

Orden y estructuras algebraicas mediante nuevas tecnologías

Miguel A. García-Muñoz, Carmen Ordóñez y Juan F. Ruiz

*Departamento de Matemáticas (Área de Álgebra). Universidad de Jaén.
Campus Las Lagunillas s/n, 23071 Jaén.*

magarcia@ujaen.es

PRESENTACIÓN

En un conjunto, los elementos son comparables o no según cierto criterio (tamaño, edad, peso, longitud, categoría,...). Así en el conjunto \mathbb{N} de los números naturales (los que utilizamos para contar) todos sus elementos son comparables por un criterio conocido, "ser mayor o menor que":

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq \dots \leq n \leq n + 1 \leq \dots$$

A esto se le llama "orden". La ordenación no siempre será tan sencilla como en el caso anterior, ya que puede haber elementos que no estén relacionados entre si. Otro problema que encuentra el alumno al trabajar con este tipo de conjuntos es la similitud entre los diversos elementos notables de un conjunto ordenado, a saber, máximo, mínimo, supremo, ínfimo, elementos maximales y minimales.

Algunos órdenes dan lugar a la estructura algebraica de retículo, y en particular, a las álgebras de Boole. Las mismas herramientas nos valen para estudiar si un conjunto ordenado es un retículo o un álgebra de Boole.

Todos estos conceptos son relevantes, por ejemplo por su aplicación a la informática: órdenes usados en bases de datos relacionales, estudio de problemas relativos a clasificación, como ejemplo de estructura de álgebra de Boole tenemos el conjunto de las funciones booleanas cuya aplicación a circuitos electrónicos es directa... De hecho, toda la informática está basada en la estructura de álgebra de Boole.

Teniendo en cuenta lo abstracto que resultan tales conceptos y el escaso contacto que el alumno universitario ha tenido con ellos, nos ha resultado de gran ayuda el uso del ordenador para motivar y facilitar la comprensión de estos contenidos abstractos. De una forma muy sencilla, se traducen conceptos eminentemente matemáticos al lenguaje de programación, lenguaje al que debe estar acostumbrado el alumno de informática.

OBJETIVOS

El objetivo de esta experiencia docente es doble: *motivar* al alumno y *clarificar* los conceptos de una materia abstracta. Como objetivos particulares que nos proponemos podemos citar:

- Representar gráficamente el conjunto ordenado mediante un grafo dirigido (diagrama de Hasse) usando un programa sencillo.
- Calcular los elementos notables de un conjunto ordenado usando pequeñas rutinas basadas exclusivamente en la definición teórica.
- Comprobar, basándonos en argumentos teóricos previamente estudiados, si un conjunto finito tiene estructura de retículo y en

- particular de álgebra de Boole finita.
- Proporcionar herramientas informáticas para que el propio alumno se autoevalúe. Estas herramientas permitirán que el alumno clarifique sus ideas mediante la corrección de los ejercicios que previamente ha realizado.

DESARROLLO

Esta experiencia práctica corresponde a la asignatura de Álgebra I de primer curso de la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión. El software utilizado es el programa Mathematica, aplicación comercial de Wolfram Research diseñada para realizar cálculos y operaciones matemáticas. No obstante, todos los programas que se utilizan se podrían transportar fácilmente a cualquier otro lenguaje de programación. Mathematica maneja con habilidad los conjuntos finitos. Basándonos en este hecho estudiamos las relaciones de orden, los elementos notables de los conjuntos ordenados y como aplicación de las herramientas informáticas que se obtienen, estudiamos las estructuras algebraicas de retículo y de álgebra de Boole, aunque siempre limitados al caso finito.

A. Relaciones binarias. Relaciones de orden

La base teórica de las relaciones binarias, y en particular, las relaciones de orden han sido introducidas previamente en clase de teoría como sigue:

Una relación binaria R sobre un conjunto A , es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$, $R \subseteq A \times A$. Los elementos de $A \times A$ son pares ordenados (x, y) donde $x, y \in A$. Recordemos que una relación binaria podía verificar entre otras las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $(a, a) \in R$, para cada $a \in A$.
- Simétrica: Si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.
- Transitiva: Si $(a, b), (b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.
- Antisimétrica: Si $(a, b), (b, a) \in R$, entonces $a = b$.

Diremos que R relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Para estudiar este concepto usando la definición de cada una de las propiedades que ha de satisfacer una relación de orden hemos implementado la función **ORDEN[conjunto,rel_binaria]**:

```

ORDEN[A_,R_]:=Module[{Reflexiva,Antisimetria,Transitiva},
  Reflexiva=True;
  For[n=1,n<=Length[A],n++,If[Intersection[{{A[[n]],A[[n]]}},R]
  ]=={{A[[n]],A[[n]]}},Null,Reflexiva=False]];
  Transitiva=True;
  For[p=1,p<=Length[R],p++,For[q=1,q<=Length[R],q++,If[R[[p,
  1]]==R[[q,2]],If[Intersection[{{R[[q,1]],R[[p,2]]}},R]
  ]=={{R[[q,1]],R[[p,2]]}},Null,Transitiva=False]];];
  Antisimetria=True;
  For[r=1,r<=Length[R],r++,
  If[Intersection[{{R[[r,2]],R[[r,1]]}},R]
  ]=={{R[[r,2]],R[[r,1]]}}
  &&!(ToString[R[[r,1]]]==ToString[R[[r,2]]]),Antisimetria=False]];

```

If[Reflexiva&&Antisimetrica&&Transitiva,True,False]]

B. Elementos notables

Un primer problema que tiene el alumno cuando empieza a trabajar con conjuntos ordenados con un orden distinto del usual, es la aparición de nuevos elementos notables como son los maximales y los minimales. Esto no se estudian en conjuntos totalmente ordenados como en los números naturales pues su definición coincide con los máximos y los mínimos. Ahora habrá que distinguirlos al tener que considerar conjuntos con órdenes parciales. Dado un conjunto A ordenado y B un subconjunto suyo, nos encontramos con los siguientes conceptos:

Máximo (resp. mínimo) de A , es un elemento $M \in A$ ($m \in A$) tal que $x \leq m$ ($m \leq x$) para cada $x \in A$.

Elemento maximal (resp. minimal) de A , es un elemento de A tal que no existe ningún otro mayor (menor) que él.

Cotas superiores (resp. inferiores) de B en A son aquellos elementos de A que son mayores (menores) o iguales que todos y cada uno de los elementos de B .

Supremo (resp. ínfimo), si existe, es el mínimo (máximo) del conjunto de todas las cotas superiores (inferiores).

Haciendo una traslación fiel al ordenador de las definiciones hemos programado una función para cada uno de dichos elementos. Presentamos como ejemplo la función **MAXIMO[conjunto,orden]**

```
MAXIMO[A_,R_] := Module[{maximo,maxi,ORDEN},maximo={};
Do[maxi=True;
Do[If[Intersection[{{A[[m]],A[[n]]}},R]=={ },maxi=False],{m,
1,Length[A]}];
If[maxi,AppendTo[maximo,A[[n]]];,{n,1,Length[A]}];
maximo]
```

que nos calcula el máximo, si existe, de un conjunto ordenado, o **INFIMO[conjunto_total,conjunto,orden]**

```
INFIMO[A_,B_,R_] := Module[{cotasinferiores,cinfer,infimo,maxi},
cotasinferiores={};
Do[cinfer=True; Do[If[Intersection[{{A[[n]],B[[m]]}},R]=={ },
cinfer=False],{m,1,Length[B]}];
If[cinfer, AppendTo[cotasinferiores, A[[n]]];
,{n,1,Length[A]}];
infimo={};
Do[maxi=True;
Do[If[Intersection[{{cotasinferiores[[m]],cotasinferiores[[n]]
}},R]=={ },maxi=False],{m,1,Length[cotasinferiores]}];
If[maxi, AppendTo[infimo, cotasinferiores[[n]]];
,{n,1,Length[cotasinferiores]}];
infimo]
```

que nos calcula el ínfimo de "conjunto", si existe, como subconjunto de "conjunto_total". Las demás funciones se programan de forma similar (ver García-Muñoz. M.A.: Ordóñez. C. v Ruiz. 1.F. *Métodos computacionales en*

Álgebra para informáticos. Matemática discreta. Por aparecer.)

C. Diagrama de orden

Otro objetivo importante que nos proponemos con la práctica es ofrecer al alumno una herramienta mediante la cual pueda obtener un gráfico que represente al conjunto ordenado, ya que dicho gráfico le ayuda a entender la relación de orden existente en el conjunto. Es conocido que un conjunto finito ordenado se puede representar mediante un grafo dirigido de forma que cada elemento se representa mediante un punto y si dos elementos a , b satisfacen que $a \leq b$, existe una flecha ascendente desde el punto a hasta el punto b . Dicho diagrama se conoce con el nombre de diagrama de Hasse. Este es el programa que nos dibujará la relación de orden:

```
<<Graphics`Arrow`
A={LISTA DE ELEMENTOS DEL CONJUNTO};
R={CONJUNTO DE PARES QUE FORMAN UNA RELACION DE
ORDEN};
Clear[Coord];
tabla=Table[0,{i1,Length[A]},{j1,3}];B=A;t1=1;nivel=0;
While[B≠{ }, minimales={ };nivel++;
Do[minimal=True;
Do[If[Intersection[{B[[m1]],B[[n1]]},R]≠{ } &&
n1≠m1,minimal=False},{m1,1,Length[B]}];
If[minimal, AppendTo[minimales, B[[n1]]];
tabla[[t1]]={nivel,B[[n1]],0};t1++;];,{n1,1,Length[B]}];
B=Complement[B,minimales];]
R1={ };
Do[AppendTo[R1,{A[[i1]],A[[i1]]},{i1,1,Length[A]}];
R=Complement[R,R1];R1={ };
Do[ Do[ Do[
If[Intersection[R,{R[[k1,1]],A[[j1]]}
,{A[[j1]],R[[k1,2]]}]={R[[k1,1]],A[[j1]]}
,{A[[j1]],R[[k1,2]]},R1=Union[R1,{R[[k1]]}]
,{j1,1,Length[A]},{k1,1,Length[R]}];
R=Complement[R,R1];
puntos={ };t1=0;
Do[cont=0;
Do[If[tabla[[i1,1]]==j1, cont=cont+1},{i1,1,Length[A]}];
Do[t1++;puntos=Union[puntos,{Text[tabla[[t1,2]],{k1-
(cont/2)-.1,j1+.1}],
Point[{k1-(cont/2),j1}]}];
tabla[[t1,3]]=k1-(cont/2},{k1,1,cont},
{j1,1,tabla[[Length[A],1]}];
Coord[elem_]:=Do[If[elem\[Equal]tabla[[h1,2]],
Coord[elem]={tabla[[h1,3]],tabla[[h1,1]]},{h1,1,Length[A]}];
Do[Coord[A[[i1]]},{i1,1,Length[A]}];
Do[AppendTo[puntos,Arrow[Coord[R[[t1,1]],Coord[R[[t1,2]]]]
;,{t1,1,Length[R]}];
Print["Diagrama de orden:"]
Show[Graphics[puntos]]
```

D. Reticulos. Álgebras de Boole

A partir de los programas anteriores y teniendo en cuenta que tanto los

retículos como las álgebras de Boole son unos conjuntos ordenados especiales, seremos capaces de estudiar si cierto conjunto es un retículo e incluso un álgebra de Boole con unas simples modificaciones. Recordemos primero estos conceptos:

Un retículo es una terna (L, \vee, \wedge) formada por un conjunto L y dos operaciones internas \vee y \wedge , verificando las propiedades asociativas, conmutativas, idempotencias y de absorción. De forma alternativa, también podemos definirlo como un conjunto ordenado con la relación de orden:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \text{ (o equiv. } a \wedge b = a)$$

tal que para dos elementos cualesquiera existe supremo e ínfimo.

Un retículo se dice que tiene elemento cero, 0 (resp. elemento uno, 1) si alguno de sus elementos es minimal (resp. maximal).

Dado un retículo L con elemento cero y uno, llamaremos complemento de $x \in L$ al elemento $\bar{x} \in L$ tal que $x \wedge \bar{x} = 0$ y $x \vee \bar{x} = 1$, además diremos que L es complementado si cualquier elemento suyo existe un complemento.

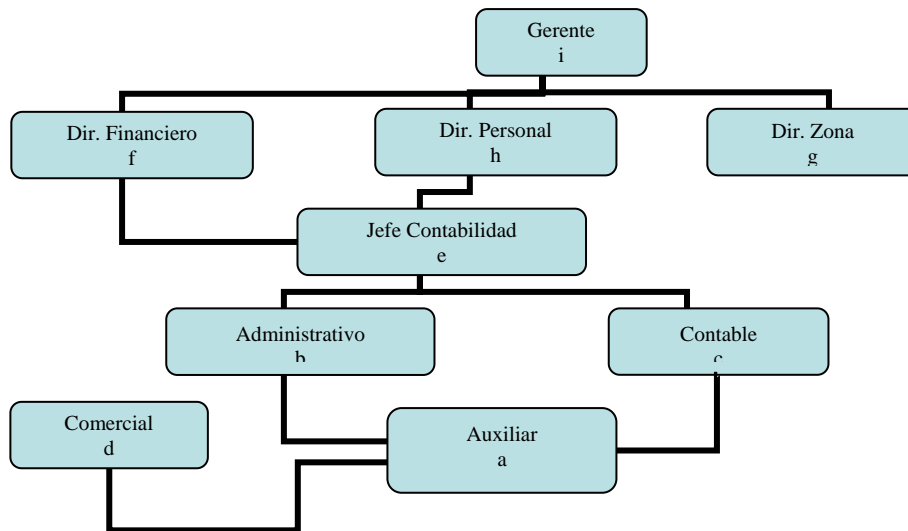
Un álgebra de Boole es una terna (L, \vee, \wedge) formada por un conjunto L y dos operaciones internas \vee y \wedge , que es un retículo con 0 y 1, complementado y distributivo.

E. Ejemplos

Veamos a continuación dos ejemplos prácticos de lo presentado con anterioridad comprobando su utilidad como herramienta didáctica en el aula de informática, pues ayudan a que el alumno capte los conceptos abstractos de nuestra materia y a la vez le motiva por estar trabajando en su medio, el ordenador.

Ejemplo 1. El organigrama de una empresa ficticia viene dado por el diagrama de la derecha. Si denotamos por letras cada uno de los cargos y llamamos A al conjunto de todos ellos, es claro que la categoría profesional determina una comparación entre los elementos de $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. Mediante la traducción al lenguaje matemático podemos obtener un gráfico que nos represente el conjunto ordenado. El cálculo de los elementos notables de dicho orden responde a las siguientes preguntas:

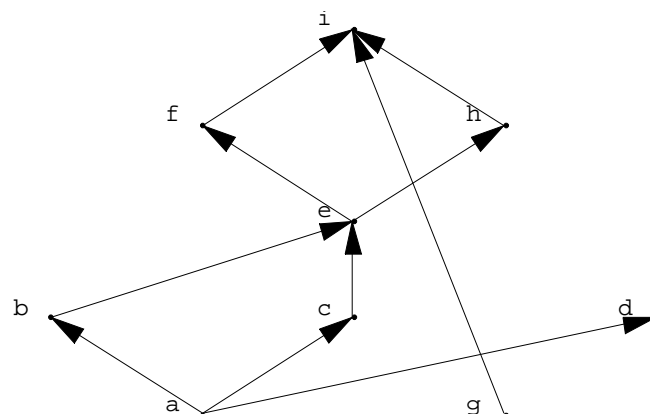
- 1) ¿Qué personas están subordinadas al jefe de contabilidad?
- 2) ¿Quiénes son los superiores del auxiliar?
- 3) ¿Qué personas son jefes?



Primero comprobamos que realmente es un orden:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$
 $R = \{\{a,a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{a,f\}, \{a,h\}, \{a,i\}, \{b,b\},$
 $\{b,e\}, \{b,f\}, \{b,h\}, \{b,i\}, \{c,c\}, \{d,d\}, \{d,e\}, \{d,f\}, \{d,h\},$
 $\{d,i\}, \{e,e\}, \{e,f\}, \{e,h\}, \{e,i\}, \{f,f\}, \{f,i\}, \{g,g\}, \{g,i\}, \{h,h\},$
 $\{h,i\}, \{i,i\}\};$
ORDEN[A,R]

Podemos ver que se trata de un conjunto en el que todos los elementos no están ordenados entre sí, es decir, no es un orden total. Representemos el diagrama de orden que representa la categoría profesional en la empresa. Podemos observar como esta representación nos dejará mas claro quienes son los elementos notables del conjunto, lo que ayuda a alumno a solventar el problema que representa para él este el calculo de dichos elementos en conjuntos parcialmente ordenados.



Pasamos ahora a responder a las preguntas que nos formulaba el ejemplo: los empleados a cargo del jefe contable (e) vendrán dados por las cotas inferiores de $\{e\}$, los superiores que tiene el auxiliar (a) vendrán dados por las cotas superiores de $\{a\}$ y los jefes de la empresa serán los elementos maximales del

conjunto:

COTASINFERIORES[{e}, R]

COTASSUPERIORES[{a},R]

MAXIMALES[A,R]

{a,b,c,e}

{a,b,c,d,e,f,h,i}

{d,i}

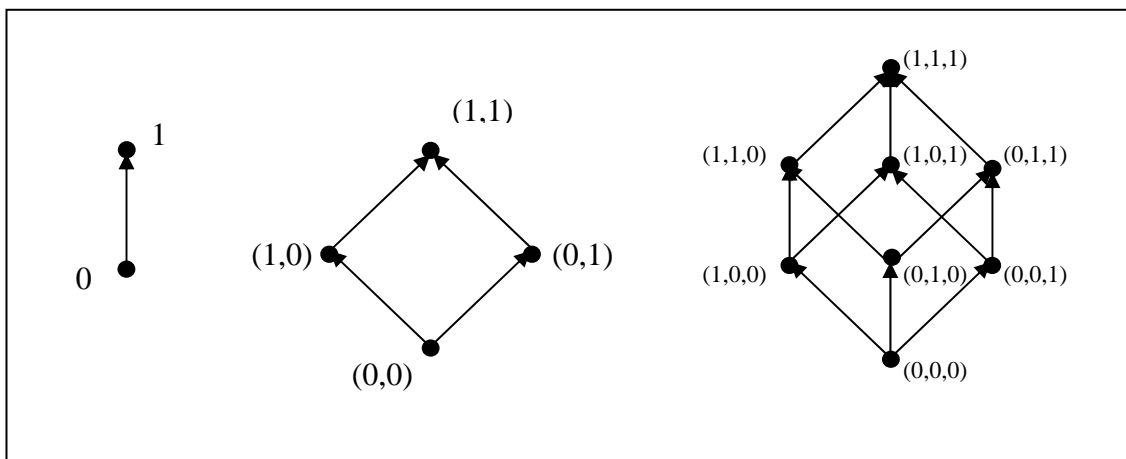
Téngase en cuenta a la hora de interpretar la salida la anomalía de que el jefe contable está subordinado a él mismo y de que el auxiliar trabaja para él mismo.

Ejemplo 2. Dado el conjunto D de todos los divisores positivos de 70 con la relación de orden, $a, b \in D; a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$. Comprobar si D es un álgebra de Boole.

Usaremos el teorema de estructura de las álgebras de Boole finitas introducido en clase de teoría:

Teorema. Sea (L, \vee, \wedge) un álgebra de Boole finita y sea M el conjunto de todos los átomos de L . Entonces (L, \vee, \wedge) es isomorfa al álgebra de Boole $(P(M), \cup, \cap)$ de las partes de M (subconjuntos de M). Además si M tiene n elementos entonces (L, \vee, \wedge) es también isomorfa al álgebra de Boole $((B_2)^n, \vee, \wedge)$.

De esta forma, comprobar que cierto conjunto es un álgebra de Boole finita es equivalente a estudiar si es un retículo (conjunto ordenado tal que cualquier par de elementos tiene supremo e ínfimo) isomorfo al álgebra de Boole de la forma $P(M)$ o $(B_2)^n$ cuyo número de elementos es 2^n y su diagrama de orden para $n = 1, 2$ y 3 tienen el siguiente esquema:



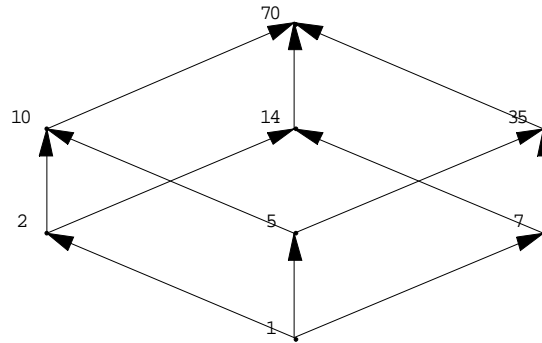
Usando la función anterior comprobamos que es una relación de orden:

$$A = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\};$$

$$R = \{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 10\}, \{1, 14\}, \{1, 35\}, \{1, 70\}, \\ \{2, 2\}, \{2, 10\}, \{2, 14\}, \{2, 70\}, \{5, 5\}, \{5, 10\}, \{5, 35\}, \{5, 70\}, \\ \{7, 7\}, \{7, 14\}, \{7, 35\}, \{7, 70\}, \{10, 10\}, \{10, 70\}, \{14, 14\}, \\ \{14, 70\}, \{35, 35\}, \{35, 70\}, \{70, 70\};$$

$$\text{ORDEN}[A, R]$$

Finalmente dibujamos el diagrama del orden:



A simple vista comprobamos que es un retículo isomorfo a B_2^3 y, en consecuencia, un álgebra de Boole.

Como se puede ver en el ejemplo anterior los gráficos determinan el estudio de esta estructura. En clase también se proporcionan herramientas informáticas que permiten una comprobación directa de lo anterior (ver García-Muñoz, M.A.; Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. *Métodos computacionales en Álgebra para informáticos. Matemática discreta*. Por aparecer.).

RESULTADOS

A lo largo de los años que llevamos impartiendo clase hemos observado el problema que el alumno universitario presenta cuando tiene que enfrentarse a resultados abstractos de Álgebra como los anteriores. Al realizar esta experiencia hemos visto que el alumno tiene mucho más claro como trabajar con conjuntos ordenados, llegando a entender las diferencias existentes entre los distintos elementos notables de un conjunto ordenado. A la vez esto nos ha servido para aplicar partes de la teoría, como es el teorema de representación de las álgebras de Boole finitas, de una forma muy gráfica. Lo que antes resultaba un teorema teórico con una aplicación lejos de entender, ahora es una herramienta en el aula de prácticas para comprobar de forma muy intuitiva cuándo cierto conjunto ordenado es un álgebra de Boole.

Además hemos conseguido que el alumno clarifique sus ideas pues las herramientas que les proporcionamos permiten la autocorrección de los ejercicios que han resuelto previamente. Antes de realizar estas experiencias el alumno no podía saber por sí solo, si lo que había calculado y estaba correcto. De esta forma, su aprendizaje se está realizando de forma satisfactoria.

CONCLUSIÓN

Tratar temas tan abstractos desde un punto de vista práctico, por una parte nos ha servido para hacer uso de las nuevas tecnologías como herramienta docente y nos ha demostrado que dichos conceptos son asimilados mejor por el alumno tras realizar esta práctica en el aula de informática. Por otra parte, el tipo de alumno al que va dirigida esta experiencia parece el adecuado ya que en cierto sentido este ejercicio puede complementar su aprendizaje en otro campo fundamental en su futura vida profesional como es la programación.