

【工学（制御工学）】

研究論文

振動的なリッカチ方程式求解過程の収束性改善

金丸 英幸^{*1}

Acceleration of Oscillational Iterative Process to Solve the Riccati Equation

KANAMARU Hideyuki

Summary

Several methods to solve the Riccati equation are proposed for the optimal regulator problem in modern control theory. In some cases, a solution of the Riccati equation is reached through iterative calculation. But many steps of iteration are sometimes required because of oscillation of iterative process.

In this paper, numerical error between left and right sides of matrix-type Riccati equation is treated as a criterion of convergence, and a filtering technique is presented to reduce the number of iterations. Furthermore, the appropriate value of filtering parameter is decided analytically on the basis of the way to get a solution through Lyapunov equation derived from Riccati equation.

Finally, the effectiveness of the results of this study is confirmed as well as improvement of efficiency of iterative process by parametric studies of numerical simulation.

Keywords : (Riccati equation, Lyapunov equation, optimal regulator, filtering, iterative error analysis)

1. 緒言

現代制御理論の最適レギュレータ問題の求解において中心的な役割を果たすリッカチ方程式に関しては、複数の解法が知られている。

その中でも、リッカチ方程式を変形してリアプノフ方程式に帰着させ、その解を反復計算によってリッカチ方程式の解に収束させる手法は収束の過程が振動的で、収束するまでの反復計算回数が大きくなるケースが存在する。

本稿では、収束過程のリッカチ方程式の左右両辺の差を収束誤差と見なし、収束判定のための基礎データとする。さらに、収束性の改善と反復計算回数の削減を目的として、リアプノフ方程式から得られる解析解（暫定解）に一次フィルターを適用する手法を提案し、適切なフィルター定数の決定を試みる。

最後に、適切なフィルター定数によってリッカチ方

程式の解への収束が加速され、精度も保たれることを数値シミュレーションで示す。

2. 最適レギュレータ

2.1 状態方程式と評価関数

最適制御理論では、制御対象の動特性が行列型の状態方程式で記される。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1)$$

n 行 m 列の行列を「 $n \times m$ 行列」と記述すると、 \mathbf{x} 、 \mathbf{u} はそれぞれ $n \times 1$ 状態ベクトルと $m \times 1$ 制御入力ベクトルで、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times m$ 係数行列である。

さらに、最適レギュレータ問題では、二次形式汎関数で構成される評価関数 J を定義し、これに基づいて制御の効果を判定・評価する。

^{*1} 新技術創成研究所 客員研究員

$$J = \int_0^{\infty} ({}^t x Q x + 2 {}^t x S u + {}^t u R u) dt \quad (2)$$

Q 、 S 、 R はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $m \times m$ の係数行列で、 Q は半正定対称行列、 R は正定対称行列である。

(2)式以降、ベクトルや行列の左肩の「 t 」は転置行列を表す。

2.2 リッカチ方程式とその解法

前節の最適レギュレータ問題では、最適性の原理¹⁾に基づいて、状態方程式(1)の拘束の下で、評価関数 J を最小化する制御入力ベクトル u が解析的に求められる。¹⁾ その結果、制御入力ベクトルの最適解は、行列形式のリッカチ方程式

$$(PB + S)R^{-1}({}^t B P + {}^t S) - PA - {}^t A P - Q = 0 \quad (3)$$

の解行列 P ($n \times n$ 対称行列) を用いて、以下のフィードバック制御として与えられる。¹⁾ 尚、(3)式の右辺は全成分がゼロのゼロ行列である。

$$u = -K_f x \quad (4)$$

$$K_f = R^{-1}({}^t B P + {}^t S) \quad (5)$$

本研究では、リッカチ方程式から導かれるリアプノフ方程式の求解を繰り返すことによって、解行列 P を決定する手法を用いる。即ち、

$$A_f = A - \frac{1}{2} B K_f \quad (6)$$

$$A_g = A_f - \frac{1}{2} B R^{-1} {}^t S \quad (7)$$

$$Q_g = Q - S R^{-1} {}^t S \quad (8)$$

とおくと、リッカチ方程式(3)は、以下のリアプノフ方程式に帰着する。

$$P A_g + {}^t A_g P + Q_g = 0 \quad (9)$$

さらに、リアプノフ方程式の解はテンソル積を用いて解析的に導くことができる²⁾。

$$\bar{P} = -(I \otimes {}^t A_g + {}^t A_g \otimes I)^{-1} \bar{Q}_g \quad (10)$$

但し、 I は単位行列で、 \otimes はテンソル積を表す。また、 \bar{Q}_g と \bar{P} は、行列 Q_g と行列 P の成分 q_{gij} 、 p_{ij} をそれぞれ一列に並べ替えた $n^2 \times 1$ ベクトルである。

$$\bar{Q}_g = ({}^t(q_{g11} \cdots q_{g12} \cdots q_{gn1} \cdots q_{gnn})) \quad (11)$$

$$\bar{P} = ({}^t(p_{11} \cdots p_{12} \cdots p_{n1} \cdots p_{nn})) \quad (12)$$

リアプノフ方程式の解行列は、解ベクトル \bar{P} の成分 p_{ij} を行列形式に戻すことによって得られる。

(5)～(7)式に示す通り、リアプノフ方程式(9)は、係数 A_g が K_f と A_f を介して解行列 P を含むため、非線形となる。リッカチ方程式の求解では、(5)～(10)式の反復計算によってリアプノフ方程式の解(暫定解)をその解に収束させなければならない。

3. リッカチ方程式求解過程の収束性改善

3.1 表記法

本稿では、行列の演算処理に関して以下の表記法を用いる。

(1) 行列の不等式

同じサイズの行列 F と G の成分をそれぞれ f_{ij} 、 g_{ij} とすると、全ての i 、 j に対して

$$f_{ij} \leq g_{ij} \quad (13)$$

が成り立つ時、記号「 \ll 」を用いて

$$F \ll G \quad (14)$$

と表記する。

(2) 行列の絶対値

行列 F の全ての成分の絶対値から成る行列を、記号「 $[[]]$ 」を用いて、以下の通り表記する。

$$[[F]] = (|f_{ij}|) \quad (15)$$

3.2 リッカチ方程式の近似解行列の平滑化

リッカチ方程式の求解において、近似解行列の反復計算が振動的になる時の収束性を改善するために、本研究では、反復過程 k において、リッカチ方程式の近似解行列 P_{k-1} に基づいて計算されたリアプノフ方程式の暫定解行列 \hat{P}_{k-1} を以下の一次フィルタにかける。

$$P_k = (1 - \lambda)P_{k-1} + \lambda\hat{P}_{k-1} \quad (16)$$

$$0 < \lambda \leq 1 \quad (17)$$

λ は、フィルタの特性を決めるスカラー定数である。

3.3 方程式誤差判定法

前述の反復計算の収束判定のために以下の収束判定条件を設定する。

反復過程 k におけるリッカチ方程式(3)の左辺を右辺のゼロ行列 $\mathbf{0}$ に対する誤差と考え、行列 P_k の関数

$$e(P_k) = (P_k B + S)R^{-1}({}^t B P_k + {}^t S) - P_k A - {}^t A P_k - Q \quad (18)$$

を導入する。さらに、全ての成分が同一の微小な正数 ε の $n \times n$ 行列 E を用いて、次式を収束判定条件とする。

$$\|e(P_k)\| \ll E \quad (19)$$

$$E = (\varepsilon) \quad (20)$$

3.4 方程式誤差

解行列 P の一次フィルタに倣って、(18)式の Q と S を書き替えると

$$Q = (1 - \lambda)Q + \lambda Q \quad (21)$$

$$S = (1 - \lambda)S + \lambda S \quad (22)$$

2.2 節のリッカチ方程式の求解において、 P_k の初期値 P_0 として対称行列を与えると P_{k-1} と \hat{P}_{k-1}

も対称行列となる。したがって、(18)式の $e(P_k)$ に(16)、(21)、(22)式を適用して計算を進めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} e(P_k) &= (1 - \lambda) \{ (P_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B P_{k-1} + {}^t S) \\ &\quad - P_{k-1} A - {}^t A P_{k-1} - Q \} \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda) (P_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B P_{k-1} + {}^t S) \\ &\quad + \lambda \{ (\hat{P}_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B \hat{P}_{k-1} + {}^t S) \\ &\quad \quad - \hat{P}_{k-1} A - {}^t A \hat{P}_{k-1} - Q \} \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda) (\hat{P}_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B \hat{P}_{k-1} + {}^t S) \\ &\quad + \lambda(1 - \lambda) (P_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B P_{k-1} + {}^t S) \\ &\quad + \lambda(1 - \lambda) (\hat{P}_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B P_{k-1} + {}^t S) \\ &= (1 - \lambda) \{ (P_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B P_{k-1} + {}^t S) \\ &\quad - P_{k-1} A - {}^t A P_{k-1} - Q \} \\ &\quad + \lambda \{ (\hat{P}_{k-1} B + S)R^{-1}({}^t B \hat{P}_{k-1} + {}^t S) \\ &\quad \quad - \hat{P}_{k-1} A - {}^t A \hat{P}_{k-1} - Q \} \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda) \times \\ &\quad \quad (P_{k-1} - \hat{P}_{k-1}) B R^{-1} {}^t B (P_{k-1} - \hat{P}_{k-1}) \\ &= (1 - \lambda) e(P_{k-1}) + \lambda e(\hat{P}_{k-1}) \\ &\quad \quad - \Delta e(P_{k-1}) \quad (23) \end{aligned}$$

但し、(23)式の右辺最終項 $\Delta e(P_{k-1})$ は次式で定義される。

$$\Delta e(P_{k-1}) = \lambda(1 - \lambda) \Delta P_{k-1} B R^{-1} {}^t B {}^t \Delta P_{k-1} \quad (24)$$

$$\Delta P_{k-1} = P_{k-1} - \hat{P}_{k-1} \quad (25)$$

3.5 フィルタ定数の決定

反復計算で求められるリッカチ方程式の近似解行列 P_k が解行列 P に収束する時、全ての成分が任意の微小な正数の行列 E に対して、 $k > k_m$ で収束判定条件(19)式を満足する適当な正の整数 k_m が存在する。

(5)～(7)式により、リアプノフ方程式(9)の係数 A_g は P_k の関数となるので、 k が k_m に比べて十分大きく P_k が P に収束する時、リアプノフ方程式(9)の暫定解行列 \hat{P}_k も P に収束し、同時に、方程式誤差 $e(P_{k-1})$ と $e(\hat{P}_{k-1})$ が共に(19)式の収束判定条件を満足する。

したがって、収束判定基準 E の成分 ε に対して

k を十分大きくとれば、次式が成り立つ。

$$\mathbf{[P}_{k-1} - \mathbf{P}] \ll \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{[\hat{P}_{k-1} - \mathbf{P}] \ll \mathbf{E}} \quad (26)$$

$$\mathbf{[e(P}_{k-1})] \ll \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{[e(\hat{P}_{k-1})] \ll \mathbf{E}} \quad (27)$$

さらに、(25)式の $\Delta \mathbf{P}_{k-1}$ は

$$\Delta \mathbf{P}_{k-1} = (\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}) - (\hat{\mathbf{P}}_{k-1} - \mathbf{P}) \quad (28)$$

と分解されるので、(26)式と(28)式より、次式が得られる。

$$-2\mathbf{E} \ll \Delta \mathbf{P}_{k-1} \ll 2\mathbf{E} \quad (29)$$

即ち、 $\Delta \mathbf{P}_{k-1}$ は高々 \mathbf{E} のオーダー（各成分が $\boldsymbol{\varepsilon}$ のオーダー）である。さらに、 $\Delta \mathbf{e(P}_{k-1})$ は(24)式より $\Delta \mathbf{P}_{k-1}$ と ${}^t \Delta \mathbf{P}_{k-1}$ の積の形をしているため、高々 \mathbf{E}^2 のオーダー（各成分が $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ のオーダー）となる。

一方、 \mathbf{E} は全ての成分 $\boldsymbol{\varepsilon}$ が微小な正数の行列なので

$$\mathbf{E}^2 \ll \mathbf{E} \quad (30)$$

が成立する。さらに、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ が十分小さければ、 \mathbf{E} や \mathbf{E}^2 の次数はそれらの係数よりはるかに大きく大小関係に寄与するので、次式が成り立つ。

$$-\mathbf{E} \ll \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \ll \mathbf{E} \quad (31)$$

(31)式の詳細な導出過程を付章に示す

他方、(23)式の右辺第一項と第二項に(27)式を適用することにより、 $\mathbf{e(P}_k)$ が収束判定条件(19)式を満足するための必要条件が、以下の通り導かれる。

$$-\mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \ll \mathbf{e(P}_k) \ll \mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \quad (32)$$

したがって、(19)式の十分条件を求めるために、

$$-\mathbf{E} \ll -\mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \ll \mathbf{e(P}_k) \ll \mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \ll \mathbf{E} \quad (33)$$

とおくと、収束判定条件(19)式が(32)式を包含する。(33)式は(19)式の十分条件ではあるが、(19)式は、必ずしも(33)式の両端の不等式を成り立たせることができない。したがって、(33)式は(19)式の必要十分条件にはなり得ない。

(33)式が(19)式の十分条件となる要件をさらに詳細に分析するために、以下の2通りの場合に分けて解析を進める。

(1) (33)式の右端の不等式が成立する場合

$$\mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \ll \mathbf{E} \quad (34)$$

即ち

$$\mathbf{0} \ll \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \quad (35)$$

の場合は、(31)式を考慮して

$$\mathbf{0} \ll \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \ll \mathbf{E} \quad (36)$$

したがって、(32)式から次式が得られる。

$$-2\mathbf{E} \ll \mathbf{e(P}_k) \ll \mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \quad (37)$$

さらに、(37)式と(27)の第一式との共通部分をとると、 k が十分大きければ、

$$-\mathbf{E} \ll \mathbf{e(P}_k) \ll \mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \quad (38)$$

が成り立つ。

尚、(36)式を考慮すると、(38)式は以下の通り表記することができる。

$$-\mathbf{E} \ll \mathbf{e(P}_k) \ll \mathbf{[E - [\Delta \mathbf{e(P}_{k-1})]]} \quad (39)$$

(2) (33)式の左端の不等式が成立する場合

$$-\mathbf{E} \ll -\mathbf{E} - \Delta \mathbf{e(P}_{k-1}) \quad (34)'$$

即ち

$$\Delta e(\mathbf{P}_{k-1}) \ll \mathbf{0} \quad (35)'$$

の場合は、同じく(31)式を考慮して

$$-\mathbf{E} \ll \Delta e(\mathbf{P}_{k-1}) \ll \mathbf{0} \quad (36)'$$

したがって、(32)式から次式が得られる。

$$-\mathbf{E} - \Delta e(\mathbf{P}_{k-1}) \ll e(\mathbf{P}_k) \ll 2\mathbf{E} \quad (37)'$$

さらに、(37)'式と(27)の第一式との共通部分をとると、 \mathbf{k} が十分大きければ、

$$-\mathbf{E} - \Delta e(\mathbf{P}_{k-1}) \ll e(\mathbf{P}_k) \ll \mathbf{E} \quad (38)'$$

が成り立つ。

尚、(36)'式を考慮すると、(38)'式は以下の通り表記することができる。

$$-[\mathbf{E} - \Delta e(\mathbf{P}_{k-1})] \ll e(\mathbf{P}_k) \ll \mathbf{E} \quad (39)'$$

(39)式と(39)'式は、いずれも

$$[\mathbf{E} - \Delta e(\mathbf{P}_{k-1})] \text{ の成分} \rightarrow \min \quad (40)$$

の時、 $e(\mathbf{P}_k)$ の各成分が取り得る値の範囲が最小となることを示している。さらに、(31)式を考慮すると、(40)式の左辺が最小になるのは、 $[\Delta e_1(\mathbf{P}_{k-1})]$ の成分が最大の時である。即ち、

$$[\Delta e(\mathbf{P}_{k-1})] \text{ の成分} \rightarrow \max \quad (41)$$

一方、(17)式を考慮すると、(24)式より

$$[\Delta e(\mathbf{P}_{k-1})] = \lambda(1-\lambda)[\Delta \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} {}^t \mathbf{B} {}^t \Delta \mathbf{P}_{k-1}] \quad (42)$$

したがって、(40)~(42)式より、誤差行列 $e(\mathbf{P}_k)$

の各成分が取り得る値の範囲を最小化するための条件が、以下の通り導かれる。

$$\begin{aligned} & \min_{0 < \lambda \leq 1} [[\mathbf{E} - \Delta e(\mathbf{P}_{k-1})]] \text{ の成分} \\ & \leftrightarrow \max_{0 < \lambda \leq 1} [[\Delta e(\mathbf{P}_{k-1})] \text{ の成分}] \\ & \leftrightarrow \max_{0 < \lambda \leq 1} [\lambda(1-\lambda)] \end{aligned} \quad (43)$$

但し、(43)式の記号「 \leftrightarrow 」は両辺が等価、即ち、互いに必要十分条件であることを示す。

(43)式より $\lambda(1-\lambda)$ の値が大きいく程、近似解行列 \mathbf{P}_k の誤差行列 $e(\mathbf{P}_k)$ のすべての成分について、取り得る値がゼロを含む小さな範囲に抑えられ、その結果、収束が加速される。したがって

$$\frac{d}{d\lambda} [\lambda(1-\lambda)] = 1 - 2\lambda = 0 \quad (44)$$

によって、適切なフィルタ一定数が、以下の通り決定される。

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (45)$$

収束判定条件(19)式が成り立てば(32)式が成り立つ。しかしながら、(35)式および(35)'式の場合とは別に、 $\Delta e(\mathbf{P}_{k-1})$ の成分に正数と負数が混在する第3の場合が存在するので、その逆は成立しない。したがって、(32)式は(19)式の必要条件ではあるが必要十分条件ではない。それ以降も同様に、必要十分ではない不等式の包含関係を用いて方程式誤差 $e(\mathbf{P}_k)$ が取り得る値の範囲(39)式と(39)'式を導いているので、その結果に基づいて得られる(45)式は、必ずしも、収束判定条件を満足するまでの反復計算回数を最小化するとは限らないことに注意を要する。

4. 数値シミュレーション

4.1 シミュレーションモデル

本研究で得られたフィルタ一定数決定の妥当性を確認するために、以下の2種類の供試モデルを与えて数値シミュレーションを実施した。

(1) 物理系モデル

本研究は制御系への適用を最終目的としてい

るため、供試モデルとして大型コンテナ船の操縦運動の無次元化された状態方程式と評価関数の係数行列³⁾を与えた。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.35379 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5727671 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5214831 & -0.068985 \\ -0.068985 & 7.3034409 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.0606479 \\ -3.21442 \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$R = 13.272945 \quad (50)$$

(2) 追加モデル

本研究成果の適用可能範囲を確認するために、以下の状態方程式と評価関数の係数行列についても数値シミュレーションを実施した。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$R = 1 \quad (55)$$

尚、反復計算における近似解行列 P_k の初期値は単位行列とした。

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

次に、フィルター定数として、 λ を(17)式の範囲で 0.1 刻みで与え、収束判定条件を満足した時の反復計算回数 N と近似解行列 P_N および誤差行列 $[[e(P_N)]]$ を比較した。

計算は倍精度浮動小数点で行い、収束判定基準 E は、誤差行列 $[[e(P_N)]]$ の全ての成分が「絶対誤差 10^{-8} 未満」として、以下の通り与えた。

$$E = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 10^{-8} \\ 10^{-8} & 10^{-8} \end{pmatrix} \quad (57)$$

4.2 シミュレーション結果と考察

物理系供試モデルに対して、Table. 1 に、フィルター定数 λ に対する収束判定条件を満足した時の反復計算回数 N と誤差行列 $e(P_N)$ の成分 e_{ij} の最大絶対値および近似解行列 P_N を示す。

また、Fig. 1 に λ に対する反復計算回数 N と誤差行列の成分の絶対値 $|e_{ij}|$ を対数目盛で示す。尚、図中の各系列の最小値を塗りつぶしのマーカー「●」で示す。

- (1) Table. 1 より、反復計算回数は $\lambda = 0.5 \sim 0.7$ で小さく、 $\lambda = 0.6$ で最小となることが分かる。また、 λ の全ての範囲で、収束判定条件を満足した時の近似解行列 P_N の表示値は変わらない(厳密には小数点下 8 桁目以下で差が生じた)。
- (2) フィルター無に相当する $\lambda = 1.0$ の場合に比べて、 $\lambda = 0.5 \sim 0.7$ の場合は収束計算の反復計算回数が 9.5 ~ 9.6% 減少しており、フィルタリングによる収束性改善の効果が得られている。
- (3) Table. 1 および Fig. 1 より誤差行列の全ての成分が「絶対誤差 10^{-8} 未満」を満足し、 $|e_{22}|$ が $\lambda = 0.5$ で最小となる一方、 $|e_{11}|$ は $\lambda = 0.4$ と $\lambda = 0.5$ で、また、 $|e_{12}|$ は $\lambda = 0.8$ で最小となることが分かる。

Table.1 反復計算回数と解行列 (1)

フィルター定数 (λ)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
反復回数 (N)	174	82	51	36	26	17	23	36	78	479
$ e_{ij} $ 最大値	9.21E-09	9.06E-09	9.20E-09	6.34E-09	6.20E-09	6.65E-09	9.47E-09	6.44E-09	8.90E-09	9.87E-09
収束解 (P_N)	$\begin{pmatrix} 3.041322 & 4.487424 \\ 4.487424 & 17.80902 \end{pmatrix}$									

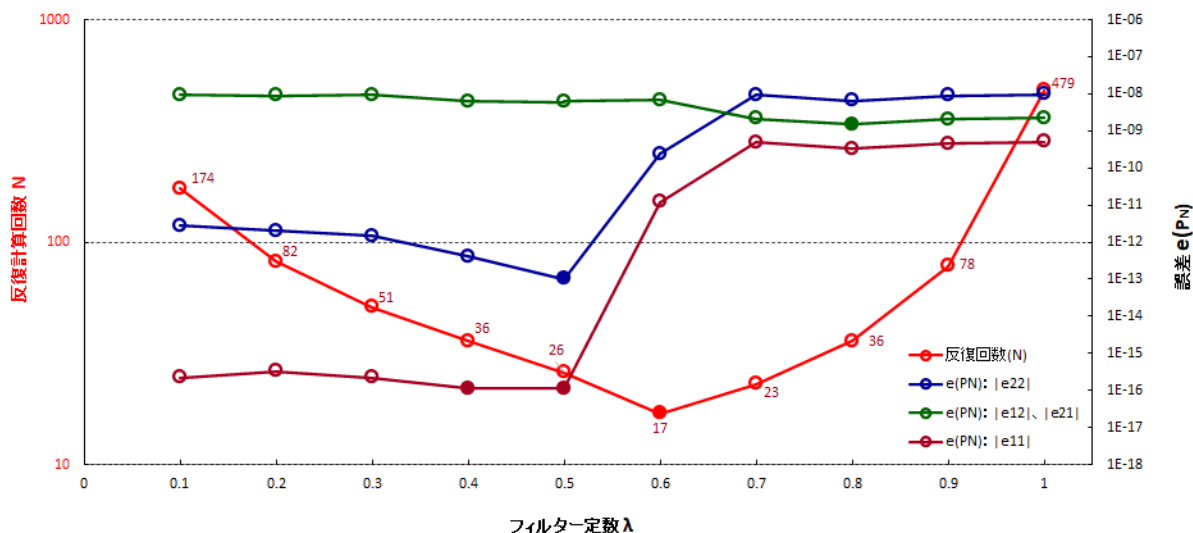


Fig.1 リッカチ解収束のための反復計算回数と誤差 (1)

(4) 以上の結果、反復計算回数の減少と収束判定条件を満足した時の近似解の精度を併せた総合評価として、(45)式の $\lambda = 0.5$ は、反復計算回数最小化のための最適解ではないが、適切な値と考えることができる。

さらに、Fig.2 に、 $\lambda = 1.0$ (フィルタリング無)の場合と $\lambda = 0.5$ の場合の近似解行列の成分 p_{11} の収束過程を示す。図中の塗りつぶしのマーカー「▲」は収束判定条件を満足した時の反復回数 N に対応する。

(5) 同図より、 $\lambda = 0.5$ の場合は、フィルタリング無の場合に比べて収束過程の振動が大幅に抑えられ、収束性が向上していることが分かる。近似解行列の成分 $p_{12}(p_{21})$ と p_{22} でもフィルタリング無の場合は振動が激しく、フィルタリングによる収束性の改善を確認することができた。

次に、追加供試モデルに対して、Table.2 にフィルター定数 λ に対する収束判定条件を満足した時の反復計算回数 N と誤差行列 $e(P_N)$ の成分 e_{ij} の最大絶対値および近似解行列 P_N を示す。

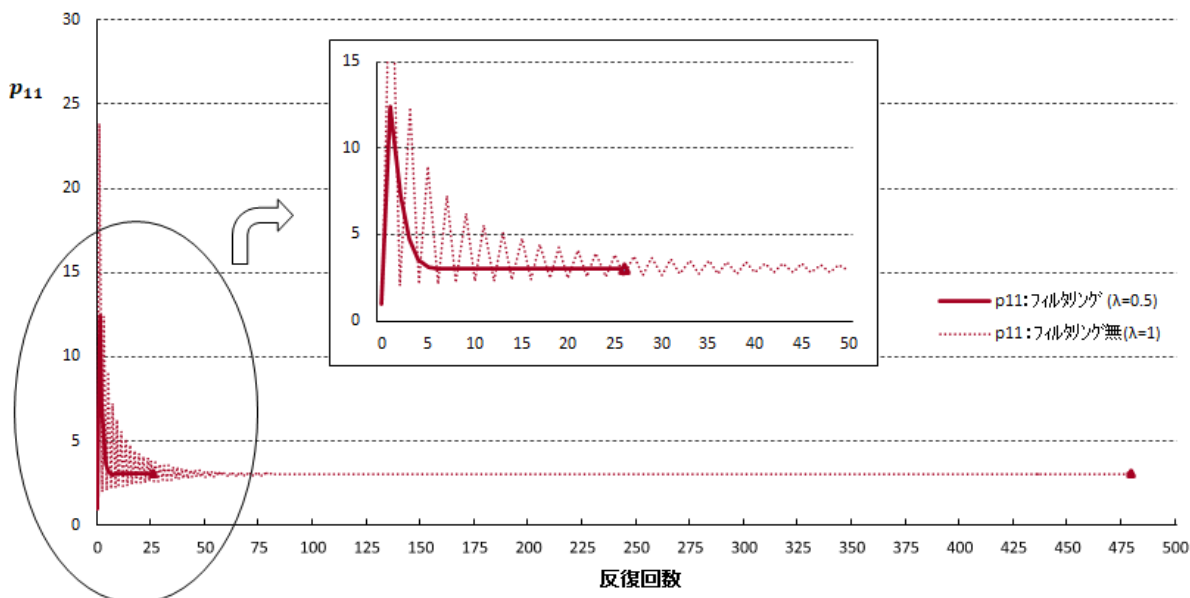


Fig.2 リッカチ近似解の収束性比較 (1)

また、Fig. 3 に λ に対する反復計算回数 N と誤差行列の成分の絶対値 $|e_{ij}|$ を対数目盛で、Fig. 4 に近似解行列の成分 p_{11} の収束過程の比較を示す。
 (6) 追加供試モデルでは、フィルター無の場合の反

復過程における振動の特徴が物理系供試モデルとは異なるが、この場合も、適切なフィルター定数によって、フィルター無の場合に比べ、反復計算回数が80~90%減少する。

Table.2 反復計算回数と解行列 (2)

フィルター定数 (λ)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
反復回数 (N)	218	103	65	45	33	25	19	32	59	158
$ e_{ij} $ 最大値	9.08E-09	8.84E-09	7.04E-09	8.12E-09	8.11E-09	5.93E-09	6.99E-09	6.59E-09	8.39E-09	8.72E-09
収束解 (P_N)	$\begin{pmatrix} -36.55976 & -44.75780 \\ -44.75780 & -40.36894 \end{pmatrix}$									

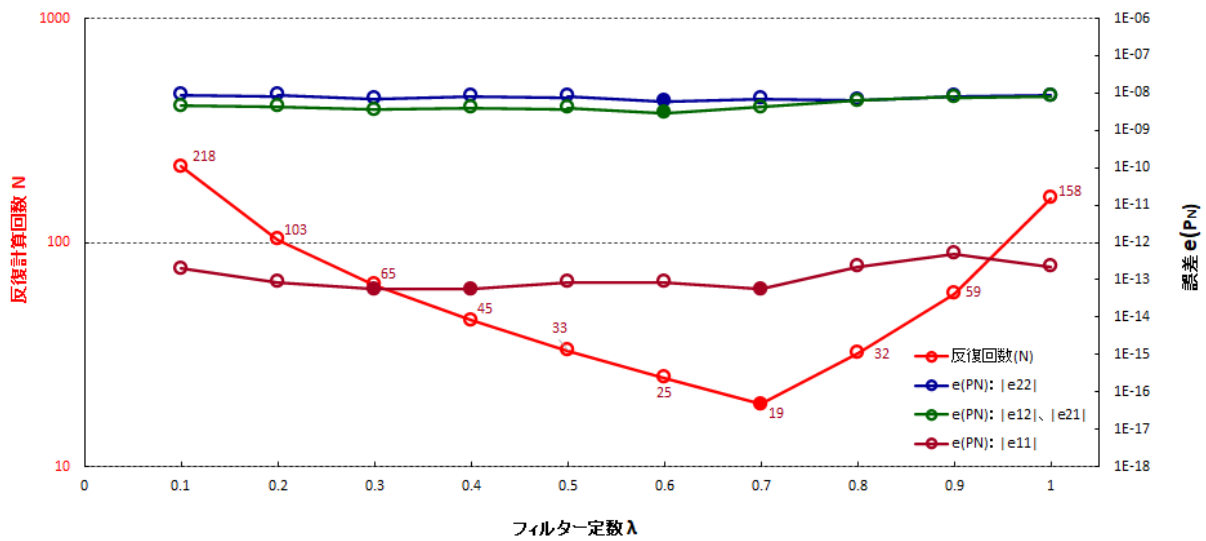


Fig.3 リッカチ解収束のための反復計算回数と誤差 (2)

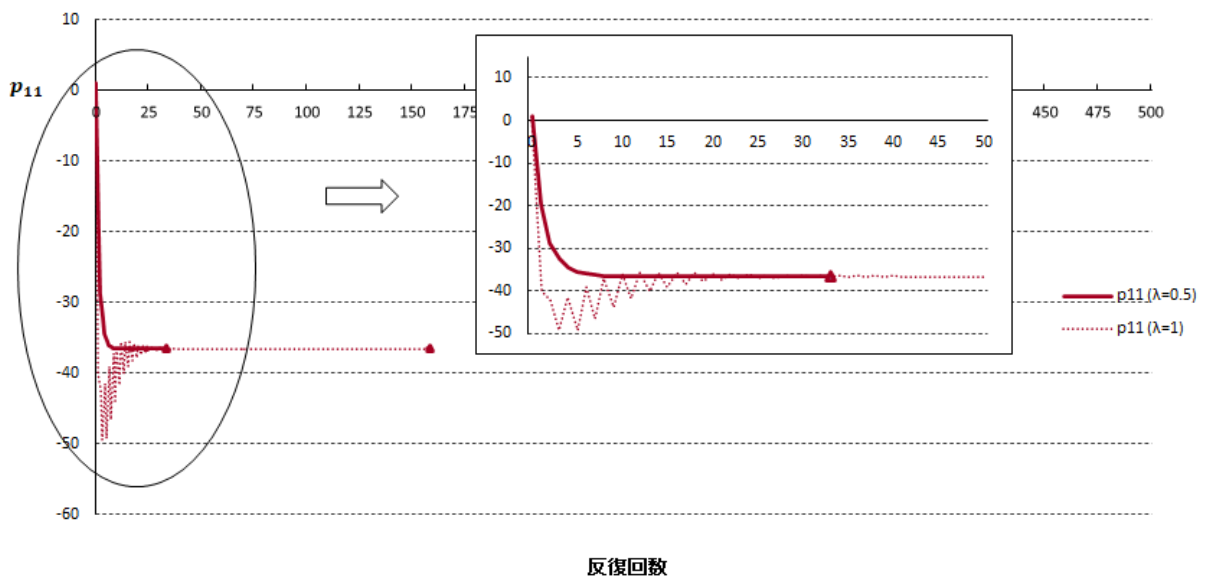


Fig.4 リッカチ近似解の収束性比較 (2)

5. まとめ

最適制御理論の最適レギュレータ問題を解く上で中心的な役割を果たす行列型のリッカチ方程式の解法として、リアプノフ方程式に変換し反復計算によって近似解を収束させる手法を取り上げ、特に、反復過程が振動的になる場合の収束性の改善について考察した。

そのために、反復過程の近似解をフィルタリングすると共に、誤差行列をリッカチ方程式の左辺と右辺の差で定義し、取り得る値をゼロ行列を含む範囲に極小化することによって収束を加速させるフィルタ一定数の決定方法を解析的に示した。

最後に、大型コンテナ船の無次元化された操縦運動とさらに1件の供試モデルを与えて、数値シミュレーションによるパラメトリックスタディを行い、解析結果を検証した。その結果、リッカチ方程式の求解に伴う反復過程が振動的になる場合には、フィルタ出力の近似解行列が前ステップの近似解行列とリアプノフ方程式の暫定解行列の相加平均となるようにフィルタ一定数を決定($\lambda = 0.5$)することによって、反復計算回数が80~95%低減され、近似解行列が急激に収束することを確認することができた。さらに、収束判定条件を満足した時の近似解行列に生じる、フィルタリングに起因する誤差も収束判定基準と同じオーダーで、実用的には無視できるほど小さく、リッカチ方程式の解行列として十分な精度が得られることが明らかとなった。その結果、解析の実効性が検証されると共に、フィルタリング処理の適用による収束性改善の糸口を見つけることができた。

本研究で決定されるフィルタ一定数の解析には、その導出過程で、必要十分にはならない不等式の包含関係を適用しているため、収束判定条件を満足するまでの反復計算回数最小化を保証するものではない。しかしながら、数値シミュレーション結果は、本研究で提案した手法によってリッカチ方程式の近似解行列の収束が加速され、その精度も実用的に問題ないことを示している。因みに、本研究で決定された「適切な」フィルタ一定数と反復計算回数を最小化する「最適な」フィルタ一定数との差は、供試モデルに起因すると考えられる。

尚、収束計算の一つの過程において、係数行列が与

えられた上で、リアプノフ方程式の暫定解行列を得る手順は完全に解析的かつ厳密な手続きで、暫定解行列を導くための一つ的手段に過ぎない。本研究の核心部分は、収束過程におけるリッカチ方程式の近似解行列のフィルタリングと収束判定の基礎データとしての方程式誤差の定義およびその解析に基づくフィルタ一定数の決定に在る。

制御工学の一分野である適応制御技術では、制御対象の特性パラメータの変動や外部の環境条件の持続的な変化に瞬時に対応して、コントローラを自動調整するリアルタイムの処理が要求される。したがって、制御系調整の演算量を削減し、処理時間に伴うシステムの負荷を軽減しなければならない。

リッカチ方程式は最適レギュレータ問題で制御パラメータを決定するための最も基本となる方程式である。最適制御理論の実プロセスへの適用の事例も増えつつある現在、本研究で得られた成果は、リアルタイムシステムに組み込まれる実時間処理にとって特に有用性が大きいと思われる。

参考文献

- 1) 坂和：最適システム制御論、コロナ社(1972) p. 6-30
- 2) P. Benner, J. Saak: "A Galerkin-Newton-ADI Method for Solving Large-Scale Algebraic Riccati Equations" Preprint-Number SPP1253-090, Deutsche Forschungsgemeinschaft(2010.1)
- 3) 金丸：船舶の航海最適化技術の改良、長崎総合科学大学紀要(2019)第59巻、第2号 p. 47-60

付章 $\Delta e(P_{k-1})$ が取り得る値の範囲

付章では、 f_{ij} を成分とする n 行 m 列の行列を $(f_{ij})_{nm}$ と表記する。

一般に、行列 $F = (f_{ij})_{nm}$ と $G = (g_{ij})_{ml}$ に対して、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} [FG] &= ([\sum_j f_{ij} g_{jk}])_{nl} \\ &\ll ([\sum_j |f_{ij}| |g_{jk}|])_{nl} = [F][G] \end{aligned} \quad (58)$$

一方、(42)式および(29)式より、

$$\begin{aligned} \llbracket \Delta \mathbf{e}(\mathbf{P}_{k-1}) \rrbracket &= \lambda(1-\lambda) \llbracket \Delta \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} {}^t \mathbf{B} {}^t \Delta \mathbf{P}_{k-1} \rrbracket \\ &\quad (42) \end{aligned}$$

$$\llbracket \Delta \mathbf{P}_{k-1} \rrbracket \ll 2\mathbf{E} \quad (29)'$$

(63)式より(31)式が導かれる。

$$-\mathbf{E} \ll \Delta \mathbf{e}(\mathbf{P}_{k-1}) \ll \mathbf{E} \quad (31)$$

さらに、全ての成分が $\mathbf{1}$ の行列 $(\mathbf{1})_{nn}$ を用いて

$$\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} {}^t \mathbf{B} = (c_{ij})_{nn} \quad (59)$$

$$\mathbf{E} = (\varepsilon)_{nn} = \varepsilon(\mathbf{1})_{nn} \quad (20)'$$

とおき、(42)式に(58)式および(29)'、(20)'式を適用すると、

$$\begin{aligned} \llbracket \Delta \mathbf{e}(\mathbf{P}_{k-1}) \rrbracket &\ll \lambda(1-\lambda) \llbracket \Delta \mathbf{P}_{k-1} \rrbracket \llbracket \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} {}^t \mathbf{B} {}^t \Delta \mathbf{P}_{k-1} \rrbracket \\ &\ll \lambda(1-\lambda) \llbracket \Delta \mathbf{P}_{k-1} \rrbracket \llbracket \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} {}^t \mathbf{B} \rrbracket \llbracket {}^t \Delta \mathbf{P}_{k-1} \rrbracket \\ &\ll \lambda(1-\lambda) \llbracket 2\varepsilon(\mathbf{1})_{nn} \rrbracket \llbracket (c_{ij})_{nn} \rrbracket \llbracket 2\varepsilon(\mathbf{1})_{nn} \rrbracket \\ &= 4\varepsilon^2 \lambda(1-\lambda) (\mathbf{1})_{nn} (|c_{ij}|)_{nn} (\mathbf{1})_{nn} \\ &= 4\varepsilon^2 \lambda(1-\lambda) (\mathbf{1})_{nn} (\sum_j |c_{ij}|)_{nn} \\ &= 4\varepsilon^2 \lambda(1-\lambda) (\sum_i \sum_j |c_{ij}|)_{nn} \\ &= 4\varepsilon^2 \lambda(1-\lambda) (\sum_i \sum_j |c_{ij}|) (\mathbf{1})_{nn} \\ &= 4\varepsilon \lambda(1-\lambda) (\sum_i \sum_j |c_{ij}|) \mathbf{E} \quad (60) \end{aligned}$$

他方、(17)式の下では、

$$0 \leq \lambda(1-\lambda) \leq \frac{1}{4}$$

が成り立つので、(60)式より

$$\llbracket \Delta \mathbf{e}(\mathbf{P}_{k-1}) \rrbracket \ll \varepsilon (\sum_i \sum_j |c_{ij}|) \mathbf{E} \quad (61)$$

したがって、任意の微小な正数 ε を

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\sum_i \sum_j |c_{ij}|} \quad (62)$$

の範囲で十分小さくとると、次式が成り立つ。

$$\llbracket \Delta \mathbf{e}(\mathbf{P}_{k-1}) \rrbracket \ll \mathbf{E} \quad (63)$$