

NACIONES UNIDAS

CONSEJO
ECONOMICO
Y SOCIAL

LIMITADO

CLADES/WG.1/L.9

Sólo para los participantes

11 de agosto de 1971

ORIGINAL: ESPAÑOL

COMISION ECONOMICA PARA AMERICA LATINA

REUNION SOBRE TECNICAS MODERNAS DE
DOCUMENTACION

Santiago de Chile, 27 al 30 de septiembre de 1971

RESERVORIOS DE CONOCIMIENTOS TEORICOS EN SOCIOLOGIA
POR METODOS LOGICOS

Por Raúl A. Hernández, Nélide Archenti y Luis Aznar *

* El señor Raúl A. Hernández es Director del Departamento de Sociología de la Fundación Bariloche, San Carlos de Bariloche, Argentina. Los otros dos autores pertenecen también al mismo Departamento.

71-8-2164

13 MAY 1971

RESERVORIOS DE CONOCIMIENTOS TEORICOS EN SOCIOLOGIA POR METODOS LOGICOS

Raúl A. Hernández - Nélide Archenti - Luis Aznar

Departamento de Sociología
Fundación Bariloche

Podemos definir un espacio clasificatorio de las formas de construcción de teorías. Los tres conjuntos que componen este espacio son: 1) actores (A)(uno-varios), 2) características de los actores (C)(una-varias) y 3) tiempo (T)(sincronismo-diacronismo).

En las corrientes sociológicas actuales, desde una perspectiva semántica, el significado de cada uno de estos tres conjuntos sería: 1) actores definiendo un sistema de interacción múltiple, 2) características de finidas como principios de estratificación de los actores en interacción, y desequilibrios entre estas características como definatorios de la configuración de cada actor, y 3) el tiempo de interacción, traducible sociológicamente como funciones de aprendizaje, y por las consecuencias de este aprendizaje en las políticas de los actores.

En grandes líneas podemos decir que construir teoría consiste en la organización sintáctica de los elementos que componen los tres conjuntos mencionados. En tal caso, el trabajo que nos demanda la construcción de un reservorio de proposiciones teóricas, consiste sustancialmente en: 1) de

finir los elementos componentes de A, C y T, y 2) definir un conjunto finito de conectivos para vincular a los elementos componentes de tales conjuntos. Además, y como consecuencia lógica de estos dos puntos, registrar circuitos de conexiones entre los elementos de A, C y T .

Evidentemente, las computadoras electrónicas facilitan los requerimientos de los puntos 1 y 2, al disponer de variables lógicas definibles y de las operaciones lógicas básicas.

Los sistemas de conectivos interesan en dos aspectos: 1) en cuanto facilitan un reservorio de informaciones teóricas codificadas y 2) como herramientas de análisis teórico de los datos. Los sistemas de conectivos a utilizar, son:

1. Lógica proposicional, permite deducir nuevas proposiciones de las proposiciones ya almacenadas y señalar las contradicciones que pueden existir entre dos o más trozos de teoría. De este modo abre nuevos campos de discusión teórica.
2. Sistemas booleanos, para almacenar información relativa a sistemas causales, y para la busca de expresiones mínimas.
3. Lógica cuantificacional, la cual facilita proposiciones con sentido de generalidad y existencia. En este punto no omitimos, por cierto, a la lógica relacional.

En este artículo presentamos los fundamentos lógicos para la programación de un reservorio de conocimientos teóricos, sobre la base de sistemas proposicionales.

Teoremas básicos

Considerando $a_1, \dots, a_k \in \{1,0\}$, tendremos que para un argumento cualquiera X_i , será:

$$x_i^{a_i} = 1 \iff x_i = a_i$$

$$x_i^{a_i} = 0 \iff x_i \neq a_i$$

de modo que la conjunción

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k} = 1$$

si sólo y sólo si

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_k = a_k$$

Teorema 1 : Toda función en el álgebra de la lógica puede ser representada en la forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = \bigvee_{a_1 \dots a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k} \cdot f(a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \quad (1)$$

para $(m \geq 1)$

donde el símbolo \bigvee indica que hay que realizar todas las disyunciones correspondientes a todos los a_1, a_2, \dots, a_k .

Este modo de representar la función se denomina expansión de una función con respecto a k variables. En el caso de expandir una función de una sola variable x_1 , tendríamos

$$f(x_1) = x_1(1) \vee \bar{x}_1(0)$$

Demostración

Consideraremos que a_1, \dots, a_k son valores arbitrarios. Haciendo $X_1 = a_1, \dots, X_k = a_k$, tendremos

$$f(a_1, \dots, a_k, X_{k+1}, \dots, X_m) = C_1 f(a_1, \dots, a_k, X_{k+1}, \dots, X_m)$$

.....

$$C_{2^k} f(a_1, \dots, a_k, X_{k+1}, \dots, X_m)$$

Donde C_1, \dots, C_{2^k} son las 2^k conjunciones que pueden formar $X_1^{a_1}, \dots, X_k^{a_k}$. Como de todas estas conjunciones sólo una puede ser igual a la unidad y sólo cuando $X_1 = a_1, \dots, X_k = a_k$, entonces

$$f(a_1, \dots, a_k, X_{k+1}, \dots, X_m) = f(a_1, \dots, a_k, X_{k+1}, \dots, X_m)$$

con lo cual queda demostrado el problema.

Teorema 2 : Toda función en el álgebra de la lógica puede ser expresada mediante conjunciones, disyunciones y negaciones.

Demostración. Si en la ecuación (1) hacemos $k = m$, obtenemos:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_m) = \bigvee_{a_1, \dots, a_m} X_1^{a_1} \dots X_m^{a_m} f(a_1, \dots, a_m)$$

pero ocurre que $f(a_1, \dots, a_m)$ puede valer solamente 0 o 1, razón por la cual resulta suficiente calcular las disyunciones de X_1, \dots, X_m en donde $f(a_1, \dots, a_m) = 1$; resultando entonces:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \bigvee_{f(a_1, \dots, a_m) = 1} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \quad (2)$$

Veamos este ejemplo:

Tabla I.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	1

De acuerdo con (2):

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \quad (3)$$

Más adelante veremos que el algoritmo que se presenta se basa en el principio de traducir todos los conectivos lógicos a conjunciones, disyunciones y negaciones.

Diremos que las ecuaciones (2) y (3) corresponden a la "forma disyuntiva normal".

Enunciamos ahora las dos formas más generales de la ley de de Morgan:

$$\overline{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n \quad (4)$$

$$\overline{(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n \quad (4')$$

Con el enunciado de la ley de de Morgan podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3 : Toda función del álgebra de la lógica en forma disyuntiva normal tiene como equivalente una forma conjuntiva normal. En tal caso sería cierto que:

$$f(X_1, X_2, X_3) = \bigwedge_{a_1, \dots, a_n}^i \left[(X_1^{a_1^i} \vee \dots \vee X_n^{a_n^i}) + f(a_1^{-i}, \dots, a_n^{-i}) \right] \quad (5)$$

siendo $i \in \{1, 0\}$ tal que $(X) (X^{a^i} \neq X^{a^{-i}})$ indicando el símbolo \bigwedge el producto para todas las disyunciones que forman a_1, \dots, a_n .

En (5) dentro de cada uno de los corchetes el segundo término entre paréntesis valdría 1 toda vez que $a_1^{-i} = X_1, \dots, a_n^{-i} = X_n$. Siendo entonces en tales casos $f(a_1^{-i}, \dots, a_n^{-i}) = 1$ y al ser $(X) (X+1 = 1)$, el término completo entre corchetes resulta igual a la unidad. Al ser $(X) (X.1 = 1)$ dichos términos resultarían irrelevantes en la expresión (5), por lo tanto:

$$f(X_1, \dots, X_n) = \bigwedge_{f(a_1^{-i}, \dots, a_n^{-i}) = 0}^i (X_1^{a_1^i} \vee X_2^{a_2^i} \vee \dots \vee X_n^{a_n^i}) \quad (6)$$

La igualdad es válida porque el producto de las disyunciones excluidas de (6) es igual a la negación de $f(X_1, \dots, X_n)$ de acuerdo con la ley de de Morgan; tomemos otra vez el ejemplo del cual resultó la ecuación (3).

Tabla II.

	x_1	x_2	x_3	∞	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
	\wedge	\wedge			\vee	\vee			
1	0	0	0	∞	1	1	1		1
2	1	0	0	∞	0	1	1	1	
3	0	1	0	∞	1	0	1	1	
4	1	1	0	∞	0	0	1		1
5	0	0	1	∞	1	1	0		1
6	1	0	1	∞	0	1	0	1	
7	0	1	1	∞	1	0	0		1
8	1	1	1	∞	0	0	0	1	

La forma del gráfico se explica por la ley de de Morgan. La primera fila, entonces:

$$(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) = \infty (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$$f_1 = (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3) \vee (x_1 \bar{x}_2 x_3) \vee (x_1 x_2 x_3)$$

$$f_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

Es fácilmente comprobable que f_1 (forma disyuntiva normal) y f_2 (forma conjuntiva normal) son equivalentes.

Propiedades de los productos de sumas.

Nos preocupamos por aquellos productos de sumas cuyos desarrollos no reproducen solo las premisas iniciales.

Refiriéndonos más cercanamente a los problemas del álgebra proposicional, nos preguntamos cuándo la unión de dos proposiciones permite generar otras proposiciones distintas de las que sirvieron de premisas. Para que este hecho se registre, deben darse dos condiciones: 1) que las dos proposiciones estén compuestas de los mismos elementos o juicios, afirmados o negados, y

2) que al formarse todos los pares posibles de los valores (V = verdadero, F = falso) de los juicios comunes a ambas proposiciones presenten una y sólo una inequivalencia. Resulta un tanto trivial probar la vigencia de estas dos condiciones.

Dentro de estas normas, veamos tres tipos de productos:

$$P 1) (X_1^a \vee \dots \vee X_n^a)(X_1^a \vee \dots \vee X_n^{\bar{a}})$$

de acuerdo con la propiedad distributiva de la disyunción sobre la conjunción:

$$(X_1^a \vee \dots \vee X_{n-1}^a) \vee (X_n^a X_n^{\bar{a}}) = (X_1^a \vee \dots \vee X_{n-1}^a) \quad \text{al ser}$$

$$X_n^a \cdot X_n^{\bar{a}} = 0$$

$$P 2) (X_1^a \vee \dots \vee X_n^{\bar{a}}) X_n^{\bar{a}} \quad \text{este producto puede expresarse así:}$$

$$(X_1^a \vee \dots \vee X_{n-1}^a) X_n^{\bar{a}} \vee X_n^a X_n^{\bar{a}} = (X_1^a \vee \dots \vee X_{n-1}^a) X_n^{\bar{a}}$$

$$P 3) (X_1^a \vee \dots \vee X_j^a \vee X_{j+1}^a \vee \dots \vee X_n^a \vee X_{n+1}^a)(X_{j+1}^a \vee \dots \vee X_n^a \vee X_{n+1}^{\bar{a}})$$

realizando este producto:

$$(X_1^a \vee \dots \vee X_j^a)(X_{j+1}^a \vee \dots \vee X_n^a) \vee (X_{j+1}^a \vee \dots \vee X_n^a) \vee (X_{j+1}^a \vee \dots \vee X_n^a) X_{n+1}^a \vee$$

$$(X_1^a \vee \dots \vee X_j^a) X_{n+1}^{\bar{a}} \vee (X_{j+1}^a \vee \dots \vee X_n^a) X_{n+1}^{\bar{a}} \vee X_{n+1}^a X_{n+1}^{\bar{a}} =$$

$$(X_{j+1}^a \vee \dots \vee X_n^a) \vee (X_1^a \vee \dots \vee X_j^a) X_{n+1}^{\bar{a}}$$

distribuyendo la suma en productos:

$$(X_1^{a_1} \vee \dots \vee X_j^{a_j} \vee X_{j+1}^{a_{j+1}} \vee \dots \vee X_n^{a_n})(X_{j+1}^{a_{j+1}} \vee \dots \vee X_n^{a_n} \vee \overline{X_{n+1}^{a_{n+1}}})$$

con lo cual reproducimos la segunda premisa y afirmamos los juicios

$X_1^{a_1}, \dots, X_n^{a_n}$ en sus verdades o falsedades.

Representación gráfica y algoritmo.

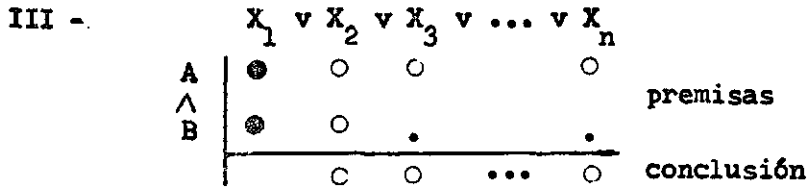
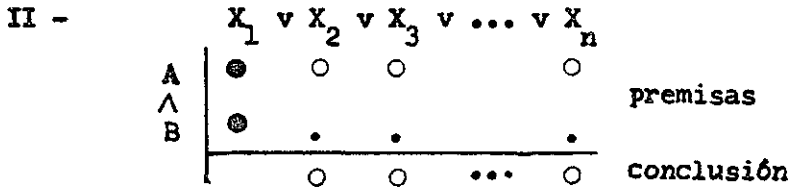
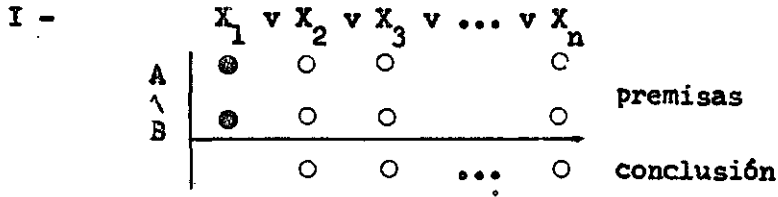
Sean X_1, \dots, X_n juicios que pueden ser predicados como verdaderos o falsos, por otra parte, A y B dos proposiciones que incluyen parcial o totalmente el conjunto citado de juicios, (pero sin llegar nunca a ser menor de 1 el número de juicios que figuran en ambas proposiciones).

Con estos dos ejes definimos una retícula en la cual se ubicarán en las filas las proposiciones A y B y en las columnas los atributos

X_1, X_2, \dots, X_n predicados de un colectivo cualquiera S. Se indicará con un círculo blanco cuando para un atributo cualquiera X_i se predicara que en las proposiciones A y B " X_i es en ambos casos verdadero (V)" o " X_i es en ambos casos falso (F)". Con un círculo en sombra se indicará cualquier forma de inequivalencia entre los predicados.

Con un punto en lugar del círculo se indicará que X_i no ha sido incluido en la proposición considerada.

Los tres ejemplos siguientes corresponden a las formas P 1, P 2 y P 3 de productos.



Analizando los tres gráficos puede observarse la similitud de los mecanismos utilizados en los distintos productos. Si consideramos, a efectos algorítmicos, que la equivalencia entre un juicio y un juicio no formulado (en ningún caso el opuesto de tal juicio) es verdadera, entonces, los tres productos responderán a un mismo mecanismo para los tres casos.

Quedan así definidas las bases del algoritmo computacional:

- 1 - Tomar todos los pares (P_i, P_j) , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$ de proposiciones con no más de una inequivalencia entre los predicados de un mismo atributo.
- 2 - Eliminar aquellos atributos con inequivalencias y afirmar todos aquellos con equivalencias en las comparaciones uno a uno.
- 3 - Definir todas las conclusiones como nuevas premisas.
- 4 - Repetir 1, 2 y 3 hasta que las conclusiones sean iguales a las premisas.

Queremos mostrar ahora el planteo del algoritmo en una computadora. Primeramente definimos una matriz de $(m \times n)$, siendo m el número máximo de proposiciones almacenadas y n el número de atributos, incluidos parcial o totalmente en las proposiciones. En cada celda $c(i, j)$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ almacenaríamos tres tipos de valores: 1) " X_i es verdadero (V)", 2) " X_j es falso (F)" y 3) "no se afirma que X_i sea verdadero o falso".

En todos los casos supondremos que $c(i, j)$ y $c(i, j+1)$ está implícito un símbolo de disyunción y entre $c(i, j)$ y $c(i+1, j)$ un símbolo de conjunción.

Veremos funcionar el algoritmo desarrollando las principales reglas de inferencia:

Nº	p	q	r	s	simplificación	reglas
1	F	V				Modus Ponens
2	V					$p \supset q$
3		V			1-2	p / q
1	F	V				Modus Tollens
2		F				$p \supset q$
3	F				1-2	\bar{q} / \bar{p}
1	F	V				Silogismo hipotético
2		F	V			$p \supset q$
3	F		V		1-2	$q \supset r / p \supset r$
1	V	V				Silogismo disyuntivo
2	F					$p \vee q$
3		V			1-2	\bar{p} / q
1	F	V				Dilema constructivo
2			F	V		$(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
3	V		V			$p \vee r / q \vee s$
4	V			V	2-3	
5		V		V	1-1	

Nº	p	q	r	s	Simpli- ficación	reglas
1	F	V				Dilema destructivo
2			F	V		$(p \supset q)(r \supset s)$
3		F		F		$\bar{q} \vee \bar{s} / \bar{p} \vee \bar{r}$
4	F			F	1-3	
5	F		F		4-2	

Ejemplo de teoría sociológica.

En Lewis Coser ("Las funciones del conflicto social", Fondo de Cultura Económica, México 1961, pág. 36) encontramos el siguiente texto:

"El conflicto fija las fronteras entre los grupos internos de un sistema social, robusteciendo la conciencia de grupo y el sentido de la distinción, con lo que se establece la identidad de los grupos dentro del sistema".

Unidades: Sistema social (X), grupos internos (a)

Variables: Conflicto (C), fronteras de grupos (F), conciencia de grupo (CG), identidad de grupo (I) .

Formalización:

$$1 - (X)(\exists a_i)(\exists a_j)(a_i C a_j \supset CG a_i, a_j)$$

$$2 - (X)(\exists a_i)(\exists a_j)(CG a_i, a_j \supset I a_i, a_j)$$

$$3 - (X)(\exists a_i)(\exists a_j)((CG a_i, a_j \wedge I a_i, a_j) \supset a_i F a_j)$$

eliminando los cuantificadores:

$$1 - C \supset CG$$

$$2 - CG \supset I$$

$$3 - (CG \wedge I) \supset F$$

N°	X_1	X_2	X_3	simpl.
1	V	V	V	
2	F	F	V	
3	V	V	F	
4	V	F	F	
5	V	V		1-3
6	V		F	3-4

La función resultante:

$$f_2 = (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_3) (X_1 \vee X_2) (X_1 \vee \bar{X}_3)$$

equivalente a la función inicial y a f_1

Sin duda una más eficiente forma de extraer conclusiones, que la que facilita este algoritmo, puede encontrarse por vía de los autómatas finitos, de lo cual, esperamos presentar en breve nuestras primeras conclusiones.

Al buscarse por estos procedimientos la existencia de leyes entre los datos e información teórica, no es fácil indicar el empleo de algoritmos computacionales para la deducción de fórmulas lógicas. Pueden resultar relativamente fáciles en la lógica proposicional, pero no en la cuantificacional. Un camino, en este sentido, es el diseño de autómatas capaces de aprender fórmulas mínimas, esto es, construir modelos lógicos.

Bibliografía:

- Irving Copi: "Symbolic Logic", Mc Millan 1970.
- N.E. Kobrinskii y B.A. Trakhtenbrot: "Introduction to the Theory of Finite Automata", North Holland, 1965.
- Hugo E. Scolnik: "Nociones sobre Algebra de Boole y Circuitos Lógicos", Fundación Bariloche, 1970.

Fundación Bariloche
Departamento de Sociología
Julio de 1971