

# Validación de la simulación numérica del flujo bifásico hidrodinámico en sistemas de lecho fluido

Irla Mantilla N<sup>1</sup>, Salome Gonzáles Ch<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, [irlamn@uni.edu.pe](mailto:irlamn@uni.edu.pe)

<sup>2</sup> Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Ingeniería, [salome@uni.edu.pe](mailto:salome@uni.edu.pe)

Recibido: 28-12-2014. Aceptado después de revisión: 23-08-2015.

**Resumen.** Este trabajo tiene como objetivo la mejora en la validación de la simulación numérica del flujo bifásico característico del transporte de lecho fluido, mediante la formulación y desarrollo de un modelo numérico combinado Volúmenes Finitos - Elementos Finitos. Para ello se simula numéricamente el flujo de mezcla sólido-gas en una Cámara de Lecho Fluido, bajo implementación en código COMSOL, cuyos resultados son mejores comparativamente a un modelo basado en el método de Elementos Discretos implementado en código abierto MFIX. El problema fundamental de la modelización matemática del fenómeno de lecho fluido es la irregularidad del dominio, el acoplamiento de las variables en espacio y tiempo y, la no linealidad. En esta investigación se reformula apropiadamente las ecuaciones conservativas del fenómeno, tales que permitan obtener un problema variacional equivalente y solucionable numéricamente. Entonces; se define una ecuación de estado en función de la presión hidrodinámica y la fracción volumétrica de sólidos, quedando desacoplado el sistema en tres sub-problemas, garantizando así la existencia de solución del problema general. Una vez aproximados numéricamente ambos modelos, se comparan los resultados de donde se observa que el modelo materia del presente artículo, verifica de forma más eficaz las condiciones de mezcla óptima, reflejada en la calidad del burbujeo y velocidad de mezcla.

**Palabras claves:** Cámara de lecho fluido, leyes de conservación, método de elementos finitos, método de volúmenes finitos.

**Abstract.** This research work aims to improve the validation process of two-phase flow numerical simulations, of the fluid bed characteristic transport, through the formulation and development of a combined numerical model Finite Volumes and Finite Element methods. The simulation process, initially, was performed by COMSOL software and the obtained results showed higher accuracy compare with Discrete Element Method implemented by MFIX. The fundamental problem of bed fluid mathematical modeling phenomenon is the domain irregularity, the coupling variables in space and nonlinearity. In this research conservative equations are formulated, such as, to produce a variational equivalent and numerically solvable problem. A state equation based on the hydrodynamic pressure and the volume fraction of solids is defined. The system was decoupled into three sub-problems, ensuring the solution existence of general problem. A comparison of obtained results showed that the model developed in this article, check more effectively optimal mixing conditions, based on the quality of bubbling and mixing speed.

**Keywords:** Fluid bed chamber, conservation laws, finite element method, finite volume method.

## 1. Introducción

### 1.1 Fundamentación y justificación

En una Cámara de Combustión de Lecho Fluido utilizada en generación de potencia eléctrica con combustibles sólidos (ver Figura 1), así como en otros procesos de transporte fluidodinámico bifásico sólido-gas, es importante analizar la distribución puntual de la mezcla en todo el dominio; ello con la finalidad de optimizar el rendimiento, la confiabilidad y la economía de funcionamiento. Este fenómeno tiene como problema crítico la complejidad del flujo mixto sólido - gas y el tamaño de partícula. En las cámaras de combustión de Lecho Fluido el combustible sólido pulverizado se mantiene en

suspensión por efecto del aire que se inyecta a velocidad controlada; sin embargo su distribución instantánea es inestable y no uniforme, lo cual complica el proceso físico. En la práctica industrial este problema también se presenta en los procesos de secado y transporte hidroneumático de sólidos (ver Figura 2).



*Figura 1. Planta piloto de 10 kW con sistema de lecho fluido burbujeante para combustión de residuos sólidos de carbón mineral.*



*Figura 2. Secador de Lecho Fluidizado.*

Este tipo de fenómenos de transporte puede ser analizado por las leyes conservativas de la dinámica de un fluido, pero su complejidad física conduce a un problema abierto en cuanto a su modelización y solución numérica en dos y tres dimensiones, ello debido a la no existencia de una teoría completa capaz de describir con exactitud la dinámica de un flujo con mezcla bifásica.

Un indicador de la eficiencia de la combustión en lecho fluido es el tamaño de la burbuja en la columna de fluidización sólido-gas, la misma que depende de la homogeneidad y velocidad de la mezcla. Es ésta la razón que impulsa a incidir en la modelización del fenómeno, desde un interés numérico para la simulación en un prototipo virtual de sistema de lecho fluido.

## *1.2 Simbología*

- $n = \rho_g \phi$ : masa específica de la fase gas
- $m = \rho_p(1-\phi)$ : masa específica de fase partículas
- $\phi \in [\phi^*, 1]$ : porosidad (fracción volumétrica ocupada por gas),  $\phi^* \in (0,1)$
- $\rho = 1-\phi$ : Concentración de partículas (fracción volumétrica ocupada por partículas sólidas.
- $u$  y  $v$  velocidades de la fase gas y de partículas
- $p_h$  y  $p_c$ : Presión hidrodinámica para la fase gaseosa y presión colisional para la fase partículas.
- $q=q(\rho)$ : función de rozamiento entre fases
- $\nu_g$  y  $\nu_p$ : viscosidades cinemáticas de la fase gas y de la fase partículas, consideradas constantes en este modelo
- $\rho_g$  y  $\rho_p$ : densidades de la fase gas y de la fase partículas
- $D_{pSv/s} = 1/\sum_{i=1}^n m_i/d_i$ .: Diámetro promedio de las partículas, siendo  $m_i$  la fracción de peso del corte y  $d_i$  el diámetro promedio del corte en mesh-micrones.

### 1.3 Revisión de la literatura

Asumiendo el flujo de mezcla que reúne las siguientes características:

- Macroscópico: Se asume que el tamaño de partícula según [1], [2], es muy inferior al dominio espacial lo que permite formular un modelo homogeneizado basado en las ecuaciones que expresan las leyes de conservación de los medios continuos.
- Hidrodinámico: Existe solamente interacción mecánica entre las dos fases, según [1], [2], por tanto no se considera reacciones químicas ni gasificación de la fase sólida.
- Isotermo: De las ecuaciones de estado elegidas en [1] - [3], la temperatura permanece constante.

### 1.4 Formulación de objetivos y establecimiento de hipótesis

- Para la fase gas

$$\begin{aligned} \partial_t n + \text{div}(nu) &= 0 ; \\ \partial_t(nu) + \text{div}(nu \otimes u + p_g I) &= \text{div}(2\nu_g n D(u)) + ng - qm(u-v) \end{aligned} \quad \text{Ecuación (1)}$$

- Para la fase partículas

$$\begin{aligned} \partial_t m + \text{div}(mu) &= 0 ; \\ \partial_t(mv) + \text{div}(mv \otimes v + p_p I) &= \text{div}(2\nu_p m D(v)) + mg + qm(u-v) \end{aligned} \quad \text{Ecuación (2)}$$

A partir de las ecuaciones que expresan las leyes de conservación (cantidad de masa y cantidad de movimiento), ecuaciones de variables acopladas según [4], [5] para las fases sólida y gaseosa, es posible expresar la fluidización bifásica mediante un sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales –EDP- del tipo Navier-Stokes de apariencia compresible. A éste último sistema, mediante un tratamiento y propuesta de una ecuación de estado para la presión basado en [6], es posible desacoplar las variables y expresar como un sistema Navier-Stokes de flujo incompresible y así de este modo encontrar una solución.

## 2. Materiales, fuentes y métodos

Asumiendo un comportamiento Newtoniano del flujo de mezcla bifásica (válido para bajas concentraciones volumétricas de partículas sólidas con diámetro de partícula del orden de  $10^{-4}$ ), cuyas fuerzas de arrastre analizadas en [1], [4], [7], dependen de la forma del operador diferencial vectorial que se puede expresar:

$$D(w) = 1/2[grad(w)+(grad(w))^T] \quad \text{Ecuación (3)}$$

Entonces, considerando las siguientes relaciones:

$$\varepsilon = \rho_g/\rho_p, \rho = \rho_p\alpha, n = n(\varepsilon), m = m(\varepsilon), u = u(\varepsilon), v = v(\varepsilon) \quad \text{Ecuación (4)}$$

Donde  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\alpha \geq 0$  es el coeficiente de la presión colisional. El comportamiento de este parámetro es muy importante puesto que cuando  $\alpha > 0$ , indica que la viscosidad cinemática del flujo de mezcla crece por efecto de la concentración de los sólidos, y cuando  $\alpha = 0$  indica que la viscosidad cinemática es constante.

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , el flujo de mezcla en el sistema de lecho fluido resulta de una apariencia compresible y este comportamiento queda expresado por las ecuaciones:

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = 0 \quad \text{Ecuación (5)}$$

$$\partial_t(\rho v) + \text{div}(\rho v \otimes v) + \nabla P = \text{div}(\rho D(v)) + \rho g \quad \text{Ecuación (6)}$$

$$\nabla p_h = -\rho q(\rho)(u-v) \quad \text{Ecuación (7)}$$

$$\text{div}((1-\rho)u + \rho v) = 0 \quad \text{Ecuación (8)}$$

Donde  $P$  es la presión total que representa la suma de la Presión Colisional  $p_c$  y la Presión Hidrodinámica,  $p_h$ ; es decir:  $P = p_c + p_h$

Ecuaciones de cierre del sistema. Lo conforman:

- Ecuación de estado

$$p_c(\rho) = \rho^{\gamma} \exp[k\rho/(\rho^* - \rho)], \quad \gamma \geq 1, \quad 0 \leq \rho \leq \rho^* < 1 \quad \text{Ecuación (9)}$$

- Ecuación de la fuerza de arrastre entre fases

$$q(\rho) = C_q/(1-\rho)^m, \quad m > 0, \quad \text{Ecuación (10)}$$

### 2.1 Recopilación de datos

Se considera que:

$$\begin{aligned} \rho &\in C^1(\Omega_t) \cap C^0(\bar{\Omega}_t), \\ v &\in C^{2,1}(\Omega_t) \cap [C^{1,0}(\bar{\Omega}_t)]^n, \\ u &\in [C^{1,0}(\Omega_t)]^n \cap [C^{1,0}(\bar{\Omega}_t)]^n, \\ p_h &\in C^{1,0}(\Omega_t) \cap C^0(\bar{\Omega}_t), \end{aligned}$$

Donde  $\Omega_t$  es el dominio evolutivo, el cual es un conjunto de elementos independientes  $(x, t)$  que definen una región espacial que varía en un intervalo de tiempo  $[0, T)$ ,  $T > 0$ , tales que las variables en estudio son  $\rho, v, u, p_h$  satisfacen el sistema de ecuaciones (5) - (10) y verifican las siguientes condiciones de contorno y de valor inicial:

- Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} [(1-\rho)u + \rho v] \cdot \bar{n} &= M; \\ M &\in C^0(\Gamma_0 \times [0, \infty)) \\ [\rho v] \cdot \bar{n} &= m_0; \\ m_0 &\in C^0(\Gamma_0 \times [0, \infty)) \\ [\rho v \otimes v + PI - \rho D(v)] \cdot \bar{n} &= 0 \end{aligned}$$

- Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \rho^0(x) \in C^0(\mathbb{R}^3_+) \\ v(x, 0) &= v^0(x) \in [C^0(\mathbb{R}^3_+)]^2 \end{aligned}$$

En el sentido clásico se trata de un problema de Cauchy cuyas condiciones de contorno, están definidas en el conjunto:  $C^{k, k_2}(\Omega_t) = \{f \in C(\Omega_t): \partial_t^k \partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} \partial_3^{\beta_3} (f) \in C(\Omega_t), k=1, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq k_2\}$ , donde  $k, k_1, k_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  son parámetros enteros.

Cuando las partículas sólidas se encuentran en reposo, velocidad  $v = 0$ , se obtiene una solución tipo nube estacionaria, entonces el problema queda expresado por:

$$\begin{aligned} \nabla p_c &= \rho g \\ \nabla p_h &= -\rho q(\rho)u \\ \text{div}((1-\rho)u) &= 0 \\ M &= ((1-\rho)u) \cdot \bar{n} \end{aligned}$$

Sea  $\Omega_{t0} = \{x \in \mathbb{R}^3_+: \rho(x) > 0\}$  la ecuación de estado  $p_c$  depende solamente de  $\rho$ , teniendo en cuenta que  $\nabla p_c$  es paralelo al vector  $ge_3$ , entonces el problema de interés resulta unidimensional; es decir las funciones en estudio solamente varían respecto a la altura puesto que  $\rho, P$  y  $u$  dependen solo de  $x_3$ .

Denotando  $x_3 = x$  e introduciendo el vector de estado:

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix};$$

Haciendo  $u_1 = \rho, u_2 = \rho v$  y  $v$  la velocidad de la fase partículas, el sistema de ecuaciones puede ser desacoplado y expresado en dos subproblemas:

- P1) Hallar  $U$ :

$$U_t = F(U)_x + G(U)_x = S(U) \tag{Ecuación (11)}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + p(u_1) \end{pmatrix}, \quad \text{Ecuación (12)}$$

$$G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \left( \frac{u_2}{u_1} \right)_x \end{pmatrix}, \quad \text{Ecuación (13)}$$

$$S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_1 g + \frac{u_1 q(u_1)}{1-u_1} (M_0(t) - \frac{u_2}{u_1}) \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación (14)}$$

P2) Hallar  $u$ :

$$u = \frac{1}{1-u_1} (M_0(t) - \frac{u_2}{u_1}) \quad \text{Ecuación (15)}$$

Dónde:

$\mu$ : es la viscosidad dinámica (considerada constante)

$M_0(t)$ : representa la inyección de aire en  $t=t_0$  por la frontera inferior  $\Gamma_0$ , siendo dato conocido del problema en particular, ver [1].

$U$ : es la solución del problema (P1)

$u$ : es la velocidad de la fase gas.

En particular las condiciones de contorno e iniciales para el problema de prueba se eligen de la forma siguiente:

$$u_1(x,0) = \begin{cases} 0.4, & x \leq L/4 \\ 0, & x > L/4 \end{cases}$$

$$u_2(x,0) = 0$$

$$M_t(0,t) = 1$$

$$u_2(L,t) = 0$$

## 2.2 Tratamiento de las variables

Consideraremos una formulación débil del problema tal que permita obtener soluciones con menor regularidad de la exigida.

$$\int_0^T \int_0^L \phi_t U + (F(U) + G(U)) \phi_x dx dt = \int_0^T \int_0^L S(U) \phi dx dt - \int_0^L \phi(x,0) U(x,0) dx \quad \text{Ecuación (16)}$$

Para el análisis de validación utilizando la combinación Elementos Finitos - Volúmenes Finitos, tomamos  $\phi \in C_0^1(\langle 0, L \rangle \times \langle 0, T \rangle)$ , tal que:

$$\phi(x,t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } (x,t) \in \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad \text{Ecuación (17)}$$

Siendo  $x_{i-1/2}, x_{i+1/2} \in \langle 0, L \rangle$  los nodos extremos espaciales y  $t_j, t_{j+1} \in \langle 0, T \rangle$  para  $T < \infty$ , y  $m \in [1.4, 3.6]$ , los nodos extremos temporales.

La integración respecto a la variable temporal se realiza mediante el método de Euler explícito, mientras que la integración espacial se realiza mediante el método del punto medio. Entonces el problema (P1) queda expresado como:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (U^{m+1} - U^m) dx + (F_{i+\frac{1}{2}}^m - F_{i-\frac{1}{2}}^m) + G_i^m = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} S(U^m) dx \quad \text{Ecuación (18)}$$

$m \geq 0, \Delta t > 0, t^m = m\Delta t, U^m = U(t^m) \text{ y } F^m(t^m)$

$$\Delta t \leq H / \max\{|v+c|, |v-c|\}.$$

La aproximación espacial del flujo convectivo representado por la función F, se realiza mediante el método de volúmenes finitos; el término fuente representado por la función S y el término difusivo representado por la función G se discretizan con el método de elementos finitos, ello sobre un dominio computacional definido por el intervalo [0, L], donde L es un parámetro constante y representa la altura del lecho.

La solución aproximada representada por el vector de estados, para M elementos, denotaremos por  $U^m$ , considerada una función continua por trozos y expresada en su forma discreta por:

$$U^m(x) = U_i^m \text{ para } x \in T_i = \left( x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2} \right) \quad \text{Ecuación (19)}$$

$$U_i^{m+1} = U_i^m - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (F_{i+\frac{1}{2}}^m - F_{i-\frac{1}{2}}^m) + G_i^m \right) + \Delta t S_i^m \quad \text{Ecuación (20)}$$

$$\Delta x = h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, \dots, M$$

Para la aproximación unidimensional basada en [3], [4], la homogeneidad y la linealidad en el flujo convectivo se obtiene a partir de la siguiente relación de igualdad:

$$\tilde{Q}(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{pmatrix}, \quad c^2 = p'(u_1), \quad v = \frac{u_2}{u_1} \quad \text{Ecuación (21)}$$

Entonces, siempre que exista una matriz R invertible, será válida la discretización de los flujos convectivos mediante una regularización con las funciones de Harten-Van Leer. La matriz R existirá y estará conformada por los vectores propios correspondientes a los

valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  de la matriz Jacobiana  $\tilde{Q}$ , semejante a la matriz diagonal  $|\Lambda| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix}$ , tal que  $|\tilde{Q}| = R|\Lambda|R^{-1}$

El flujo convectivo inicialmente es no lineal e hiperbólico, entonces para la cuasilinealización del sistema de ecuaciones no lineales se requiere de una regularización; de este modo se puede salvar la degeneración de las líneas de corriente del flujo de mezcla (para  $t > 0$ ), por lo que pueden generar soluciones erróneas. Por tanto, luego de esta regularización quedan expresadas las ecuaciones discretas para el flujo convectivo por las siguientes expresiones:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F(U_i) + F(U_{i+1})) - F_{i+\frac{1}{2}}^c \quad \text{Ecuación (22)}$$

$$F_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F(U_i) + F(U_{i-1})) - F_{i-\frac{1}{2}}^c \quad \text{Ecuación (23)}$$

### 3. Resultados

Entre las ventajas obtenidas por el método propuesto de simulación numérica del flujo bifásico hidrodinámico, como es el caso de las Cámaras de Combustión de Lecho Fluido, comparativamente a otros estudios es el no requerimiento de la propiedad de homogeneidad para la función de flujo convectivo existente.

Los resultados para el caso unidimensional se pueden ver en [1]. La formulación variacional para el caso bidimensional se puede ver en las referencias [1] - [4].

Los resultados del caso bidimensional fueron obtenidos en su totalidad con el Método de Elementos Finitos Evolutivos basados en la técnica de Galerkin Estabilizado, tanto para el flujo convectivo, flujo difusivo como para el término fuente, ver [4], [5]. Este proceso de aproximación se realizó con el objetivo de capturar las singularidades en las líneas de corriente difusivas sobre un medio poroso, originado por la entrada del gas (aire) en un conjunto rectangular bidimensional que representa el dominio computacional del lecho fluido. Para la simulación del fenómeno los algoritmos fueron implementados en la plataforma COMSOL, cuya ilustración de estructura y resultados se muestran en las figuras 3, 4, 6 y 7.

En la simulación comparativa realizada con el método de elementos discretos, ver [6], [7], tal como se muestra en la Figura 5, no se observa el fenómeno de burbujeo en la columna sólido-gas; mientras que en la presente propuesta se visualiza el tamaño óptimo de la burbuja, lo cual indica que se ha logrado la homogeneidad de la mezcla sólido-gas.

#### 3.1 Simulación Numérica Bidimensional

Para la aproximación evolutiva bidimensional del problema, consideramos la variable espacial-temporal:  $\mathbf{x} = (x, y, t) \in \Omega_T \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ ; donde:  $\Omega_T = ((0, 1) \times (0, 2)) \times [0, T)$ , mediante un método variacional de Galerkin Estabilizado y elementos finitos conformes, la ecuación vectorial queda expresada por:

$$\int_0^T \int_0^L \int_0^H [(\phi_t U + F(U) + G(U))\phi_x dx + \int_0^T \int_0^L \int_0^H (\phi_t U + F(U) + G(U))\phi_y dy] dt =$$

$$\int_0^T \left( \int_0^L \int_0^H S(U)\phi dydx \right) dt -$$

$$- \int_0^T \left( \int_0^L \int_0^H \phi(x,0)U(x,0) dydx \right) dt$$

Ecuación (24)

Esta ecuación es discretizada en espacio con el método de Elementos Finitos, en tiempo con el método de Diferencias Regresivas, e implementada en la plataforma del código privado COMSOL. Para obtener los resultados se genera un modelo numérico adimensional, donde se puede visualizar el comportamiento bajo ciertas condiciones de convergencia de las variables en estudio como son: Velocidad de flujo de la mezcla, Fracción Volumétrica e Isolíneas de Presión en  $t > 0$  y en un espacio bidimensional cuya geometría del dominio se muestra en las figuras 3 y 4.

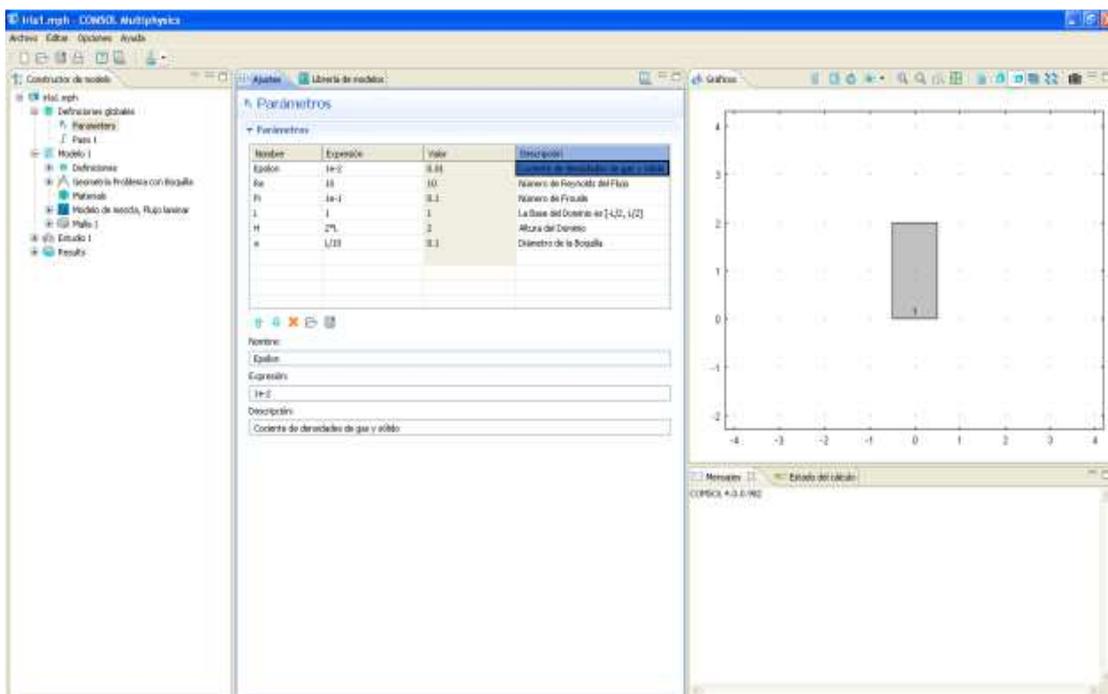


Figura 3. Dominio de estudio del prototipo virtual de Cámara de combustión LF.

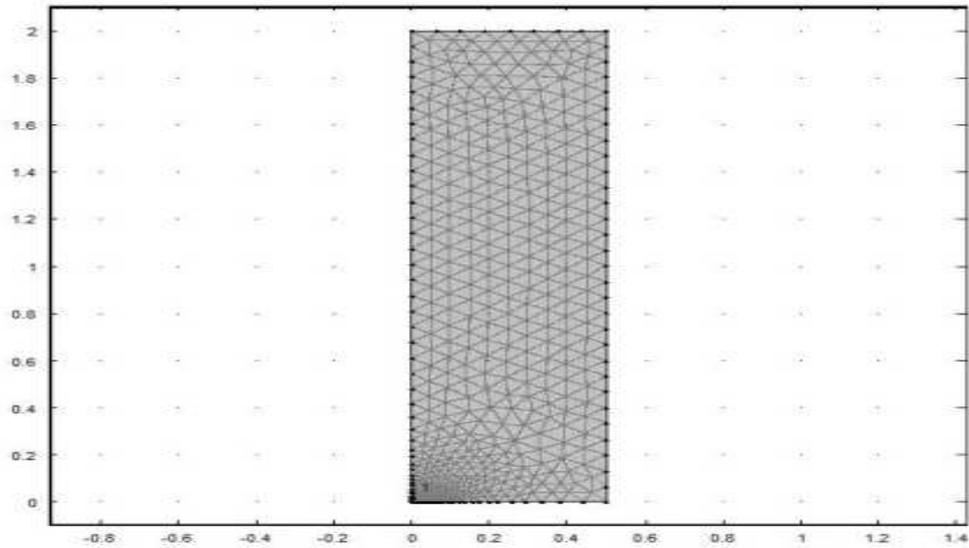


Figura 4. Malla con elementos de 6 nodos cada uno y número de elementos en el contorno 47, internos 325, grados de libertad 1770 y matriz no simétrica.

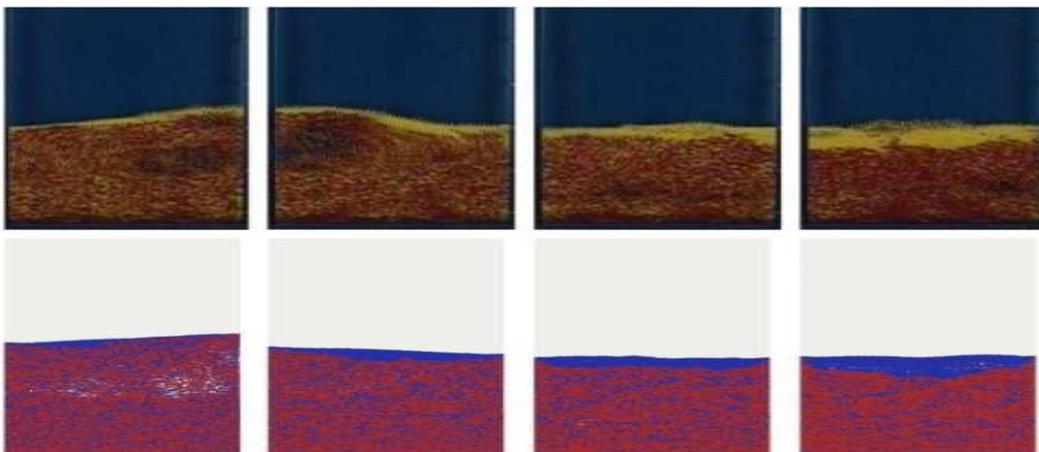


Figura 5. Lecho de sólidos y mínima fluidización, método elementos discretos.

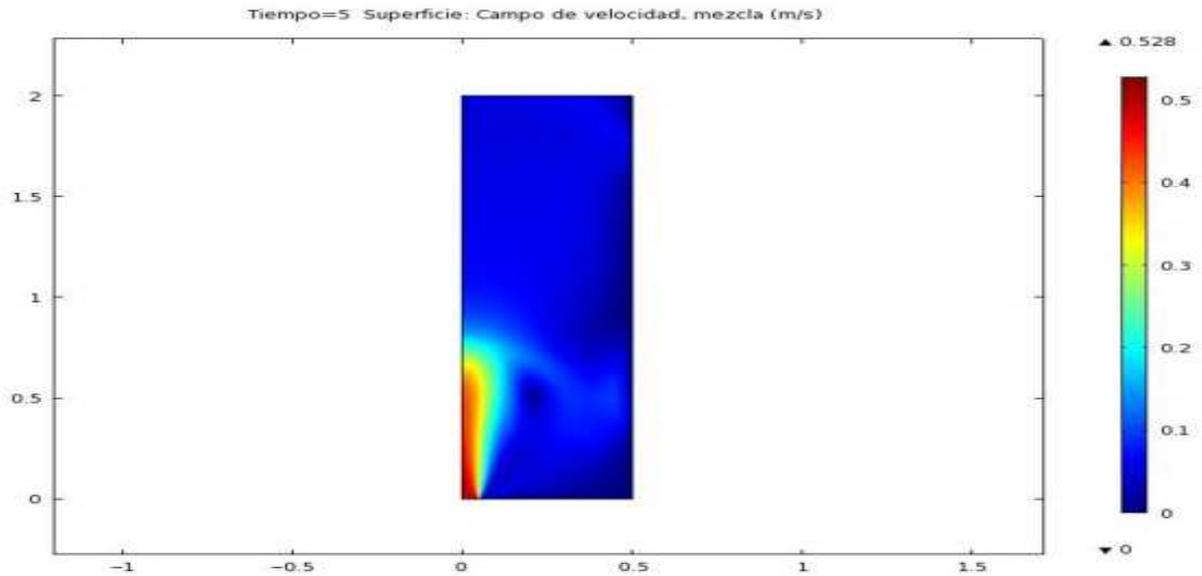


Figura 6. Velocidad de mezcla (aire-sólidos) paso de tiempo  $\Delta t$  de 0.001 a 0.1 y 1027 pasos para  $T=5s$ .

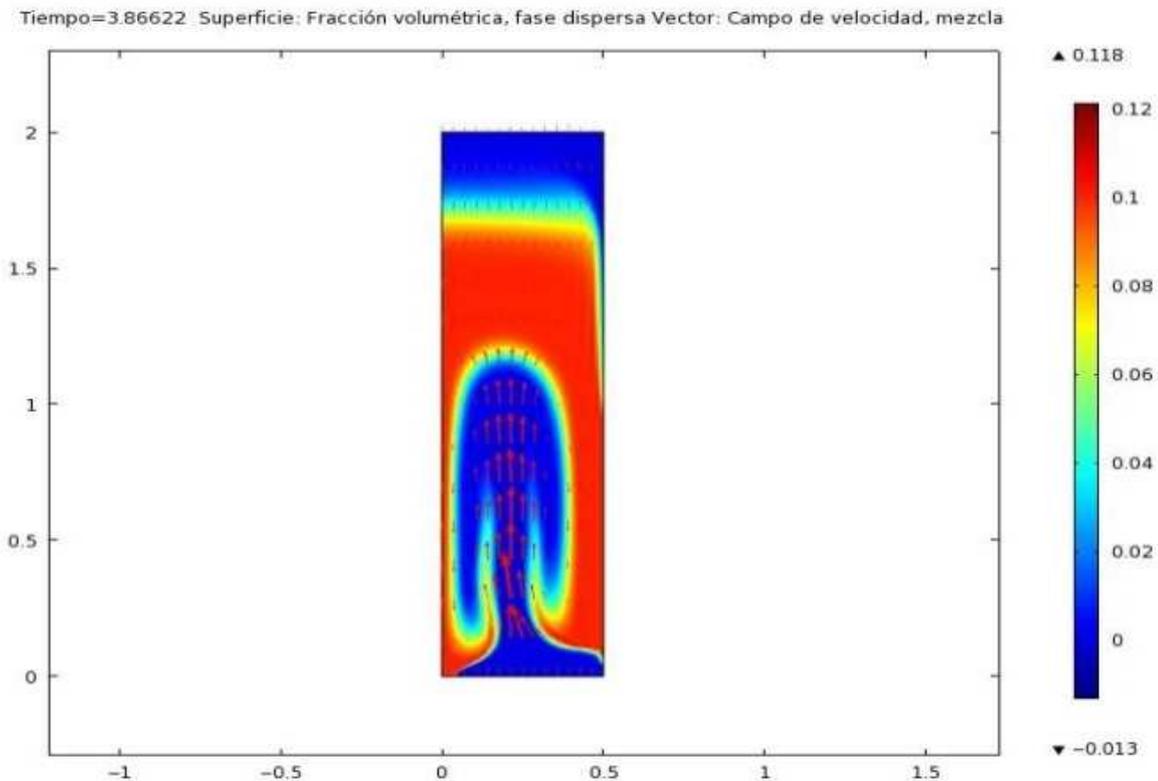


Figura 7. Velocidad de mezcla (aire-sólidos) con paso de tiempo  $\Delta t$  variable e inyección de aire por  $N$ -boquillas en  $T=3.8s$ .

#### 4. Conclusiones

Se ha construido un algoritmo del proceso de solución de un modelo matemático no estacionario, sobre un dominio regular evolutivo en espacios de una y dos dimensiones del flujo sólido-gas en un sistema de lecho fluido.

La solución es continua en la discretización espacial pero es discontinua en la evolución temporal, por lo que se realiza una regularización para la estabilidad.

La convergencia del esquema volúmenes finitos-elementos finitos, depende de las fuerzas difusivas y convectivas, las mismas que se relacionan con el Número de Reynolds y el Número de Froude

Se ha utilizado para el primer modelo los números de Reynolds ( $\approx 400$ ) y de Froude ( $\approx 1$ ) respectivamente, así como el diámetro de la partícula en el orden de  $10^{-4}$  micras.

Con este esquema de discretización se consigue simular la formación de las burbujas con el tamaño óptimo, tal como se puede observar en las figuras 6 y 7.

El método de elementos discretos es más apropiado para el arrastre de partículas granulares y no pulverizadas.

### Agradecimiento

Al Instituto General de Investigación, a la Facultad de Ciencias, y a la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería por el apoyo brindado en el financiamiento del proyecto de investigación realizado.

### Referencias

- [1] I. Mantilla, *Mathematical Contribution to Simulate the Numeric Behavior of the Mixture Flow Gas – Solid*, Tesis Doctoral, National University of Engineering UNI-Perú, 2012.
- [2] J. Grace, G. Sun, <<Influence of particle size distribution on the performance of fluidized bed reactors>>, *Chem. Eng. J.*, vol. 69, No. 5, pp. 1126-1134, 1991.
- [3] B. Van Leer, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws: Progress in Multidimensional Upwind Differencing*, NASA Langley Research. Center Hampton. ISBN 0-38794529-6, 1992.
- [4] I. Mantilla, S. De Vicente, <<SD Numerical Simulation Technique for Hydrodynamic Flow Gas-Solids Mixing>>, *COMSOL Multiphysics Conference*, Boston 2013. Disponible en: <http://www.comsol.com/2013-user-presentations/multiphysics>.
- [5] O. Pironneau, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Masson, Paris, 1990.
- [6] *Sistemas de secado de Lecho Fluidizado*, Características de diseño y construcción, Asia centrifuge, China, 2011.
- [7] T. Li y R. Garg, <<Investigación numérica de la mezcla de gas en lechos fluidizados gas-sólido>>, *AICHE*, vol.56, No. 9, pp. 2280–2296, 2010.