbl e2
1-c
0-i
While c>0 and i<nd
  i+1-i
  c*vv[i,1]*ww[i,1]-c
EndWhile                                Estudo do sinal das componentes
                                          das iterações sucessivas

approx(norm(vv))-r                       Calculo da norma euclidiana

approx(r/norm(ww))-11[nv]               Calculo da aproximação de  $\lambda_p$ 

approx(1/r)*vv-ww                       Calculo da aproximação de  $x_p$ 

```



```
If c<0 Then
ll[nv]*(0-1)→ll[nv]
((0-1)^it)*ww→ww
EndIf

string(nv)→sit
Disp ">> "&sit&". "
"val p:"&string(ll[nv])→sit
Disp sit
"vec p:"&string(mat▶list(ww))→sit
Disp sit
0→it
Goto e0

Lbl f1
EndPrgm
```



