

BEBERAPA KELAS GRAF RAMSEY MINIMAL UNTUK LINTASAN P_3 VERSUS P_5

Desi Rahmadani^{1*}, Hilda Assiyatun², Mohammad Agung¹

¹Jurusan Matematika, Universitas Negeri Malang

²Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung

Email : desi.rahmadani.fmipa@um.ac.id (D. Rahmadani), hilda@math.itb.ac.id (H. Assiyatun),

mohammad.agung.fmipa@um.ac.id (M. Agung)

* Corresponding Author

Abstract

In 1930, Frank Plumpton Ramsey has introduced Ramsey's theory, in his paper titled *On a Problem of Formal Logic*. This study became more popular since Erdős and Szekeres applied Ramsey's theory to graph theory. Suppose given the graph F , G and H . The notation $F \rightarrow (G, H)$ states that for any red-blue coloring of the edges of F implies F containing a red subgraph of G or a blue subgraph of H . The graph F is said to be the Ramsey graph for graph G versus H (pair G and H) if $F \rightarrow (G, H)$. Graph F is called Ramsey minimal graph for G versus H if first, $F \rightarrow (G, H)$ and second, F satisfies the minimality property i.e. for each $e \in E(F)$, then $F - e \not\rightarrow (G, H)$. The class of all Ramsey (G, H) minimal graphs is denoted by $\mathcal{R}(G, H)$. The class $\mathcal{R}(G, H)$ is called Ramsey infinite or finite if $\mathcal{R}(G, H)$ is infinite or finite, respectively. The study about Ramsey minimal graph is still continuously being developed and examined, although in general it is not easy to characterize or determine the graphs included in the $\mathcal{R}(G, H)$, especially if $\mathcal{R}(G, H)$ is an infinite Ramsey class. The characterization of graphs in $\mathcal{R}(P_3, P_3)$ has been obtained. However, the characterization of graphs in $\mathcal{R}(P_m, P_n)$, for every $3 \leq m < n$ is still open. In this article, we will determine some infinite classes of Ramsey minimal graphs for paths P_3 versus P_5 .

Keywords: Path, Ramsey minimal graph, an infinite graph class

Submitted: 02 October 2020; Revised: 12 November 2020; Accepted Publication: 18 December 2020;

Published Online: January 2021

DOI: [10.17977/um055v2i1p14-18](https://doi.org/10.17977/um055v2i1p14-18)

PENDAHULUAN

The Teori Ramsey pertama kali diperkenalkan oleh Frank Plumpton Ramsey [1] dalam makalahnya yang berjudul *On a problem of formal logic*. Makalah tersebut memperkenalkan suatu teorema yang dikenal dengan teorema Ramsey. Teori Ramsey mengkaji keberadaan dari suatu keteraturan dalam setiap ketakteraturan. Dengan kata lain ketakteraturan sempurna adalah tidak mungkin. Dalam [2] disebutkan bahwa teori Ramsey banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu seperti dalam teori bilangan seperti teorema Vander Waerden, aljabar, geometri, topologi, teori himpunan, logika, teori informasi dan ilmu komputer. Graham dkk.[3] menyebutkan bahwa terdapat beberapa teorema yang serupa dengan teorema Ramsey di atas, diantaranya: teorema Van der Waerden, teorema Schur dan teorema Rado pada teori bilangan, serta teorema Graham-Leeb-Rothschild pada ruang metrik dimensi- n . Teorema-teorema di atas sesungguhnya memberikan informasi tentang eksistensi keteraturan dalam ketidakteraturan.

Erdos dan Szekeres [4] mengaplikasikan teori Ramsey ke dalam teori graf yang membuat teori ini menjadi semakin terkenal dan berkembang. Tiga kajian utama dalam teori graph yang merupakan hasil pengembangan teori Ramsey adalah penentuan bilangan Ramsey, bilangan Ramsey sisi dan graf Ramsey minimal. Konsep graf Ramsey minimal dibahas pertama kali oleh Burr dkk.[5] pada tahun 1976. Misalkan G dan H adalah graf-graf sederhana. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F menyebabkan F memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H . Graf F disebut graf Ramsey minimal untuk G versus H jika memenuhi $F \rightarrow (G, H)$ dan untuk setiap $e \in E(F)$ berlaku $F - e \not\rightarrow (G, H)$. Kelas dari semua graf Ramsey (G, H) -minimal dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G, H)$. Permasalahan utama dalam kajian graf Ramsey (G, H) -minimal adalah karakterisasi atau penentuan semua graf yang termasuk dalam kelasnya. Secara umum pengkarakterisasian semua graf F dalam kelas $\mathcal{R}(G, H)$ adalah hal yang sukar dilakukan, sekalipun untuk graf G dan H yang sederhana dan berukuran kecil. Berdasarkan kardinalitasnya, kelas graf Ramsey minimal dibedakan menjadi

dua yakni Ramsey berhingga dan Ramsey tak berhingga. Kelas $\mathcal{R}(G, H)$ dikatakan berhingga (takberhingga) jika banyak graf yang merupakan anggota kelas tersebut adalah berhingga (tak berhingga).

Misalkan G adalah suatu graf sederhana. Lintasan (*path*) dengan n titik pada graf G adalah jalan yang melewati tepat satu kali n titik yang berbeda. Graf lintasan dengan n titik adalah graf yang berupa lintasan, dinotasikan dengan P_n . Graf siklus (*cycle*) dengan n titik adalah graf lintasan tertutup (titik awal dan akhir sama). Sebarang notasi atau istilah yang tidak dijelaskan pada artikel ini, dapat dilihat pada [6]. Beberapa peneliti telah mengkaji penentuan graf Ramsey (P_3, P_n) –minimal dan diperoleh graf-graf maupun kelas tak berhingga graf anggota $\mathcal{R}(P_3, P_n)$. Pasangan trivial $\mathcal{R}(P_2, H)$ adalah Ramsey tak berhingga karena $\mathcal{R}(P_2, H) = \{H\}$. Burr dkk.[5] mengkarakterisasi semua graf di $\mathcal{R}(P_3, P_3) = \{K_{1,3}, C_{2n+1}, \text{ for } n \geq 1\}$. Yulianti dkk.[7] menentukan graf maupun kelas graf di $\mathcal{R}(P_3, P_4)$. Rahmadani dkk.[8-9] meneruskan penentuan graf maupun kelas-kelas graf di $\mathcal{R}(P_3, P_t)$, untuk setiap $t \geq 5$. Mereka juga memberikan sifat-sifat graf anggota $\mathcal{R}(P_s, P_t)$, untuk $4 \leq s \leq t$. Tetapi karena tingkat kesulitan yang cukup tinggi, karakterisasinya $\mathcal{R}(P_s, P_t)$, untuk $3 \leq s < t$ masih menjadi masalah terbuka sampai saat ini. Pada artikel ini, akan ditentukan beberapa kelas tak berhingga graf Ramsey minimal untuk lintasan P_3 versus P_5 .

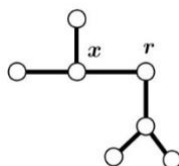
METODE

Semua graf yang diberikan dalam artikel ini ditentukan secara analitik. Dengan menggunakan sifat-sifat graf Ramsey untuk pasangan lintasan yang telah diperoleh sebelumnya, kami konstruksi graf-graf Ramsey minimal untuk kelas lintasan P_3 versus P_5 . Kebenaran dari graf-graf hasil konstruksi tersebut dibuktikan dengan menggunakan dua properti graf Ramsey (P_3, P_5) -minimal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan diberikan dua kelas tak berhingga untuk graf Ramsey minimal pasangan lintasan P_3 dan P_5 . Kedua kelas tak berhingga ini adalah kelas graf pohon dan kelas graf unisiklik (graf yang memuat tepat satu siklus).

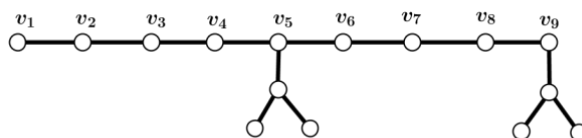
Diberikan pohon-pohon H_1 seperti pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Graf H_1

Definisi 1. Misalkan i dan j adalah dua bilangan bulat positif dengan $i \geq 3$ dan $j \geq 5$. Graf P_{2i+1}^* adalah suatu pohon yang dikonstruksi dari suatu lintasan $P_{2i+1} = v_1, v_2, \dots, v_{2i+1}$ dan $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor K_{1,2}$, sehingga untuk setiap bilangan ganjil $j \geq 3$ selain $j = 2i + 1$ berlaku setiap titik v_j untuk $j \equiv 1 \pmod{4}$ dihubungkan ke titik pusat dari suatu $K_{1,2}$.

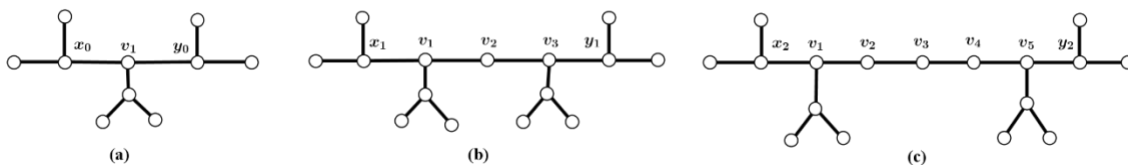
Sebagai contoh, diberikan P_9^* seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf P_9^*

Misalkan \mathfrak{S}_5 adalah suatu keluarga tak berhingga dari pohon yang terdiri dari:

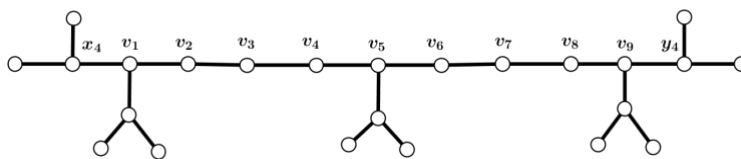
1. Graf-graf $T_5(0)$, $T_5(1)$, dan $T_5(2)$ seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. (a). $T_5(0)$ (b). $T_5(1)$ (c). $T_5(2)$

2. Graf-graf $T_5(i)$, untuk setiap $i \geq 3$, adalah pohon yang dikonstruksi dengan menggabungkan dua graf H_1 dengan suatu P_{2i+1}^* dengan masing-masing titik ujung dari P_{2i+1}^* ditempelkan ke suatu akar dari H_1 . Titik yang bertetangga dengan v_1 dinamakan x_i dan titik yang bertetangga dengan v_{2i+1} dinamakan dengan y_i .

Sebagai ilustrasi, diberikan pohon $T_5(4)$ seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf $T_5(4)$

Teorema 1. Misalkan G adalah sebarang graf pada \mathfrak{S}_5 , maka $G \in \mathcal{R}(P_3, P_5)$.

Bukti. Pertama, dibuktikan $T_5(i) \rightarrow (P_3, P_5)$ untuk setiap bilangan bulat $i \in [0, 2]$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi pohon $T_5(i)$. Andaikan tidak ada P_3 merah. Amati bahwa jarak setiap dua titik penda tanpa suatu titik bersama adalah lebih dari tiga. Pada $T_5(0)$, paling sedikit satu dari sisi $\{x_0 v_1, y_0 v_1\}$ harus biru. Akibatnya, mudah dilihat bahwa ada lintasan P_5 biru di $T_5(0)$. Jadi, $T_5(0) \rightarrow (P_3, P_5)$. Pada $T_5(1)$, jika salah satu dari sisi $\{x_1 v_1, y_1 v_3\}$ adalah biru, maka selalu ada lintasan P_5 biru yang memuat sisi biru tersebut di $T_5(1)$. Sebaliknya, jika kedua sisi tersebut merah, maka dua sisi yang terkait dengan v_2 harus biru. Akibatnya, suatu lintasan panjang enam dengan ujung-ujungnya titik penda dan memuat v_2 memuat lintasan P_5 biru. Oleh karena itu, $T_5(1) \rightarrow (P_3, P_5)$.

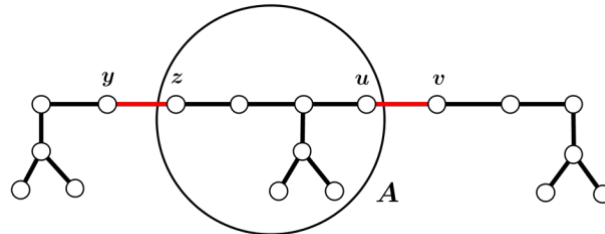
Serupa dengan pembuktian pada $T_5(1)$, jika paling sedikit satu dari sisi $\{x_2 v_1, y_2 v_4\}$ biru, maka selalu ada lintasan P_5 biru di $T_5(2)$. Jika kedua sisi $\{x_2 v_1, y_2 v_4\}$ merah, maka salah satu sisi yang terkait dengan v_3 harus biru. Perhatikan bahwa jarak v_3 terhadap sebarang titik penda pada $T_5(2)$ adalah empat. Akibatnya, sisi-sisi biru yang menghubungkan v_3 dengan suatu titik penda membentuk suatu lintasan P_5 biru. Oleh karena itu, $T_5(2) \rightarrow (P_3, P_5)$. Kedua, dibuktikan untuk sebarang $e \in E(T_5(i))$ berlaku $T_5(i) - e \not\rightarrow (P_3, P_5)$. Untuk $i = 0$, jika e adalah sisi yang terkait dengan x_0 , maka warnai $v_1 y_0$ dengan merah. Kemudian warnai sisi $x_1 v_1$ dengan merah. Pandang dua subpohon yang diperoleh dari $T_5(2) \setminus \{v_2\}$. Jika e adalah sebarang sisi yang berada pada subpohon yang sama dengan x_2 , maka warnai $v_1 v_2$ dan $v_3 y_2$ dengan merah. Jika e adalah sebarang sisi pada subpohon yang sama dengan y_2 , maka warnai $v_2 v_3$ dan $v_1 x_2$ dengan merah. Jika e adalah sisi yang terkait dengan v_2 , maka warnai sisi-sisi $x_2 v_1$ dan $v_3 y_2$ dengan merah.

Pandang tiga subpohon yang diperoleh dari $T_5(2) \setminus \{v_1 v_2, v_4 v_5\}$. Jika e adalah sebarang sisi yang berada pada subpohon yang sama dengan x_3 , maka warnai $v_1 v_2, v_3 v_4$ dan $v_5 y_3$ dengan merah. Jika e adalah sebarang sisi pada subpohon yang sama dengan y_3 , maka warnai $x_3 v_1, v_2 v_3$ dan $v_4 v_5$ dengan merah. Jika $e \in \{v_1 v_2, v_2 v_3\}$, maka warnai $x_3 v_1, v_5 y_3$ dan $v_3 v_4$ dengan merah. Jika $e \in \{v_3 v_4, v_4 v_5\}$, maka warnai $x_3 v_1, v_5 y_3$ dan $v_2 v_3$ dengan merah. Sebagai tambahan, jika e adalah sebarang sisi penda pada $T_5(i)$, maka warnai juga sisi penda lain yang memiliki titik bersama dengan e dengan merah.

Untuk masing-masing pewarnaan di atas, warnai sisi sisanya dengan biru. Pewarnaan ini mengakibatkan $T_5(i) - e$ tidak memuat P_3 merah maupun P_5 biru, untuk sebarang $e \in E(T_5(i))$. Oleh karena itu, $T_5(i) \in \mathcal{R}(P_3, P_5)$, untuk bilangan bulat $i \in [1, 3]$. Pandang $G \cong T_5(i)$ untuk setiap $i \geq 3$. Pertama, ditunjukkan bahwa $G \rightarrow (P_3, P_5)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi di G sedemikian sehingga tidak ada P_3 merah.

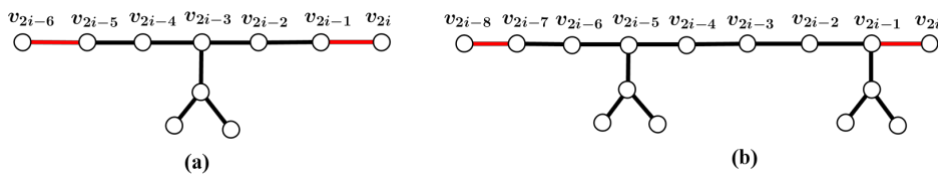
Perhatikan beberapa asumsi berikut.

- (i) Kedua H_1 tidak memuat P_5 biru. Ini mengakibatkan salah satu dari sisi-sisi yang terkait dengan v_1 dan v_{2i+1} pada H_1 harus merah.
- (ii) Sisi-sisi $\{v_2v_3, v_{2i-1}v_{2i}\}$ adalah merah (karena jika sebaliknya G memuat suatu P_5 biru). Asumsi-asumsi di atas secara langsung mengakibatkan $G \cong T_5(3)$ dan $G \cong T_5(4)$ memuat suatu P_5 biru.
- (iii) Asumsi (ii) mengakibatkan secara induktif P_{2i+1}^* tidak memuat P_5 biru sampai pada titik v_{2i-5} untuk bilangan ganjil i dan titik v_{2i-7} untuk bilangan genap i .



Gambar 5. Subpohon pada G yang memuat A
 Catatan: Lingkaran pada gambar sebagai penunjuk subgraf A .

Sekarang pandang $G \cong T_5(i)$ untuk $i \geq 5$. Dapat diamati bahwa jika yz merah dan subgraf A seperti pada Gambar 5 tidak memuat suatu P_5 biru, maka uv pasti merah. Pengamatan ini bersama-sama dengan asumsi (iii) mengakibatkan subpohon sisa pada G yang belum diwarnai adalah seperti pada Gambar 6. Karena G tidak memuat P_3 merah, subpohon sisanya harus memuat P_5 biru. Oleh karena itu, $G \rightarrow (P_3, P_5)$.



Gambar 6. (a). Subpohon sisa untuk i ganjil (b). Subpohon sisa untuk i genap

Kedua, akan dibuktikan bahwa $G - e \not\rightarrow (P_3, P_5)$ untuk sebarang $e \in E(G)$. Perhatikan bahwa subpohon-subpohon pada $G \setminus \{v_1v_2, v_{2i}v_{2i+1}\}$ sebagai dua subpohon H_1 dan subpohon H_0 yang memuat v_2 dan v_{2i} . Misalkan e_0 dan e adalah suatu sisi pندان yang mempunyai suatu titik bersama. Selanjutnya, didefinisikan himpunan sisi-sisi yang diwarnai dengan merah pada G , namakan E-merah. Misalkan p adalah bilangan asli genap dan q adalah bilangan asli ganjil.

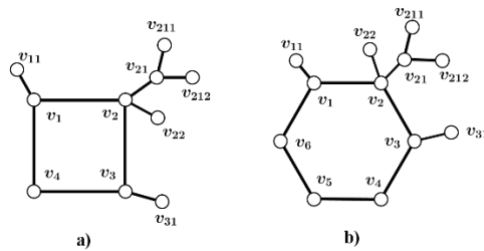
- a) Jika e adalah sisi bukan pندان di H_1 yang memuat v_1 , maka pilih E-merah = $\{v_k v_{k+1}, \text{ untuk bilangan genap } k \in [1, 2i + 1] \text{ dengan } v_{2i+2} = y_i\}$. Jika e adalah suatu sisi pندان di H_1 yang memuat v_1 , maka E-merah = $\{v_k v_{k+1}, \text{ untuk } k \in [1, 2i + 1] \text{ dengan } v_{2i+2} = y_i\} \cup \{e_0\}$. Dengan menggunakan argumen yang sama untuk kasus e adalah suatu sisi di H_1 yang memuat v_{2i+1} .
- b) Jika e adalah suatu sisi yang menghubungkan v_j ke suatu pusat $K_{1,2}$ di H_0 , maka E-merah = $\{x_i v_1, y_i v_{2i+1}, v_p v_{p+1}, v_q v_{q+1} \text{ untuk } p < j \text{ dan } q \geq j\}$. Jika e adalah suatu sisi pندان pada $K_{1,2}$ di H_0 , maka E-merah = $\{x_i v_1, y_i v_{2i+1}, v_p v_{p+1}, v_q v_{q+1} \text{ untuk } p < j \text{ dan } q \geq j\} \cup \{e_0\}$.
- c) Jika $e = v_k v_{k+1}$ untuk $k \in [1, 2i]$, maka E-merah = $\{x_i v_1, y_i v_{2i+1}, v_p v_{p+1}, v_q v_{q+1} \text{ untuk } p < k \text{ dan } q > k\}$.

Pada setiap kasus di atas, warnai semua sisi sisanya dengan biru. Lintasan monokromatik terpanjang pada $G - e$ adalah P_4 biru (yakni lintasan dengan sisi-sisi biru yang terakhir diwarnai). Oleh karena itu, $G - e \not\rightarrow (P_3, P_5)$ untuk setiap $e \in E(G)$. □

Selanjutnya, dikonstruksi graf-graf unisiklik yang memuat sikel dengan panjang genap menggunakan Definisi 2 berikut.

Definisi 2. Graf-graf $U_5(2k)$, untuk setiap $k \geq 2$ adalah graf yang dikonstruksi dari sikel dengan panjang $2k$ dengan dua titik yang berjarak dua dihubungkan ke titik pendaan dan titik bersama dari dua titik tersebut dihubungkan ke titik pusat dari graf $K_{1,2}$.

Sebagai ilustrasi diberikan graf unisiklik $U_5(4)$ dan $U_5(6)$ seperti pada Gambar 7.



Gambar 7. a) Graf $U_5(4)$, b) Graf $U_5(6)$

Pada Gambar 7, dapat dilihat bahwa Graf $U_5(2k)$ untuk $k \geq 3$ memuat pohon $T_5(0)$, ini mengakibatkan Graf $U_5(2k)$ untuk $k \geq 3$ bukan anggota $\mathcal{R}(P_3, P_5)$. Selanjutnya pada teorema berikut akan ditunjukkan bahwa graf $U_5(4)$ anggota $\mathcal{R}(P_3, P_5)$.

Teorema 2. Graf $U_5(4)$ merupakan anggota $\mathcal{R}(P_3, P_5)$.

Bukti. Pertama, akan dibuktikan $U_5(4) \rightarrow (P_3, P_5)$. Ambil sebarang pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi graf $U_5(4)$ sehingga tidak ada P_3 merah. Karena $U_5(4)$ memuat sikel genap maka maksimum banyaknya sisi warna merah pada sikel adalah dua dan sisi sisanya pada sikel berwarna biru. Selain itu, semua sisi bukan pada sikel yang terkait dengan sisi pendaan harus biru. Sehingga ada lintasan P_5 biru pada graf $U_5(4)$. Ini berarti $U_5(4) \rightarrow (P_3, P_5)$. Selanjutnya akan ditunjukkan keminimalan dari graf $U_5(4)$. Jika $e = v_i v_{i+1}$ untuk setiap i ganjil maka warnai sisi-sisi $v_j v_{j+1}$ untuk setiap j genap. Jika $e = v_i v_{i+1}$ untuk setiap i genap maka warnai sisi-sisi $v_j v_{j+1}$ untuk setiap j ganjil. Jika $e = v_i v_{ik}$ maka warnai sisi-sisi $v_j v_{j1}$, dengan $j \neq i$, secara khusus untuk $v_2 v_{2k}$ warnai salah satu dari $v_2 v_{21}$ atau $v_2 v_{22}$ dengan merah. Jika $e = v_{21} v_{21k}$, warnai sisi-sisi $v_j v_{j+1}$ untuk setiap j genap atau j ganjil, dan sisi $v_{21} v_{21l}$ dengan $l \neq k$. Untuk setiap kasus tersebut warnai sisi lainnya dengan warna biru. Sehingga diperoleh bahwa untuk setiap $e \in E(U_5(4))$, graf $U_5(4) - e \not\rightarrow (P_3, P_5)$.

PENUTUP

Rahmadani dkk. [8-9] memberikan beberapa sifat dari graf-graf anggota $\mathcal{R}(P_s, P_t)$, untuk $4 \leq s \leq t$. Dengan menggunakan sifat-sifat ini, dikonstruksi kelas tak berhingga dari pohon di $\mathcal{R}(P_3, P_5)$. Selain itu dikonstruksi graf unisiklik yang memuat sikel dengan panjang genap, dan dibuktikan bahwa ada satu graf dalam kelas unisiklik tersebut yang merupakan anggota $\mathcal{R}(P_3, P_5)$. Walaupun sudah cukup banyak graf-graf anggota $\mathcal{R}(P_3, P_5)$ yang telah diperoleh termasuk kelas tak berhingganya, akan tetapi karakterisasinya masih menjadi masalah terbuka sampai saat ini.

DAFTAR RUJUKAN

Ramsey, F. (1930). On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 30(1), 264–286. S.A. Burr, P. Erdos, R.J. Faudree, C.C. Rosseu, R.H. Schelp, *Studia Scient. Math. Hungar.* 15, 265–273, (1982).

Rosta, V. (2004). Ramsey theory applications, *Electronic Journal of Combinatorics*, 12, #DS13. S.A. Burr, P. Erdos, L. Lovasz, *Ars Combinatoria* 1, 167–190, (1976).

Graham, R., Rothschild, B., dan Spencer, J. (1990). *Ramsey Theory*, Second Edition, John Wiley and Sons.

Erdős, P., dan Szekeres, G. (1935). A Combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica*, 2, 463–470.

Burr, S., Erdős, P., dan Lovász, L. (1976). On graphs of Ramsey type, *Ars Combinatoria*, 1, 167–190.

R. Diestel. (2000). *Graph Theory, 2nd ed.* (Springer-Verlag New York Inc, New York).

L. Yulianti, H. Assiyatun, S. Uttunggadewa, E.T. Baskoro. (2010). *Far East Journal of Mathematical Sciences* 40, 23–36.

D. Rahmadani, E.T. Baskoro, H. Assiyatun. (2015). *Procedia Computer Science* 74, 15–20.

D. Rahmadani, E.T. Baskoro, M. Baca, H. Assiyatun and A.S. Fenovcikova. (2017). *Proceedings- Mathematical Sciences* 127, 779-786.