УДК 512.54+514.12

ВЫПУКЛЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ПРАВИЛЬНОГРАННЫХ ПРИЗМ И ПИРАМИДЫ

Сагалаков Н.О.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Тимофеенко А.В.
Сибирский федеральный университет

В работах (В. А. Залгаллер, Выпуклые многогранники с правильными гранями, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2, Наука, М. –Л., (1967), 5–221, А. В. Тимофеенко, О соединении несоставных многогранников, Алгебра и анализ, 21 №3 (2009), 165–209, и А. В. Тимофеенко, К перечню выпуклых правильногранников, Современные проблемы математики и механики, том VI, выпуск 3(2011), 155–170. Издательство Московского Университета) найдены все выпуклые правильногранники, «живые» модели которых можно найти в http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html и http://tupelo-schneck.org/polyhedra/

Напомним определение *правильногранника* – это многогранник P, каждая сторона которого составлена из одного или нескольких правильных многоугольников и F_P – множество этих многоугольников, причем, во-первых, общая вершина многоугольников из F_P не лежит внутри ребра одного из них; во — вторых, сумма углов многоугольников из F_P в каждой их общей вершине меньше 2π. Таким образом, в отличие от правильногранных многогранников у правильногранника могут появиться общие ребра правильных многоугольников, составляющих грань правильногранника. Их называют *условными*. Однако правильногранник не обладает вершинами, заданными двумя последними условиями определения. Такие вершины называют *фиктивными*, а выпуклые многоугольники, составленные из конечного числа правильных многоугольников, называются *паркетными*.

В настоящей работе изучаются выпуклые многогранники с паркетными гранями, которые могут содержать и фиктивные вершины. Коллектив авторов в работе В. А. Залгаллера затратил около четырёх лет на построение всех простых многогранников, т.е. не рассекаемых никакой плоскостью на правильногранные многогранники выпуклых правильногранных многогранников. Затем эта работа была продолжена для правильногранников (см. работы Б.П.Иванова и Ю.А.Пряхина в списке литературы работы А. В. Тимофеенко за 2009 год), дополненный несоставными многогранниками Иванова и Пряхина список простых тел получил название "несоставные многогранники". Как уже говорилось, все не содержащие фиктивных вершин выпуклые соединения несоставных тел найдены в виде списка. Классификация выпуклых многогранников с паркетными гранями пока далека от завершения, хотя, как заметил Ю.А.Пряхин, в работе (Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных, Зап. научн. сем. ЛОМИ , 45, (1974), 111 – 112) найти с точностью до комбинаторной эквивалентности все несоставные тела с паркетными гранями можно по схеме, которая реализована в работе В. А. Залгаллера.

Алгоритм создания всех выпуклых соединений таких тел можно отлаживать для известных несоставных тел, что и делается ниже для двух призм и пирамиды.

Утверждение. Пусть правильногранные призма $П_3$ с треугольником в основании, четырехугольная пирамида M_2 и куб $П_4$ имеют единичные ребра. Тогда каждый выпуклый многогранник, составленный менее, чем 11 из этих тел, и такой, что длина его ребра не больше двух, можно представить одним из следующих соединений, причем в каждом таком соединении число слагаемых $П_3$, $П_4$, M_2 минимально и в списке *k* многогранник $S_{k,i}$, k=2,3,…10, расположен на i-м месте:

2) $П_3+ П_3$, $П_3+ П_3'$, $П_3+П_3'$, $П_3+ П_4$, $П_3+ M_2$, $П_4+ П_4$, $П_4+ M_2$, $M_2+ M_2$;

3)$S_{2,2}+ П_3$, $S_{2,2}+ M_2$, $S_{2,4}+ П_3$, $S_{2,4}+ П_3'$, $S_{2,4}+ П_4$, $S_{2,4}+ M_2$, $S_{2,5}+ M_2$, $S_{2,6}+ M_2$, $S_{2,7}+ M_2$;

4) $S_{3,1}+ П_3$, $S_{3,1}+ П_3'$, $S_{3,1}+ M_2$, $S_{3,2}+ M_2$, $S_{3,1}+ M_2$, $S_{3,5}+ П_3$, $S_{3,5}+ П_3$, $S_{3,5}+ M_2$, $S_{3,7}+ M_2$, $S_{3,8}+ M_2$, $S_{2,2}+S_{2,2}$, $S_{2,3}+S_{2,6}$, $S_{2,6}+S_{2,6}$;

5) $S_{4,2}+ M_2$, $S_{3,1}+S_{2,3}$, $S_{3,1}+S_{2,6}$;

6)$S_{5,1}+M_2$, $S_{5,2}+ П_3$, $S_{5,2}+ M_2$, $S_{5,3}+ П_3$, $S_{5,3}+ M_2$, $S_{3,1}+S_{3,1}$, $S_{3,1}+S_{3,1}'$, $S_{3,4}+S_{3,4}$, $S_{3,5}+S_{3,5}$;

7)$S_{6,6}+ П_3$, $S_{6,6}+ M_2$, $S_{5,3}+S_{2,3}$, $S_{5,3}+S_{2,6}$;

8)$S_{7,1}+ П_3$, $S_{7,1}+ M_2$, $S_{7,1}+ M_2'$, $S_{7,2}+ M_2$, $S_{7,2}+ M_2'$, $S_{7,3} +П_3$, $S_{7,3}+M_2$, $S_{7,4}+ П_3$, $S_{7,4}+M_2$, $S_{6,7}+S_{2,3}$, $S_{6,7}+S_{2,3}'$, $S_{6,9}+S_{2,3}$, $S_{5,3}+S_{3,1}$, $S_{4,13}+S_{4,13}$;

9)$S_{8,5}+ M_2$, $S_{8,13}+ П_3$, $S_{8,13}+ M_2$, $S_{7,4}+S_{2,3}$;

10) $S_{9,2}+ П_3$, $S_{9,2}+ M_2$, $S_{9,3}+ M_2$, $S_{9,4}+П_3$, $S_{9,4}+M_2$, $S_{7,1}+S_{3,1}$, $S_{7,4}+S_{3,1}$, $S_{6,7}+S_{4,13}$.

Доказательство проведём по алгоритму, синтезирующему каждый составной правильногранник, реализованный в работе А. В. Тимофеенко за 2011 год. Его входными данными служат свойства многогранников $S_{1,1}=П_3$, $S_{1,2}=П_4$ и $S_{1,3}=M_2$. Точнее, из списка фундаментальных граней, убираются грани, соединение по которым не может привести к выпуклому многограннику с паркетными гранями. Оставшиеся грани называются сверхфундаментальными.

На следующих шагах алгоритма мы будем получать составные многогранники.

На втором шаге нахождения нового составного многогранника рассматриваются все выпуклые соединения по каждым одинаковым сверхфундаментальным граням многогранника $S_{1,i}$, i=1,2,3 и многогранника $S_{1,j}$, j=i,i+1,…3.

Пусть на шаге с номером k, k>1, построены все k-составные многогранники с указанием для каждого из них множества *SF*. Обозначения построенных на k-м этапе F-многогранников будем выделять подчеркнутым шрифтом, а другие многогранники будем записывать в виде суммы k слагаемых, и буквой S с двумя нижними индексами: $S_{k,1}, S_{k,2} \dots S_{k,n}$

Опишем (k+1)-й шаг работы алгоритма. Каждый построенный на шаге k многогранник будем соединять с каждым многогранником $S_{1,i}$, i=1,2,3; каждый (k-1)-составной многогранник будем соединять с 2-составным многогранником; (k-2)-составной многогранник – с 3-составным и т.д. Пусть P_k и M – обозначения этих многогранников. Если полученного соединения нет среди уже построенных, и оно является выпуклым, то обозначаем его P_k +M и добавляем в список составных тел.
В некоторых случаях различные присоединения к многограннику P_k многогранника M приводят к различным многогранникам. Тогда их обозначения будем различать, снабжая штрихом второе слагаемое: P_k +M, P_k +M', P_k +M'',… Если зафиксировать многогранник P_k, то на каждый такой штрих можно смотреть как на обозначение движения, которое многогранник M переставляют с одной (сверхфундаментальной) грани тела P_k на другую, либо оставляют P_k и M соединенными по тем же граням, но по другим их вершинам .
Рассмотрев все соединения тел P_k и M, переходим к следующему после M многограннику и находим все его соединения с многогранником P_k и те из них, которые ранее не встречались, добавляем в список составных многогранников. Если следующего после M многогранника нет, то на (k+1) шаге алгоритма работа завершена и составляем список всех (k+1)-составных многогранников.
При нахождении соединений тел, будем находить ответ на вопросы:

1)Является ли соединение выпуклым многогранником?

2)Нет ли рассматриваемого соединения уже среди построенных составных многогранников?

3)Не превышает ли двойку длина ребер соединения ?

Ниже приведено несколько примеров работы алгоритма для двусоставных соединений.

Треугольная призма $П_3$ имеет две сверхфундаментальные грани. Соединяя эти призмы квадратными гранями, получаем два составных тела.
Первое тело это $S_{2,1}=П_3+П_3=J_{26}$ двускатный повёрнутый бикупол. Поскольку каждая его треугольная грань находится под углом в 150^0 к одному из своих смежных

квадратов и под прямым углом – к двум другим, то соединение многогранника $S_{2,1}$ и любого выпуклого многогранника с паркетными гранями не может быть выпуклым, т. е. двускатный повёрнутый бикупол является F-многогранником.

Второе получившееся тело $S_{2,2}= П_3+ П_3$ есть ромбическая призма, состоящая из 6 граней: 2 ромбические грани и 4 квадратные, 12 рёбер и 8 вершин. Фундаментальными гранями тела $S_{2,2}$ являются ромб и квадрат. Чтобы доказать это найдём группу поворотов $S_{2,2}$. Ромбическая призма имеет две ромбические грани, следовательно, могут существовать лишь оси поворотов, которые эти грани либо меняют местами, либо каждый ромб отображают на себя. Найдем эти оси. Рассмотрим поворот на 180^0 с осью, проходящей через центр ромбических граней под прямым углом. При таком повороте каждый ромб отображается на себя. Рассмотрим поворот на 180^0 вокруг оси, проходящей через середины боковых рёбер. У нас будет две таких оси. При данных поворотах, наши ромбические грани меняются местами, что и требовалось найти. Итого имеем 1+2 и еще 1 тождественный поворот. Всего 4 поворота совмещающих фигуру саму с собой. Они составляют четверную группу Клейна.

Соединением призм $П_3$ и куба можно получить только один двусоставной многогранник $S_{2,4} =П_3+ П_4$ Получившийся многогранник обладает 7 гранями: 2 пятиугольными и 5 четырехугольными. Количество рёбер 17, вершин 10. Фундаментальные грани $S_{2,4}$–пятиугольная и три квадратных грани.
Группа поворотов $S_{2,4}$. Данная фигура имеет две 5-угольные грани. Следовательно, могут существовать только повороты, которые эти грани либо меняют местами, либо отображают в себя. Лишь при тождественном повороте вершины 5-угольной грани могут перейти сами в себя, поэтому мы только рассмотрим поворот, при котором эти грани меняются местами. Рассмотрим ось, проходящую, через середину нижней квадратной грани и верхнего бокового ребра фигуры. При повороте на 180^0, пятиугольные грани меняются местами. Это единственный нетождественный поворот, при котором грани совмещаются сами с собой.
Общее число поворотов $S_{2,4}$ равно 1 нетождественным и 1 тождественному. Получаем группу второго порядка.

Пирамида M_2 имеет две фундаментальные грани: треугольник и квадрат. Поскольку смежные с треугольником боковые грани расположены к нему под тупым углом, то к выпуклому многограннику приводит только соединение $П_3$ и M_2по квадратной грани. Существует единственный такой многогранник $S_{2,5}$– наращенная треугольная призма или тело Джонсона J_{49}. Обладает 8 гранями: 6 треугольников и 2 квадрата. Количество ребер 13, вершин 7.
Найдем группу поворотов для $S_{2,5}$. Пирамида имеет единственную вершину, соединяющую 4 треугольника. Поэтому если существует ось поворота, совмещающего $S_{2,5}$ с собой, то она единственная и содержит эту вершину. Очевидно, такая ось существует и содержит середину ребра. Следовательно, существует единственный нетождественный поворот, совмещающий фигуру $S_{2,5}$ с собой.